

CS101

A Mars rover, likely a Curiosity rover, is shown on a rocky, reddish-brown landscape. The rover is white with various instruments and cameras. It has six large, treaded wheels. The background shows a hazy, orange sky and distant hills. The overall scene is a typical Mars surface environment.

信奥
算法

课件下载地址:

<http://pan.baidu.com/s/1nu6kYkL>

递推算法

递推算法是一种简单的算法，即通过已知条件，利用特定关系得出中间推论，直至得到结果的算法。

递推算法分为顺推和逆推两种。

阶乘

f(i)表示**i**的阶乘是几

$$f(i)=1*2*3*...*(i-1)*i$$

i	0	1	2	3	4	5
f(i)	1	1	2	6	24	120

当**i**为**0**时

$$f(0)=1$$

当**i**大于**0**时

$$f(i)=f(i-1)*i$$

汉诺塔

$f(i)$ 表示 i 个盘子的汉诺塔要几步完成

i	0	1	2	3	4	5
$f(i)$	0	1	3	7	15	31

当 i 为0时

$$f(0)=0$$

当 i 大于0时

$$f(i)=f(i-1)*2+1$$

卡特兰数

f(i)表示第*i*个卡特兰数

i	0	1	2	3	4	5
f(i)	1	1	2	5	14	42

当*i*为0时

$$f(0) = 1$$

当*i*大于0时

$$f(i) = f(i - 1) * \frac{4i - 2}{i + 1}$$

斐波那契数列

$f(i)$ 表示第 i 个斐波那契数

i	0	1	2	3	4	5
$f(i)$	1	1	2	3	5	8

当 i 为0时

$$f(0) = 1$$

当 i 为1时

$$f(1) = 1$$

当 i 大于1时

$$f(i) = f(i - 1) + f(i - 2)$$

递推算法 规律小结

当 <i>i</i> 为0时	$f(0) = 1$
当 <i>i</i> 为1时	$f(1) = 1$

初始
条件

*i*为0,1,2
等等情况

当 <i>i</i> 大于1时	$f(i) = f(i - 1) + f(i - 2)$
-----------------	------------------------------

递推
方程

$f(i)$ 可以由已经求解出的
 $f(i-1), f(i-2), f(i-3)$ 等等推得

例题：平面划分

平面上 n 条直线最多可以划分出多少个区域？

输入样例：

2

输入样例：

3

输入样例：

4

输出样例：

4

输出样例：

7

输出样例：

11

解答：平面划分

$f(i)$ 表示*i*条直线最多划分出的区域数量

i	0	1	2	3	4	5	6	7
f(i)	1	2	4	7	11	16	22	29

当*i*为0时

$$f(0) = 1$$

当*i*大于0时

$$f(i) = f(i - 1) + i$$

例题：数的计数

我们要求找出具有下列性质数的个数(包含输入的自然数 n):
先输入一个自然数 $n(n \leq 1000)$,然后对此自然数按照如下方法进行处理:

1. 不作任何处理;
2. 在它的左边加一个自然数,但该自然数不能超过原数的一半;
3. 加上数后,继续按此规则进行处理,直到不能再加自然数为止.

输入样例#1 : 输出样例#1 :

6

6

满足条件的数为

6 , 16 , 26 , 126 , 36 , 136

noip2001

解答： 数的计数

f(i)表示输入为*i*时的答案

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(i)	1	1	2	2	4	4	6	6	10	10

当*i*为0时

$$f(0) = 1$$

当*i*为1时

$$f(1) = 1$$

当*i*大于1时

$$f(i) = 1 + f(i/2) + f(i/2 - 1) + \dots + f(1)$$

例题：级数求和

已知： $S_n = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n$ 。显然对于任意一个整数 K ，当 n 足够大的时候， S_n 大于 K 。现给出一个整数 K （ $1 \leq k \leq 15$ ），要求计算出一个最小的 n ；使得 $S_n > K$ 。

输入样例#1：

1

输出样例#1：

2

解答：级数求和

S(i)表示级数的和

i	0	1	2	3
S(i)	0	1	$1+1/2$	$1+1/2+1/3$

当**i**为**0**时

$$S(0) = 1$$

当**i**大于**0**时

$$S(i) = S(i - 1) + 1/i$$

小结

一维问题的递推算法

例如：此页之前的例题都是一维问题

二维问题的递推算法

例如：此页之后的几个例题

例题：组合数

从 n 个不同物体中取出 m 个的所有组合有多少种取法，叫做组合数 $C(n,m)$

输入 n 和 m ，输出 $C(n,m)$

输入样例：

4 2

输入样例：

10 2

输入样例：

6 3

输出样例：

6

输出样例：

45

输出样例：

20

解答：组合数

$c(i,j)$ 表示*i*个不同物体中取出*j*个的所有组合数量

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=0$	1	0	0	0	0
$i=1$	1	1	0	0	0
$i=2$	1	2	1	0	0
$i=3$	1	3	3	1	0
$i=4$	1	4	6	4	1

当*j*为0时

$$C(i, 0) = 1$$

解答：组合数


$c(i,j)$ 表示*i*个不同物体中取出*j*个的所有组合数量

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$i=0$	1	0	0	0	0

当*i*<*j*时

$$C(i, j) = 0$$

$i=3$	1	3	3	1	0
$i=4$	1	4	6	4	1



当*i*大于0时

$$C(i, j) = C(i - 1, j - 1) + C(i - 1, j)$$

解答：组合数

$c(i,j)$ 表示*i*个不同物体中取出*j*个的所有组合数量

当*i*大于0时 $C(i,j) = C(i-1,j-1) + C(i-1,j)$

*i*个不同物体中取出*j*个的所有组合数 =
前(*i*-1)不同物体中取出(*j*-1)个的所有组合数
+ 前(*i*-1)不同物体中取出*j*个的所有组合数

← 取第*i*个物体的情况

← 不取第*i*个物体的情况

例题：大盗

大盗去抢银行，他带的包只能装 n 公斤的金块。现在银行只有两种规格的金块，一种重 a 公斤，另一种重 b 公斤，数量足够多。输入 n, a, b ，输出他最多带走多少公斤。

输入样例：
10 3 8

输入样例：
10 11 12

输入样例：
8 4 3

输出样例：
9

输出样例：
0

输出样例：
7

解答：大盗

$f(i)$ 表示用*i*公斤以内的包最多拿多少金块

当*i*为0时

$$f(0) = 0$$

当*i*<*a*并且*i*<*b*时

$$f(i) = 0$$

当*i*>=*a*并且*i*<*b*时

$$f(i) = f(i - a) + a$$

当*i*<*a*并且*i*>=*b*时

$$f(i) = f(i - b) + b$$

当*i*>=*a*并且*i*>=*b*时

$$f(i) = \max\{f(i - a) + a, f(i - b) + b\}$$

作业

作业网站:

<http://120.132.20.20/thrall-web/main#home>