工欲善其事，必先利其器

-----论语

第1章 矢量分析
Vector Analysis

主要内容

- 1、矢量代数
- 2、曲面坐标系及矢量微分元
- 3、矢量场的散度和散度定理
- 4、矢量场的旋度和斯托克斯定理
- 5、标量场的梯度和格林定理
- 6、 Helmholtz 定理

重　点

- 矢量场的散度
- 矢量场的旋度
- 标量场的梯度
- 亥姆霍兹定理

§1.1 矢量代数Vector Algebra

一. 矢量和标量的定义

二. 矢量表示法

三. 矢量的运算法则

一、矢量和标量的定义

1.**标量：** 只有大小，没有方向的物理量。

如：温度 T、长度 L 等

2.**矢量：** 不仅有大小，而且有方向的物理量。

如:力 $\overline{F}$ 、电场 $\overline{E}$ 等

二、矢量表示法

a) 矢量的写法

在符号上加短横线：$\overline{A}$ 、$\overline{B}$

矢量表示为： $\overline{A} = \left|\overline{A}\right|\hat{A}$

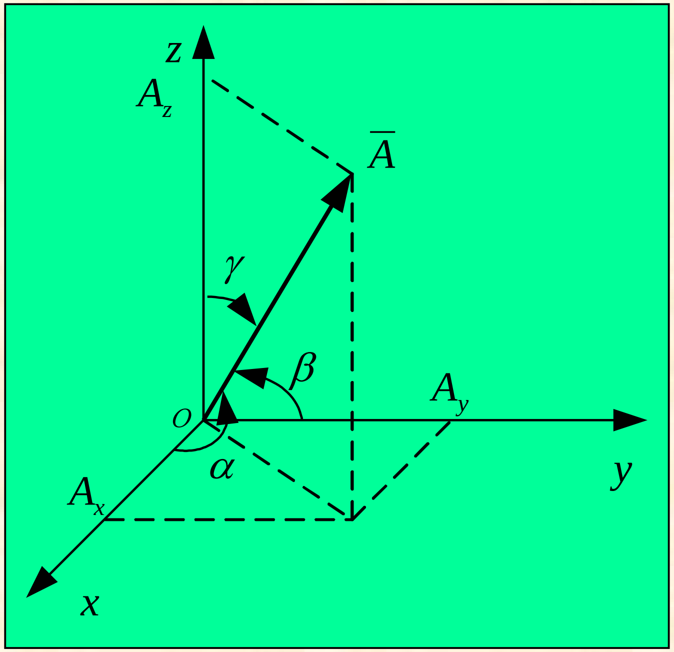
其中：$\left|\overline{\mathbf{A}}\right|$为矢量的模，表示该矢量的大小。

$\hat{\mathbf{A}}$为单位矢量，表示矢量的方向，其大小为**1.**

所以：一个矢量就表示成矢量的模与单位矢量的乘积。

b) 矢量的分量表示式及图示法

$$\bar{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z$$



✧ 模的计算：

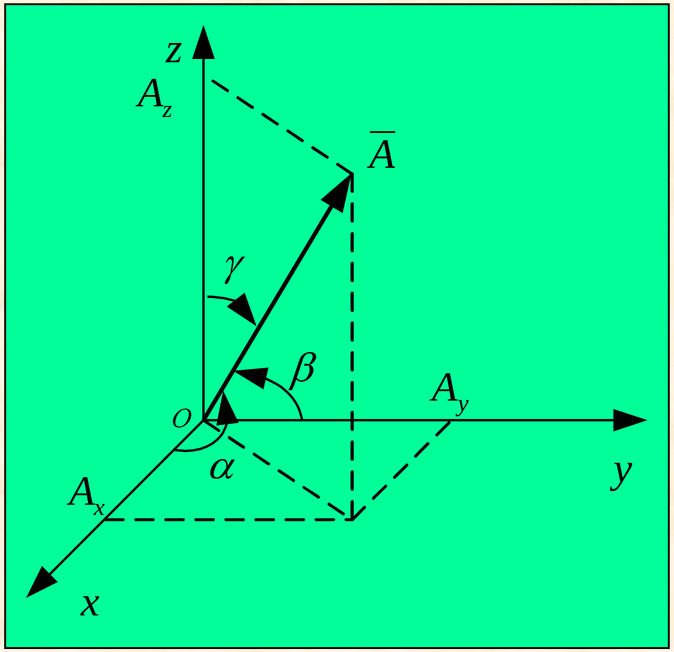
$$A = |\bar{A}| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}$$

✧ 单位矢量：

$$\hat{A} = \frac{\bar{A}}{A} = \hat{x}\frac{A_x}{A} + \hat{y}\frac{A_y}{A} + \hat{z}\frac{A_z}{A}$$

$$== \hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\beta + \hat{z}\cos\gamma$$

$$\hat{A} = \frac{\bar{A}}{A} = \hat{x}\frac{A_x}{A} + \hat{y}\frac{A_y}{A} + \hat{z}\frac{A_z}{A}$$
$$= \hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\beta + \hat{z}\cos\gamma$$



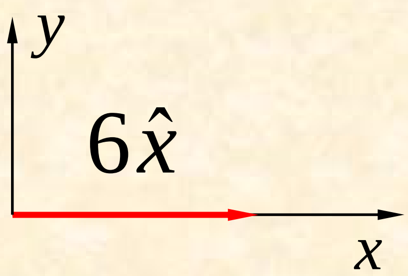
✧方向角与方向余弦： $\alpha,\ \beta,\ \gamma$

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{|\vec{A}|},\quad \cos\beta = \frac{A_y}{|\vec{A}|},\quad \cos\gamma = \frac{A_z}{|\vec{A}|}$$

例1：在直角坐标系中，x 方向的大小为 6 的矢量如何表示?

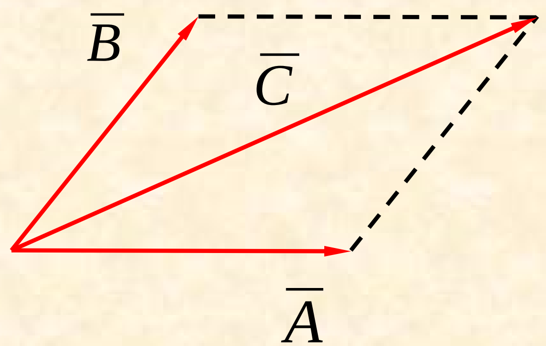
分量表示 $6\hat{x}$

图示法:

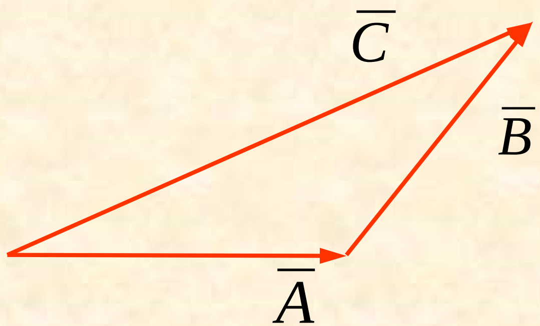


三、矢量的运算法则

1.加法: 矢量加法是矢量的几何和,服从平行四边形规则。



$$\overline{C}=\overline{A}+\overline{B}$$
$$\Rightarrow$$

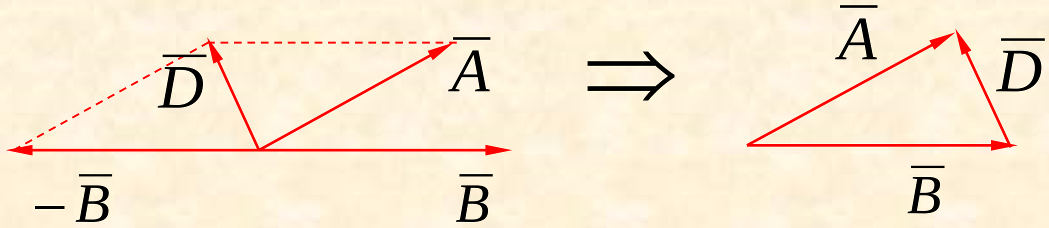


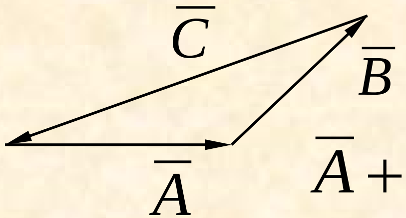
a.满足交换律: $\overline{A}+\overline{B}=\overline{B}+\overline{A}$

b.满足结合律: $\left(\overline{A}+\overline{B}\right)+\left(\overline{C}+\overline{D}\right)=\left(\overline{A}+\overline{C}\right)+\left(\overline{B}+\overline{D}\right)$

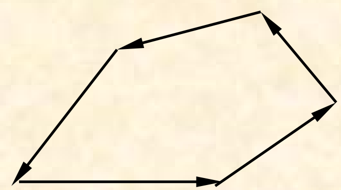
2.减法：换成加法运算　$\overline{D}=\overline{A}-\overline{B}=\overline{A}+\left(-\overline{B}\right)$

逆矢量：$\overline{B}$ 和 $-\overline{B}$ 的模相等，方向相反，互为逆矢量。





$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=0$



推论：

任意多个矢量首尾相连组成闭合多边形，其矢量和必为零。

✓直角坐标系下矢量的加减法:

- 直角坐标系中两个矢量加法运算:

$$\overline{A}+\overline{B}=\left(A_x+B_x\right)\hat{x}+\left(A_y+B_y\right)\hat{y}+\left(A_z+B_z\right)\hat{z}$$

- 直角坐标系中两矢量的减法运算:

$$\overline{A}-\overline{B}=\left(A_x-B_x\right)\hat{x}+\left(A_y-B_y\right)\hat{y}+\left(A_z-B_z\right)\hat{z}$$

3.乘法：

（1）标量与矢量的乘积：

$$k\overline{A} = k\left|\overline{A}\right|\hat{a} \quad \begin{cases} k>0 & \text{方向不变，大小为}|k|\text{倍} \\ k=0 & \\ k<0 & \text{方向相反，大小为}|k|\text{倍} \end{cases}$$

（2）矢量与矢量乘积分两种定义

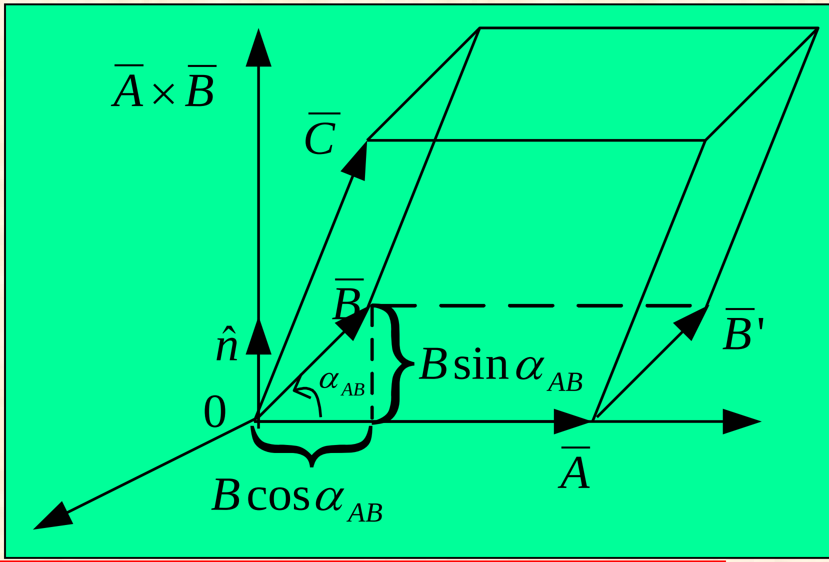
a. 标量积（点积）

b. 矢量积（叉积）

（2）矢量与矢量乘积分两种定义

a. 标量积（点积）

$$\bar{A}\cdot\bar{B} = AB\cos\alpha_{AB} \quad (\alpha_{AB} \le \pi)$$



✧两矢量的点积含义：

一矢量在另一矢量方向上的投影与另一矢量模的乘积，其结果是一标量。

✓标量积的推论

推论1：满足交换律 $\overline{A}\cdot\overline{B}=\overline{B}\cdot\overline{A}$

推论2：满足分配律 $\overline{A}\cdot\left(\overline{B}+\overline{C}\right)=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot\overline{C}$

推论3：当两个非零矢量点积为零,则这两个矢量必正交。

推论3：当两个非零矢量点积为零,则这两个矢量必正交。

• 在直角坐标系中，已知三个坐标轴是相互正交的，即

$$\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1$$
$$\hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{y}\cdot\hat{z}=\hat{z}\cdot\hat{x}=0$$

即

$$\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j=\begin{cases}1, & \hat{x}_i // \hat{x}_j\\ 0, & \hat{x}_i\perp\hat{x}_j\end{cases}$$

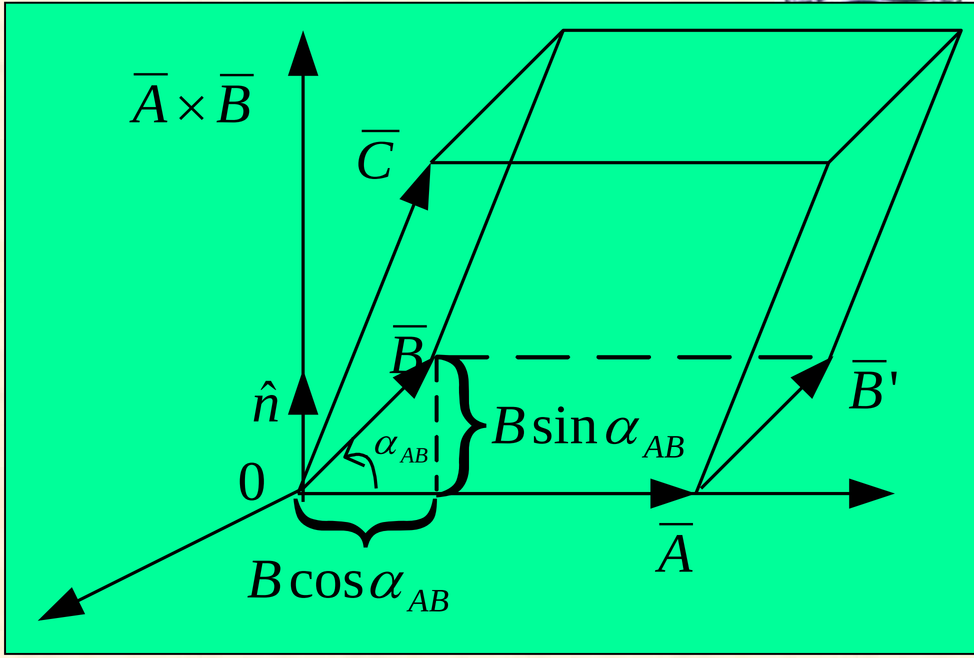
有两矢量点积:

$$\overline{A}\cdot\overline{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

• 结论: 两矢量点积等于对应分量的乘积之和。

$$\overline{\mathbf{A}}\cdot\overline{\mathbf{A}}=A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2=A^2$$

b.矢量积（叉积）



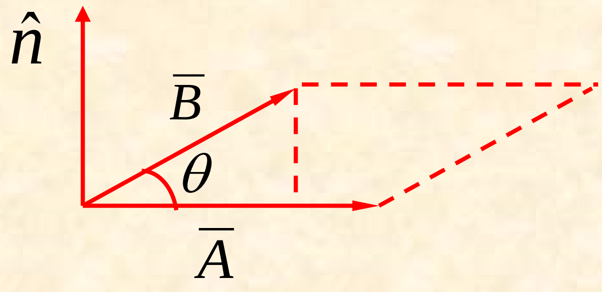
$$\overline{A}\times\overline{B}=\hat{n}AB\sin\alpha_{AB}$$

$$(\alpha_{AB}\leq\pi)$$

$\hat{n}:\overline{A},\overline{B}$ 所在平面的右手螺旋法向

•含义：

两矢量叉积，结果得一新矢量，其大小为这两个矢量组成的平行四边形的面积，方向为该面的法线方向，且三者符合右手螺旋法则。



✓矢量积的推论

推论1：不服从交换律： $\overline{A}\times\overline{B}\neq\overline{B}\times\overline{A}$ $\overline{A}\times\overline{B}=-\overline{B}\times\overline{A}$

推论2：服从分配律： $\overline{A}\times\left(\overline{B}+\overline{C}\right)=\overline{A}\times\overline{B}+\overline{A}\times\overline{C}$

推论3：不服从结合律： $\overline{A}\times\left(\overline{B}\times\overline{C}\right)\neq\left(\overline{A}\times\overline{B}\right)\times\overline{C}$

推论4：当两个非零矢量叉积为零，则这两个矢量必平行。

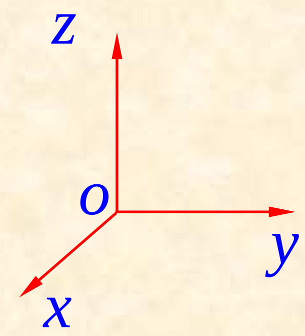
✓分量运算：

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}},\quad \hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{z}}=\hat{\mathbf{x}},\quad \hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}$$

$$\hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{y}}\times\hat{\mathbf{y}}=\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{z}}=0$$

即 $$\boxed{\hat{x}_i\times\hat{x}_j=\begin{cases}0,\ \hat{x}_i\ //\ \hat{x}_j\\ \hat{n},\hat{x}_i\perp\hat{x}_j\end{cases}}$$

在直角坐标系中，两矢量的叉积运算如下：



$$\overline{\mathrm{A}}\times\overline{\mathrm{B}} = (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)\times(\hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z)$$

$$= \hat{x}(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{y}(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{z}(A_xB_yA_yB_x)$$

两矢量的叉积又可表示为：

$$\overline{\mathrm{A}}\times\overline{\mathrm{B}} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

（3）三重积

三个矢量相乘有以下几种形式：

$\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)\overline{C}$ 矢量，标量与矢量相乘。

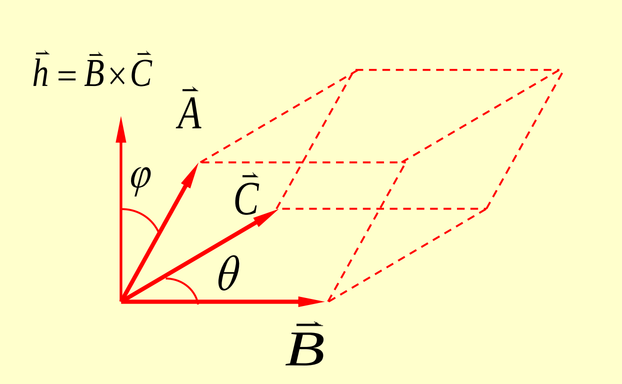
$\overline{A}\cdot\left(\overline{B}\times\overline{C}\right)$ 标量，标量三重积。

$\overline{A}\times\left(\overline{B}\times\overline{C}\right)$ 矢量，矢量三重积。

a. 标量三重积 $\overline{A}\cdot\overline{B}\times\overline{C}$

法则：在矢量运算中,先算叉积,后算点积。

定义: $\overline{A}\cdot\overline{B}\times\overline{C}=\left|\overline{A}\right|\left|\overline{B}\right|\left|\overline{C}\right|\sin\theta\cos\varphi$



含义:

标量三重积结果为三矢量构成的平行六面体的体积 。

$$V=\overline{A}\cdot\left(\overline{B}\times\overline{C}\right)=\overline{C}\cdot\left(\overline{A}\times\overline{B}\right)=\overline{B}\cdot\left(\overline{C}\times\overline{A}\right)$$

注意：先后轮换次序。

推论：三个非零矢量共面的条件。$\overline{A}\cdot\left(\overline{B}\times\overline{C}\right)=0$

在直角坐标系中:

$$\bar{A}\cdot\left(\bar{B}\times\bar{C}\right)=\left(A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}\right)\cdot\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

$$\bar{A}\cdot\left(\bar{B}\times\bar{C}\right)=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

b.矢量三重积: $\bar{A}\times\left(\bar{B}\times\bar{C}\right)=\bar{B}\left(\bar{A}\cdot\bar{C}\right)-\bar{C}\left(\bar{A}\cdot\bar{B}\right)$

总结：三重积

a）标量三重积

$$\overline{A}\cdot\left(\overline{B}\times\overline{C}\right)=\overline{C}\cdot\left(\overline{A}\times\overline{B}\right)=\overline{B}\cdot\left(\overline{C}\times\overline{A}\right)$$

b）矢量三重积

$$\overline{A}\times\left(\overline{B}\times\overline{C}\right)=\overline{B}\left(\overline{A}\cdot\overline{C}\right)-\overline{C}\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)$$

称为“BACK—CAB”法则

例2：设 $\bar{r}_1 = 2\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}$ $\bar{r}_2 = \hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}$

$\bar{r}_3 = -2\hat{x} + \hat{y} - 3\hat{z}$ $\bar{r}_4 = 3\hat{x} + 2\hat{y} + 5\hat{z}$

求：$\bar{r}_4 = a\bar{r}_1 + b\bar{r}_2 + c\bar{r}_3$ 中的标量 a、b、c。

解：

$$
\begin{aligned}
&3\hat{x} + 2\hat{y} + 5\hat{z} \\
&= a(2\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}) + b(\hat{x} + 3\hat{y} - 2\hat{z}) + c(-2\hat{x} + \hat{y} - 3\hat{z}) \\
&= (2a + b - 2c)\hat{x} + (-a + 3b + c)\hat{y} + (a - 2b - 3c)\hat{z}
\end{aligned}
$$

则：

$$
\begin{cases}
2a + b - 2c = 3 \\
-a + 3b + c = 2 \\
a - 2b - 3c = 5
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{aligned}
a &= -2 \\
b &= 1 \\
c &= -3
\end{aligned}
$$

§ 1.6 曲面坐标系
(Curvilinear Coordinate Systems)

三维空间任意一点的位置可通过三条相互正交曲线的交点来确定。

三条正交曲线组成的确定三维空间任意点位置的体系，称为正交曲线坐标系；三条正交曲线称为坐标轴；描述坐标轴的量称为坐标变量。

在电磁场理论中，三种常用的正交曲线坐标系为：

直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

主要内容

一、三种曲面坐标系及其微分元表示

二、三种坐标的变换

三、场论运算

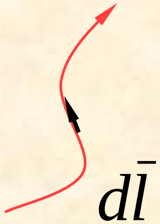
一、三种曲面坐标系及其微分元表示

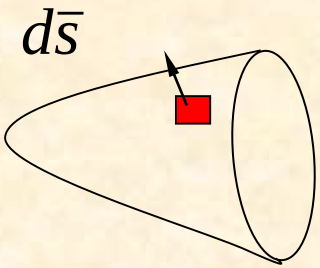
✓矢量微分元：线元、面元

标量微分元：体元

例：$\int \overline{F} \cdot d\bar{l}$ $\int \overline{B} \cdot d\bar{s}$ $\int \rho dV$

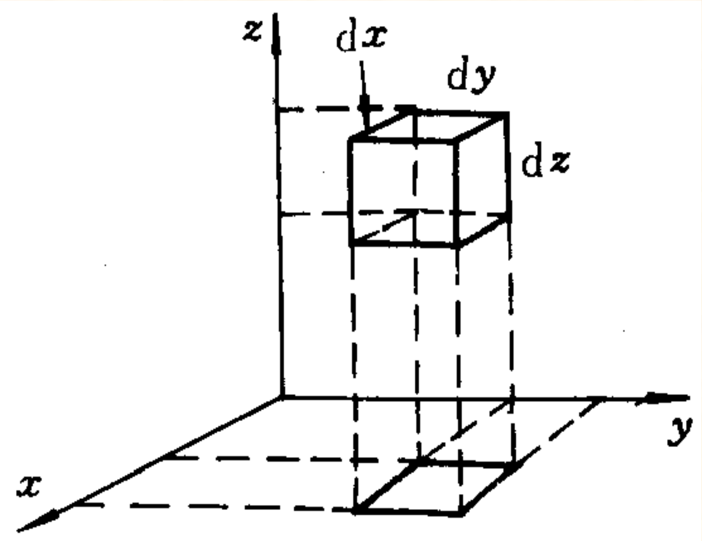
其中：$d\bar{l}$ 、$d\bar{s}$ 和dV 称为微分元。





1. 直角坐标系

在直角坐标系中，坐标变量为(x,y,z)，如图，做一微分体元。



- **线元:**

$$d\bar{l}_x = \hat{x}dx$$

$$d\bar{l}_y = \hat{y}dy$$

$$d\bar{l}_z = \hat{z}dz$$

$$d\bar{l} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$$

- **面元:**

$$d\bar{S}_x = dydz\hat{x}$$

$$d\bar{S}_y = dxdz\hat{y}$$

$$d\bar{S}_z = dxdy\hat{z}$$

- **体元:** $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

- 与三个单位矢量相垂直的三个面元

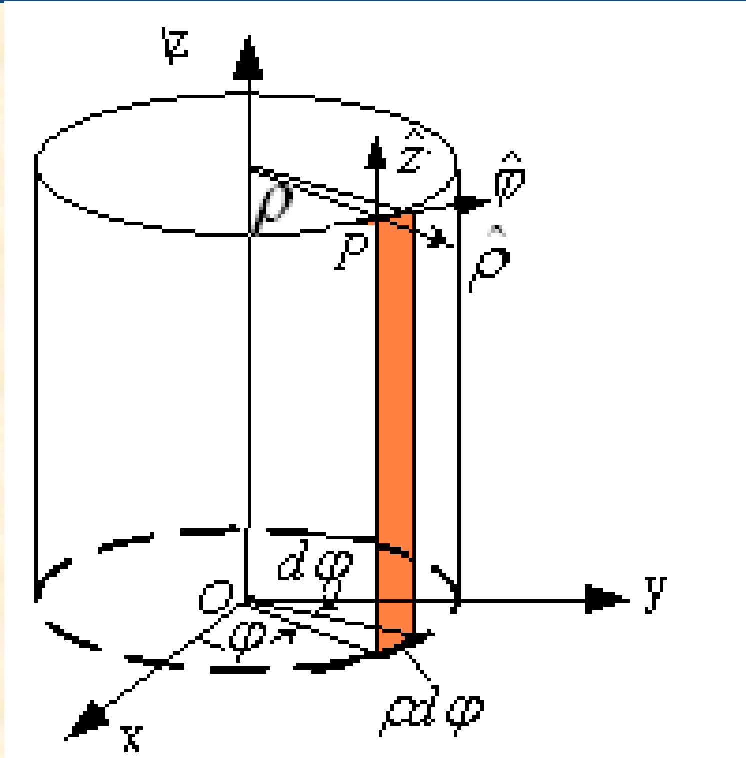
2、圆柱坐标系

$$\begin{cases} 0 \le \rho < \infty \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ -\infty < z < \infty \end{cases}$$

$$\hat{\rho} \times \hat{\varphi} = \hat{z}$$

$$\hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$$



$$\overline{A} = \hat{\rho}A_\rho + \hat{\varphi}A_\varphi + \hat{z}A_z$$

增加量	不变量	线元	长度增量
$\rho \to d\rho$	φ、z	$d\overline{l}_\rho = \hat{\rho}\, d\rho$	$dl_\rho = d\rho$
$\varphi \to d\varphi$	ρ、z	$d\overline{l}_\varphi = \hat{\varphi}\rho d\varphi$	$dl_\varphi = \rho d\varphi$
$z \to dz$	ρ、φ	$d\overline{l}_z = \hat{z} dz$	$dl_z = dz$

3、球面坐标系

$$\begin{cases} 0 \le r < \infty \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}$$

$$\hat{\varphi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$$

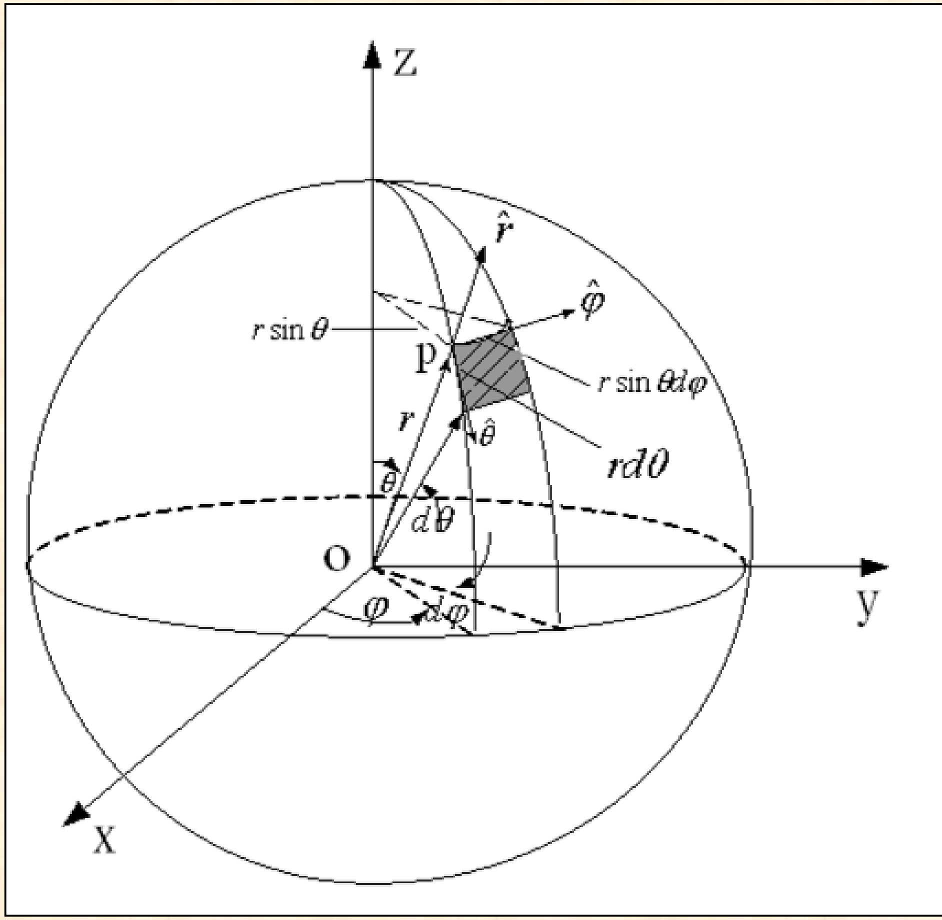
$$\hat{\theta} \times \hat{\varphi} = \hat{r}$$

$$\overline{A} = \hat{r}A_r + \hat{\theta}A_\theta + \hat{\varphi}A_\varphi$$

$$\mathrm{d}\overline{l}_r = \hat{r}\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}\overline{l}_\theta = \hat{\theta}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\overline{l}_\varphi = \hat{\varphi}r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$$



球面坐标系

1. 直角坐标系

坐标变量 x, y, z

坐标单位矢量 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

位置矢量 $\bar{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$

线元矢量 $d\bar{l} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + \hat{z}dz$

面元矢量

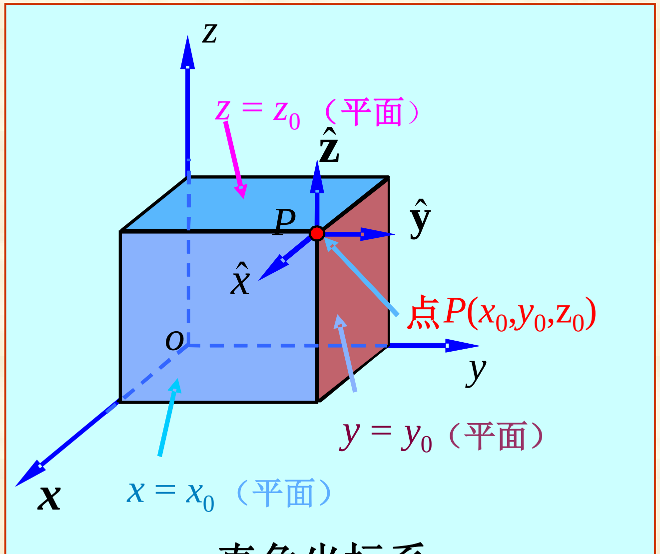
$$d\bar{S}_x = \hat{x}dl_y dl_z = \hat{x}dydz$$

$$d\bar{S}_y = \hat{y}dl_x dl_z = \hat{y}dxdz$$

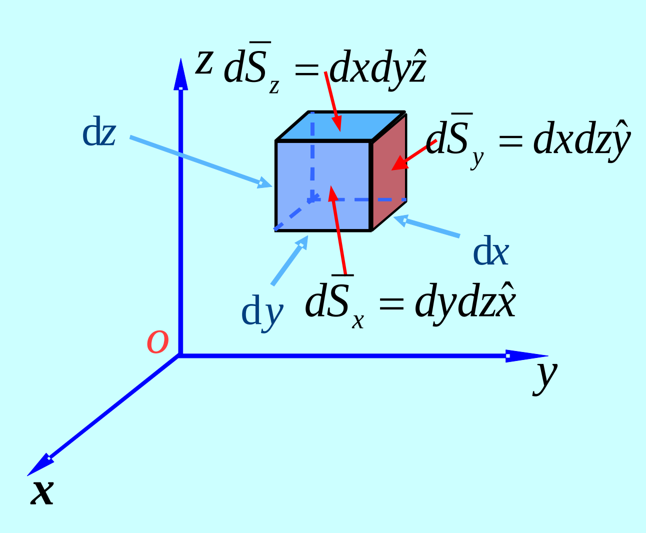
$$d\bar{S}_z = \hat{z}dl_x dl_y = \hat{z}dxdy$$

体积元

$$dV = dxdydz$$



直角坐标系



直角坐标系的长度元、面积元、体积元

2. 圆柱坐标系

坐标变量　ρ, φ, z

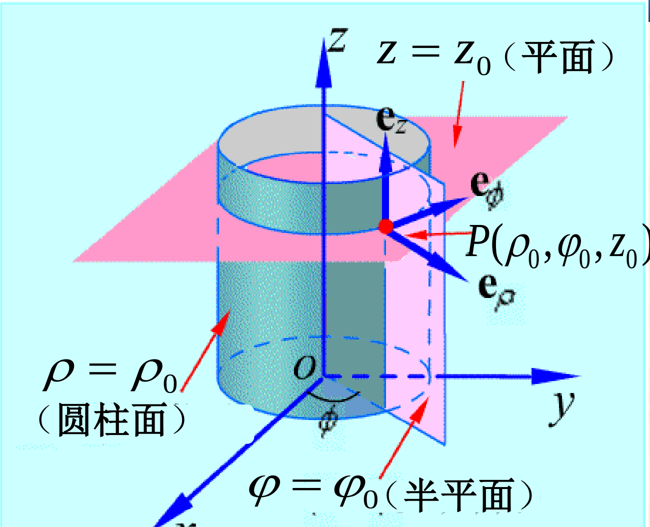
坐标单位矢量　$\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z}$

位置矢量　$\bar{r} = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z$

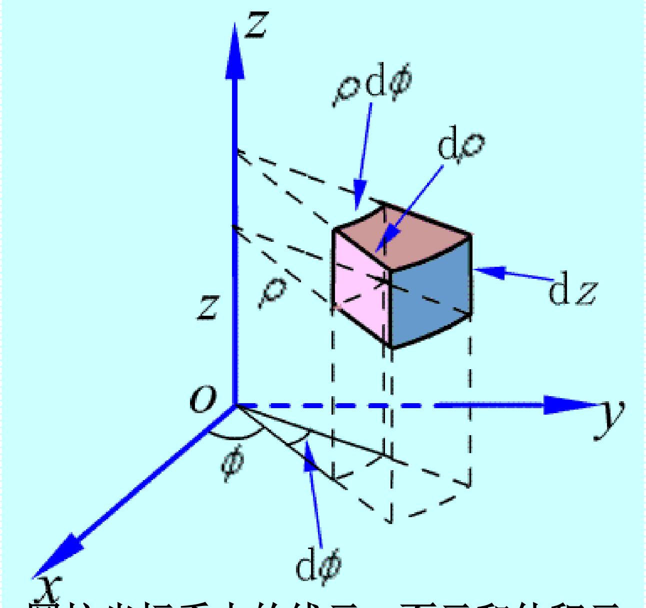
线元矢量　$d\bar{l} = \hat{\rho}\, d\rho + \hat{\varphi}\, \rho\, d\varphi + \hat{z} dz$

面元矢量
$$\begin{cases} \mathrm{d}s_\rho = \mathrm{d}l_\varphi \mathrm{d}l_z = \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}s_\varphi = \mathrm{d}l_\rho \mathrm{d}l_z = \mathrm{d}\rho \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}s_z = \mathrm{d}l_\rho \mathrm{d}l_\varphi = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \end{cases}$$

体积元　$\mathrm{d}v = \mathrm{d}l_\rho \mathrm{d}l_\varphi \mathrm{d}l_z = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z$



圆柱坐标系



圆柱坐标系中的线元、面元和体积元

3. 球坐标系

坐标变量 r,θ,φ

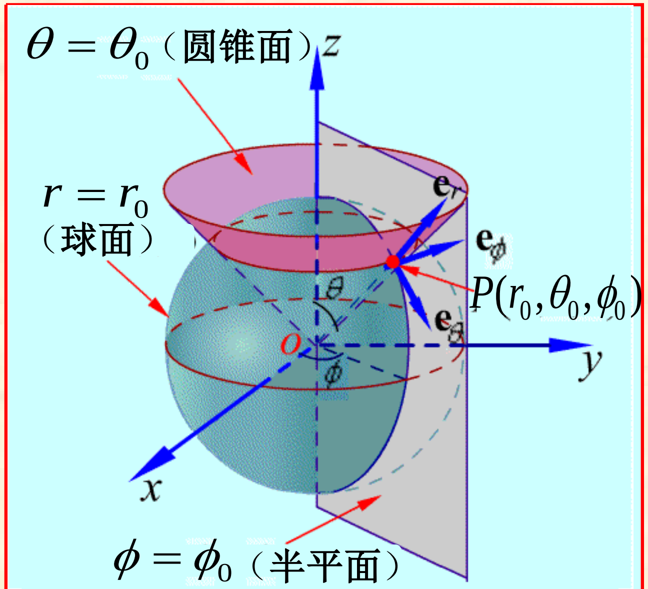
坐标单位矢量 $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\varphi}$

位置矢量 $\vec{r}=\hat{r}r$

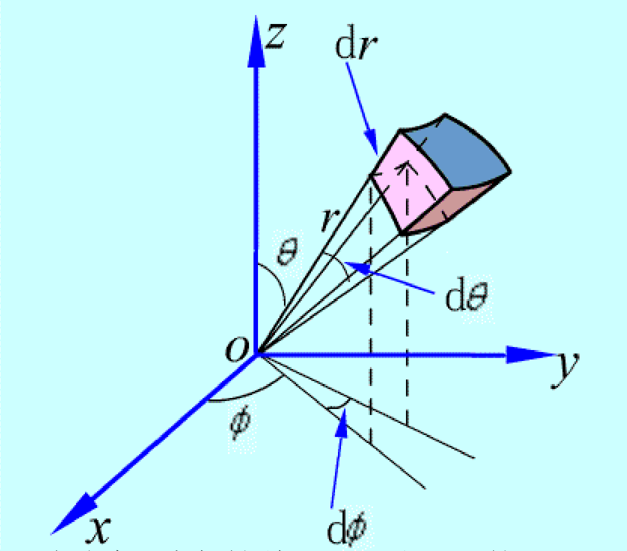
线元矢量 $d\bar{l}=\hat{r}dr+\hat{\theta}rd\theta+\hat{\varphi}r\sin\theta d\varphi$

面元矢量
$$\begin{cases}\hat{\mathrm{r}}:\mathrm{d}s_r=\mathrm{d}l_\theta\mathrm{d}l_\varphi=r^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ \hat{\theta}:\mathrm{d}s_\theta=\mathrm{d}l_r\mathrm{d}l_\varphi=r\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\\ \hat{\varphi}:\mathrm{d}s_\varphi=\mathrm{d}l_r\mathrm{d}l_\theta=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\end{cases}$$

体积元 $\mathrm{d}v=\mathrm{d}l_r\mathrm{d}l_\theta\mathrm{d}l_\varphi=r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$



球坐标系



球坐标系中的线元、面元和体积元

二、三种坐标的变换

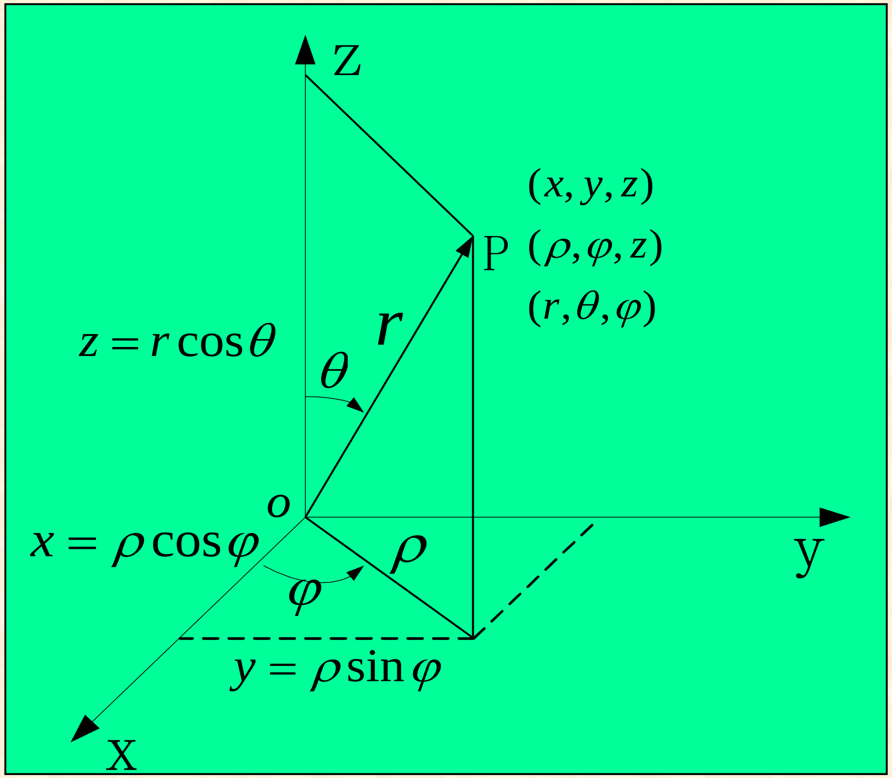


图1.6-3 三种坐标间的变换

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

说明

- 直角坐标系下， $\hat{x}$ $\hat{y}$ $\hat{z}$ 各单位矢量是常矢量，其方向不随时间位置变化；
- 圆柱坐标系下，$\hat{z}$是常矢量, $\hat{\rho}$ $\hat{\varphi}$ 是变矢，其方向随坐标点而变化。
- 球坐标系下,$\hat{r}$ $\hat{\theta}$ $\hat{\varphi}$ 是变矢，其方向随坐标点而变化。

直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系
——总　结

	坐标变量及取值范围	单位矢量之间的关系	线元	面元	体积元
直角坐标系					
圆柱坐标系					
球坐标系					

§1.2矢量场的通量、散度、散度定理

Flux and Divergence of a Vector Field, Divergence Theorem

- 矢量场的通量
- 散度，哈密顿算子
- 散度定理

场的基本概念

1.什么是场?

重力场、温度场、电磁场、……

a.从数学角度：场是给定区域内各点数值的集合，这些数值规定了该区域内一个特定量的特性。

比如：T 是温度场中的物理量，T 就是温度场

b.从物理角度：场是遍及一个被界定的或无限扩展的空间内的，能够产生某种物理效应的特殊的物质，场是具有能量的。

2.场的分类

a. 按物理量的性质分:

标量场: 描述场的物理量是标量。

矢量场: 描述场的物理量是矢量。

b. 按场量与时间的关系分:

静态场: 场量不随时间发生变化的场。

动态场: 场量随时间的变化而变化的场。

动态场也称为时变场。

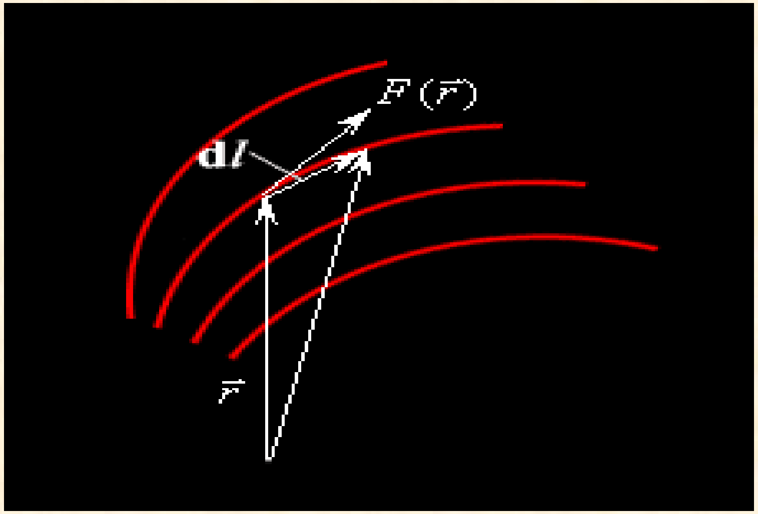
标量场和矢量场的定义

- **标量场（scalar field）**：在指定的时刻，空间每一点可以用一个标量唯一地描述，则该标量函数定出标量场。
   - 例如物理系统中的温度、压力、密度等可以用标量场来表示。
- **矢量场（vector field）**：在指定的时刻，空间每一点可以用一个矢量唯一地描述，则该矢量函数定出矢量场。
   - 例如流体空间中的流速分布等可以用矢量场来表示。

场的"场图"表示

- 对矢量场，用一些有向曲线来形象表示矢量在空间的分布，称为力线或流线。

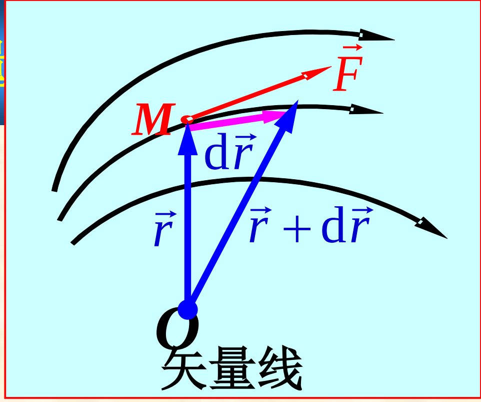
  力线上任意点的切线方向必定与该点的矢量方向相同。



- 对标量场，用等值面图表示。

  空间内标量值相等的点集合形成的曲面称为等值面；

  例如气象图上的等压线，地图上的等高线等。



一、矢量场的通量

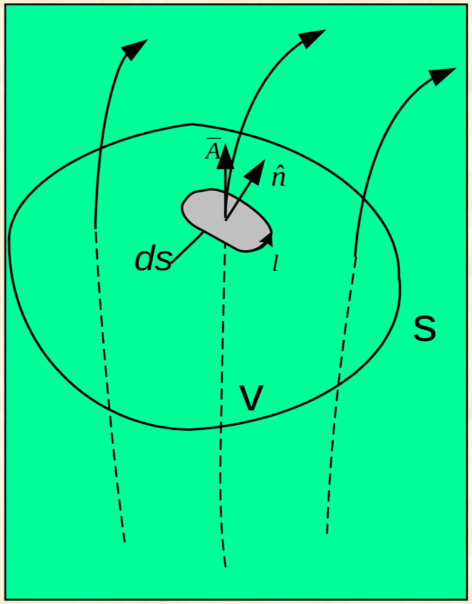
1. 矢线（场线）：

在矢量场中，若一条曲线上每一点的切线方向与场矢量在该点的方向重合，则该曲线称为矢线。

意义：形象直观地描述了矢量场的空间分 布状态。

2. 通量:

定义：如果在该矢量场中取一曲面S，通过该曲面的矢线量称为通量。



表达式:
$$\Psi = \int_S \bar{A}\cdot d\bar{s} = \int_S \bar{A}\cdot \hat{n}ds$$
（标量）

若曲面为闭合曲面:
$$\Psi = \oint_S \bar{A}\cdot d\bar{s} = \oint_S \bar{A}\cdot \hat{n}ds$$

$$\Psi = \int_S \bar{A} \cdot d\bar{s} = \int_S \bar{A} \cdot \hat{n} ds$$

$\hat{n}$的取法：

（1）开曲面：沿封闭曲线 l 的绕行方向按右手螺旋的拇指方向

（2）封闭面： 取为封闭面的外法线方向

讨论：

a. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi > 0$

说明穿出闭合面的通量大于穿入曲面的通量，意味着闭合面内存在正的通量源。

b. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi < 0$

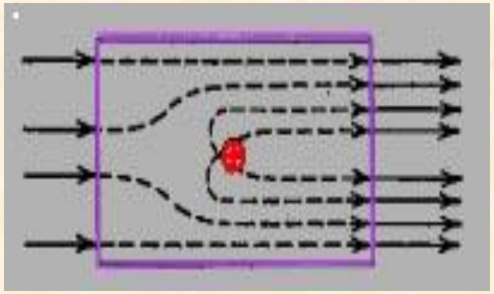
说明穿入的通量大于穿出的通量，那么必然有一些矢线在曲面内终止了，意味着闭合面内存在负源或称沟。

c. 如果闭合曲面上的总通量 $\psi = 0$

说明穿入的通量等于穿出的通量。

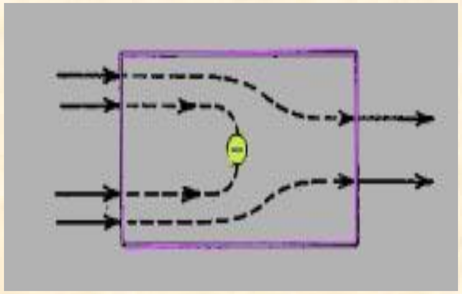
通量的物理意义

矢量场通过闭合曲面通量的三种可能结果



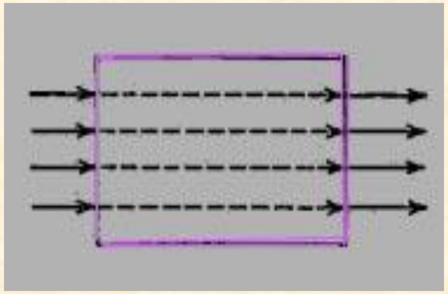
$\psi > 0$

通过闭合曲面有净的矢量线穿出



$\psi < 0$

有净的矢量线进入



$\psi = 0$

进入与穿出闭合曲面的矢量线相等

闭合曲面的通量从宏观上建立了矢量场通过闭合曲面的通量与曲面内产生矢量场的源的关系。

二、散度，哈密顿算子

通量反映了封闭面中源的总特性，但没有反映源的分布特性;

若要进一步描述源的分布特性，则要引入散度;

a）散度(divergence)定义:

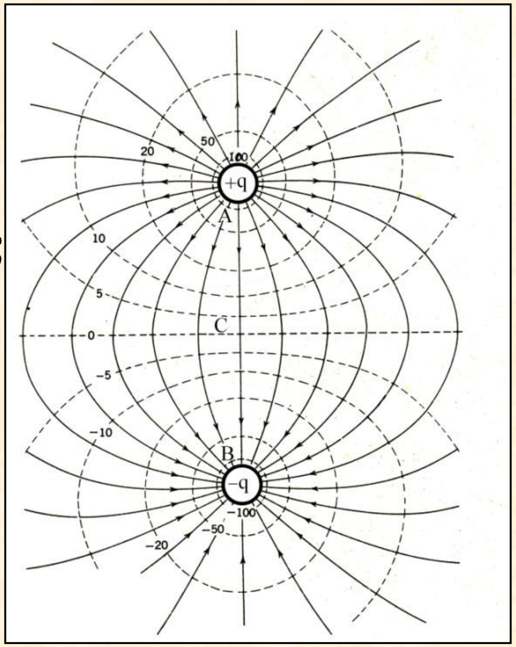
$$\operatorname{div}\overline{\mathrm{A}} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\int_s \overline{A} \cdot d\overline{s}}{\Delta V}$$

（标量）

散度是矢量通过包含该点的任意闭合小曲面的通量与曲面元体积之比的极限。

b）散度的物理意义

- 散度是$\overline{A}$ 通过某点处单位体积的通量（**通量体密度**）；



电偶极子的电力线和等位线

- 它反映了$\overline{A}$ 在该点的**通量源强度**；

$\mathrm{div}\overline{\mathrm{A}} > 0$，有正源；（A点）

$\mathrm{div}\overline{\mathrm{A}} < 0$，有负源；（B点）

$\mathrm{div}\overline{\mathrm{A}} = 0$，无源；无源区中的矢量场叫做无散场或管形场。

（C点）

c） 散度的分量表示式

计算$\bar{A}$穿过包围点P(x,y,z)的无穷小体积$\Delta v = \Delta x \Delta y \Delta z$ 的通量：

$\bar{A}$ 穿过**右边**向外流出的通量：

$$\Delta\Psi_r = \bar{A}\Big|_{\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right)} \cdot \hat{y}\Delta x\Delta z = A_y\Big|_{\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right)}\Delta x\Delta z$$

$$A_y\Big|_{\left(x,y+\frac{\Delta y}{2},z\right)} = A_y\Big|_{(x,y,z)} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\Bigg|_{(x,y,z)} \cdot \frac{\Delta y}{2} + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}\left(\frac{\Delta y}{2}\right)^2 + \dots$$

得 $$\Delta\Psi_r = \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{2} + \dots\dots\dots\right)\Delta x\Delta z$$

同理，穿过**左面**向外流出的通量为

$$\Delta\Psi_l = \bar{A}\Big|_{\left(x,y-\frac{\Delta y}{2}z,\right)} \cdot \hat{y}(-\Delta x\Delta z) = -\left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2} + \dots\dots\dots\right)\Delta x\Delta z$$

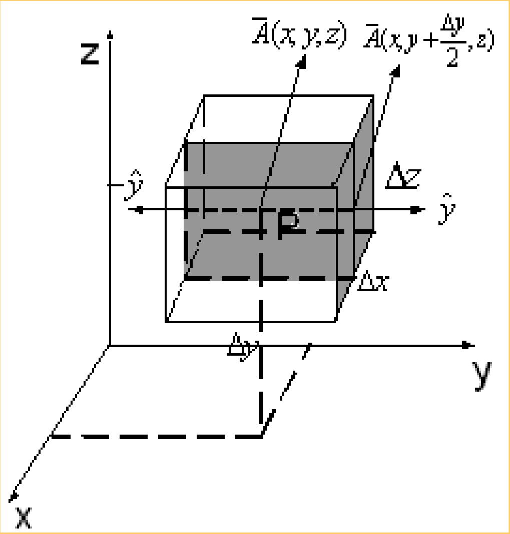


图1.2-3 $div\bar{A}$ 直角坐标表示式的推导

故穿过**左右两面**的通量为

$$\Delta\Psi_{rl} = \Delta\Psi_r + \Delta\Psi_l = \frac{\partial A_y}{\partial y}\cdot\Delta x\Delta y\Delta z + \dots\dots\dots$$

取决于$\bar{A}$的y分量沿y向的变化率

$\overline{A}$穿过六面体的**总通量:** $\oint_s \overline{A}\cdot d\overline{s} = (\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})\cdot \Delta x\Delta y\Delta z + ...$

故

$$div\overline{A} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint_s \overline{A}\cdot d\overline{s}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.2\text{-}4)$$

※ $\overline{A}$的散度是$\overline{A}$ 的三维分量沿各自方向的变化率之和，

即取决于$\overline{A}$各分量的纵向变化率。

※ 对应于标量的导数, 由一维推广至三维;

d) 哈密顿算子

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

兼有矢量和微分运算双重功能： 先按矢量规则展开，再做微分运算：

$$\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}} = (\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$div\overline{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_s \overline{A} \cdot d\overline{s}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.2\text{-}4)$$

比较上式与式(1. 2-4) 知: $div\overline{A} = \nabla \cdot \overline{A}$

e)常用坐标系中，散度的计算公式

直角坐标系 $$\nabla\cdot\overline{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

圆柱坐标系 $$\nabla\cdot\overline{A}=\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\rho\partial\rho}+\frac{\partial A_\varphi}{\rho\partial\varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

球坐标系 $$\nabla\cdot\overline{A}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(A_\varphi)$$

注意: $\nabla\cdot\overline{\mathrm{A}}\neq\overline{\mathrm{A}}\cdot\nabla;\qquad \nabla\times\overline{\mathrm{A}}\neq-\overline{\mathrm{A}}\times\nabla$

f) 散度的运算规则

$$\nabla\cdot(\overline{A}\pm\overline{B})=\nabla\cdot\overline{A}\pm\nabla\cdot\overline{B}$$

$$\nabla\cdot(\phi\overline{A})=\phi\nabla\cdot\overline{A}+\overline{A}\cdot\nabla\phi$$

$$\nabla\phi=(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z})\phi=\hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

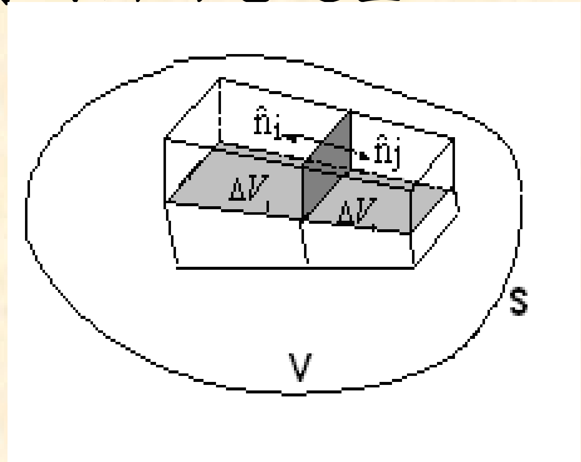
散度的有关公式:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\overline{C}=\nabla\cdot\overline{C}=0\ (\vec{C}\text{为常矢量})\\ \nabla\cdot(\overline{C}f)=\overline{C}\cdot\nabla f\\ \nabla\cdot(k\overline{F})=k\nabla\cdot\overline{F}\ (k\text{为常量})\\ \nabla\cdot(f\overline{F})=f\nabla\cdot\overline{F}+\overline{F}\cdot\nabla f\\ \nabla\cdot(\overline{F}\pm\overline{G})=\nabla\cdot\overline{F}\pm\nabla\cdot\overline{G}\end{cases}$$

三、散度定理

矢量场的散度代表其通量的体密度,因此从散度的定义出发，散度的体积分等于穿过包围该体积封闭面的总通量:

$$\int_V \nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}\, dv = \oint_S \overline{\mathrm{A}} \cdot d\overline{s}$$



矢量散度的体积分⇔该矢量的封闭面积分

[证] 对$\Delta \mathrm{v}_i$, $\left(\nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}\right)_i \Delta \mathrm{v}_i = \oint_{S_i} \overline{A} \cdot d\overline{s}$

$$\int_V \nabla \cdot \overline{A} dV = \lim_{\Delta V_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{N} (\nabla \cdot \overline{A})_i \cdot \Delta V_i \right] = \lim_{\Delta V_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{N} \oint_{S_i} \overline{A} \cdot d\overline{s} \right] = \oint_s \overline{A} \cdot d\overline{s}, \text{得证}$$

$$\int_V \nabla \cdot \overline{\mathrm{A}}\, dv = \oint_S \overline{\mathrm{A}} \cdot \overline{ds}$$

物理含义：

穿过一封闭曲面的总通量等于矢量散度的体积分。

散度定理是闭合曲面积分与体积分之间的一个变换关系，在电磁理论中有着广泛的应用。

例1 点电荷q在离其r处产生的电通密度为：$\bar{D}=\dfrac{q}{4\pi r^3}\bar{r}(\bar{r}\neq 0)$

其中$\bar{\mathbf{r}}=\hat{\mathbf{x}}x+\hat{\mathbf{y}}y+\hat{\mathbf{z}}z$，模$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

求：任意点处电通密度的散度$\nabla\cdot\bar{\mathbf{D}}$，并求穿出以 r为半径的球面的电通量$\Psi_e$

[解]

$$\bar{D}=\frac{q}{4\pi}\frac{\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=\hat{x}D_x+\hat{y}D_y+\hat{z}D_z$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}]$$

$$=\frac{q}{4\pi}[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{x\cdot(-3/2)\cdot 2x}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}]$$

$$=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3x^2}{r^5}$$

同理
$$\frac{\partial D_y}{\partial y}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3y^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

故
$$\nabla\cdot\overline{D}=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0$$

可见，除了点电荷所在源点$\left(\bar{r}=0\right)$外，空间各点的电通密度散度均为0，它是管形场 。

$$\Psi_e=\oint_S\overline{\mathrm{D}}\cdot d\bar{s}=\frac{q}{4\pi r^3}\oint_S\bar{r}\cdot\hat{r}ds$$
$$=\frac{q}{4\pi r^2}\oint_S\mathrm{ds}=q$$

这说明在此球面上所穿过的电通量的源正是点电荷q 。

例2 球面**s**上任意点的位置矢量为 $\bar{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$

试利用散度定理计算 $\oint_S \bar{r} \cdot d\bar{s}$

[解] 首先求出 $\bar{r}$ 的散度：

$$\nabla \cdot \bar{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

然后利用散度定理计算面积分：

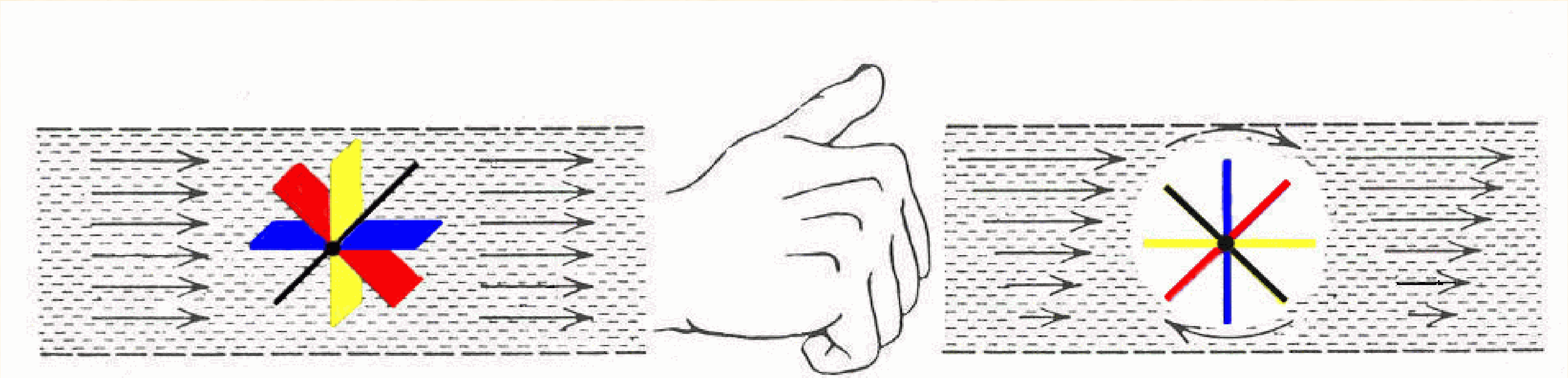
$$\oint_S \bar{r} \cdot d\bar{s} = \int_V \nabla \cdot \bar{r}\, dv = 3\int_V dv = 3 \times \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^3$$

§1.3 环量、旋度、Stokes定理

Circulation and Curl of a Vector Field, Stokes's Theorem

- 矢量场的环流与旋涡源

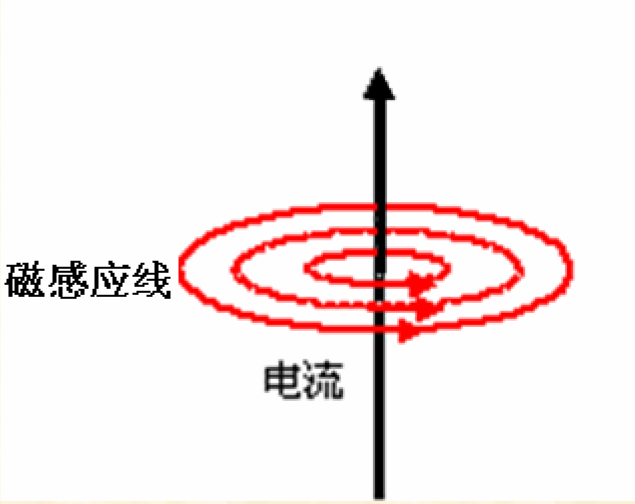
不是所有的矢量场都由通量源激发。存在另一类不同于通量源的矢量源，它所激发的矢量场的力线是闭合的，它对于任何闭合曲面的通量为零。但在场所定义的空间中闭合路径的积分不为零。 例如：流速场。



如磁场沿任意闭合曲线的积分与通过闭合曲线所围曲面的电流成正比，即

$$\oint_C \bar{B}(x,y,z)\cdot d\bar{l} = \mu_0 I = \mu_0 \int_S \bar{J}(x,y,z)\cdot d\bar{S}$$

上式建立了磁场的环流与电流的关系。



内 容

- 环量
- 旋度
- Stokes定理

一、环量的概念

矢量 $\bar{A}$ 沿某封闭曲线的线积分，

定义为 $\bar{A}$ 沿该曲线的环量(或旋涡量):

$$\Gamma = \oint_l \bar{A} \cdot dl$$

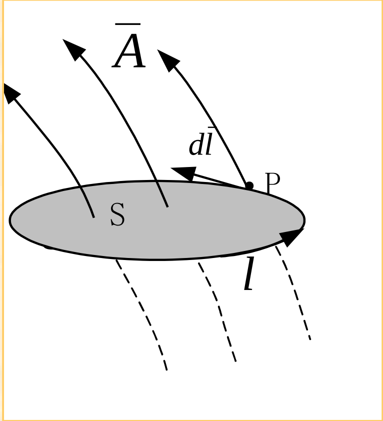


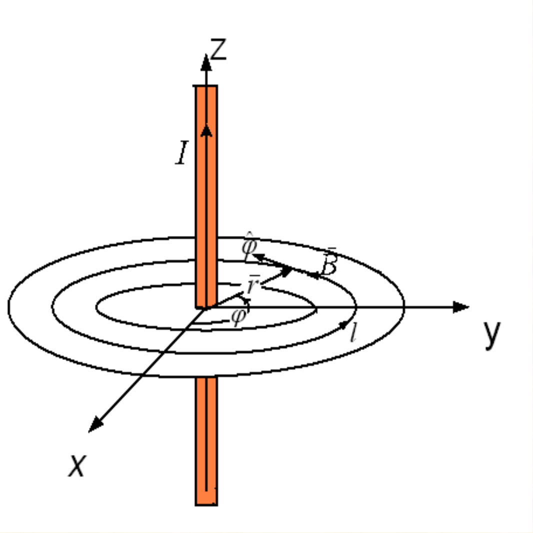
图1.3-1矢量场的环量

$\bar{l}$ 方向规定为使所包围面积在其左侧，如图1.3-1所示.

应用：

*电流会产生环绕它的磁场 $\overline{B}$，$\overline{B}$沿圆周的线积分就是其环量 ：

$$\Gamma = \oint_l \overline{B} \cdot d\overline{l} = \int_0^{2\pi} \hat{\varphi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \hat{\varphi} \rho d\varphi = \mu_0 I$$



可见，电流就是旋涡源。

图1.3-2 电流I的磁通密度 $\overline{B}$

二、 矢量场的旋度 $\text{curl}\,\overline{A} = \nabla \times \overline{A}$

矢量场的环流给出了矢量场与积分回路所围曲面内旋涡源宏观联系。

为了给出空间任意点矢量场与旋涡源的关系，引入**矢量场的旋度**。

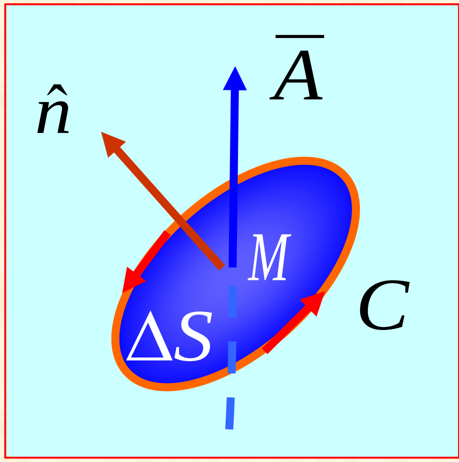
a)矢量场的旋度定义

➢环量面密度(环量强度):

过点M 作一微小曲面ΔS，它的边界曲线记为l，曲面的法线方向 $\hat{n}$与曲线的绕向成右手螺旋法则。当$\Delta S\to 0$ 时，极限

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_l \overline{\mathrm{A}}\cdot \mathrm{d}\bar{l}}{\Delta s}$$ （标量）

称为矢量场在点M 处沿方向 $\vec{n}$的环流面密度。



➢ 面元是有方向的，在给定点处，上述极限值对于不同的面元是不同的。

特点： 其值与点M 处的方向 $\vec{n}$有关。

旋度定义

旋度：$\mathrm{curl}\,\overline{\mathrm{A}} = \hat{n} \lim_{\Delta S \to 0} \dfrac{[\oint_{l} \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\bar{l}\,]_{\max}}{\Delta s}$ （矢量）

大小：旋度为矢量 $\bar{A}$ 在给定点处的**最大环量面密度**。

方向：面元的取向使环量面密度最大时，该面元的方向$\hat{n}$.

物理意义：**旋涡源密度矢量**

讨论：

$\mathrm{curl}\bar{A}=0$, 说明该处无漩涡源

称该矢量场为无旋场，又称为保守场。

$\mathrm{curl}\bar{A}\neq 0$, 说明该处有漩涡源；

- **称该矢量场为有旋矢量场；**
- **能够激发有旋矢量场的源称为旋涡源。**
- **电流是磁场的旋涡源。**

$\mathrm{curl}\bar{A}$ 反映 $\bar{A}$ 在该处的**旋涡源强度**。

b)分量表示式

由教材p. 13－14的推导得

$$curl\overline{A} = \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

curl $\overline{\mathrm{A}}$ 的三个坐标分量都取决于其另两个坐标分量在与各自正交的方向上的变化率。

简言之，$\overline{A}$ **的旋度取决于各分量的横向变化率**。

利用哈密顿算子，有

$$\nabla \times \overline{\mathrm{A}} = \left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)$$

$$= \hat{x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

故

$$\boxed{\mathrm{curl}\,\overline{\mathrm{A}} = \nabla \times \overline{\mathrm{A}}}$$

C)旋度运算

- 直角坐标系

$$\nabla\times\overline{A}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

- 圆柱坐标系

$$\nabla\times\overline{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & a_z\end{vmatrix}$$

- 球坐标系

$$\nabla\times\overline{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\hat{r} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

d) 旋度运算规则：

$$\nabla\times(\overline{A}\pm\overline{B})=\nabla\times\overline{A}\pm\nabla\times\overline{B}$$

$$\nabla\times(\phi\overline{A})=\phi\nabla\times\overline{A}\pm\nabla\phi\times\overline{A}$$

$$\nabla\cdot(\overline{A}\times\overline{B})=\overline{B}\cdot\nabla\times\overline{A}-\overline{A}\cdot\nabla\times\overline{B}$$

矢量场的旋度的散度恒为零

$$\nabla\cdot(\nabla\times\overline{A})=0$$ （“旋无散”）

$$\nabla\times\nabla\times\overline{A}=\nabla(\nabla\cdot\overline{A})-\nabla^2\overline{A}$$

$$\nabla^2\overline{A}=\hat{x}\nabla^2A_x+\hat{y}\nabla^2A_y+\hat{z}\nabla^2A_z$$

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\text{(拉普拉辛)}$$

例：证明： $\nabla\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{A}})=0$

[证]

$$\nabla\cdot(\nabla\times\overline{\mathrm{A}})=\nabla\cdot\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot[\hat{x}(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z})-\hat{y}(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z})+\hat{z}(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y})]$$

$$=(\frac{\partial^2 A_z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial z\partial x})-(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z\partial y})+(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y\partial z})=0$$

三、斯托克斯（ Stokes）定理

矢量场的旋度代表其单位面积的环量，因此旋度的面积分即为包围此面积的闭曲线上的环量：

$$\int_S (\nabla \times \overline{\mathrm{A}}) \cdot \mathrm{d}\,\bar{s} = \oint_l \overline{\mathrm{A}} \cdot \mathrm{d}\,\bar{l}$$

矢量旋度的**面积分**⇔该矢量的**线积分** [证] 见教材p.15

物理含义：

一个矢量场旋度的面积分等于该矢量沿此曲面周界的曲线积分。

斯托克斯定理是闭合曲线积分与曲面积分之间的一个变换关系式，在电磁理论中也有广泛的应用。

例1 自由空间的点电荷q所产生的电场强度

$$\bar{\mathrm{E}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\bar{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

求任意点处（$r\neq 0$）电场强度的旋度$\nabla\times\bar{\mathrm{E}}$

[解] 根据旋度的公式得

$$\nabla\times\bar{\mathrm{E}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x/r^3 & y/r^3 & z/r^3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\hat{x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)\right]+\hat{y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]+\hat{z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)\right]\right\}$$

而 $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z}{r^3}\right)=0+[z\cdot(-3)r^{-4}\cdot\dfrac{1}{2}\dfrac{2y}{r}]=\dfrac{-3yz}{r^5}$ ， $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{y}{r^3}\right)=\dfrac{-3yz}{r^5}$

所以 $\nabla\times\bar{\mathrm{E}}=0$

结论：静止点电荷产生的电场是无旋场。

例2 证明下述矢量Stokes定理 $\int_V (\nabla\times\overline{A})dv = -\oint_S \overline{A}\times d\overline{s}$

式中S为包围体积V的封闭面

[证]：设 $\overline{C}$ 为任意常矢量，那么根据运算规则3有：

$$\nabla\cdot(\overline{C}\times\overline{A}) = \overline{A}\cdot(\nabla\times\overline{C}) - \overline{C}\cdot(\nabla\times\overline{A}) = -\overline{C}\cdot(\nabla\times\overline{A})$$

两边同时进行体积分，左边利用散度定理后得

$$\oint_S (\overline{C}\times\overline{A})\cdot d\overline{s} = \oint_S (\overline{A}\times d\overline{s})\cdot\overline{C} = \overline{C}\cdot\oint_S \overline{A}\times d\overline{s}$$

于是得 $$\overline{C}\cdot\oint_s \overline{A}\times d\overline{s} = -\overline{C}\cdot\int_V (\nabla\times\overline{A})dv$$

由于$\overline{C}$ 是任意常矢量，所以 $$\int_V (\nabla\times\overline{A})dv = -\oint_S \overline{A}\times d\overline{s}$$

§1.4 方向导数、梯度 、Green定理

(Directional Derivative and Gradient of a Scalar Field, Green’s Theorem)

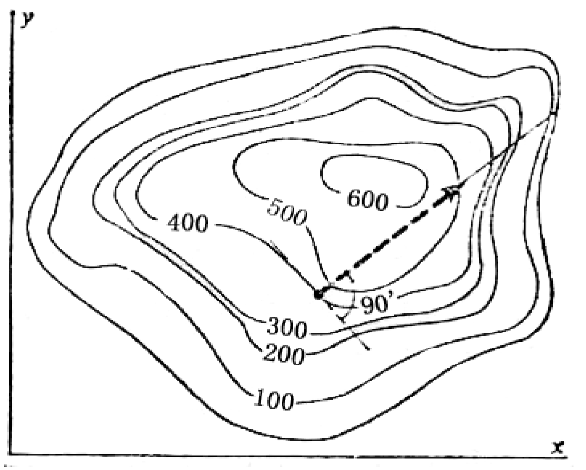
- 方向导数概念
- 标量场的梯度
- Green定理

一、标量场的等值面

等值面： 标量场取得同一数值的点在空间形成的曲面。

意义： 形象直观地描述了物理量在空间的分布状态。

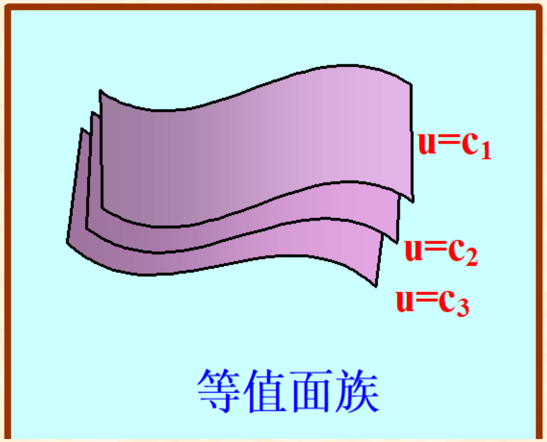
等值面方程： $u(x, y, z) = C$



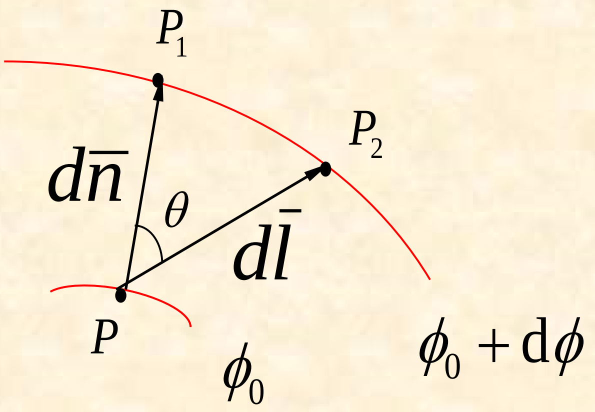
标量场的等值线(面)

等值面的特点：

- 常数C 取一系列不同的值，就得到一系列不同的等值面，形成等值面族；
- 标量场的等值面充满场所在的整个空间；
- 标量场的等值面互不相交。



二、方向导数



标量场的场函数为 $\phi(x, y, z, t)$

$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}l}$ 空间变化率，称为方向导数。

$\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}n}$ 为最大的方向导数。

二、方向导数

设 $\hat{l} = \hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\cos\beta + \hat{z}\cos\gamma$

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cos\gamma$$

引入∇算子

则方向导数 $$\frac{\partial\phi}{\partial l} = \nabla\phi\cdot\hat{l} = |\nabla\phi|\cos(\nabla\phi,\hat{l})$$

矢量$\nabla\phi$在$\hat{l}$上的投影等于ϕ在该方向上的方向导数。

三、 标量场的梯度

定义：标量场中某点梯度的大小为该点最大的方向导数，其方向为该点所在等值面的法线方向。

数学表达式： $$grad\phi = \frac{d\phi}{dn}\hat{n}$$

式中grad 是英文字母 gradient 的缩写。

三、梯度

即 $\cos(\nabla\phi,\hat{l})=1$ 则 $\left.\dfrac{\partial\phi}{\partial l}\right|_{\max}=|\nabla\phi|$

$\nabla\phi$ 的模是ϕ在给定点上的最大方向导数

其方向就是具有该最大方向导数的方向，也就是ϕ的变化率最大的方向。

梯度: $$\operatorname{grad}\phi=\nabla\phi=\hat{x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

等值面

$$\phi(x, y, z) = \text{const}$$

对等值面上的任意方向， $\hat{l}_c \dfrac{\partial \phi}{\partial l_c} = 0$ 即 $\nabla\phi \cdot \hat{l}_c = 0$

结论：梯度的方向就是等值面的法线方向： $\hat{n}_c = \dfrac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$

四、梯度运算规则

$$\nabla(\phi \pm \psi) = \nabla\phi \pm \nabla\psi$$

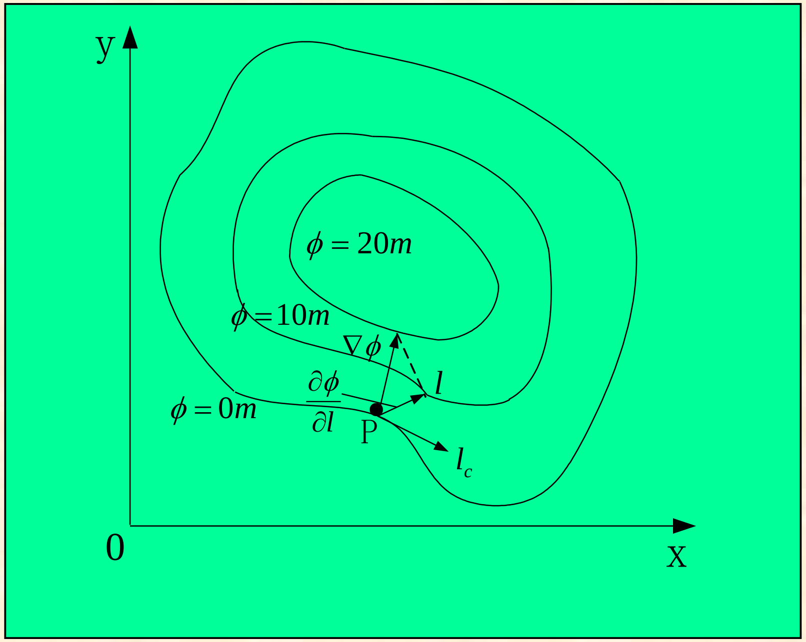
$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{1}{\psi^2}(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)$$

$$\nabla f(\phi) = f'(\phi)\nabla\phi$$

$$\nabla \times \nabla\phi = 0$$ “梯无旋”

$$\nabla\cdot\nabla\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$



例 试证明运算规则 $\nabla f(\phi)=f^{'}(\phi)\nabla\phi$

[证] $\nabla f(\phi)=(\hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z})\ f(\phi)=\hat{x}\frac{\partial f(\phi)}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial f(\phi)}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial f(\phi)}{\partial z}$

$$=\hat{x}[\frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x}]+\hat{y}[\frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y}]+\hat{z}[\frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial z}]$$

$$=\frac{df(\phi)}{d\phi}[\hat{x}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial \phi}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial \phi}{\partial z}]$$

$$=\frac{df(\phi)}{d\phi}\nabla\phi=f^{'}(\phi)\nabla\phi$$

所以等式成立

五、Green 定理

- Green第一定理 $\nabla\cdot\bar{A}=\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)=\phi\nabla^2\psi+\nabla\psi\cdot\nabla\phi$

利用散度定理得 $$\int_V(\phi\nabla^2\psi+\nabla\psi\cdot\nabla\phi)\mathrm{d}v=\oint_S(\phi\nabla\psi)\cdot\hat{n}\mathrm{d}s=\oint_S\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\mathrm{d}s$$

- Green第二定理

将Green第一定理中的两个函数交换位置，则有

$$\int_V(\psi\nabla^2\phi+\nabla\phi\cdot\nabla\psi)\mathrm{d}v=\oint_S\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\mathrm{d}s$$

以Green第一定理减去上式，得

$$\int_V(\phi\nabla^2\psi-\psi\cdot\nabla^2\phi)\mathrm{d}v=\oint_S(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n})\mathrm{d}s$$

Green函数的应用

• 将体积V中场的求解问题变换为边界S上场的求解问题。

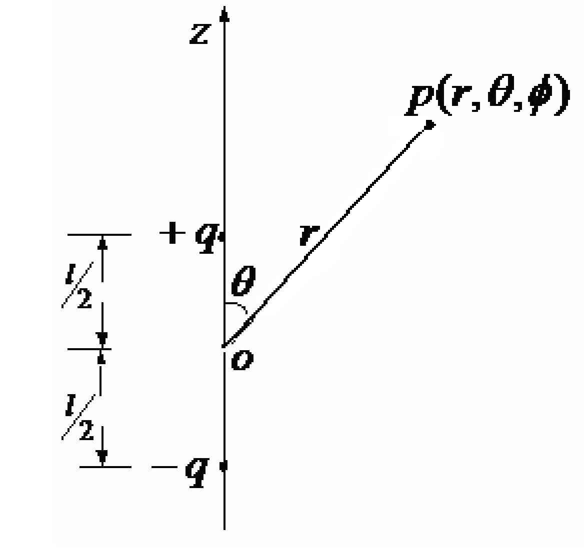
• 已知其中一个场的分布，就可以用Green定理求解另一场的分布特性。

格林定理广泛地用于电磁理论。

例 相距为l的两点电荷$+q$和$-q$的静电场，设$r>>l$，且电位

$$\phi(r,\theta,\varphi)=\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta$$

求电场强度 $\overline{E}(r,\theta,\phi)$



[解]利用球坐标的梯度公式得到

$$\overline{E}(r,\theta,\varphi)=-\nabla\phi$$

$$=-(\hat{r}\frac{\partial}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\hat{\varphi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi})\overset{\text{电偶极子}}{\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}\cos\theta$$

$$=\hat{r}\frac{2ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cos\theta+\hat{\theta}\frac{ql}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sin\theta$$

➢梯度、散度或旋度

- 梯度、散度或旋度都是微分运算，它们表示场在某点附近的变化特性，场中各点的梯度、散度或旋度可能不同。
- 梯度、散度及旋度描述的是场的点特性或称为微分特性。
- 函数的连续性是可微的必要条件。因此在场量发生不连续处，也就不存在前面定义的梯度、散度或旋度。

➢ 重要的场论公式

1. 两个零恒等式

(1) $\nabla\times(\nabla\phi)\equiv 0$

任何标量场梯度的旋度恒为零。

(2) $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F})\equiv 0$

任何矢量场的旋度的散度恒为零。

2. 拉普拉斯算子 $\nabla^2\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi)$

在直角坐标系中：$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

在圆柱坐标系中：$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

在球坐标系中：

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}(R^2\frac{\partial\phi}{\partial R}) + \frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}) + \frac{1}{R^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

3. 常用的矢量恒等式

$$\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$$

$$\nabla\cdot(\phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\nabla\phi + \phi\nabla\cdot\vec{A}$$

$$\nabla\times(\phi\vec{A}) = \nabla\phi\times\vec{A} + \phi\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A})$$

$$\nabla\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\nabla\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\nabla\times\vec{B}$$

$$\nabla\times(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\nabla\cdot\vec{B} - \vec{B}\nabla\cdot\vec{A} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B}$$

§1.5 亥姆霍兹定理 Helmholtz's Theorem

一、散度和旋度的比较

表1-1 散度与旋度的比较

	散度 $\nabla\cdot\overline{A}$	旋度 $\nabla\times\overline{A}$
定义	$\lim\limits_{\Delta v\to 0}\dfrac{\oint_s \overline{A}\cdot d\overline{s}}{\Delta v}$ 通量体密度（标量）	$\hat{n}\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{[\oint_l \overline{A}\cdot d\overline{l}]_{\max}}{\Delta s}$ 最大环量面密度（矢量）
意义	通量源强度的量度	旋涡源强度的量度
分量式	$\dfrac{\partial A_x}{\partial x}+\dfrac{\partial A_y}{\partial y}+\dfrac{\partial A_z}{\partial z}$ 取决于场分量的纵向变化率	$\hat{x}(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z})+\hat{y}(\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x})+\hat{z}(\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y})$ 取决于场分量的横向变化率

矢量场的散度唯一地确定场中任一点的通量源强度；

场的旋度唯一地确定场中任一点的旋涡源强度.

➢**如果已知矢量场的散度和旋度,则两种源都已知,因而能唯一地确定这个矢量场.**

从分量式上可以看出，散度取决于场分量的纵向变化率，而旋度取决于场的横向变化率；

因而，**散度和旋度完整地描述了场的分布特性。**

二、亥姆霍兹定理及推论

亥姆霍兹的论著：

《力的守恒》、《生物光学手册》、

《音色感觉》、《音乐理论的生理基础》

● 亥姆霍兹定理

1. 若已知某矢量的散度、旋度及边界处值，则该矢量唯一确定

2. 任一矢量可表达为一标量函数的梯度和一矢量函数的旋度之和

● Helmholtz定理

条件：若矢量场$\overline{F}$在无限空间处处单值，且其导数连续有界，而源分布在有限区域中

结论：①矢量场由其散度和旋度唯一确定。

②表示为一个标量函数的梯度和一个矢量函数的旋度之和：$\overline{F}=-\nabla\phi+\nabla\times\overline{A}$

[证] 假设在无限空间中有二矢量函数$\overline{F}$ 和$\overline{G}$，它们具有相同的散度和旋度

$$\nabla\cdot\overline{F}=\nabla\cdot\overline{G} \qquad \nabla\times\overline{F}=\nabla\times\overline{G}$$

令 $\overline{F}=\overline{G}+\overline{g}$

两边取散度和旋度，得 $\nabla\cdot\overline{F}=\nabla\cdot\overline{G}+\nabla\cdot\overline{g}$ 所以 $\nabla\cdot\overline{g}=0$

$\nabla\times\overline{F}=\nabla\times\overline{G}+\nabla\times\overline{g}$ 所以 $\nabla\times\overline{g}=0$

所以可令 $\overline{g}=\nabla\phi$

则 $\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla^2\phi=0$

这是拉普拉斯方程，已知满足拉普拉斯方程的函数不会出现极值，而ϕ是在无限空间上取值的函数，因此ϕ只能是一个常数：$\phi=C$

所以 $\overline{g}=\nabla\phi=0$ 于是 $\overline{F}=\overline{G}$ 说明已知散度和旋度的矢量是唯一的。

一个既有散度又有旋度的一般矢量场可以表示为一个无旋场 $\overline{F}_d$ (有散度)和一个无散场 $\overline{F}_c$ (有旋度)之和：

$$\overline{F} = \overline{F}_d + \overline{F}_c$$

$$\overline{F}_d = -\nabla\phi$$

$$\overline{F}_c = \nabla\times\overline{A}$$

因此，一个矢量场可表示为一个标量场的梯度和一个矢量场的旋度之和，即

$$\overline{F} = -\nabla\phi + \nabla\times\overline{A}$$

结论：研究一个矢量场必须从它的旋度和它的散度着手，

矢量场的旋度和散度满足的方程决定了矢量场的基本特性。

● 推论：

1. 梯无旋，旋无散；无旋则梯，无散则旋

2. 矢量场=有散无旋场+有旋无散场

=通量(散度)源产生的场+涡旋源产生的场

➢矢量场的惟一性定理

位于某一区域中的矢量场，当其散度、旋度以及边界上场量的切向分量或法向分量给定后，则该区域中的矢量场被惟一地确定。

已知散度和旋度代表产生矢量场的源，可见惟一性定理表明，矢量场被其源及边界条件共同决定的。

三、矢量场按源的分类

（1）无旋场

仅有散度源而无旋度源的矢量场，$\nabla \times \overline{F} \equiv 0$

性质： $\oint_C \overline{F} \cdot d\overline{l} = 0$ ，线积分与路径无关，是保守场。

无旋场可以用标量场的梯度表示为

$$\overline{F} = -\nabla u$$

$$\boxed{\nabla \times \overline{F} = -\nabla \times \left(\nabla u\right) = 0}$$

例如：静电场

$$\nabla \times \overline{E} \equiv 0 \Rightarrow \quad \overline{E} = -\nabla \varphi$$

（2）无散场

仅有旋度源而无散度源的矢量场，即 $\nabla\cdot\overline{F}\equiv 0$

性质：$\oint_S \overline{F}\cdot d\overline{S}=0$

无散场可以表示为另一个矢量场的旋度

$$\overline{F}=\nabla\times\overline{A}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\overline{F}=\nabla\cdot(\nabla\times\overline{A})\equiv 0}$$

例如，恒定磁场

$$\nabla\cdot\overline{B}=0\Rightarrow\ \overline{B}=\nabla\times\overline{A}$$

（3）无旋、无散场（源在所讨论的区域之外）

$$\nabla\times\overline{F}=0 \Rightarrow \overline{F}=-\nabla u$$

$$\nabla\cdot\overline{F}=0 \Rightarrow \nabla\cdot(-\nabla u)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2 u=0$$

（4）有散、有旋场

这样的场可分解为两部分：无旋场部分和无散场部分

$$\overline{F}(\overline{r})=\overline{F}_l(\overline{r})+\overline{F}_C(\overline{r})=-\nabla u(\overline{r})+\nabla\times\overline{A}(\overline{r})$$

无旋场部分

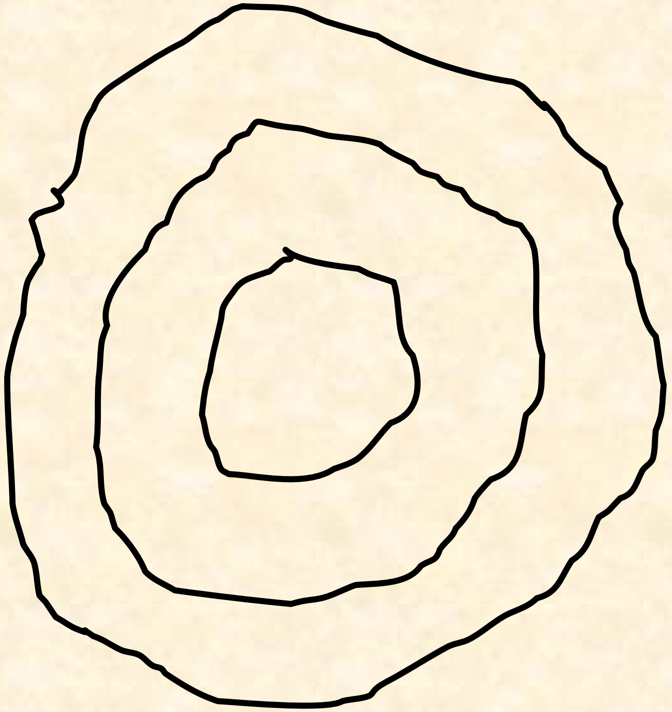
无散场部分

章末总结

一. 标量场分析

$$\varphi = \varphi(\vec{r}, t) = \varphi(\vec{r})$$

1. 等值线 例：电势 $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$



2. 引入微分，研究每一点附近的变化

3. 从方向导数到梯度

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial l}\right|_{m_0} = \lim_{\Delta l \longrightarrow 0} \frac{\varphi(M) - \varphi(M_0)}{\Delta l}$$

$$= (\hat{x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}) \cdot (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)$$

$$= \nabla \varphi \cdot \hat{l}$$

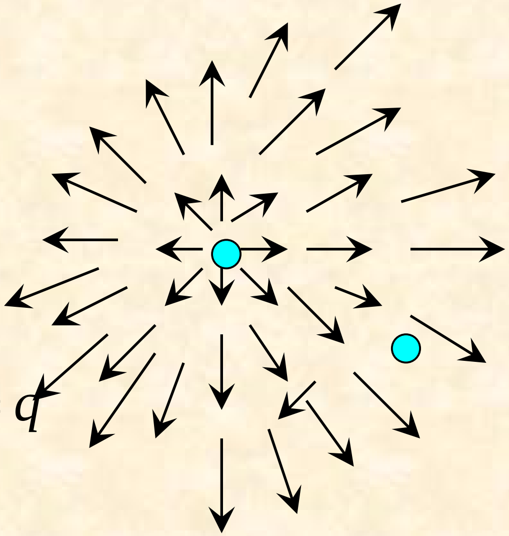
4. 梯度的思考

大小、方向、

与等值线的关系

二. 矢量场散度分析

1. 通量



$$\oiint \bar{A} \cdot \hat{n} ds$$

$$\bar{E} = \hat{r}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad \bar{D} = \varepsilon\bar{E} = \frac{q}{4\pi r^2}\hat{r} \qquad \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = q$$

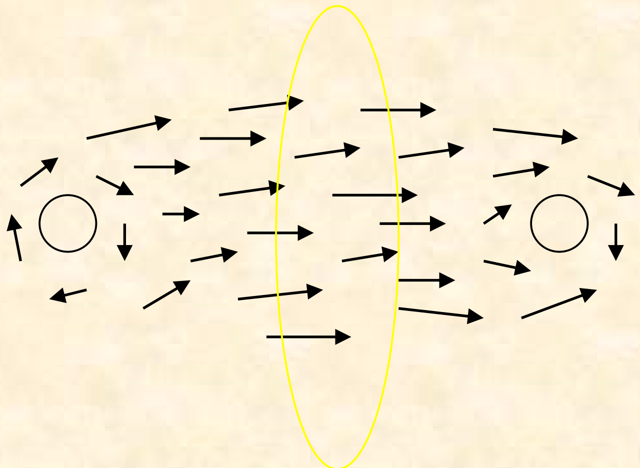
2. 散度

$$\lim_{\Delta v \to 0}\frac{\oint_s \bar{A} \cdot d\bar{s}}{\Delta v} = divgence\ \bar{A} \overset{\text{证明}}{=\!=\!=\!=} \nabla \cdot \bar{A}$$

3. 散度定理

$$\oint \bar{A} \cdot \hat{n} ds = \iiint_v \nabla \cdot \bar{A} dv$$

三. 矢量场旋度分析



1. 环量 $\oint \overline{A} \cdot d\overline{l}$

2. 旋度 $rot\ \overline{A} = curl\ \overline{A} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{[\oint_l \overline{A} \cdot d\overline{l}\,]_{\max}}{\Delta s}\hat{n}$

3. $rot\ \overline{A} \overset{\text{证明}}{=} \nabla \times \overline{A}$

四. 梯、散、旋的性质

1. 比较

散度：与矢量的各分量沿各自方向上的变化相联系

旋度：与矢量的各分量沿正交方向上的变化相联系

2. 梯无旋，旋无散

$$\nabla\cdot(\nabla\times\overline{A})=0,\qquad \nabla\times(\nabla\varphi)=0$$

3. 亥姆霍兹定理

1) 若已知一矢量场的旋度和散度及相应的边界条件，则此场唯一确定

2) 任一连续分布的矢量场可表达为一梯度和一旋度之和

五. 含两点间距离的微分关系式

1. $\overline{R}=\bar{r}-\bar{r}'=[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2}$

2. $\hat{r}=\dfrac{\overline{R}}{R}$

3. $\nabla^2(\dfrac{1}{R})=\nabla\cdot\nabla\dfrac{1}{R}=0$?

六. 散度公式与斯托克斯公式

$$\oiint_s \overline{A}\cdot d\bar{s}=\iiint_v \nabla\cdot\overline{A}dv$$

$$\oint_l \overline{A}\cdot d\bar{l}=\iint_s(\nabla\times\overline{A})\cdot d\bar{s}$$

七. 矢量微分算符 (哈密顿算子，del算子)

$$\nabla = \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

1. $$\nabla \varphi = \hat{x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

2. $$\nabla \cdot \overline{A} = (\hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z}) \cdot (\hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z)$$

$$= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3. $$\nabla \times \overline{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{x}(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}) + \hat{y}(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}) + \hat{z}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})$$

4. ∇的两次微分运算

拉普拉斯算符 ∇^2

(1) 与标量结合 $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \neq \nabla\nabla\cdot$

(2) 与矢量结合 $\nabla^2 \overline{A} = \nabla(\nabla \cdot \overline{A}) - \nabla \times \nabla \times \overline{A}$

$$\nabla \times \nabla \times \overline{A} = \nabla(\nabla \cdot \overline{A}) - \nabla^2 \overline{A}$$

$$\overline{A} \times \overline{B} \times \overline{C} = B(\overline{A} \cdot \overline{C}) - \overline{C}(\overline{A} \cdot \overline{B})$$

直角坐标系：$\nabla^2 \overline{A} = \hat{x}\nabla^2 A_x + \hat{y}\nabla^2 A_y + \hat{z}\nabla^2 A_z$