特殊情形——平面波对分界面的垂直入射

一般情形——平面波对分界面的斜入射

6.2 平面波对理想导体的斜入射

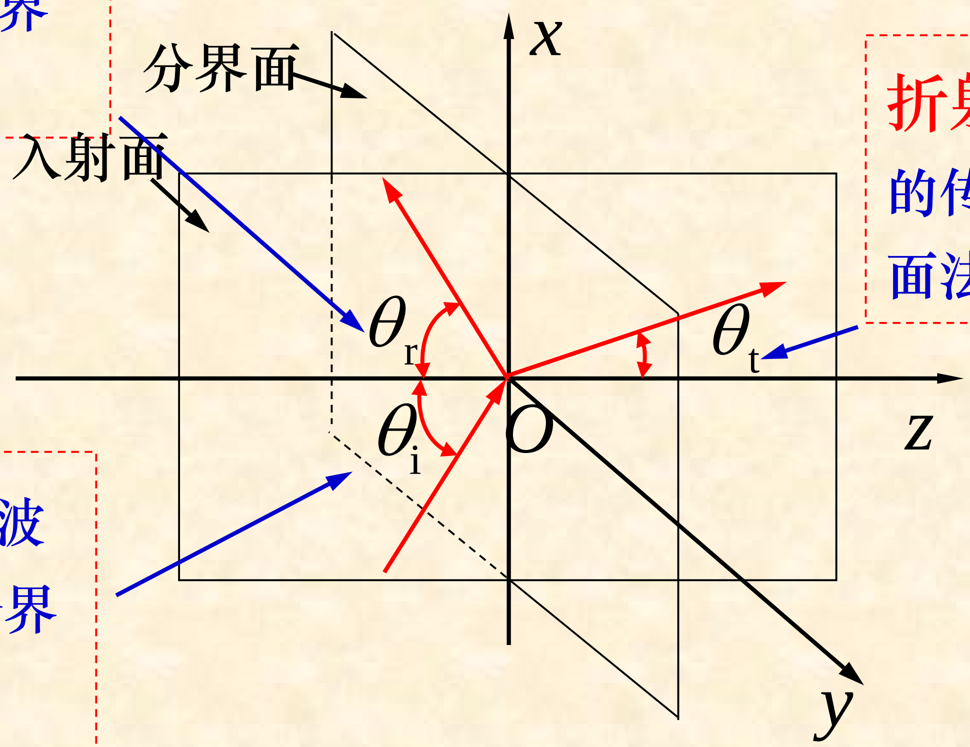
6.3 平面波对理想介质的斜入射

1. 重要概念

斜入射: 电磁波的入射方向与分界面的法线有一定夹角的入射方式。

入射面：均匀平面波的传播方向与分界面法线所构成的平面。

反射角： 反射波的传播方向与分界面法线的夹角。



折射角： 透射波的传播方向与分界面法线的夹角。

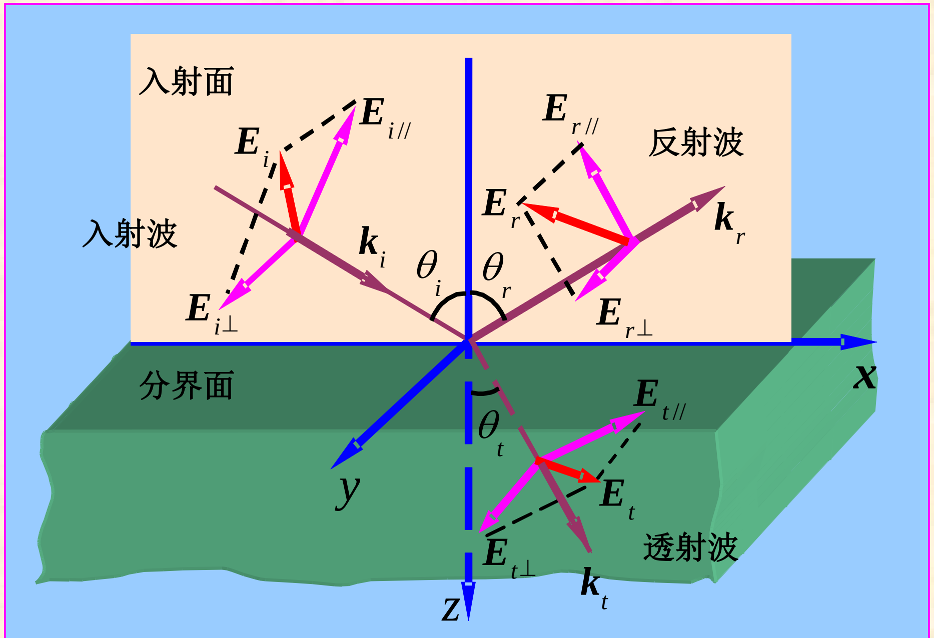
入射角： 入射波的传播方向与分界面法线的夹角。

- 垂直极化波：

电场方向与入射面垂直的平面波；

- 平行极化波：

电场方向与入射面平行的平面波。



均匀平面波对理想介质分界面的斜入射

任意极化波＝平行极化波＋垂直极化波

●斜投射时的反射系数及折射系数与平面波的极化特性有关。

§ 6.2 平面波对理想导体的斜入射

Oblique Incidence at a Perfect Conductor Boundary

本节内容

一．沿任意方向传播的平面波

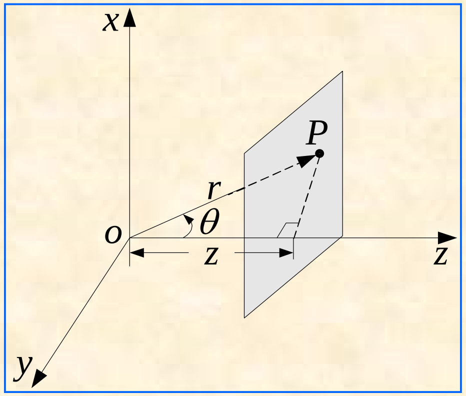
二．垂直极化波对理想导体的斜入射

三．平行极化波对理想导体的斜入射

§6．2 平面波对理想导体的斜入射

一、沿任意方向传播的平面波

1．平面波的一般数学表达式



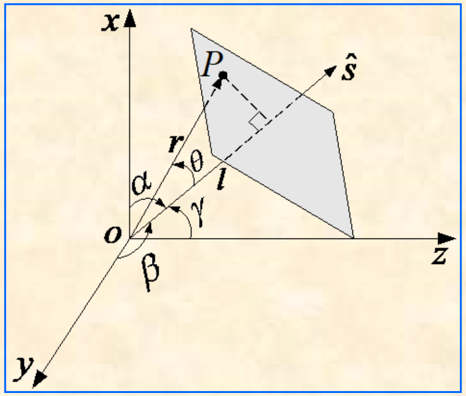


图6.2-1 沿z轴和沿任意方向传播的平面波坐标关系

◆以Z方向传播的电场$\overline{\mathbf{E}}=\overline{\mathbf{E}}_0 e^{-jkz}$ 为例

波的等相面z=const.上任意点P(x,y,z) 相对于原点的相位：$-kz=-k\hat{z}\cdot\bar{r}$

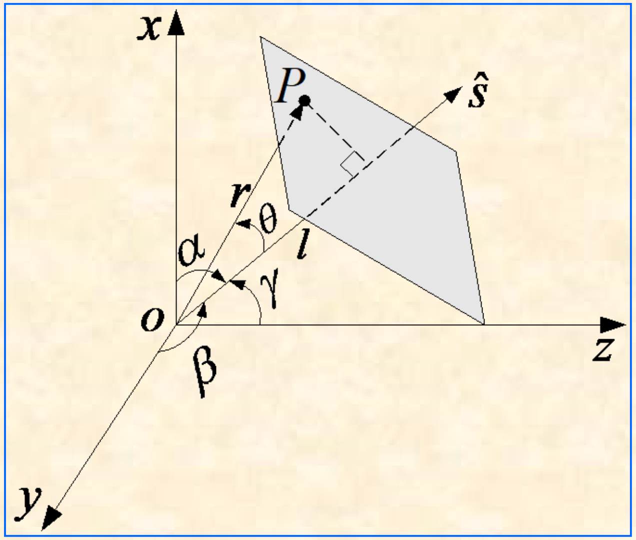
因此，P点的电场矢量 $\overline{\mathbf{E}}=\overline{\mathbf{E}}_0 e^{-jk\hat{z}\cdot\bar{r}}$

波的等相面上任意点$P(x,y,z)$相对于原点的相位:

$$-kl=-k\hat{s}\cdot\bar{r} \quad (\text{由图 } \hat{s}\cdot\bar{r}=r\cos\theta=l\ )$$

因此，P点的电场矢量　$\bar{k}=k\hat{s}$

$$\bar{E}=\bar{E}_0 e^{-jk\hat{s}\cdot\bar{r}}=\bar{E}_0 e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}$$



沿任意方向传播的平面波坐标关系

如果传播方向与x，y，z轴的夹角分别为α、β、γ,则

$$\hat{s}=\hat{x}\cos\alpha+\hat{y}\cos\beta+\hat{z}\cos\gamma$$

$$\bar{k}=k\hat{s}=\hat{x}k_x+\hat{y}k_y+\hat{z}k_z$$

$$k_x=k\cos\alpha \ ,\quad k_y=k\cos\beta \ ,\quad k_z=k\cos\gamma \qquad k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$$

∴　电场矢量为 $\bar{E}=\bar{E}_0 e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}=\bar{E}_0 e^{-j(k_x x+k_y y+k_z z)}$

$$\bar{r}=\hat{x}x+\hat{y}y+\hat{z}z$$

2. 沿任意方向传输均匀平面波的简化算法

z向均匀平面波$\left(e^{-jk\hat{z}\cdot\bar{r}}\right)$:　$\boxed{\nabla=-jk\hat{z}}$

由于
$$\begin{cases}\nabla e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}=-j\bar{k}e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}\\ \nabla\cdot(\bar{E}_0e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}})=-j\bar{k}\cdot\bar{E}_0e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}\\ \nabla\times(\bar{E}_0e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}})=-j\bar{k}\times\bar{E}_0e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}\end{cases}$$
可见$\nabla=-j\bar{k}$

s向均匀平面波$\left(e^{-j\bar{k}\cdot\bar{r}}=e^{-jk\hat{s}\cdot\bar{r}}\right)$:　$\boxed{\nabla=-j\bar{k}=-jk\hat{s}}$

因此，无源区的Maxwell方程组

$$\begin{cases}-j\bar{k}\times\bar{E}=-j\omega\mu\bar{H}\\ -j\bar{k}\times\bar{H}=j\omega\varepsilon\bar{E}\\ -j\bar{k}\cdot\bar{E}=0\\ -j\bar{k}\cdot\bar{H}=0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\bar{H}=\dfrac{1}{\eta}\hat{s}\times\bar{E} & \text{(a)}\\ \bar{E}=-\eta\hat{s}\times\bar{H} & \text{(b)}\\ \hat{s}\cdot\bar{E}=0 & \text{(c)}\\ \hat{s}\cdot\bar{H}=0 & \text{(d)}\end{cases}$$

电场和磁场互相垂直且都与传播方向垂直，电场和磁场模值相差一个常数。

该均匀平面波的平均功率流密度

$$\boxed{\bar{S}^{av}} = \mathrm{Re}[\frac{1}{2}\bar{E}\times\bar{H}^*]$$

$$= \frac{1}{2\eta}\mathrm{Re}[\bar{E}\times\hat{s}\times\bar{E}^*]$$

$$= \frac{1}{2\eta}\mathrm{Re}[(\bar{E}\cdot\bar{E}^*)\hat{s}-(\bar{E}\cdot\hat{s})\bar{E}^*]$$

$$\boxed{= \frac{1}{2\eta}|\bar{E}|^2\hat{s} = \hat{s}\frac{1}{2\eta}E_0^2}$$

波的传播方向 $\hat{s}$ 就是实功率的传输方向

P.176 例6.2-1 已知空气中一均匀平面波的磁场强度复矢量为

$$\overline{H} = (-\hat{x}A + \hat{y}2\sqrt{6} + \hat{z}4)e^{-j\pi(4x+3z)} \quad \mu A/m$$

试求：a) 波长 λ ，传播方向单位矢量及传播方向与z轴夹角 θ ；

b) 常数A；

c) 电场强度复矢量 $\overline{E}$

[解]　(a)　$\because \ \overline{k}\cdot\overline{r} = (\hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z)\cdot(\hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z) = 4\pi x + 3\pi z$

$$\therefore k_x = 4\pi, \quad k_y = 0, \qquad k_z = 3\pi \longrightarrow k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = 5\pi = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2}{5} = 0.4\text{m}$$

$$\hat{s} = \frac{\overline{\mathrm{k}}}{k} = \frac{\hat{x}4\pi + \hat{z}3\pi}{5\pi} = \hat{x}\frac{4}{5} + \hat{z}\frac{3}{5}$$

$$\cos\theta = \hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{z}} = \frac{3}{5}, \quad \theta = \arctan 0.6 = 53.13^\circ$$

（b）$\because\quad \hat{s}\cdot\overline{H}=0$

即 $(\hat{x}\dfrac{4}{5}+\hat{z}\dfrac{3}{5})\cdot(-\hat{x}A+\hat{y}2\sqrt{6}+\hat{z}4)=0$

$\therefore\quad A=3$

(c) $\overline{E}=-\eta\hat{s}\times\overline{H}$

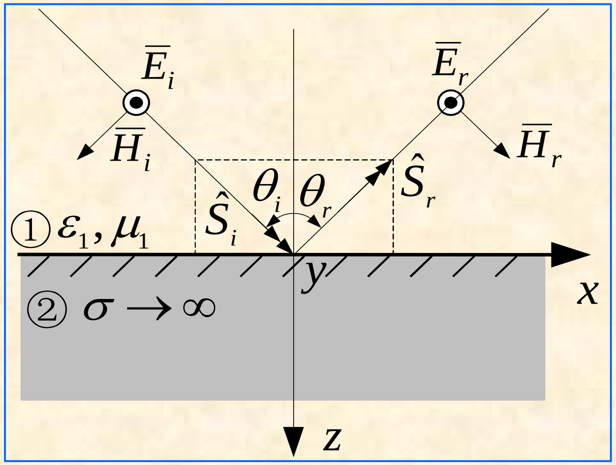
$$=-377(\hat{x}\frac{4}{5}+\hat{z}\frac{3}{5})\times(-\hat{x}A+\hat{y}2\sqrt{6}+\hat{z}4)e^{-j\pi\pi 4x+3z)}$$

$$=(\hat{x}\frac{6}{5}\sqrt{6}+\hat{y}5-\hat{z}\frac{8}{5}\sqrt{6})377e^{-j\pi\pi 4x+3z)}\mu V/m$$

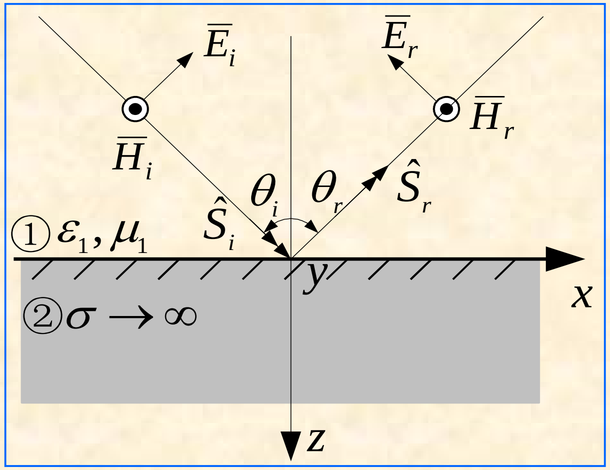
二、　垂直极化波对理想导体的斜入射

思路：入射场 $\xrightarrow{\text{BC}}$ 反射场 $\xrightarrow{\text{叠加}}$ 合成场

1.　垂直极化和平行极化



(a)　垂直极化波

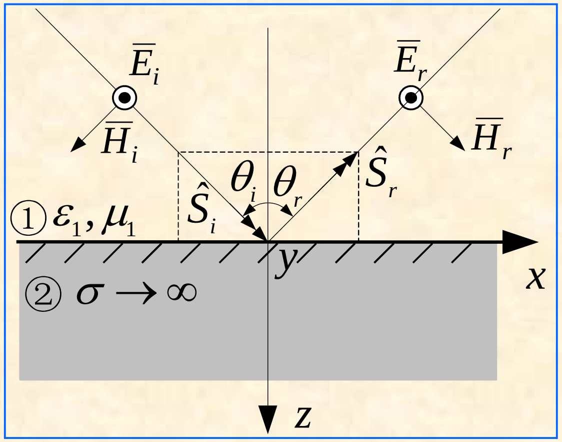


（b）平行极化波

图6.2-2　两种极化波对理想导体平面的斜入射

➢任意极化的平面波都可以分解成垂直极化波和平行极化波的合成；

2. 反射场的确定



垂直极化波对理想导体平面的斜入射

入射场： 传播矢量 $\hat{s}_i = \hat{x}\sin\theta_i + \hat{z}\cos\theta_i$ $\quad \bar{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$

$$\bar{E}_i = \hat{y}E_{i0}e^{-jk_1\hat{s}_i\cdot\bar{r}} = \hat{y}E_{i0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\bar{H}_i = \frac{1}{\eta_1}\hat{s}_i \times \bar{E}_i = (-\hat{x}\cos\theta_i + \hat{z}\sin\theta_i)\frac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

反射场: 传播矢量 $\hat{s}_r = \hat{x}\sin\theta_r - \hat{z}\cos\theta_r$

$$\overline{E}_r = \hat{y}E_{r0}e^{-jk_1\hat{s}_r\cdot\bar{r}} = \hat{y}E_{r0}e^{-jk_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

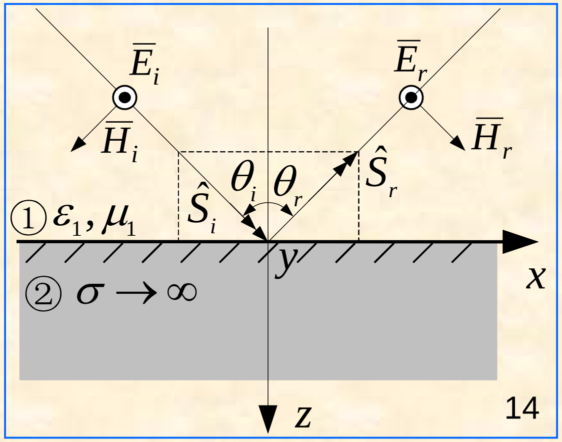
$$\overline{H}_r = \frac{1}{\eta_1}\hat{s}_r \times \overline{E}_r = (\hat{x}\cos\theta_r + \hat{z}\sin\theta_r)\frac{E_{r0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

应用BC：z=0处，切向电场为0，即 $E_{iy}\big|_{z=0} + E_{ry}\big|_{z=0} = 0$

即 $$E_{i0}e^{-jk_1 x\sin\theta_i} + E_{r0}e^{-jk_1 x\sin\theta_r} = 0$$

所以: $\theta_i = \theta_r = \theta_1$ 入射角等于反射角

$E_{r0} = -E_{i0}$ 即 $R_\perp = \dfrac{E_{r0}}{E_{i0}} = -1$



3. 合成场

区域1中的合成场 $E_y = E_{i0}(e^{-jk_1 z\cos\theta_1} - e^{jk_1 z\cos\theta_1})e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$

$$= -j2E_{i0}\sin(k_1 z\cos\theta_1)e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$$

$$H_x = -\frac{E_{i0}}{\eta_1}\cos\theta_1(e^{-jk_1 z\cos\theta_1} + e^{jk_1 z\cos\theta_1})e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$$

$$= -\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos\theta_1\cos(k_1 z\cos\theta_1)e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$$

$$H_z = \frac{E_{i0}}{\eta_1}\sin\theta_1(e^{-jk_1 z\cos\theta_1} - e^{jk_1 z\cos\theta_1})e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$$

$$= -j\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\sin\theta_1\sin(k_1 z\cos\theta_1)e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$$

合成场特点

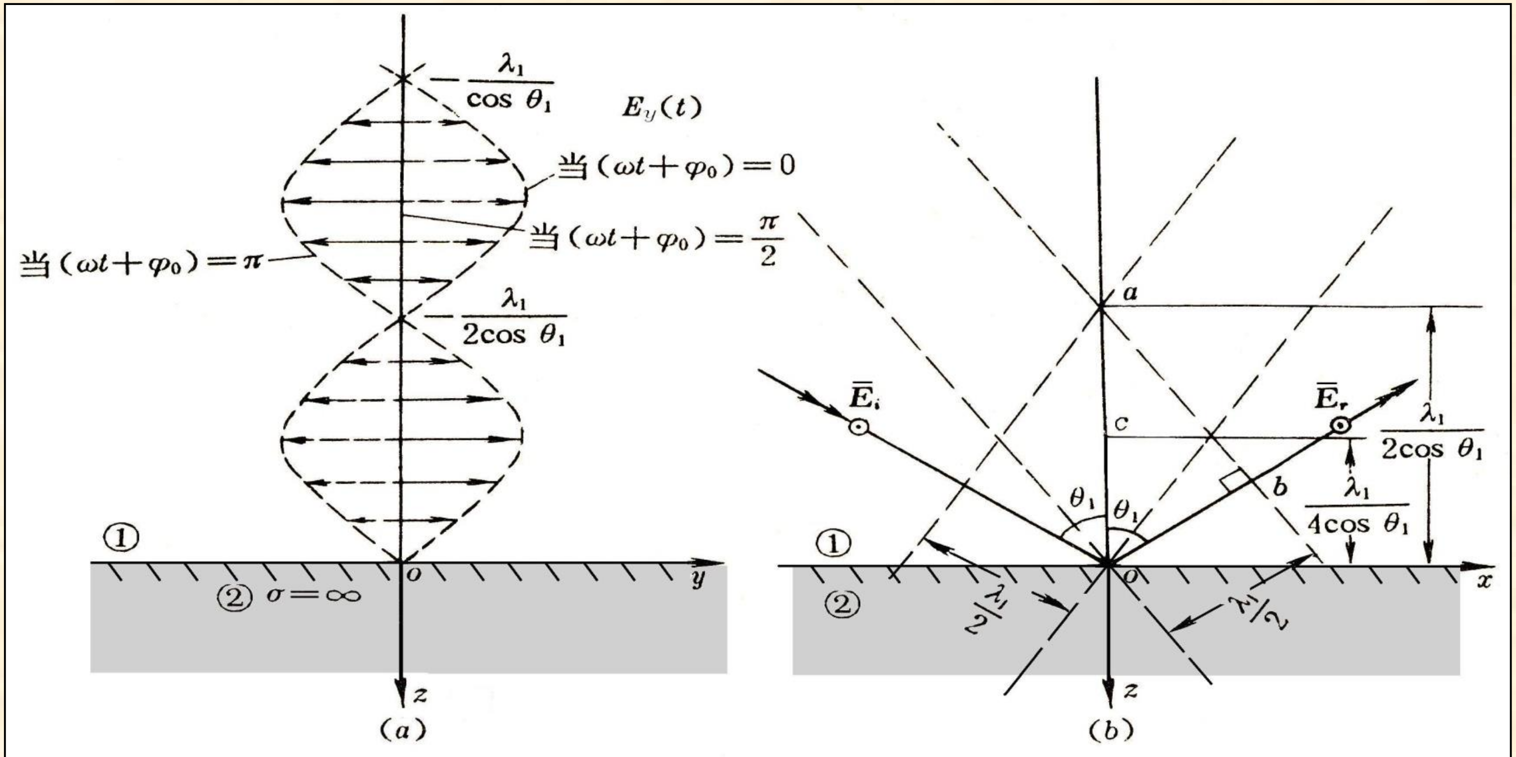
$$E_y = -j2E_{i0}\sin(k_1 z\cos\theta_1)e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$$

（1）合成场在z向为驻波 。合成电场在z向按正弦变化：

波节点，即0点位于 $k_1 z\cos\theta_1 = -n\pi$ ，即 $z = -\dfrac{n\lambda_1}{2\cos\theta_1}$，　$n = 0,1,2,\ldots$

波腹点发生于 $k_1 z\cos\theta_1 = -(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$，即 $z = \dfrac{(2n+1)\lambda_1}{4\cos\theta_1}$，　$n = 0,1,2,\ldots$

合成场的零点和最大值位置不随时间而变



(2)由 $E_y \propto e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$ 知，合成场在x向是一行波，合成场是非均匀平面波 .

合成波的相速大于光速：

相位常数 $$k_x = k_1 \sin\theta$$

相速 $$\upsilon_x = \frac{\omega}{k_x} = \frac{\omega}{k_1 \sin\theta_1} = \frac{\upsilon_1}{\sin\theta_1} \geq v_1, \qquad v_1 = \frac{\omega}{k_1} = \frac{1}{\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}$$

（3）功率和能量

沿z方向是驻波，只有虚功率，沿x方向是行波，传播实功率。

复坡印亭矢量： $$\overline{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{E}} \times \overline{\mathrm{H}}^* = \frac{1}{2}\hat{\mathbf{y}} E_y \times (\hat{x} H_x + \hat{z} H_z) = \frac{1}{2}(-\hat{z} E_y H_x + \hat{x} E_y H_z)$$

$$= -\hat{z} j \frac{E_{i0}^2}{\eta_1} \cos\theta_1 \sin(2k_1 z\cos\theta_1) + \hat{x}\frac{2E_{i0}^2}{\eta_1}\sin\theta_1 \sin^2(2k_1 z\cos\theta_1)$$

平均功率流密度

$$\overline{\mathrm{S}}^{av}=\mathrm{Re}[\overline{\mathrm{S}}]=\hat{x}\frac{2E_{i0}^{2}}{\eta_1}\sin\theta_1\sin^2(2k_1z\cos\theta_1)$$

总电磁能密度的平均值为

$$w^{av}=\frac{1}{2}\varepsilon_1E_0^2=\frac{1}{2}\varepsilon_1[4E_{i0}^{2}\sin^2(k_1z\cos\theta_1)]$$

故能量传播速度

$$v_e=\frac{S^{av}}{w^{av}}=\frac{\sin\theta_1}{\eta_1\varepsilon_1}=v_1\sin\theta_1\le v_1$$

在**x方向的能量传播速度**$v_e=v_1\sin\theta_1$，**小于光速**；且有$v_xv_e=v_1^{\ 2}$

（4）面电流

$$\bar{J}_s = \hat{n} \times \bar{H} \,|_{z=0}$$

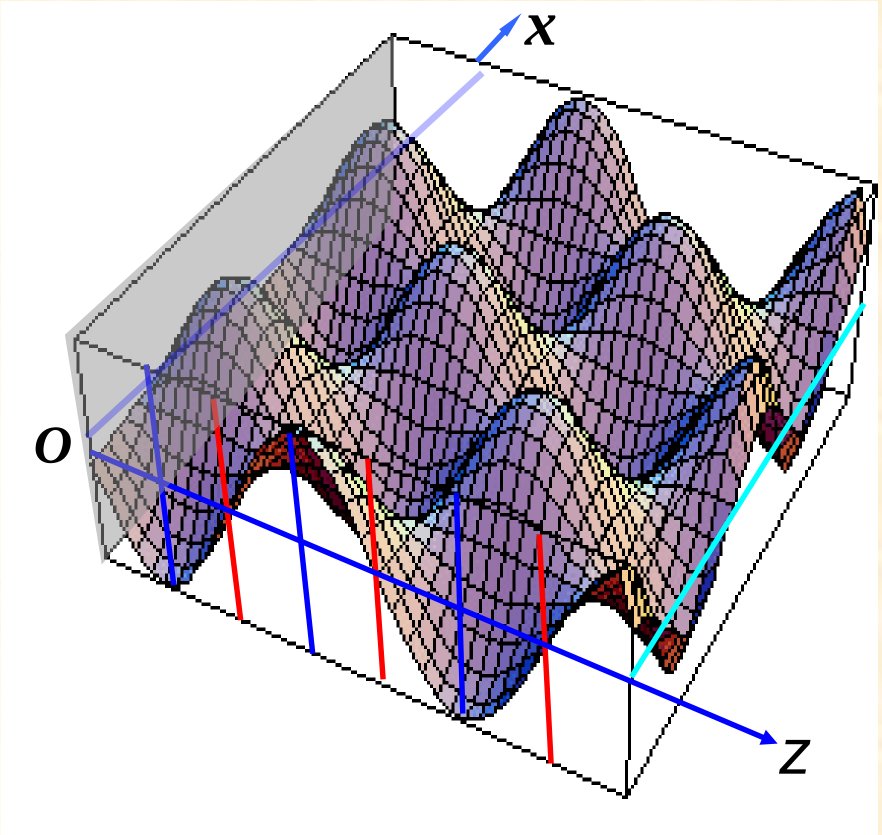
$$= -\hat{z} \times (-\hat{x}) \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos\theta_1 \cos(k_1 z \cos\theta_1) e^{-jk_1 x \sin\theta_1} \Big|_{z=0}$$

$$= \hat{y} \frac{2E_{i0}}{\eta_1} \cos\theta_1 e^{-jk_1 x \sin\theta_1}$$

（5）合成波沿传播方向有磁场分量，因此**不是TEM波**。

但由于电场只有横向y方向分量，所以称之为**横电波TE波.**

合成波的特点

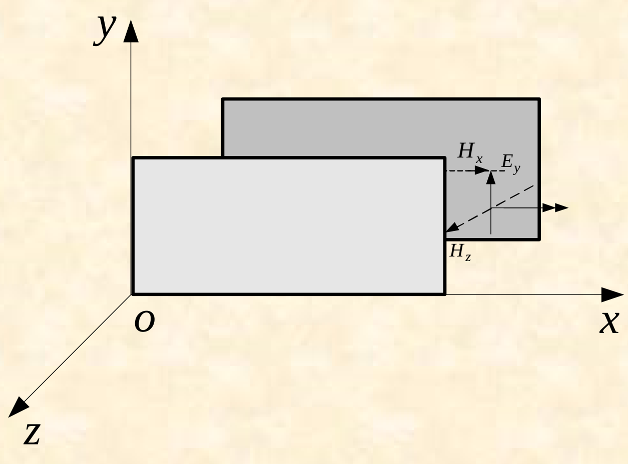


- 合成波是沿 x 方向的行波，其振幅沿 z 方向成驻波分布，是非均匀平面波；

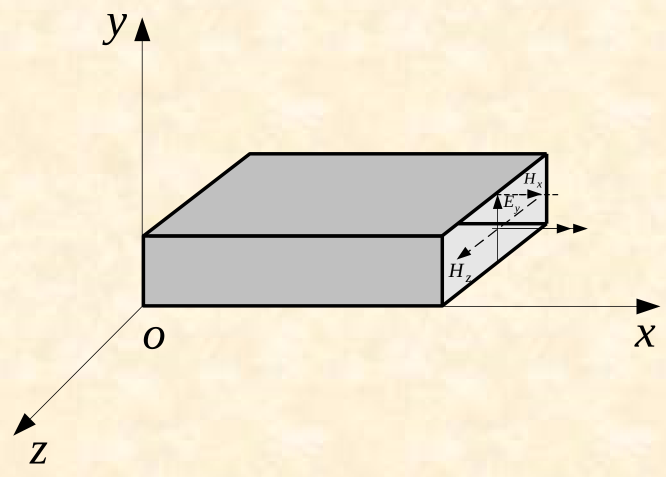
- 合成波电场垂直于传播方向，而磁场则存在 x 分量，这种波 称为横电波，即TE 波；

合成波电场在 $z=-n\lambda_1/2\cos\theta_1$ 处为零，因此在该处（例如取n=1）放置一理想导电平板并不会破坏原来的场分布。这表明，在两块平行导体板间可以传播TE波。—**平行板波导**，如图6.2-5(a)所示。

假如再放置两块平行导体板垂直于y轴，由于电场与该表面相垂直，因而仍不会破坏场的边界条件。这样，在这四块板所形成的矩形截面空间中也可传播TE波。—**矩形波导**，如图6.2-5(b)所示。

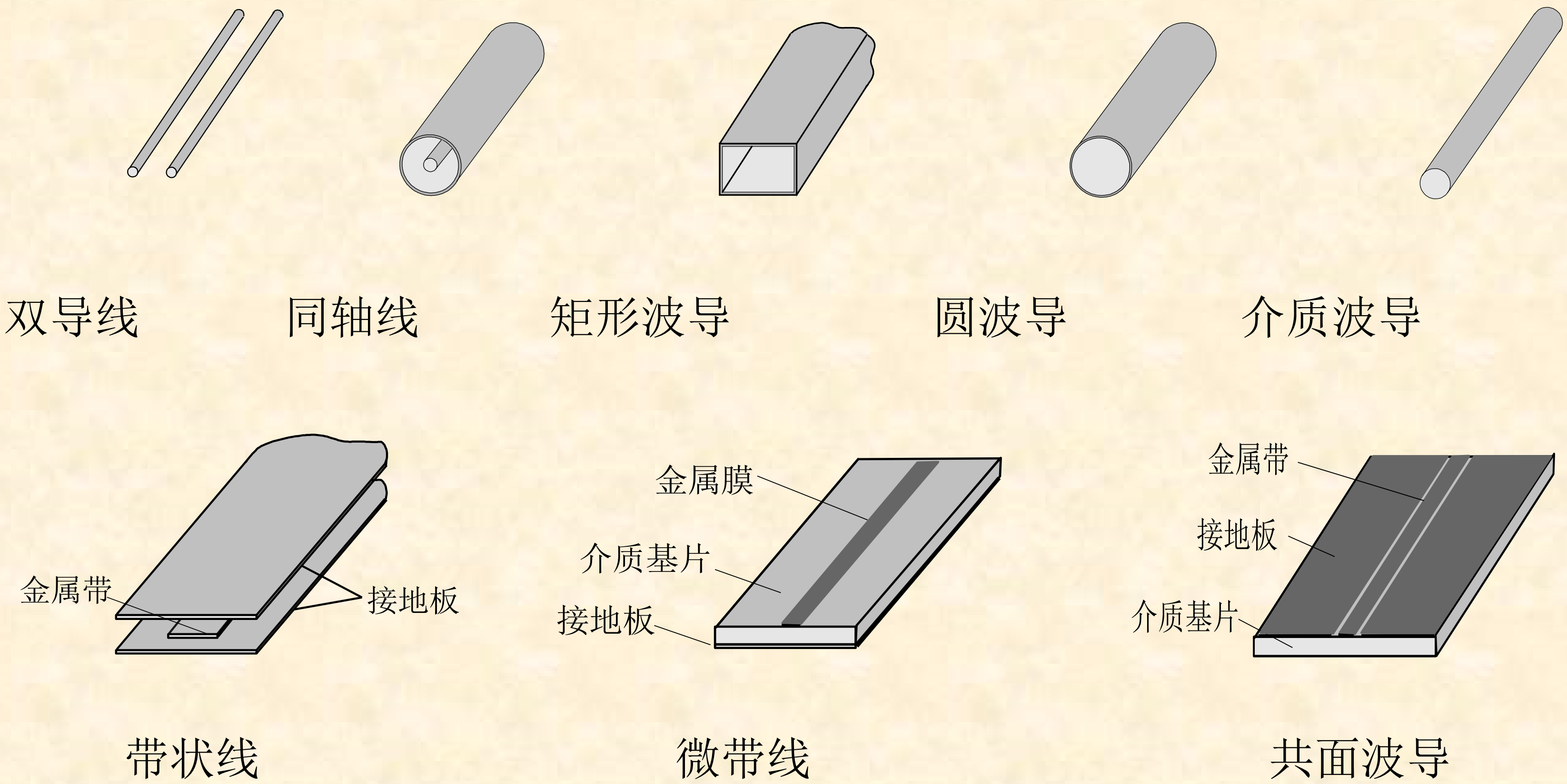


(a)



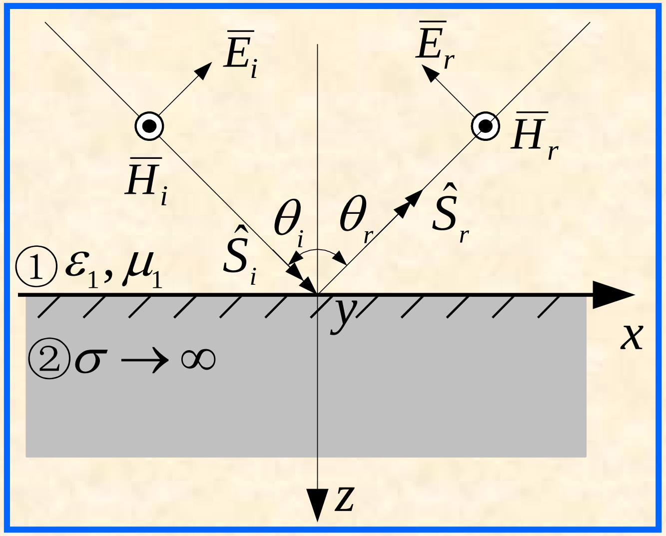
(b)

图6.2-5 平行板波导和矩形波导


双导线
同轴线
矩形波导
圆波导
介质波导
金属带
接地板
带状线
金属膜
介质基片
接地板
微带线
金属带
接地板
介质基片
共面波导

几种微波传输线

三、平行极化波对理想导体的斜入射

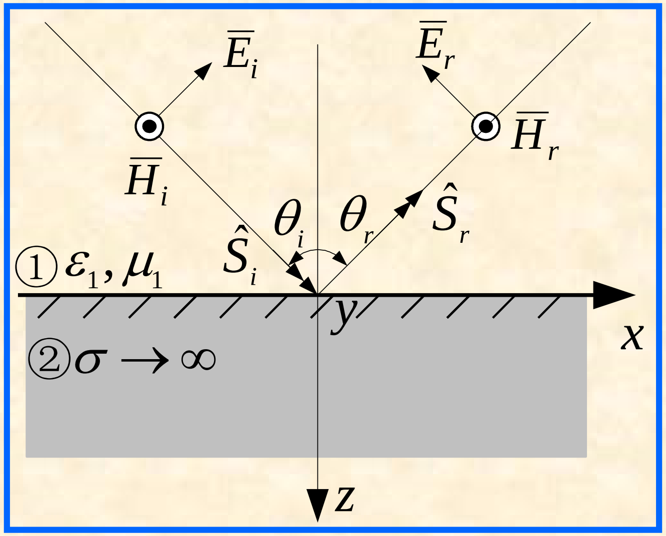


1. 反射场的确定

入射场：　传播矢量　$\hat{s}_i = \hat{x}\sin\theta_i + \hat{z}\cos\theta_i$

$$\overline{E}_i = (\hat{x}\cos\theta_i - \hat{z}\sin\theta_i)E_{i0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\overline{H}_i = \frac{1}{\eta_1}\hat{s}_i \times \overline{E}_i = \hat{y}\frac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$



反射场：　传播矢量 $\hat{s}_r = \hat{x}\sin\theta_r - \hat{z}\cos\theta_r$

$$\overline{E}_r = -(\hat{x}\cos\theta_r + \hat{z}\sin\theta_r)E_{r0}e^{-jk_1(x\sin\theta_r - z\cos\theta_r)}$$

$$\overline{H}_r = \hat{y}\frac{E_{r0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}$$

应用BC：　z=0处的切向电场连续$E_{ix}|_{z=0} + E_{rx}|_{z=0} = 0$

即　$\cos\theta_i E_{i0}e^{-jk_1\mathbf{x}\sin\theta_i} - \cos\theta_r E_{r0}e^{-jk_1\mathbf{x}\sin\theta_r} = 0$

故　$\boxed{\theta_i = \theta_r = \theta_1}$　入射角等于反射角

$\boxed{E_{i0} = E_{r0}}$　即 $R_{//} = \dfrac{E_{r0}}{E_{i0}} = 1$　（注意：二矢量方向相反！）

2. 合成场

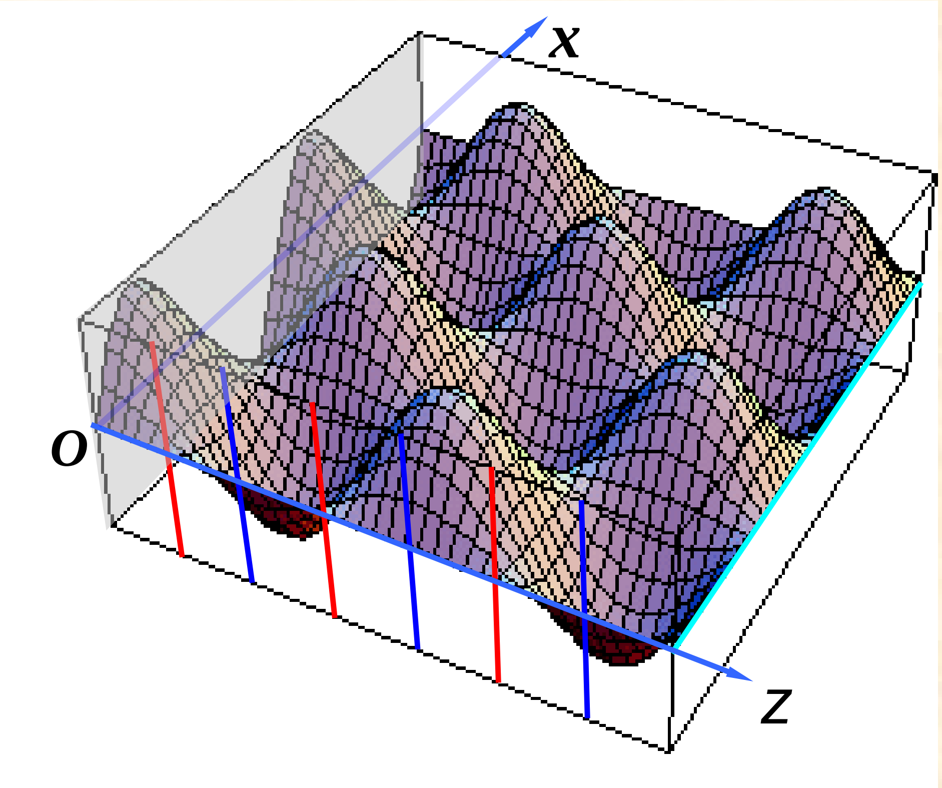
区域1的合成场：

$$E_x = -j2E_{i0}\cos\theta_1 \sin(k_1 z\cos\theta_1)e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$$

$$E_z = -2E_{i0}\sin\theta_1 \cos(k_1 z\cos\theta_1)e^{-jk_1 x\sin\theta_1}$$

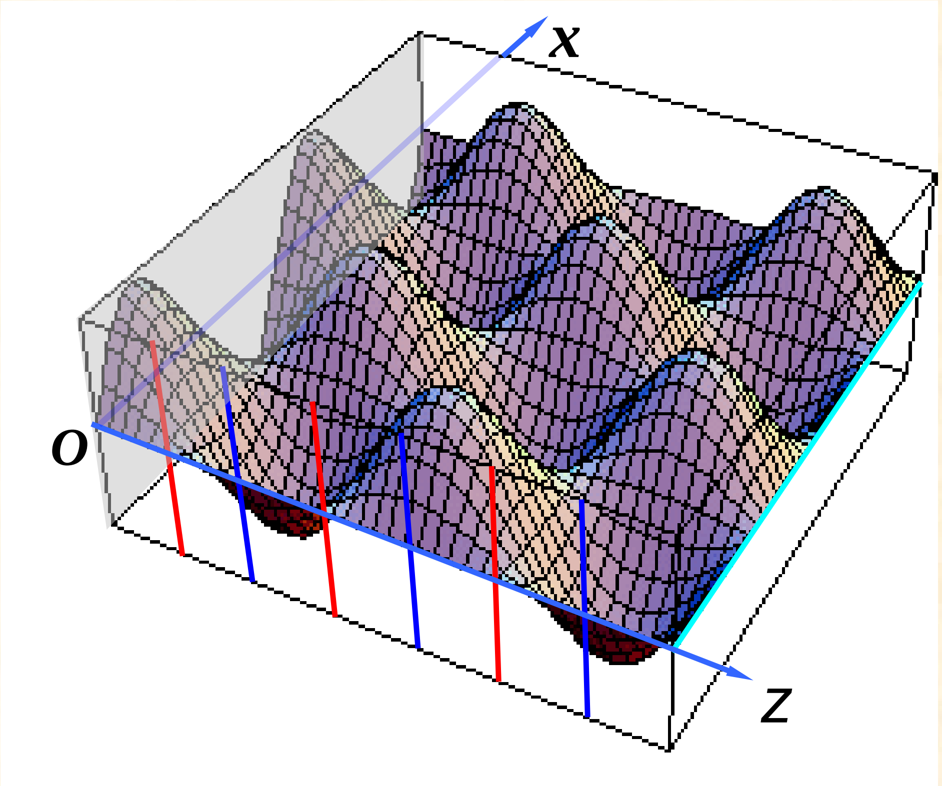
$$H_y = \frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos(k_1 z\cos\theta_1)e^{-jk_1 x\sin\theta_i}$$

合成波的特点

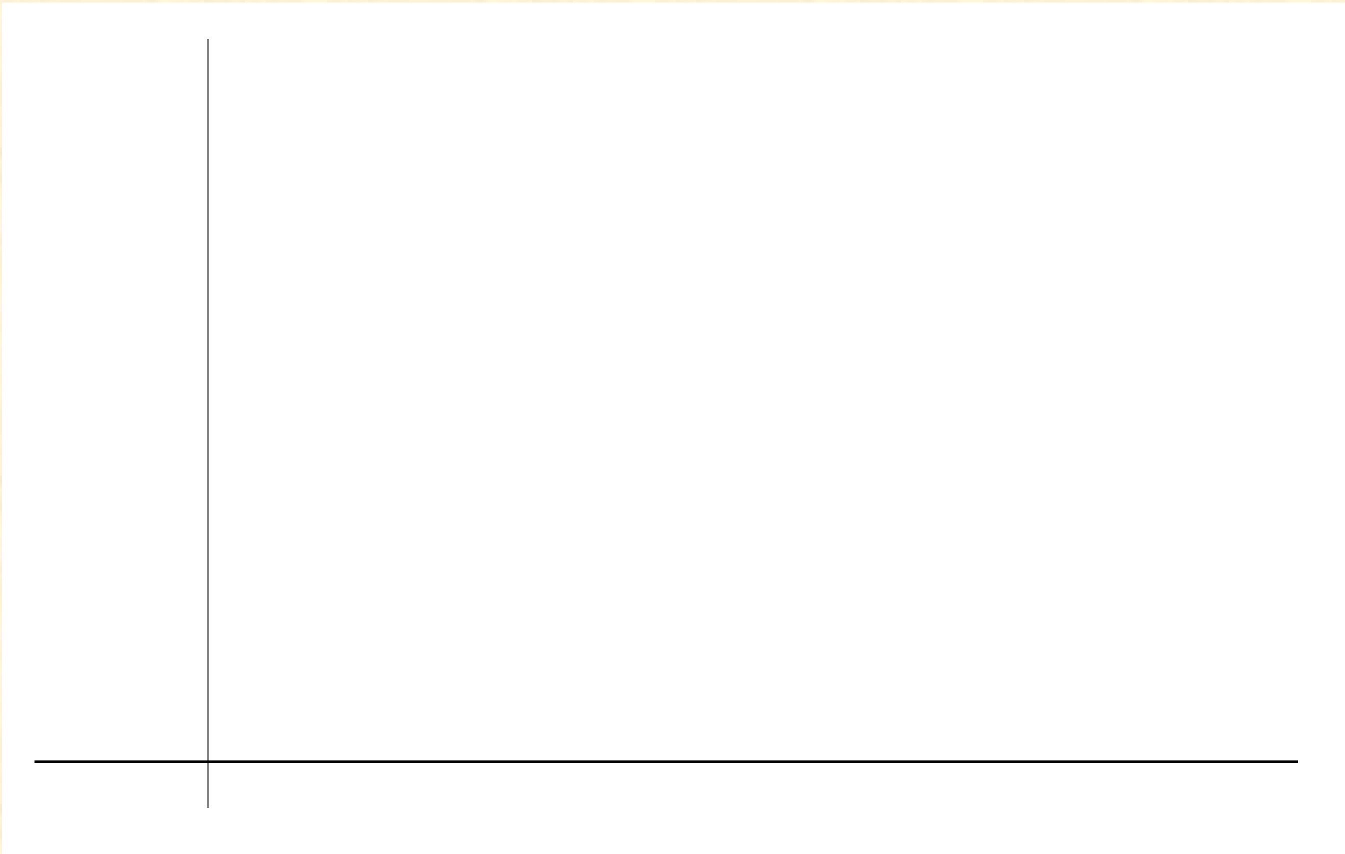


- 合成波是沿x方向的行波，有实功率; 其振幅沿 z 方向成驻波分布，是非均匀平面波;

- 合成波磁场垂直于传播方向，而电场则存在x分量，这种波 称为横磁 (TM) 波，也称为E波;



- 在 $z=-n\lambda_1/(2\cos\theta_i)$ 处，合成波电场的 $E_{1x}=0$，如果在此处放置一块无限大的理想导电平面，则不会破坏原来的场分布，这就意味着在两块相互平行的无限大理想导电平面之间可以传播 TM 波。



standing wave

例　均匀平面波由空气入射于理想导体平面，如图所示。入射电场复矢量为

$$\bar{E}_i = \left(\hat{x}\frac{\sqrt{3}}{2} + \hat{y}j + \hat{z}A\right)e^{-j\pi\left(x+\sqrt{3}z\right)/2}(mV/m)$$

试求：a) 波长λ_0 和入射波传播方向单位矢量$\hat{S}_i$ ；

b) 入射角θ_i 和常数A;

c) 反射波电场强度复矢量 ；

[解]　a)　$\bar{k}_i = \pi\left(\hat{x}+\sqrt{3}\hat{z}\right)/2$

$$k_i = \sqrt{k_{ix}{}^2 + k_{iy}{}^2 + k_{iz}{}^2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{1+3} = \pi = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

$$\therefore \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{\pi} = 2m$$

$$\hat{s}_i = \frac{\bar{k}_i}{k_i} = \left(\hat{x}+\sqrt{3}\hat{z}\right)/2$$

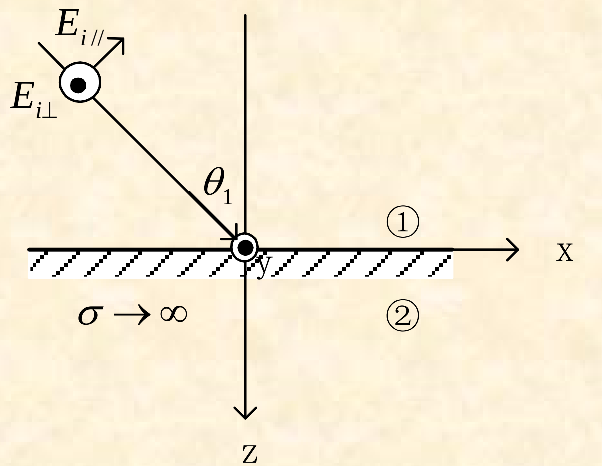


图3

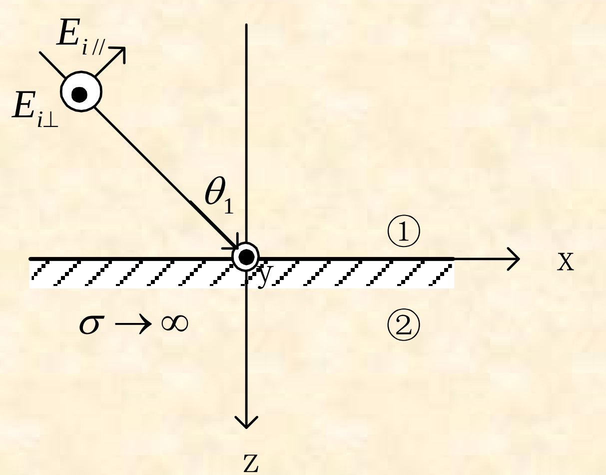


图3

b) $\cos\theta = \hat{s}_i\cdot\hat{z} = \sqrt{3}/2 \quad \therefore \quad \theta = 30^\circ$

由 $\hat{s}_i\cdot E_i = 0 \rightarrow \left(\hat{x}+\sqrt{3}\hat{z}\right)\cdot\left(\hat{x}\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\hat{y}j+\hat{z}A\right) = 0 \quad \therefore \quad A = -\dfrac{1}{2}$

c) $\because \quad \hat{s}_r = \left(\hat{x}-\sqrt{3}\hat{z}\right)/2$

$$\bar{k}_r = \hat{s}_r k_i = \pi\left(\hat{x}-\sqrt{3}\hat{z}\right)/2$$

$$R_\perp = -1, \quad R_{//} = 1$$

$$\therefore \quad \bar{E}_r = \bar{E}_{r//}+\bar{E}_{r\perp} = \left[\left(-\hat{x}\frac{\sqrt{3}}{2}-\hat{z}\frac{1}{2}\right)R_{//}+\left(\hat{y}j\right)R_\perp\right]e^{-j\pi(x-\sqrt{3}z)/2}$$

$$= -\left(\hat{x}\frac{\sqrt{3}}{2}+\hat{y}j+\hat{z}\frac{1}{2}\right)e^{-j\pi(x-\sqrt{3}z)/2}$$

§6.3　平面波对理想介质的斜入射

Oblique Incidence at Lossless Dielectric Boundary

理想导体（只有反射无透射）→**理想介质**(反射和透射）

一、相位匹配条件和斯奈尔定律

研究反射波和折射波的传播方向和相位。

入射波、反射波和折射波的传播矢量：

$$\bar{k}_i = \hat{s}_i k_i = \hat{x}k_{ix} + \hat{y}k_{iy} + \hat{z}k_{iz}$$

$$\bar{k}_r = \hat{s}_r k_r = \hat{x}k_{rx} + \hat{y}k_{ry} + \hat{z}k_{rz}$$

$$\bar{k}_t = \hat{s}_t k_t = \hat{x}k_{tx} + \hat{y}k_{ty} + \hat{z}k_{tz}$$

其中
$$k_i = k_r = k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}$$

$$k_t = k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}$$

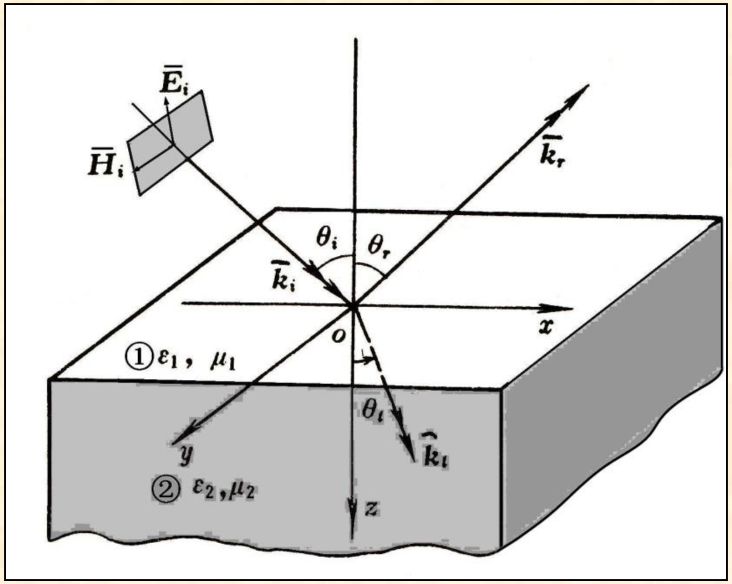


图6.3-1　平面波的斜入射

入射波、反射波和折射波的电场强度复矢量：

$$\bar{E}_i = \bar{E}_{i0}\, e^{-j\bar{k}_i \cdot \bar{r}}$$
$$\bar{E}_r = \bar{E}_{r0}\, e^{-j\bar{k}_r \cdot \bar{r}}$$
$$\bar{E}_t = \bar{E}_{t0}\, e^{-j\bar{k}_t \cdot \bar{r}}$$

BC： 分界面（z=0 ）两侧的电场切向分量连续

$$E_{i0}^{tg} e^{-j(k_{ix}x + k_{iy}y)} + E_{r0}^{tg} e^{-j(k_{rx}x + k_{ry}y)} = E_{t0}^{tg} e^{-j(k_{tx}x + k_{ty}y)}$$

要使等式在分界面上处处成立，必须使 $k_{ix}x + k_{iy}y = k_{rx}x + k_{ry}y = k_{tx}x + k_{ty}y$

故有

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = k_x$$
$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_y$$

——相位匹配条件

- 表明反射波及透射波的相位沿分界面的变化始终与入射波保持一致。
- 由相位匹配条件可以推出反射定律和斯奈尔折射定律；

由相位匹配条件推导反射定律和斯奈尔折射定律

设入射面位于xoz上，上式得到

$$k_1 \cos a_i = k_1 \cos a_r = k_2 \cos a_t$$

$$0 = k_1 \cos 90^\circ = k_1 \cos \beta_r = k_2 \cos \beta_t$$

因此

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = k_x$$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_y$$

（1）　反射线和折射线同时位于入射面内

而 $a_i = \dfrac{\pi}{2} - \theta_i \qquad a_r = \dfrac{\pi}{2} - \theta_r \qquad a_t = \dfrac{\pi}{2} - \theta_t$

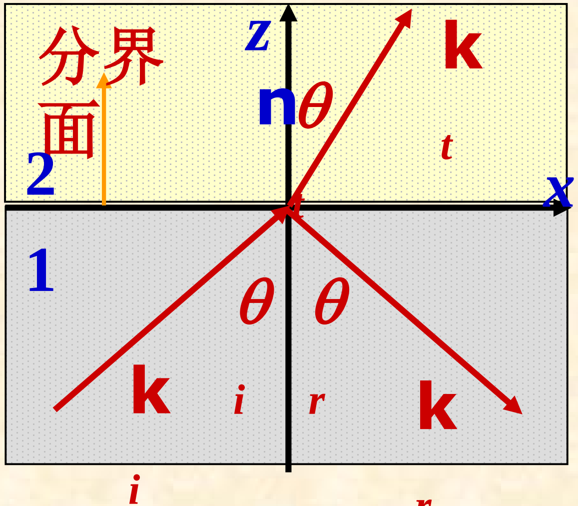
故

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t \qquad (2)$$

由 $k_1 \sin\theta_{\mathrm{i}} = k_1 \sin\theta_{\mathrm{r}}$，得

$$\boxed{\theta_{\mathrm{r}} = \theta_{\mathrm{i}}}$$ —— 反射角 θ_{r} 等于入射角 θ_{i}

（斯耐尔反射定律）



由 $k_1 \sin\theta_{\mathrm{i}} = k_2 \sin\theta_{\mathrm{t}}$，得

$$\boxed{\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{k_1}{k_2} = \sqrt{\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}}$$ —— 折射角 θ_t 与入射角 θ_i 的关系

（斯耐尔折射定律）

式中 $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$，$k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$。 $(\mu_1 = \mu_2, n_i = \sqrt{\varepsilon_{ri}})$

上述两条结论总称为斯耐尔定律。

斯耐尔定律描述了电磁波的反射和折射规律，具有广泛应用。

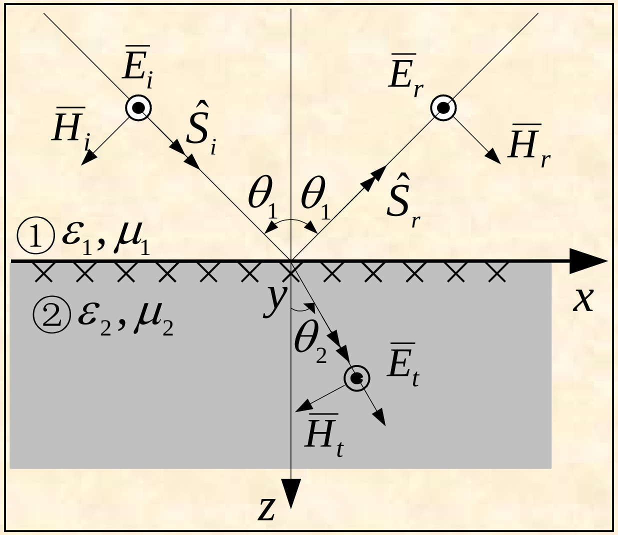
二、菲涅耳公式（入射波、反射波和折射波的相对振幅关系 ）

1. 垂直极化波

入射场：　入射波的传播矢量 $\hat{s}_i = \hat{x}\sin\theta_1 + \hat{z}\cos\theta_1$

$$\overline{E}_i = \hat{y}E_{i0}e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

$$\overline{H}_i = (-\hat{x}\cos\theta_1 + \hat{z}\sin\theta_1)\frac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-jk_1(\mathbf{x}\sin\theta_1 + \mathbf{z}\cos\theta_1)}$$



(a) 垂直极化波

图6.3-4　两种极化波对理想介质平面的斜入射

反射场：$\theta_1 \to (\pi - \theta_1), \quad E_{i0} \to R_\perp E_{i0}$

反射场的传播矢量

$$\hat{s}_r = \hat{x}\sin\theta_1 - \hat{z}\cos\theta_1 = \hat{x}\sin(\pi-\theta_1) + \hat{z}\cos(\pi-\theta_1)$$

$$\overline{E}_r = \hat{y}R_\perp E_{i0}e^{-jk_1(x\sin\theta_1 - z\cos\theta_1)}$$

$$\overline{H}_r = (\hat{x}\cos\theta_1 + \hat{z}\sin\theta_1)\frac{R_\perp E_{i0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_1 - z\cos\theta_1)}$$

折射场: $\theta_1 \to \theta_2,\quad E_{i0} \to T_\perp E_{i0},\quad k_1,\eta_1 \to k_2,\eta_2$

传播矢量 $\hat{s}_t = \hat{x}\sin\theta_2 + \hat{z}\cos\theta_2$

$$\overline{\mathrm{E}}_t = \hat{y} T_\perp E_{i0} e^{-jk_2(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2)}$$

$$\overline{\mathrm{H}}_t = (-\hat{x}\cos\theta_2 + \hat{z}\sin\theta_2)\frac{T_\perp E_{i0}}{\eta_2} e^{-jk_2(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2)}$$

BC❶: z＝0处1区的合成电场切向分量(y分量) 应该等于2区的电场强度切向分量

$$E_{i0} e^{-jk_1 x\sin\theta_i} + R_\perp E_{i0} e^{-jk_1 x\sin\theta_1} = T_\perp E_{i0} e^{-jk_2 x\sin\theta_2}$$

BC❷: z=0面上磁场强度的切向分量(x分量)连续

$$-\cos\theta_1 \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-jk_1 x\sin\theta_1} + \cos\theta_1 \frac{R_\perp E_{i0}}{\eta_1} e^{-jk_1 x\sin\theta_1} = -\cos\theta_2 \frac{T_\perp E_{i0}}{\eta_2} e^{-jk_2 x\sin\theta_2}$$

应用相位匹配条件 $k_1 \sin\theta_1 = k_2 \sin\theta_2$

上两式化为:

$$\begin{cases} R_{\perp} = \dfrac{\eta_2 \cos\theta_1 - \eta_1 \cos\theta_2}{\eta_2 \cos\theta_1 + \eta_1 \cos\theta_2} \\[2ex] T_{\perp} = \dfrac{2\eta_2 \cos\theta_1}{\eta_2 \cos\theta_1 + \eta_1 \cos\theta_2} \end{cases}$$

当$\mu_1 = \mu_2$

$$\boxed{\begin{cases} R_{\perp} = \dfrac{n_1 \cos\theta_1 - n_2 \cos\theta_2}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \\[2ex] T_{\perp} = \dfrac{2n_2 \cos\theta_1}{n_1 \cos\theta_1 + n_2 \cos\theta_2} \end{cases}}$$

思考 导出垂直入射于理想介质时的反射系数和透射系数

2. 平行极化波

入射场：

$$\overline{\mathrm{E}}_i = (\hat{x}\cos\theta_1 - \hat{z}\sin\theta_1)E_{i0}e^{-jk_1(x\sin\theta_1 + z\cos\theta_1)}$$

$$\overline{\mathrm{H}}_i = \hat{y}\frac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_i + z\cos\theta_i)}$$

反射场：

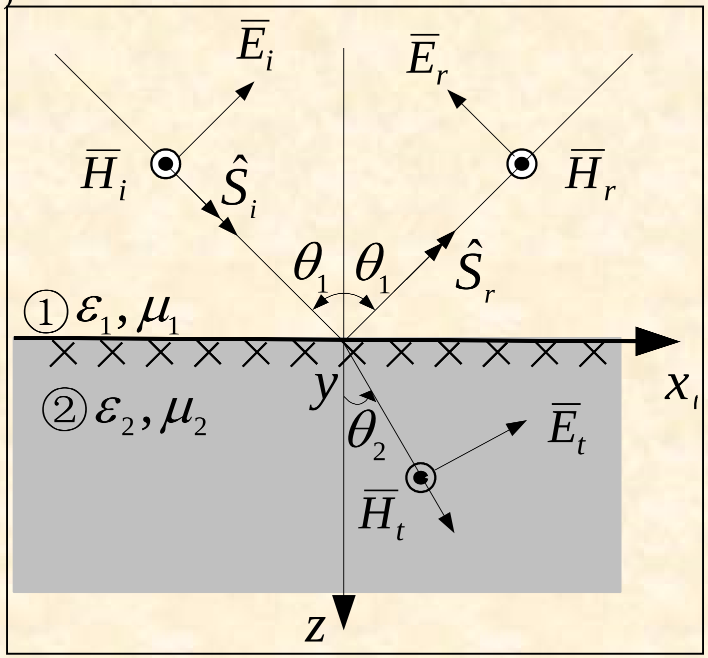
$$\overline{\mathrm{E}}_r = -(\hat{x}\cos\theta_1 + \hat{z}\sin\theta_1)R_{//}E_{i0}e^{-jk_1(\mathbf{x}\sin\theta_i - \mathbf{z}\cos\theta_i)}$$

$$\overline{\mathrm{H}}_r = \hat{y}\frac{R_{//}E_{i0}}{\eta_1}e^{-jk_1(x\sin\theta_i - z\cos\theta_i)}$$

折射场：

$$\overline{\mathrm{E}}_t = (\hat{x}\cos\theta_2 - \hat{z}\sin\theta_2)T_{//}E_{i0}e^{-jk_2(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2)}$$

$$\overline{\mathrm{H}}_t = \hat{y}\frac{T_{//}E_{i0}}{\eta_2}e^{-jk_2(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2)}$$



(b) 平行极化波

图6.3-4 两种极化波对理想介质平面的斜入射

BC：分界面上的切向电场E_x连续，切向磁场H_y连续，并考虑相位匹配条件

$$\cos\theta_1(1-R_{//})=\cos\theta_2 T_{//}$$
$$\frac{1}{\eta_1}(1+R_{//})=\frac{1}{\eta_2}T_{//}$$

解得

$$\begin{cases} R_{//}=\dfrac{\eta_1\cos\theta_1-\eta_2\cos\theta_2}{\eta_1\cos\theta_1+\eta_2\cos\theta_2} \\ T_{//}=\dfrac{2\eta_2\cos\theta_1}{\eta_1\cos\theta_1+\eta_2\cos\theta_2} \end{cases}$$

当$\mu_1=\mu_2$

$$\begin{cases} R_{//}=\dfrac{n_2\cos\theta_1-n_1\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2} \\ T_{//}=\dfrac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_1+n_1\cos\theta_2} \end{cases}$$

小结

- 分界面上的相位匹配条件

$$k_1 \sin\theta_\mathrm{i} = k_1 \sin\theta_\mathrm{r} = k_2 \sin\theta_\mathrm{t}$$

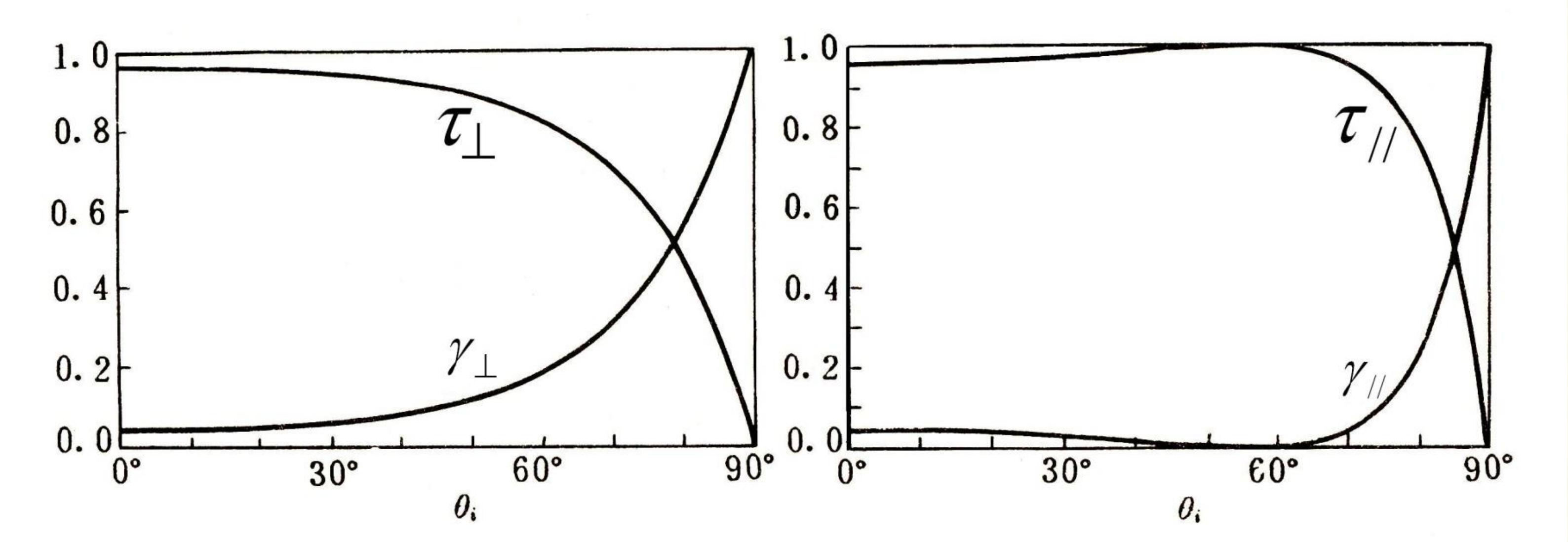
- 反射定律　$\theta_\mathrm{i} = \theta_\mathrm{r}$

- 折射定律　$k_1 \sin\theta_\mathrm{i} = k_2 \sin\theta_\mathrm{t}$　或　$n_1 \sin\theta_\mathrm{i} = n_2 \sin\theta_\mathrm{t}$

- 反射系数、折射系数与两种媒质性质、入射角大小以及入射波的极化方式有关，由菲涅尔公式确定。

P. 188

例6. 3-2　均匀平面波自空气斜入射于=2. 25的理想介质平面，试求分界面上单位面积的反射功率百分比和透射功率百分比。



（a）　　　　　　　　　　　(b)

图6.3-5 $n_1=1$，$n_2=1.5$时的反射功率百分比和透射功率百分比