Electromagnetismo

Chengyu Jin

20 de febrero de 2026

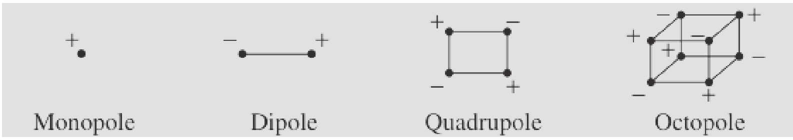
Índice general

Capítulo 1

Desarrollo multipolar eléctrico

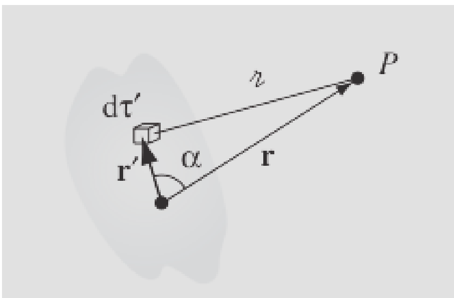
Bibliografía principal: sección 3.4 Griffiths

Momentos multipolar puntuales (desplazado una pequeña distancia)



1.1. Potencial a grandes distancias

Cogemos una distribución de cargas en **condición de electroestática**, entonces el potencial por la ley de Coulomb es



$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}d\tau' \tag{1.1}$$

Vamos a desarrollar el módulo $\vec{\mathfrak{r}}$

$$\mathfrak{r} = [(\vec{r}-\vec{r'})\cdot(\vec{r}-\vec{r'})]^{1/2} = (r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r'})^{1/2} = r\left(1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\alpha'\right)^{1/2}$$

A grandes distancias, esto es que $r >> r'$, y llamando $\varepsilon = (r/r')^2 - 2r'/r\cos\alpha'$ podemos hacer un desarrollo de McLaurin

$$\mathfrak{r} = r(1+\epsilon)^{1/2} \implies \frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{r(1+\epsilon)^{1/2}} = \frac{1}{r} + \frac{-1/2}{r(1+\epsilon)^{3/2}}\Big|_{\epsilon=0} \epsilon + \frac{1}{2!}\frac{(-1/2)(-3/2)}{r(1+\epsilon)^{5/2}}\Big|_{\epsilon=0} \epsilon^2 + \cdots =$$

deshaciendo el cambio de ϵ obtenemos la siguiente serie, donde $P_n(\cos\alpha')$ son **polinomios de Legendre**

$$\frac{1}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\alpha') \tag{1.2}$$

sustituyendo esto en la eq (1.1) obtenemos el **potencial a grandes distancias** o la expansión multipolar del potencial

$$\frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{V'}(r')^n P_n(\cos\alpha')\rho(\vec{r'})d\tau' \tag{1.3}$$

desarrollando la suma podremos obtener la contribución monopolar y dipolar

$$\frac{1}{4\pi\epsilon}\left[\frac{1}{r}\int_{V'}\rho(\vec{r'})d\tau' + \frac{1}{r^2}\int_{V'}r'\cos\alpha'\rho(\vec{r'})d\tau' + \dots\right] \tag{1.4}$$

podemos identificar el término monopolar

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r}\int_{V'}\rho(\vec{r'})d\tau' \tag{1.5}$$

y el término dipolar

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\int_{V'}r'\cos\alpha'\rho(\vec{r'})d\tau' \tag{1.6}$$

Nota

Las mayorías de las moléculas son neutras, esto implica que la eq (1.5) vale 0, entonces con la presencia de un campo eléctrico no habrá momento monopolar, pero sí puede haber momento dipolar, por ejemplo, la molécula del agua tiene el átomo de oxígeno ligeramente positivo mientras que los átomos de hidrógeno ligeramente negativas.

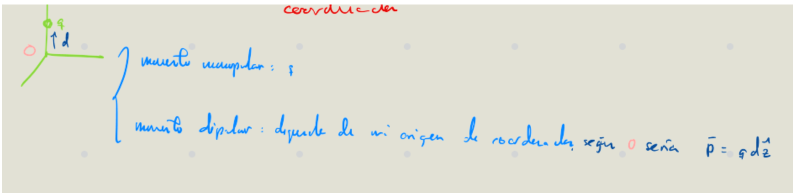
tomando $\vec{r}\cdot\vec{r'} = rr'\cos\alpha' = r\hat{r}\cdot\vec{r'}$ y sustituyendo en eq (1.6) tenemos

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\int_{V'}\vec{r'}'\rho(\vec{r'})d\tau' = \frac{\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 r^2}\cdot\int_{V'}\vec{r'}'\rho(\vec{r'})d\tau' \tag{1.7}$$

identificando, podemos definir el **momento dipolar** como

$$\vec{P} = \int_{V'}\vec{r'}'\rho(\vec{r'})d\tau' \tag{1.8}$$

Esto es el momento dipolar de la distribución de carga según mi **origen de coordenada**. Entonces cuando calculo el momento dipolar tengo que especificar el origen de coordenada. Para ilustrarlo, vamos a poner un ejemplo



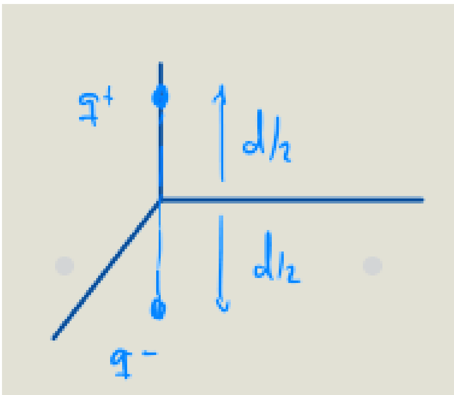
Puedo definir dos orígenes de coordenadas, uno centrado en la partícula puntual y otro situado una distancia d debajo de la partícula. Ambos tienen un momento monopolar q (se trata de un escalar, es independiente de mi sistema de coordenadas), pero en la primera coordenada el momento dipolar es nulo y en el segundo origen de coordenada es no nulo.

Importante

Si el momento monopolar es nulo, entonces el momento dipolar es independiente del origen de coordenada

Calcularemos el momento dipolar del ejemplo 3.10 con la definición

Example 3.10. A (physical) **electric dipole** consists of two equal and opposite charges ($\pm q$) separated by a distance d. Find the approximate potential at points far from the dipole.



$$\vec{P} = \int_{V'} \left(\frac{d}{2} q\delta(\vec{r'} - (d/2))\hat{z} + \frac{d}{2}(-q\delta(\vec{r'} - (-d/2)))(-\hat{z}) d\tau' \right) = qd\hat{z}$$

entonces podemos definir el momento dipolar para una colección de cargas puntuales es

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} q_i \vec{r'}_i \tag{1.9}$$