集合论

同绝大多数现代数学分支理论一样，现代分析理论与数、集合和集合有关。我们已经介绍了一种数系，即自然数系。稍后我们将介绍其他数系，但现在我们暂且介绍集合论中的一些概念和符号，因为它们在后面几章中将频繁用到。（在本书中，我们不追求对欧几里得几何的严格叙述。我们关注的是借助笛卡尔坐标系，使用实数系的语言来描述欧几里得几何）。

虽然集合论不是本书的核心内容，但是几乎其他的数学分支理论都将集合论作为其基础的一部分，因此在涉足其他高级的数学领域之前，学习集合论的一些基础性知识是非常重要的。在本章中，我们将给出公理集合论中较为初等的内容，诸如无穷集合以及选择公理这样较高级的课题将留到第 8 章。遗憾的是，对集合论集合论精妙之处的全面研究将大大超出本书的范围。

3.1 基础知识

在本节中，我们会像学习自然数系那样，给出一些有关集合的公理。基于教学的原因，一些公理会被用来推导其他的公理，在这种意义上，虽然我们将使用稍微偏多的集合论公理，但这并不会产生真正的危害。我们首先非正式地描述什么是集合。

> **定义 3.1.1** (非正式的) 我们把**集合** A 定义为任意一堆没有次序的对象，例如，$\{3,8,5,2\}$ 是一个集合。如果 x 是这堆对象中的一个，那么我们称 x **是 A 中的元素**，记作 $x \in A$；否则，记作 $x \notin A$。例如，$3 \in \{1,2,3,4,5\}$，但 $7 \notin \{1,2,3,4,5\}$。

这个定义相当直观，但是它无法回答诸如下面这些问题：什么样的一堆对象可以被看作集合？什么样的集合和另外的集合相等？如何定义集合上的运算，比如并集、交集等？同时，我们还没有给出关于集合或者集合中元素的公理。本节剩余内容的主要目的就是给出这些公理并定义集合上的运算。

首先阐明一个观点：我们把结合本身看作一类对象。

> **公理 3.1** (集合是对象) 如果 A 是一个集合，那么 A 本身也是一个对象。特别地，给定两个集合 A 和 B，问 A 是不是 B 中的元素是有意义的。

例 3.1.2 (非正式的) 集合 $\{3,\{3,4\},4\}$ 是由三个不同元素构成的集合，其中一个元素恰好是含有两个元素的集合。这个例子更正式的形式参见例 3.1.10。然而并非所有的对象都是集合，一个典型的例子是我们不会把自然数 (比如 3) 看作一个集合。(更准确地说，自然数可以作为集合的**基数**，而不需要其自身就是集合。参见 3.6 节)。

注 3.1.3 集合论有一种特殊的情形，即所有的对象都是结合，这种情形被称为“纯粹集合论”。例如，数字 0 可以等价于空集 $\emptyset=\{\}$，数字 1 可以等价于 $\{0\}=\{\{\}\}$，数字 2 可以等价于 $\{0,1\}=\{\{\},\{\{\}\}\}$，以此类推。从逻辑学的角度来看，纯粹的集合论是一种更加简单的理论，因为人们只需要对集合进行处理而不需要处理对象；然而从概念层面来说，对非纯粹集合论的处理更加容易些，在非纯粹集合论中，有些对象不被看作集合。从数学研究的目的来说，这两种类型的理论差不多是等价的，因此对于是否所有的对象都是集合这个问题，我们秉持不可知的立场。

到目前为止，总的来说，在数学里学到的所有对象中，有些对象恰好是集合。而且如果 x 是一个对象，A 是一个集合，那么 $x\in A$ 要么为真，要么为假。（如果 A 不是集合，则我们认为 $x\in A$ 是无定义的。例如，$3\in 4$ 既非真也非假，该命题是无意义的，因为 4 不是一个集合。）

接下来我们定义相等的概念：什么情况下可以认为两个集合是相等的？我们认为一个集合中元素的次序并不重要，因此我们把集合 $\{3,8,5,2\}$ 与集合 $\{2,3,8,5\}$ 看作是同一个集合。另外，$\{3,8,5,2\}$ 和 $\{3,8,5,2,1\}$ 是两个不同的集合，这是因为后者中的一个元素不包含在前者里，即元素 1。基于类似的原因，$\{3,8,5,2\}$ 和$\{3,8,5\}$ 也是不同的结合。我们把这部分内容作为一个定义。

> **定义 3.1.4** (集合的相等) 称两个结合 A 和 B 是相等的，即 $A=B$，当且仅当 A 中的每个元素都是 B 中的元素并且 B 中的每一个元素也都是 A 中的元素。也就是说，$A=B$，当且仅当 A 中的任一元素 x 属于 B，同时 B 中的任一元素 y 也属于 A。

例 3.1.5 那么譬如 $\{1,2,3,4,5\}$ 和 $\{3,4,2,1,5\}$ 是同一个集合，因为它们含有完全相同的元素。（集合$\{3,3,1,5,2,4,2\}$ 也等于 $\{1,2,3,4,5\}$；3 和 2 的重复出现是无关紧要的，因为这并没有进一步改变 2 和 3 作为该集合元素的状态。）

我们很容易证明这种相等的概念是自反的、对称的以及可传递的（习题 3.1.1）.根据定义 3.1.4 观察可知，如果 $x\in A$ 并且 $A=B$，那么 $x\in B$。于是“是 $\cdots\cdots$ 的元素”这种 $\in$ 关系遵守替换公理（参见 A.7 节）。正因如此，只要我们能够把定义在集合上的新元素仅用 $\in$ 的语言来描述，这个新元素就会遵守替换公理。例如，对于本节中剩下的定义，情况就是这样。（另外，在良好的定义方式中，我们不能使用集合中“第一个”或者“最后一个”元素这样的概念，因为这将违背替换公理。例如，虽然集合 $\{1,2,3,4,5\}$ 与 集合$\{3,4,2,1,5\}$ 表示同一个集合，但是它们的第一个元素是不一样的。）

下面我们将讨论到底什么样的对象是集合，什么样的对象不是集合。这与上一章中我们如何定义自然数相类似。我们从单个的自然数 0 开始，利用增量运算从 0 构造出更多的数。这里我们将尝试做类似的事情，从单个集合（空集）开始，利用各种元素从空集中构造出更多的集合。我们首先假定空集的存在性。

> **公理 3.2** (空集) 存在一个集合 $\emptyset$，被称为**空集**，它不包含任何元素，也就是说对任意的对象 x 均有 $x\notin\emptyset$。

空集也记作 $\{\}$。注意只能有一个空集，如果存在两个集合 $\emptyset$ 和 $\emptyset'$ 都是空集，那么根据定义 3.1.4 可知，它们必定相等。（为什么？）

随想 1

因为，若 $\emptyset$ 和 $\emptyset'$ 都是空集，则 $\emptyset$ 中的每个元素都是 $\emptyset'$ 中的元素和$\emptyset'$ 中的每个元素都是 $\emptyset$ 中的元素都是空虚的真命题，因为根据空集的定义（公理 3.2），空集不含任何元素，因此这两个命题的前提都是错误的。

如果一个结合不等于空集，那么该集合是**非空的**。下面的命题非常简单，却值得叙述。

引理 3.1.6 (单个选取) 设 A 是一个非空集合，那么存在一个对象 x 使得 $x \in A$。

证明： 我们用反证法来证明。假设不存在任何对象 x 使得 $x \in A$，那么对任意一个对象 x 而言，有 $x \notin A$。另外根据公理 3.2 可知：$x \notin \emptyset$。于是 $x \in A \Leftrightarrow x \in \emptyset$（这两个命题均为假）（参见 p.425），进而根据定义 3.1.4 有 $A = \emptyset$，显然这与已知条件 “A 是一个非空集合”相矛盾。

注 3.1.7 上述引理断言，给定任意一个非空集合 A，我们可以“选取” A 中的一个元素 x，以此来证实 A 的非空性。后面（在引理 3.5.12 中）我们将证明对于给定的任意有限多个非空集合 $A_1, \cdots, A_n$，能够从给个集合 $A_1, \cdots, A_n$ 中分别选取出一个元素 $x_1, \cdots, x_n$，这称作“有限选取”。但是如果想要从无穷多个集合中选取元素，我们就需要另一个公理，即**选择公理**。关于选择公理的讨论将留到 8.4 节。

注 3.1.8 注意空集与自然数 0 并不相同。一个是集合，另一个是数。但是空集的**基数**为 0 的确是真的，参见 3.6 节。

如果公理 3.2 是集合论中唯一一个公理，那么集合论必然相当乏味，因为在这种情况下，只有唯一一个集合存在，那就是空集。现在我们给出更深层次的公理来丰富可用集合的种类。

公理 3.3 (单元素集与双元素集) 如果 a 是一个对象，那么存在一个集合 $\{a\}$ 并且该集合中唯一一个元素就是 a。也就是说，对于任意一个对象 y，我们有 $y \in \{a\}$ 当且仅当 $y = a$；我们称 $\{a\}$ 是元素 a 的**单元素集**。更进一步地，如果 a 和 b 都是对象，那么存在一个集合 $\{a, b\}$ 并且该集合的元素只有 a 和 b。换而言之，对任意一个对象 y，有 $y \in \{a, b\}$ 当且仅当 $y = a$ 或 $y = b$；我们称该集合是 a 和 b 构成的**双元素集**。