

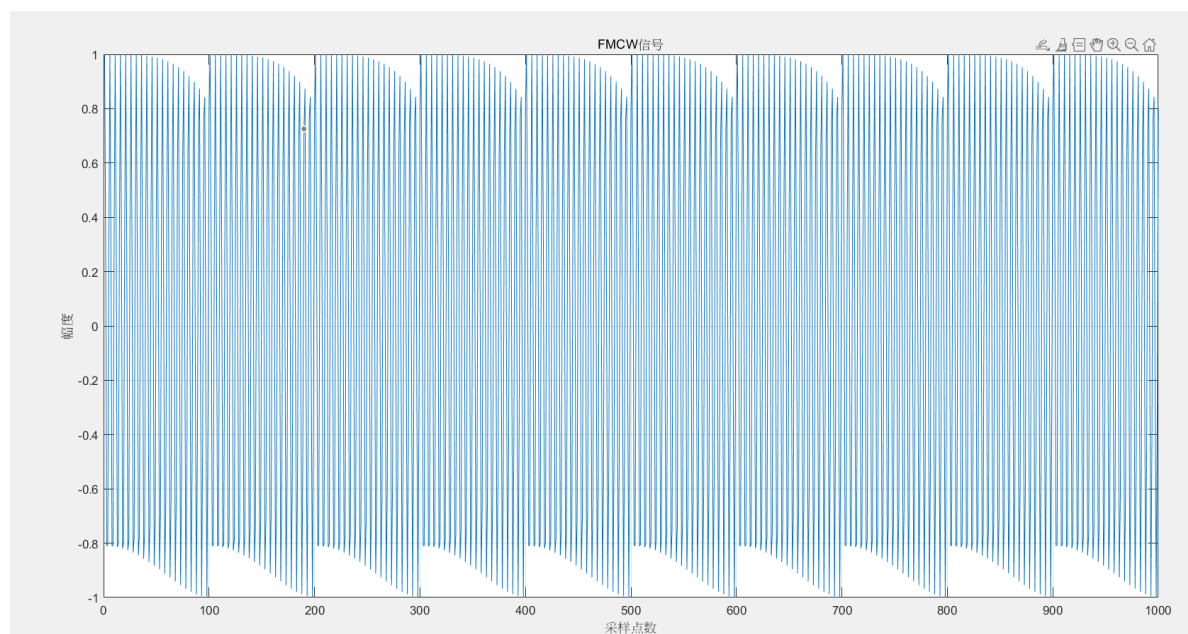
# FMCW信号的生成及使用CZT算法估算频率与相位

## 一、实验原理

### 1.FMCW信号的生成

```
function [N,y] = get_FMCW(A0,f0,fs,sample_time,T,k,phi0,tau)
N=round(fs*sample_time);
i=0:N-1;
y=A0*cos(2*pi*(f0+k*mod(i/fs-tau,T)).*mod(i/fs-tau,T)+phi0);
end
```

其中A0是信号的幅度，f0是信号0时刻的频率，sample\_time是采样时间，T是信号周期，也即频率变化的三角波的周期。phi0是差生FMCW信号的初始相位。tau是指定的延时 $\tau$ 。函数返回抽样点数N和抽样结果数组y。



设置A0=1, f0=200Hz,fs=1kHz,T=0.1,k=10,phi0=0,tau=0.1产生信号的图像

### 2.生成信号的频率和相位估计

```
function [f_estimate,delta_f_estimate,phase_estimate,X_CZT] =
CZT_Frequency_Phase(xn,fs,N,iter_num)
X_CZT=fft(xn);
delta_f=fs;
[~,index]=max(abs(X_CZT));
f_start=0;
for i=1:iter_num
delta_f=delta_f/N;
f_start=f_start+(index-1.5)*delta_f;
w=exp(-1j*2*pi*(delta_f/N)/fs);
A=exp(1j*2*pi*f_start/fs);
X_CZT=czt(xn,N,w,A);
[~,index]=max(abs(X_CZT));
f_estimate=f_start+(index-1)*delta_f/N;
end
```

```
delta_f_estimate=delta_f/N;
phase_estimate=angle(X_CZT(index));
```

输入的 $x_n, f_s, N, \text{iter\_num}$ 分别是采样得到的信号，采样频率，信号长度 $N$ 和执行该算法的迭代次数。

输出 $f\_estimate, \text{delta\_f\_estimate}, \text{phase\_estimate}, X\_CZT$ 分别是估计的拍频大小，估计频率的最大误差，估计的相位和最后一次迭代的频率小区间内对 $x_n$ 做的CZT的结果。

算法每一次迭代都会把频率区间缩小到原来的 $\frac{1}{N}$ 。初始先算一个粗略的FFT，选定幅频响应最大值对应的变换点的前 $\frac{1}{2}$ 变换频率和后 $\frac{1}{2}$ 变换频率作为下一次CZT的变换频率区间，相当于一直在对频率区间做“缩放”操作，每次分辨率提升 $N$ 倍，理论上能达到无穷分辨率。但实际使用中迭代次数越多开销越大，因此算法进一步利用相位信息限制由CZT计算频率的误差。

$$\begin{aligned}
 s_N &= \sum_{n=0}^{N-1} A_0 \cos(2\pi k_0 n + \varphi_0) e^{-j2\pi k_0 n} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A_0}{2} e^{j\varphi_0} (1 + e^{-j2\pi 2k_0 n}). \\
 \hat{\varphi} &= \arg\{s_N\} \\
 &= \arctan\left(\frac{\sin(\varphi_0)}{\cos(\varphi_0)}\right) \\
 &= \varphi_0.
 \end{aligned}$$

$$X_{k_{\max}, \text{CZT}} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cdot e^{-j2\pi \hat{k}n} = s_N.$$

论文证明了常规的相位估算方法和CZT方法计算幅频响应最大值点的辐角在公式上是一致的，并且CZT方法实现的计算量更小。由于每次迭代都要记录幅频响应最大值点的下标，估计相位的部分只需要在估计频率的部分上稍加一些代码即可。

### 3.通过估算的频率和相位计算距离以及距离的误差

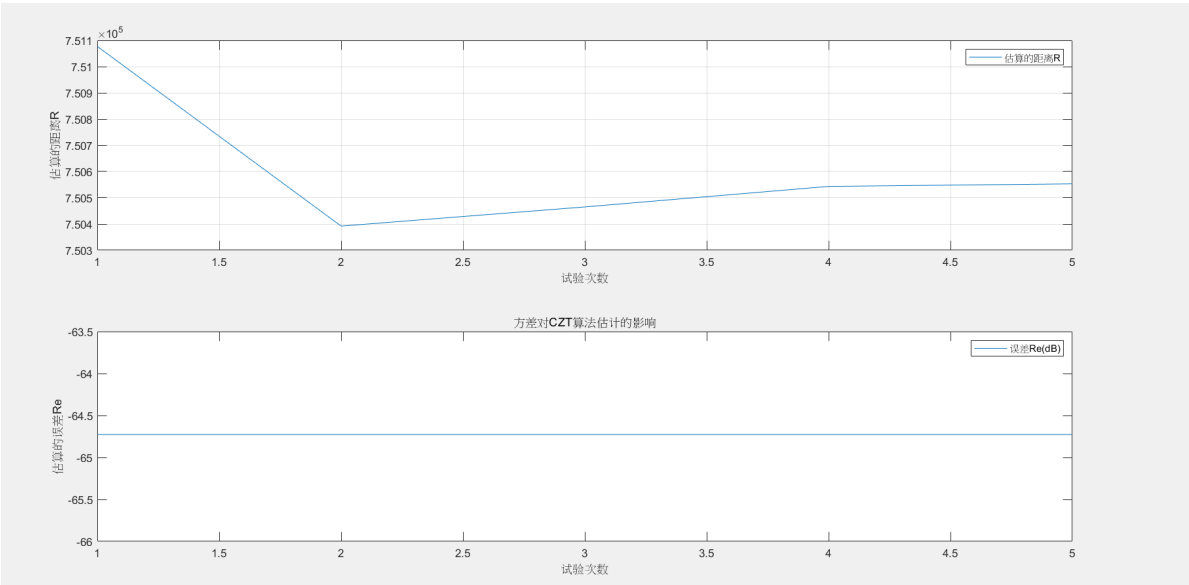
```
function [r_estimate,delta_r_estimate] =
get_r(f_estimate,delta_f_estimate,k,T,N,fs,f0,c0)
r_estimate = mod(f_estimate/(2*k),T)*c0/2;
delta_r_estimate=c0*pi*delta_f_estimate*(N-1)/(4*f0*fs);
end
```

其中输入 $f\_estimate, \text{delta\_f\_estimate}, k, T, N, f_s, f_0, c_0$ 分别是之前估计的拍频，拍频误差，FMCW信号频率增长速率 $k$ ，FMCW信号周期 $T$ ，信号长度 $N$ ，抽样频率 $f_s$ ，信号0时刻的频率 $f_0$ 和光速 $c_0$

输出分别是估算的距离 $r$ 和距离 $r$ 的误差

## 二、对产生的信号进行频率和相位估计

### 1.改变噪声的方差估计距离r和距离r的误差



分别设置噪声功率为20， 10， 0， -10， -20dBW进行实验。

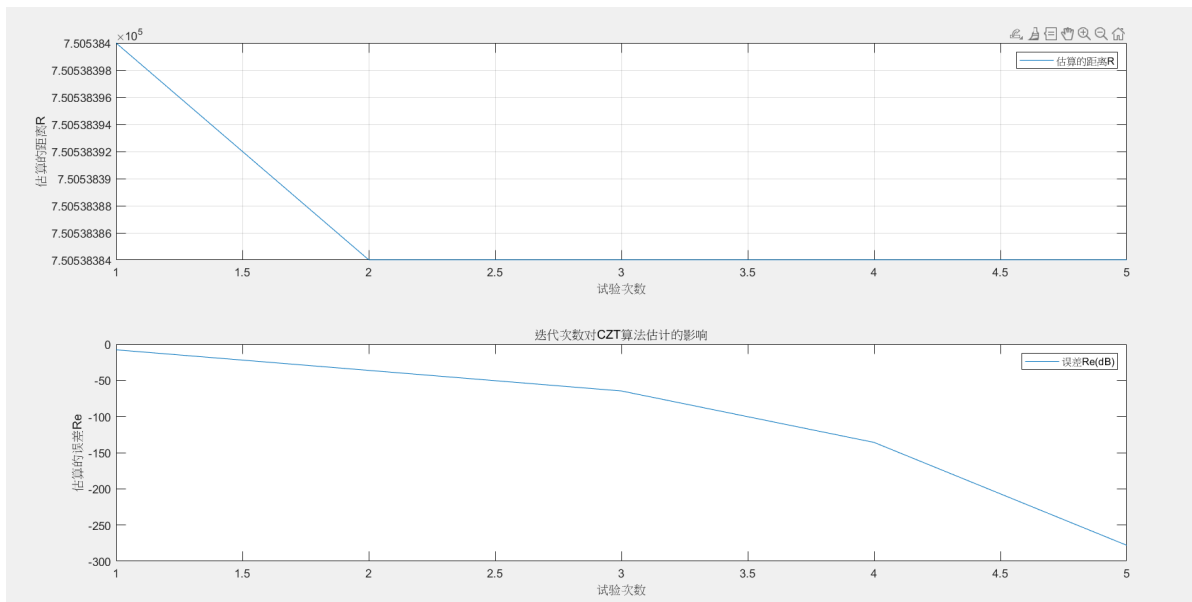
```
A0=1;
f0=4e5;
fs=1e6;
sample_time=1.5;
T=0.1;
k=1e3;
phi0=0;
tau=0.005;
iter_num=5;
c0=3e8;
sigma=[sqrt(100),sqrt(10),sqrt(1),sqrt(0.1),sqrt(0.01)];
```

参数设置如上

由于噪声的随机性，可以看出估算的距离R随着噪声功率的下降并不是单调下降的，估算的误差取决于迭代次数，因此没有变。

实验次数	1	2	3	4	5
估计频率f	9.9965	10.0062	10.0065	10.0071	10.0071
估计相位φ	-0.12479	-0.19133	-0.18735	-0.19014	-0.19044

### 2.改变迭代次数估计距离r和距离r的误差



分别设置迭代次数为1，3，5，10，20进行实验。

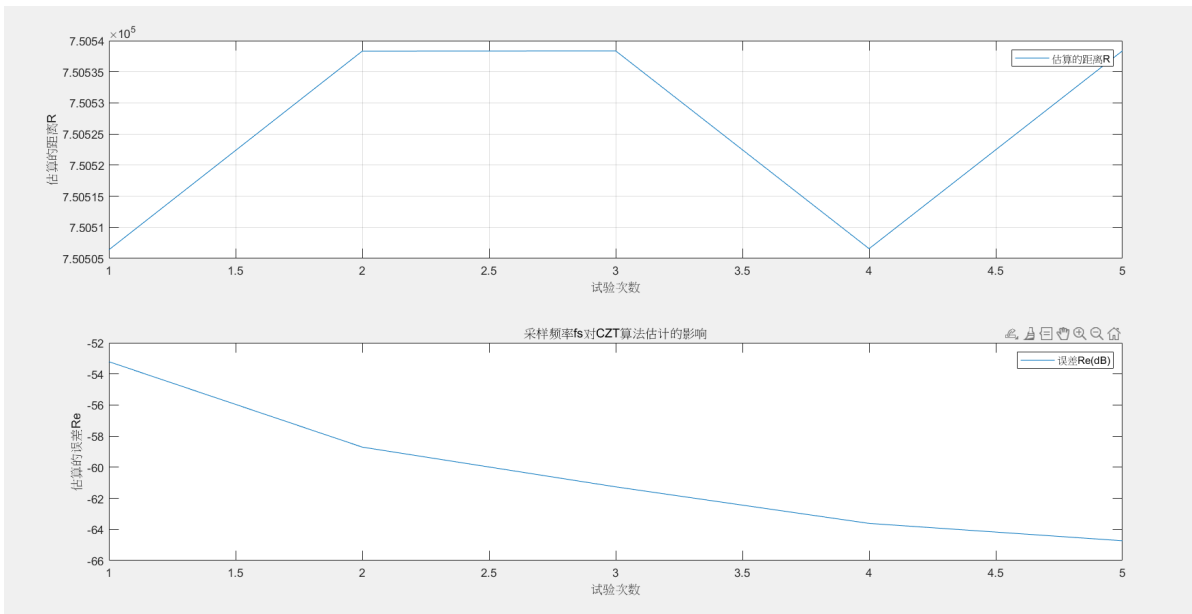
```
A0=1;
f0=4e5;
fs=1e6;
sample_time=1.5;
T=0.1;
k=1e3;
phi0=0;
tau=0.005;
iter_num=5;
c0=3e8;
iter_num=[1,3,5,10,20];
sigma=0;
```

参数设置如上

可以看出随着迭代次数增加，估算的距离 $R$ 单调得趋向理论值，误差 $Re$ 也随着迭代次数的增加不断减小。

实验次数	1	2	3	4	5
估计频率 $f$	10.0072	10.0072	10.0072	10.0072	10.0072
估计相位 $\varphi$	-0.19103	-0.19103	-0.19103	-0.19103	-0.19103

### 3.改变采样率 $f_s$ 估计距离 $r$ 和距离 $r$ 的误差



分别设置fs为1e5， 3e5， 5e5， 8e5和1e6Hz进行实验。

```
A0=1;
f0=4e5;
fs=[1e5,3e5,5e5,8e5,1e6];
sample_time=1.5;
T=0.1;
k=1e3;
phi0=0;
tau=0.005;
iter_num=5;
c0=3e8;
iter_num=5;
sigma=0;
```

参数设置如上

可以看出随着fs增加，估算的距离R有一定波动，但误差Re也随着fs的增加不断减小。fs越大，在相同采样时间内采到的点数越多，有利于增加信号处理的精度。

实验次数	1	2	3	4	5
估计频率f	10.0072	10.0072	10.0072	10.0072	10.0072
估计相位φ	-0.12479	-0.19133	-0.18736	-0.19014	-0.19044

三、附件说明

文件名	说明
程序流程图.pdf	对代码的流程进行可视化描述
get_FMCW	产生指定参数的FMCW信号
CZT_Frequency_Phase.m	对FMCW信号和其回波的混叠产生的拍频进行频率和相位估计
get_r.m	估计tau对应的距离tau*c/2以及距离估计的误差Re

文件名	说明
main.m	调用上述函数并画出改变噪声能量、改变迭代次数和改变采样率 $f_s$ 的三种情况下估计的距离 $r$ 和误差 $Re$ (对数坐标)的图