

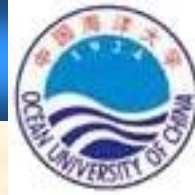


第2章 电磁场基本方程

Fundamental Equations of Electromagnetic Fields

- ◆ 1831年法拉第发现了电磁感应现象，促使了发电机的发明和人类电气时代的到来。
- ◆ 1864年麦克斯韦创立了普遍的电磁场方程组—麦克斯韦方程组，它是宏观电磁现象的基本规律，是本书学习的核心。

本章将在复习“大学物理”电磁学部分的基础上，导出麦氏方程组，然后讨论它的边界条件、电磁场的能量关系和惟一性定理。这些是本课程其它章节的共同基础。



主要内容

2.1.3 电荷、电流、电荷守恒定律

2.1 静态电磁场的基本定律

2.2 法拉第电磁感应定律和全电流定律

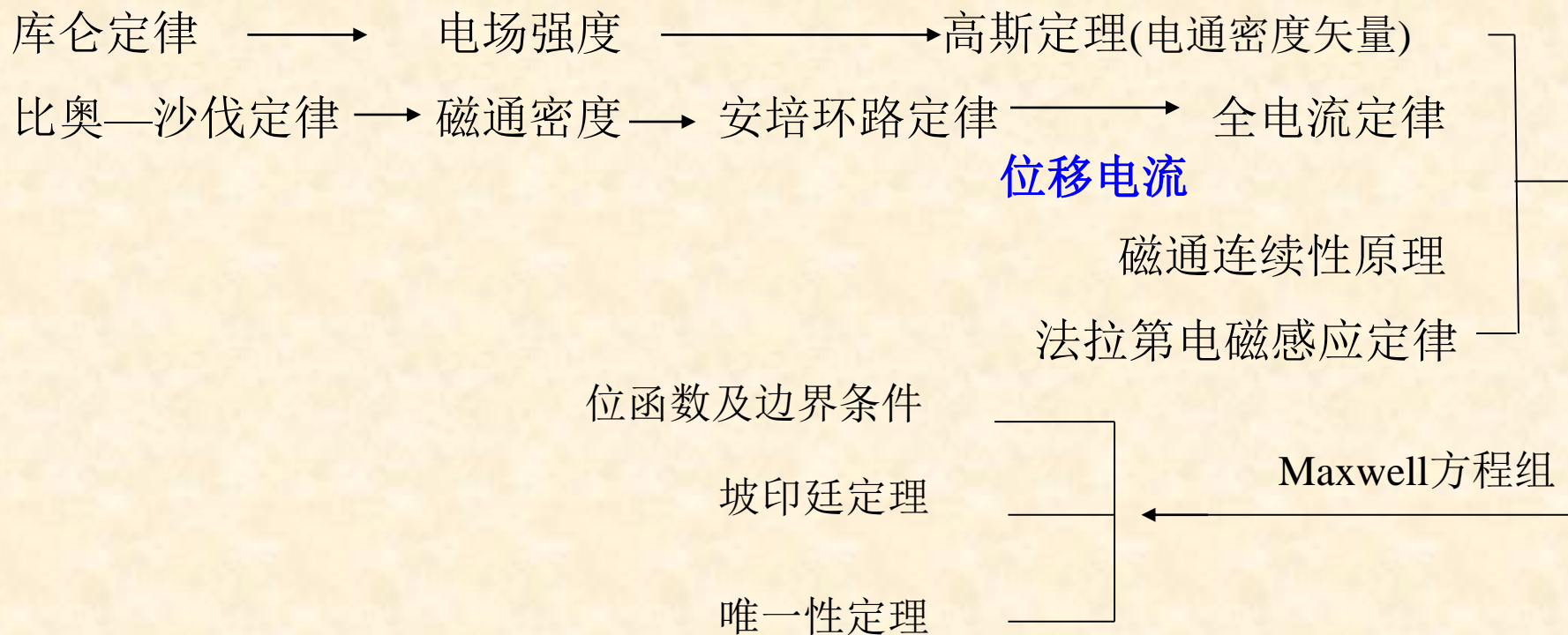
2.3 Maxwell方程组

2.4 电磁场的边界条件

2.5 坡印廷定理和坡印廷矢量



内容结构框图

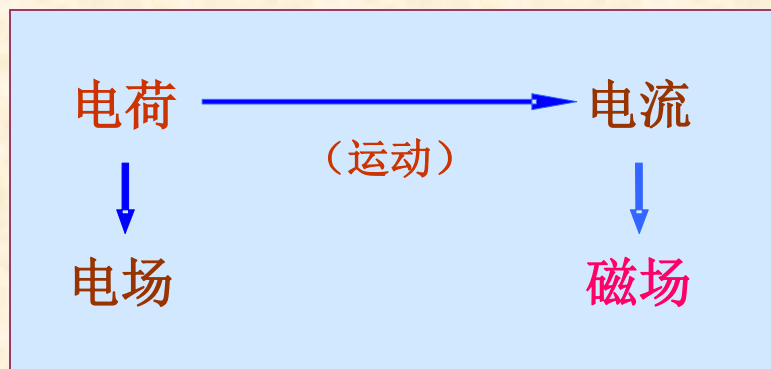




➤ 2.1.3 电荷、电流、电荷守恒定律

电磁场物理模型中的基本物理量可分为源量和场量两大类。

源量为电荷 $q(\bar{r}', t)$ 和电流 $I(\bar{r}', t)$ ，分别用来描述产生电磁效应的两类场源。电荷是产生电场的源，电流是产生磁场的源。





本节内容

- 一、 电荷与电荷密度
- 二、 电流与电流密度
- 三、 电荷守恒定律



一、电荷与电荷密度

- 电荷是物质基本属性之一。
- 1897年英国科学家汤姆逊(J.J.Thomson)在实验中发现了电子。

• 1907 — 1913年间，美国科学家密立根(R.A.Miliken)通过油滴实验，精确测定电子电荷的量值为

$$e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19} \quad (\text{单位: C})$$

确认了电荷的量子化概念。换句话说， e 是最小的电荷，而任何带电粒子所带电荷都是 e 的整数倍。

- 宏观分析时，电荷常是数以亿计的电子电荷 e 的集合，故可不考虑其量子化的事实，而认为电荷量 q 可任意连续取值。



实际带电系统的电荷分布形态分为四种形式：

- 点电荷 ----- 电荷密度
- 体分布电荷 ----- 电荷体密度
- 面分布电荷 ----- 电荷面密度
- 线分布电荷 ----- 电荷线密度

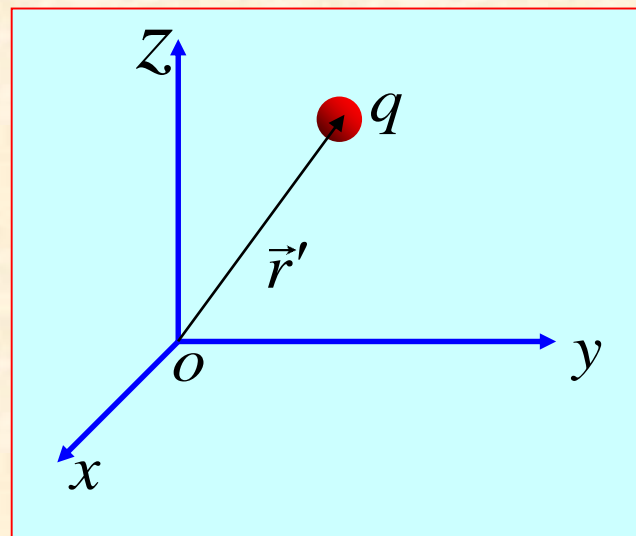


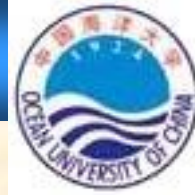
1. 点电荷

对于总电荷为 q 的电荷集中在很小区域 V 的情况，当不分析和计算该电荷所在的小区域中的电场，而仅需要分析和计算电场的区域又距离电荷区很远，即场点距源点的距离远大于电荷所在的源区的线度时，小体积 V 中的电荷可看作位于该区域中心、电荷为 q 的点电荷。

点电荷的电荷密度表示

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$





2. 电荷体密度

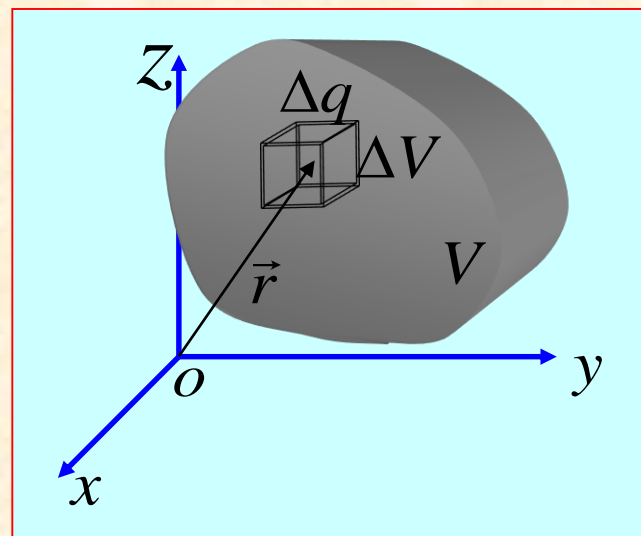
电荷连续分布于体积 V 内，用电荷体密度来描述其分布

$$\rho(\bar{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\bar{r})}{\Delta V} = \frac{\mathbf{d}q(\bar{r})}{\mathbf{d}V}$$

单位：C/m³ (库/米³)

根据电荷密度的定义，如果已知某空间区域 V 中的电荷体密度，则区域 V 中的总电荷 q 为

$$q = \int_V \rho(\bar{r}) \mathbf{d}V$$





3. 电荷面密度

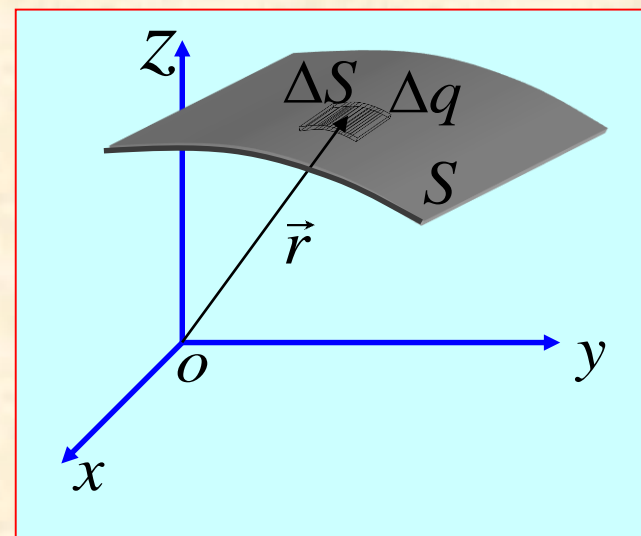
若电荷分布在薄层上，当仅考虑薄层外、距薄层的距离要比薄层的厚度大得多处的电场，而不分析和计算该薄层内的电场时，可将该薄层的厚度忽略，认为电荷是面分布。面分布的电荷可用电荷面密度表示。

$$\rho_s(\bar{r}) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\bar{r})}{\Delta S} = \frac{dq(\bar{r})}{dS}$$

单位: C/m² (库/米²)

如果已知某空间曲面 S 上的电荷面密度，则该曲面上的总电荷 q 为

$$q = \int_S \rho_s(\bar{r}) dS$$





4. 电荷线密度

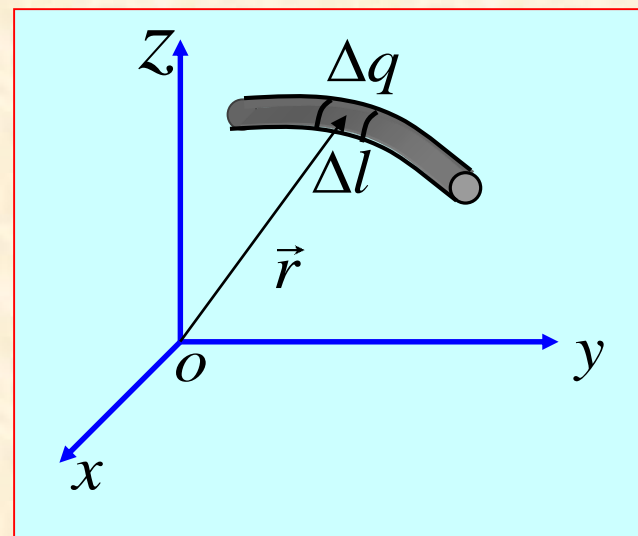
若电荷分布在细线上，当仅考虑细线外、距细线的距离要比细线的直径大得多处的电场，而不分析和计算线内的电场时，可将线的直径忽略，认为电荷是线分布。线分布的电荷可用电荷线密度表示。

$$\rho_l(\bar{r}) = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q(\bar{r})}{\Delta l} = \frac{dq(\bar{r})}{dl}$$

单位: C / m (库/米)

如果已知某空间曲线上的电荷线密度，则该曲线上的总电荷 q 为

$$q = \int_C \rho_l(\bar{r}) dl$$





二、 电流与电流密度

电流 —— 电荷的定向运动而形成，用 i 表示，其大小定义为：
单位时间内通过某一横截面 S 的电荷量，即

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta q / \Delta t) = dq / dt$$

单位: A (安)

电流方向: 正电荷的流动方向

形成电流的条件:

- 存在可以自由移动的电荷;
- 存在电场。

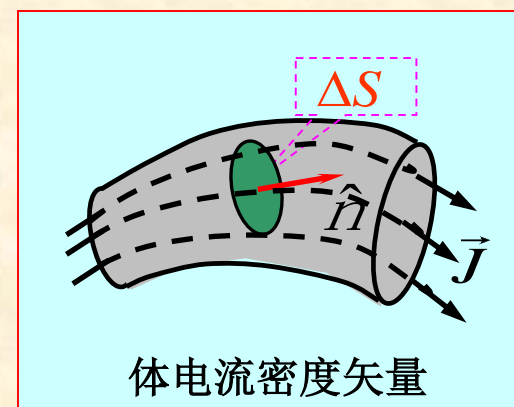
说明: 电流通常是时间的函数，

不随时间变化的电流称为**恒定电流**，用 I 表示。

在电磁理论中，常用体电流、面电流和线电流来描述电流的分别状态。

1. 体电流

电荷在某一体积内定向运动所形成的电流称为体电流，用电流密度矢量 \vec{J} 来描述。



$$\vec{J} = \hat{n} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta S} = \hat{n} \frac{di}{dS} \quad \text{单位: } \text{A} / \text{m}^2 \text{ (安/米}^2\text{)}。$$

正电荷运动的方向

流过任意曲面 S 的电流为

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

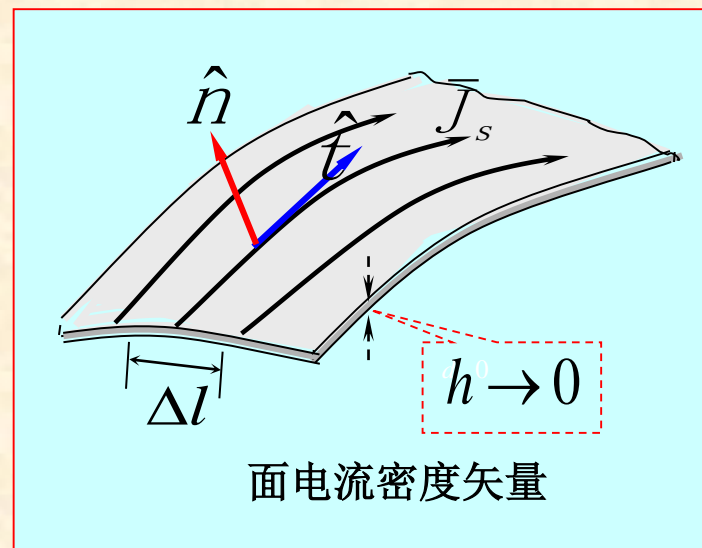
2. 面电流

电荷在一个厚度可以忽略的薄层内定向运动所形成的电流称为面电流，用面电流密度矢量 \vec{J}_s 来描述其分布

$$\vec{J}_s = \hat{t} \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta i}{\Delta l} = \hat{t} \frac{di}{dl}$$

单位：A/m（安/米）。

正电荷运动的方向



通过薄导体层上任意有向曲线 \bar{l} 的电流为

$$i = \int_{\bar{l}} \vec{J}_s \cdot (\hat{n} \times d\bar{l})$$



三、 电荷守恒定律（电流连续性方程）

电荷守恒定律: 电荷既不能被创造，也不能被消灭，只能从物体的一部分转移到另一部分，或者从一个物体转移到另一个物体。

电荷守恒定律是电磁现象中的基本定律之一。

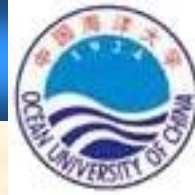
积分形式
$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

流出闭曲面 S 的电流
等于体积 V 内单位时
间所减少的电荷量

微分形式
$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

恒定电流是无源场，电
流线是连续的闭合曲线，
既无起点也无终点

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{J} = 0, \oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = 0$$



§ 2.1 静态电磁场的基本定律和基本场矢量

Fundamental Laws and Basic Vectors of Static EM Fields

- 库仑定律----- 电场强度
- 高斯定理-----电通密度
- 比奥—沙伐定律-----磁通密度
- 磁通连续性原理-----安培环路定律-----磁场强度

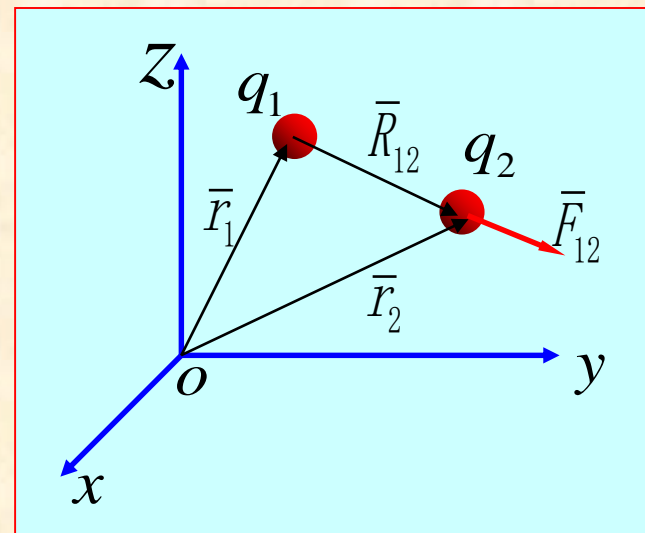


2.1.1 库仑定律 电场强度

1. 库仑 (Coulomb) 定律(1785年)

真空中静止点电荷 q_1 对 q_2 的作用力:

$$\vec{F}_{12} = \hat{R} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^2} = \frac{q_1 q_2 \vec{R}_{12}}{4\pi\epsilon_0 R_{12}^3}$$



说明:

- 大小与两电荷的电荷量成正比，与两电荷距离的平方成反比；
- 方向沿 q_1 和 q_2 连线方向，同性电荷相排斥，异性电荷相吸引；

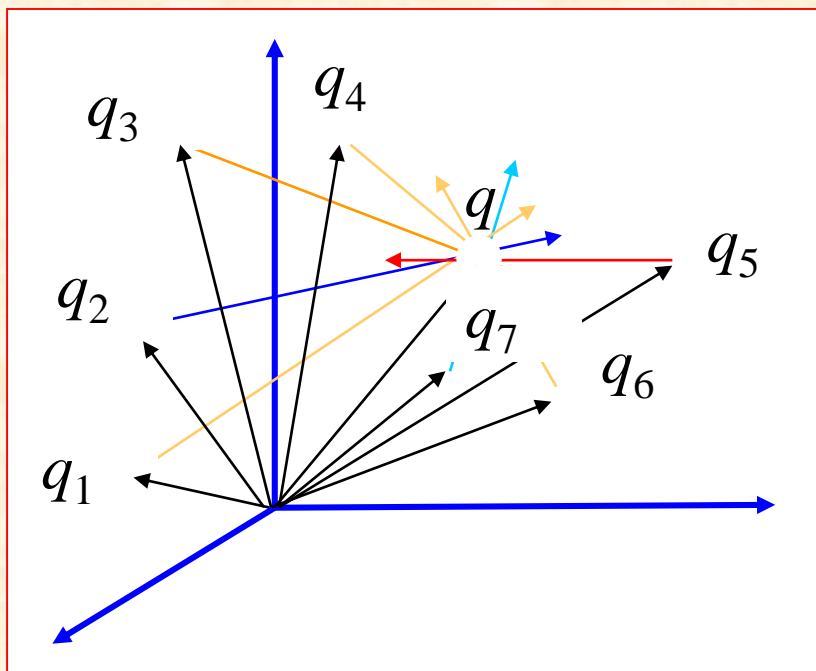
$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad , \quad \text{满足牛顿第三定律。}$$



电场力服从叠加定理

真空中的 N 个点电荷 q_1 、 q_2 、 \dots 、 q_N (分别位于 \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 ... \bar{r}_N)
对点电荷 q (位于 \bar{r}) 的作用力为

$$\bar{F}_q = \sum_{i=1}^N \bar{F}_{q_i q} = \sum_{i=1}^N \frac{qq_i \bar{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3} \quad \bar{R}_i = \bar{r} - \bar{r}_i$$





2. 电场强度

电场强度矢量 \vec{E} —— 描述电场分布的基本物理量

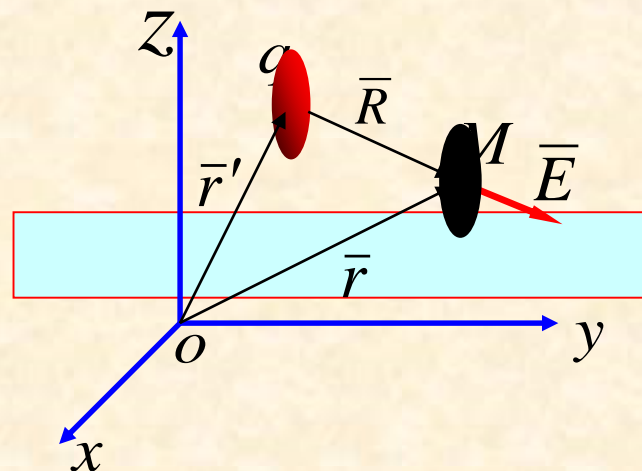
空间某点的电场强度定义为置于该点的单位点电荷（又称试验电荷）受到的作用力，即

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \rightarrow 0} \frac{\vec{F}(\vec{r})}{q_0} \quad q_0 \text{ —— 试验正电荷}$$

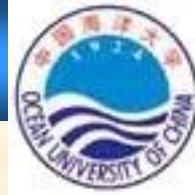
根据上述定义，真空中静止点电荷 q 激发的电场为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \hat{R} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{q\vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$



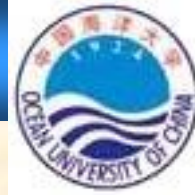
如果电荷是连续分布呢？



(1) 真空中静止点电荷 q 激发电场的电场强度

$$\bar{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{R}}{R^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

- 电场强度是空间位置的矢量函数，由电场固有性质决定，与试验电荷无关；
- 电场的可观测性是通过它对电荷的作用力来表现的 反映了作用力的强度；
- 一定的电荷分布，联系着一定的静电场。



(2) 叠加原理求解电场强度E

- 点电荷

$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{R}}{R^3} = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r} - \bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

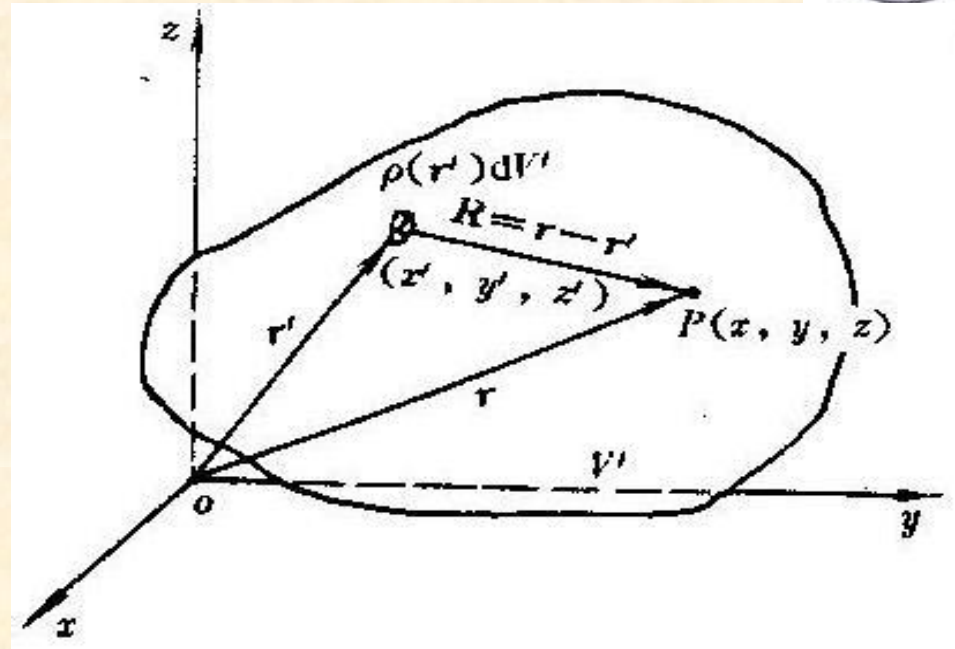
- N个点电荷

$$\bar{E}(\bar{r}) = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \cdots + \bar{E}_N = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{r} - \bar{r}_i'}{|\bar{r} - \bar{r}_i'|^3}$$

- 分布电荷：电荷分布在一定的区域内，——实际的带电体

点电荷：

将其电荷集中于一点
的理想化模型。



$$\bar{E}(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')(\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} dV'$$

体分布的电荷——视为一系列点电荷的叠加

$\rho(r')$ 源点 r' 处的体电荷密度 ϵ_0 为真空中的介电常数

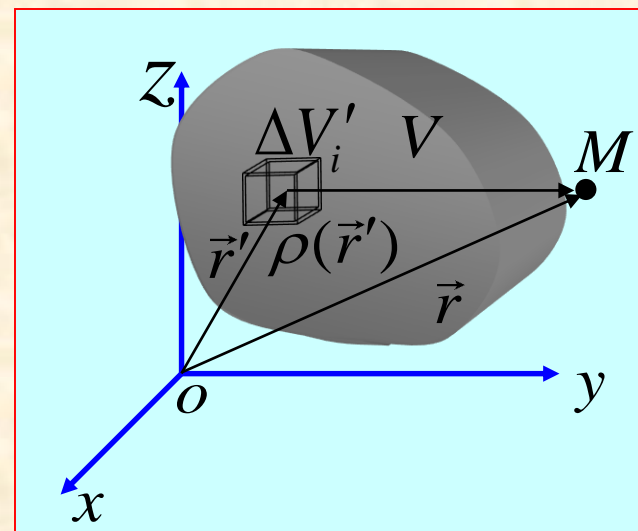


- 体密度为 $\rho(\vec{r}')$ 的体分布电荷产生的电场强度

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i \frac{\rho(\vec{r}'_i) \Delta V'_i \vec{R}_i}{4\pi\epsilon_0 R_i^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dV'$$

小体积元中的电荷产生的电场



- 面密度为 $\rho_s(\vec{r}')$ 的面分布电荷的电场强度

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\rho_s(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dS'$$

- 线密度为 $\rho_l(\vec{r}')$ 的线分布电荷的电场强度

$$\vec{E}(\vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\rho_l(\vec{r}') \vec{R}}{R^3} dl'$$

3. 几种典型电荷分布的电场强度

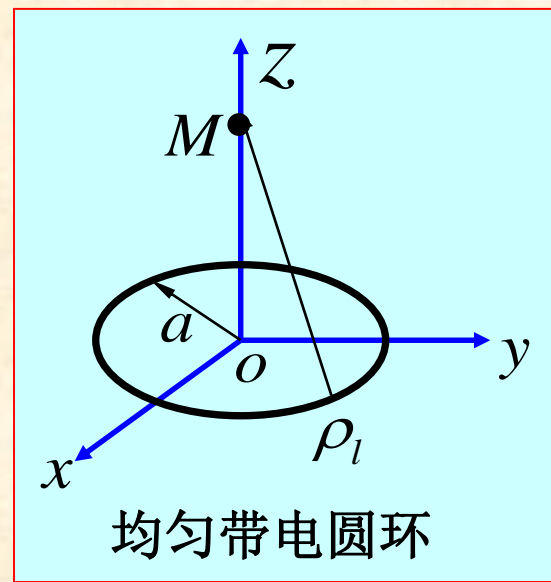
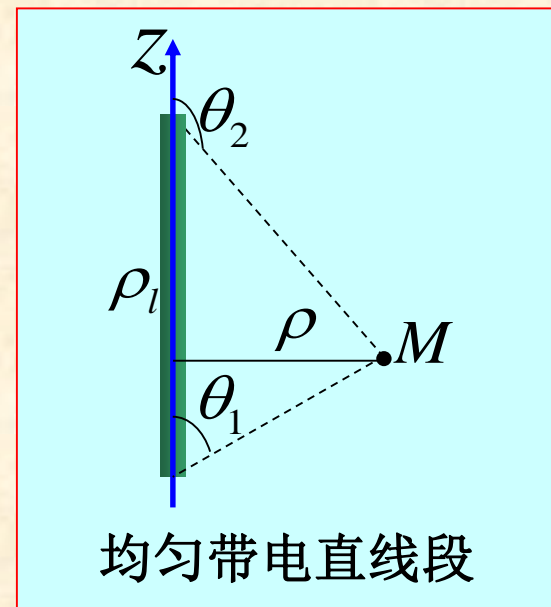
● 均匀带电直线段的电场强度：

$$\begin{cases} E_r = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \\ E_z = \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0 r} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \end{cases} \quad (\text{有限长})$$

$$E_\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 \rho} \quad (\text{无限长})$$

● 均匀带电圆环轴线上的电场强度：

$$E_z(0,0,z) = \frac{a\rho_l z}{2\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}}$$

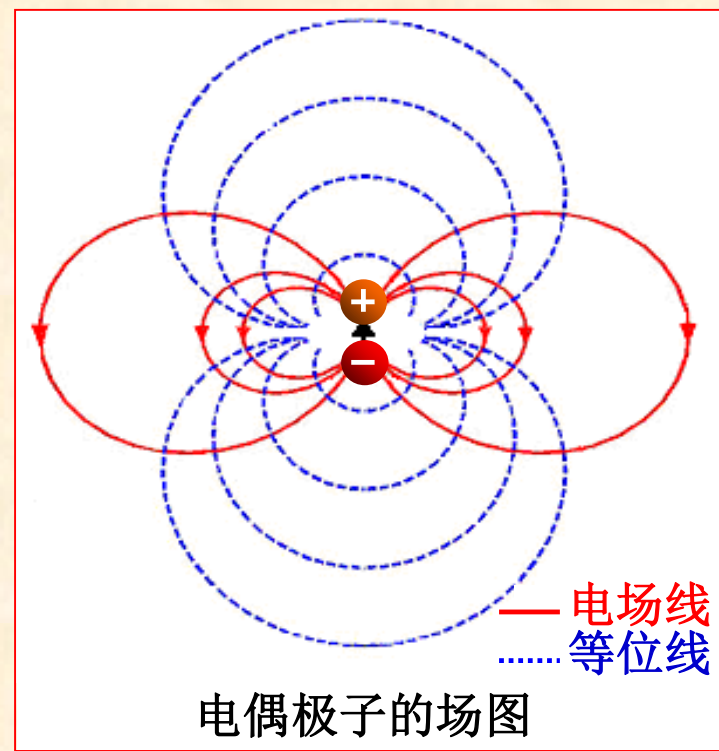
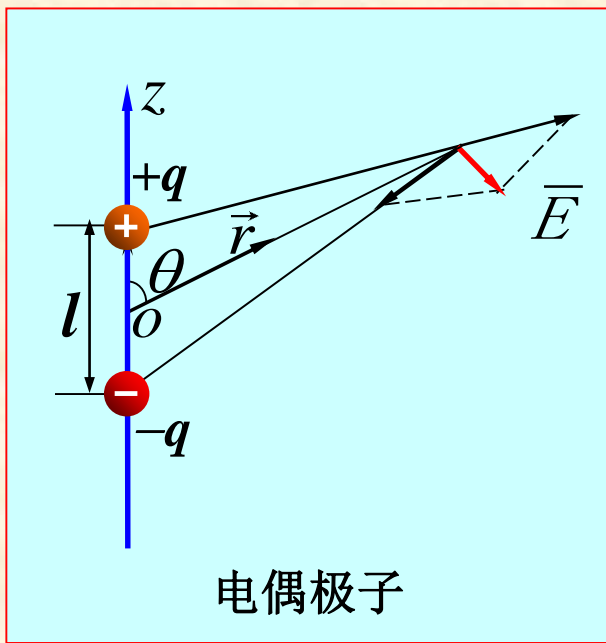


●电偶极子的电场强度：

电偶极子是由相距很近、带等值异号的两个点电荷组成的电荷系统，其远区电场强度为

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\hat{r}^2 \cos \theta + \hat{\theta} \sin \theta)$$

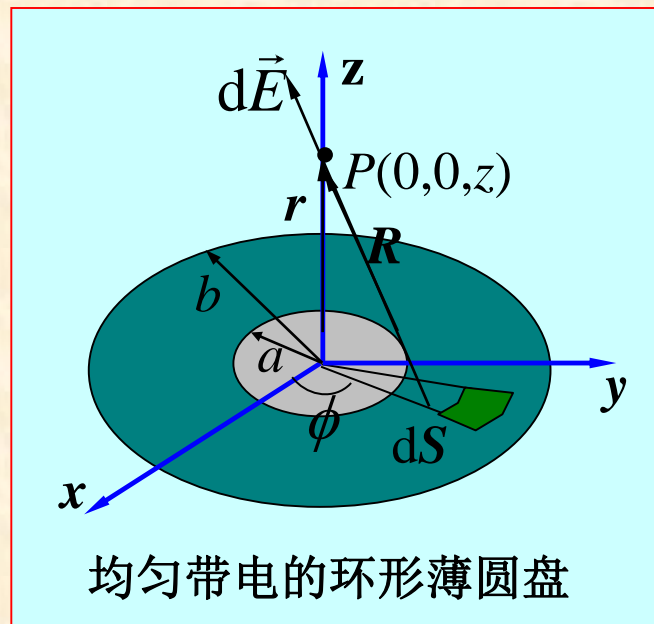
$$\vec{p} = q\vec{l} \quad \text{——电偶极矩}$$





例 2.1.1-1 计算均匀带电的环形薄圆盘轴线上任意点的电场强度。

解：如图所示，环形薄圆盘的内半径为 a 、外半径为 b ，电荷面密度为 ρ_s 。在环形薄圆盘上取面积元 $dS' = \rho' d\rho' d\phi'$ ，其位置矢量为 $\vec{r}' = \rho' \hat{\rho}$ ，它所带的电量为 $dq = \rho_s dS' = \rho_s \rho' d\rho' d\phi'$ 。而薄圆盘轴线上的场点 $P(0,0,z)$ 的位置矢量为 $\vec{r} = z\hat{z}$ ，因此有



$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\rho_s}{4\pi\epsilon_0} \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{z\hat{z} - \rho'\hat{\rho}}{(z^2 + \rho'^2)^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi' \\ &= \hat{z} \frac{\rho_s z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{(z^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{(z^2 + b^2)^{1/2}} \right] \end{aligned}$$



例 2.1.1-2 一个半径为 a 的均匀带电圆环，求轴线上的电场强度。

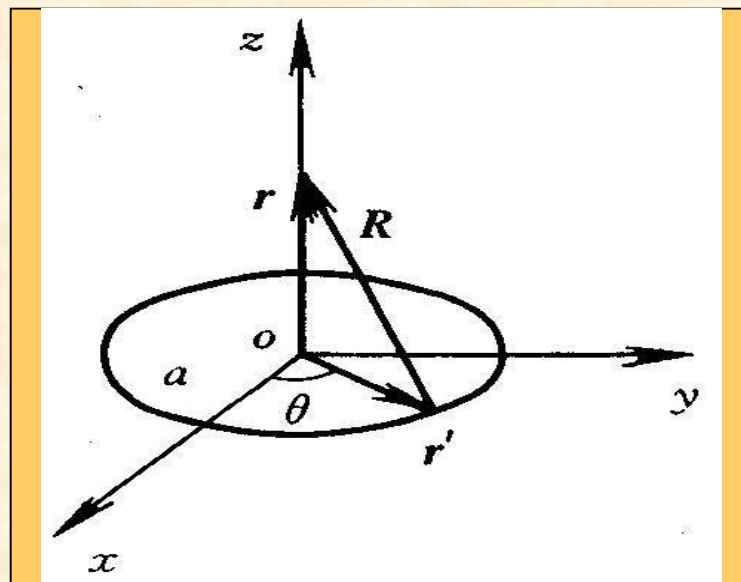
解：取坐标系如图 2 - 2，圆环位于 xoy 平面，圆环中心与坐标原点重合，设电荷线密度为 ρ_l 。

$$\bar{r} = z\hat{z}$$

$$r' = a \cos \theta \hat{x} + a \sin \theta \hat{y}$$

$$R = |r - r'| = (z^2 + a^2)^{1/2}$$

$$dl' = a d\theta$$

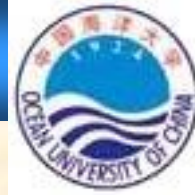


$$\begin{aligned} \bar{E}(r) &= \frac{\rho_l}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{(z\hat{z} - a \cos \theta \hat{x} - a \sin \theta \hat{y})}{(a^2 + z^2)^{3/2}} a d\theta \\ &= \frac{\alpha \rho_l}{2\epsilon_0} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z} \end{aligned}$$



2.1.2 高斯定理、电通密度

1. 高斯定理,
2. 静电场的散度
3. 电通密度
4. 利用高斯定理计算电场强度



2.1.2 高斯定理, 电通密度

1.高斯定理: 电场特性与场源电荷间依赖关系的一般规律

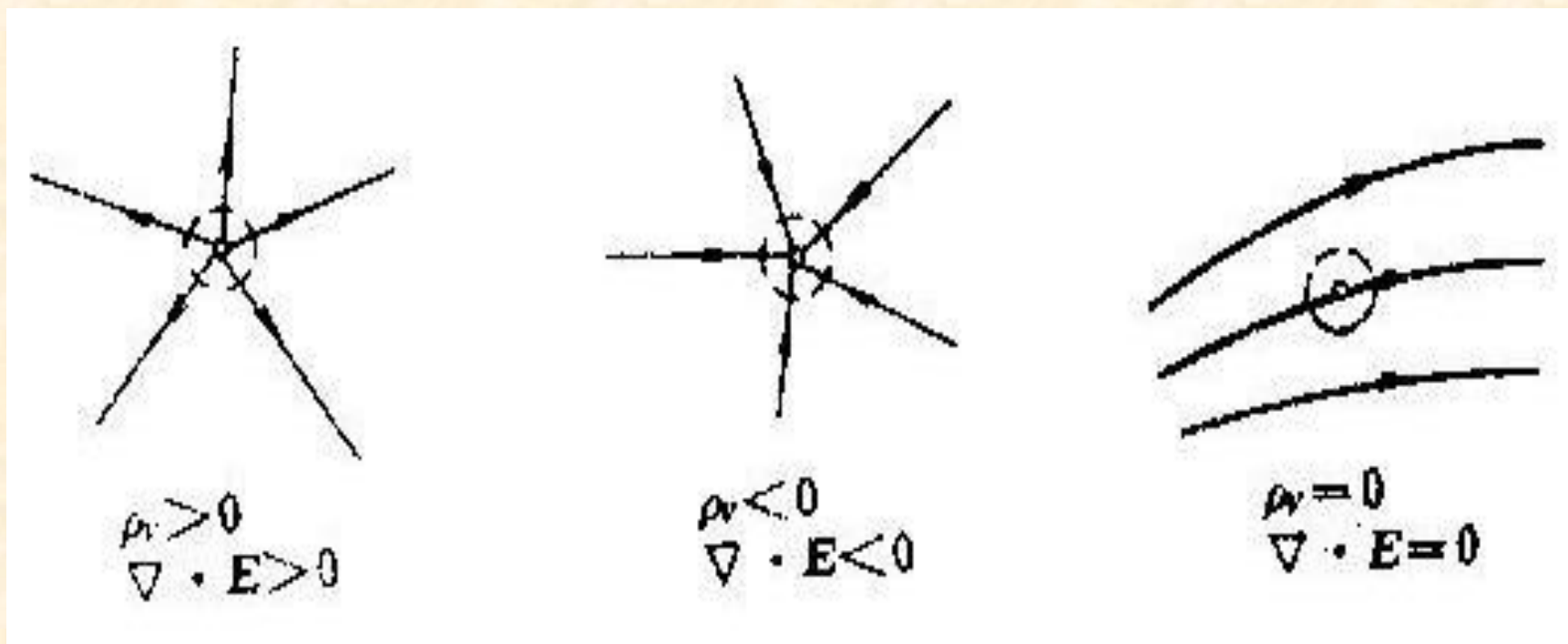
$$\oint_S \bar{E} \cdot d\bar{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \bar{E}(r) \cdot d\bar{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v(r) dv$$

$$\oint_V \nabla \cdot \bar{E}(r) dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_v dV$$

2.静电场的散度

$$\nabla \cdot \bar{E}(r) = \frac{\rho_v(r)}{\epsilon_0}$$



散度与场源的关系



3. 电通密度

电通密度（电位移）矢量:

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E} \quad (C / m^2)$$

ε 是媒质的介电常数, 在真空中 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 。

对真空中的点电荷 q :

$$\bar{D} = \hat{r} \frac{q}{4\pi r^2}$$



电通量为

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = \frac{q}{4\pi r^2} \cdot 4\pi r^2 = q$$

此通量仅取决于点电荷量 q , 而与所取球面的半径无关。

如果在封闭面内的电荷不止一个, 则利用叠加原理知, 穿出封闭面的电通量总和等于此面所包围的总电量

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q$$

—— **高斯定理**的积分形式(1839年由德国 K .F .Gauss导出), 即穿过任一封闭面的电通量, 等于此面所包围的自由电荷总电量。对于简单的电荷分布, 可方便地利用此关系来求出 D 。



若封闭面所包围的体积内的电荷是以体密度 ρ_v 分布的, 则所包围的总电量为

$$Q = \int_V \rho_v dv$$

$$\int_V \nabla \cdot \bar{D} dv = \int_V \rho_v dv$$

上式对不同的 V 都应成立, 因此两边被积函数必定相等, 于是有

$$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v$$



静电场的问题

——已知源电荷分布，求自由空间电场强度空间分布

- 应用场强叠加原理
- 利用高斯定理的积分形式

——当电场分布具有某种空间对称性

——已知电场强度空间分布，求源电荷分布

- 利用高斯定理的微分形式

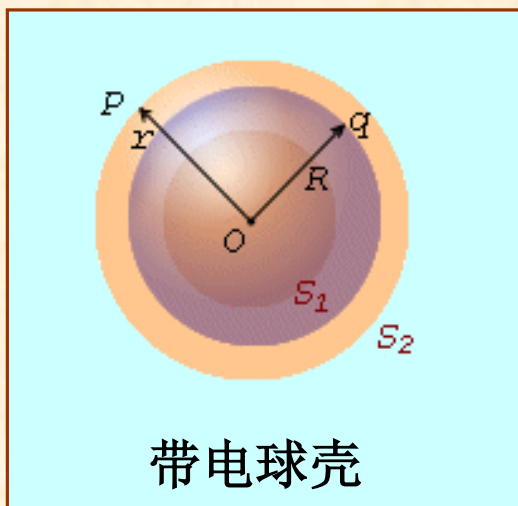


4. 利用高斯定理计算电场强度

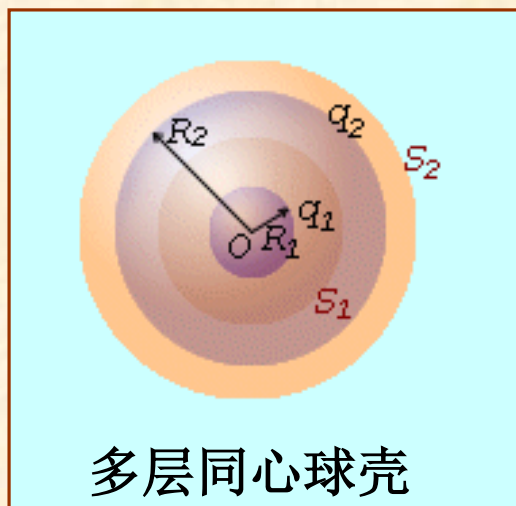
在电场分布具有一定对称性的情况下，可以利用高斯定理计算电场强度。

具有以下几种对称性的场可用高斯定理求解：

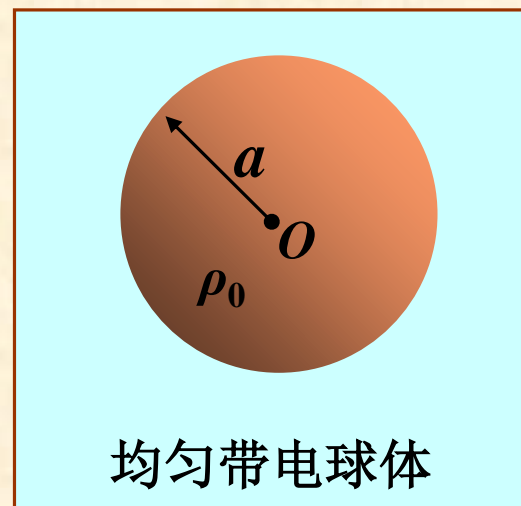
- **球对称分布**：包括均匀带电的球面，球体和多层同心球壳等。



带电球壳

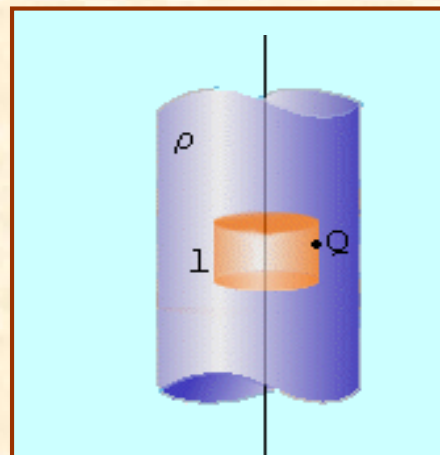
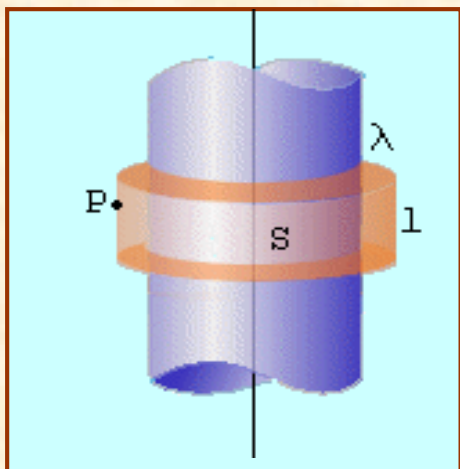


多层同心球壳

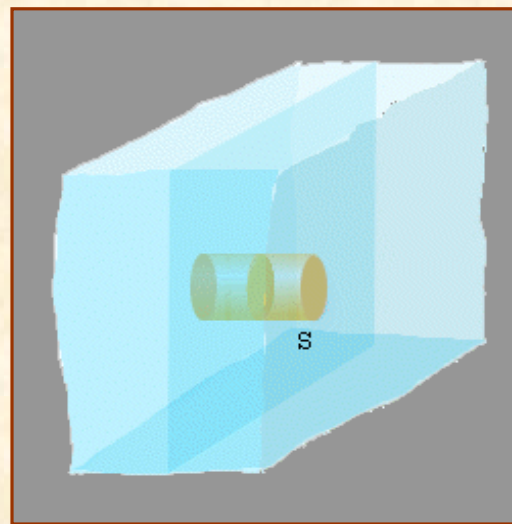
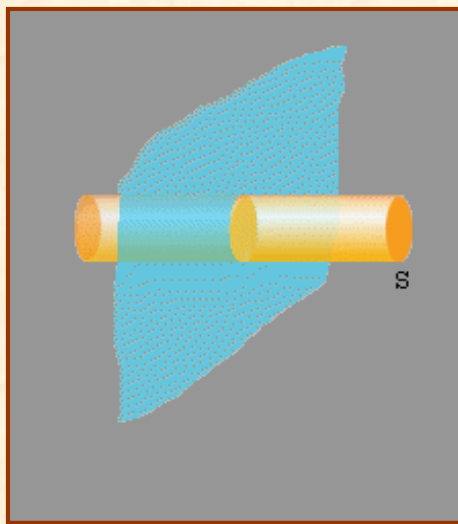


均匀带电球体

- **轴对称分布：**如无限长均匀带电的直线，圆柱面，圆柱壳等。



- **无限大平面电荷：**如无限大的均匀带电平面、平板等。





高斯定理解题步骤:

- (1) 分析电场是否具有对称性。
- (2) 取合适的高斯面(封闭面), 即取在E相等的曲面上。
- (3) E相等的面不构成闭合面时, 另选法线 $\hat{n} \perp \bar{E}$ 的面, 使其成为闭合面。

(4) 分别求出 $\left\{ \begin{array}{l} \oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} \\ \sum_{S内} q_i \end{array} \right.$, 从而求得 \bar{D} 及 \bar{E} 。

例1 求真空中均匀带电球体的场强分布。已知球体半径为 a ，电荷密度为 ρ_0 。

解：（1）球外 ($r \geq a$) 某点的场强

$$\text{由 } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0$$

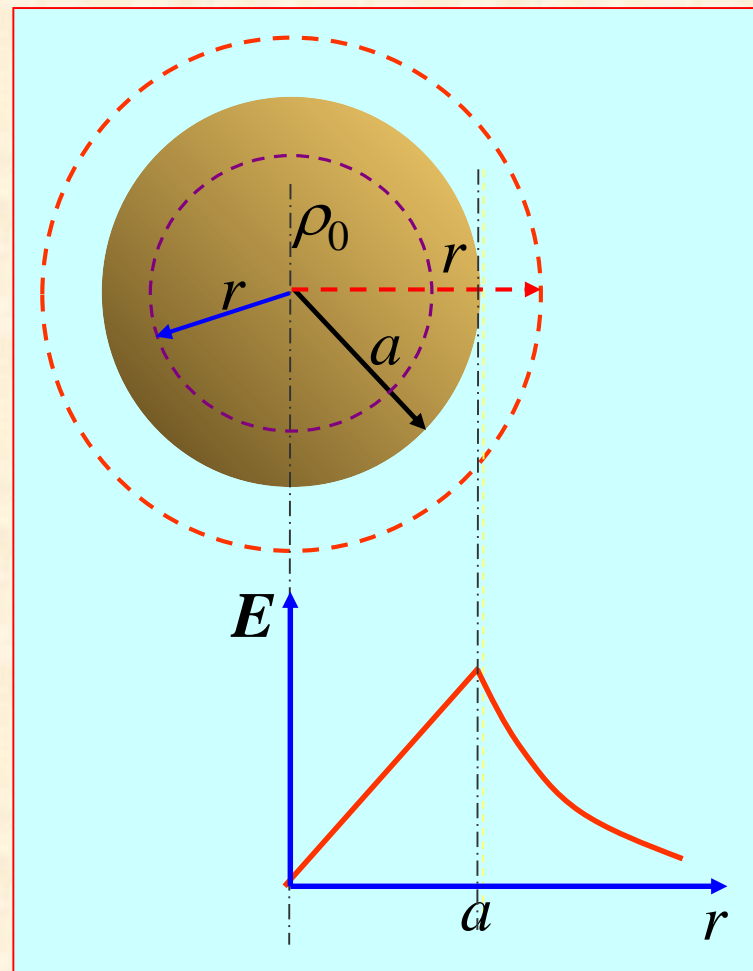
$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = \hat{r} \frac{\rho_0 a^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

（2）求球体内一点的场强

$$\text{由 } \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho_0 dV$$

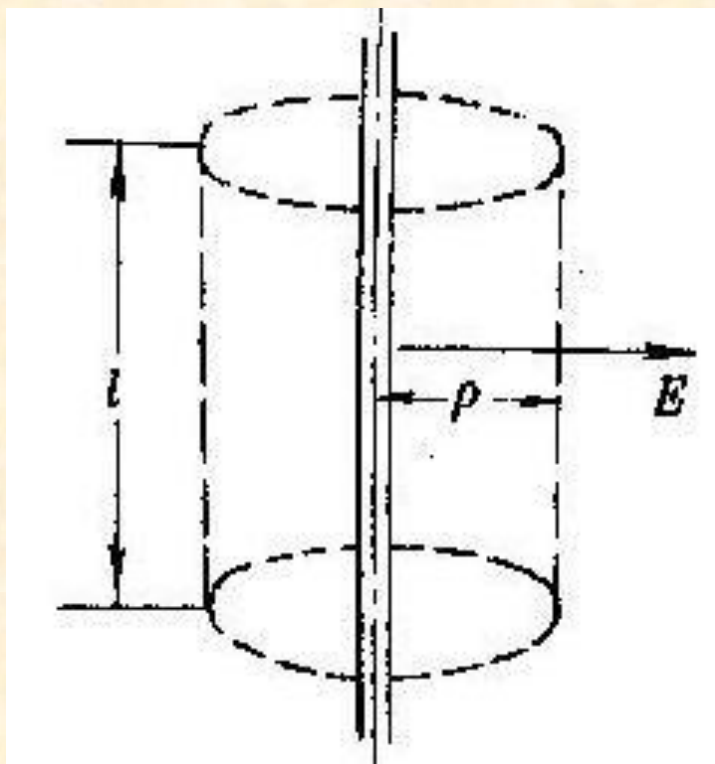
$$\Rightarrow 4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \hat{r} \frac{\rho_0 r}{3\varepsilon_0} \quad (r < a)$$





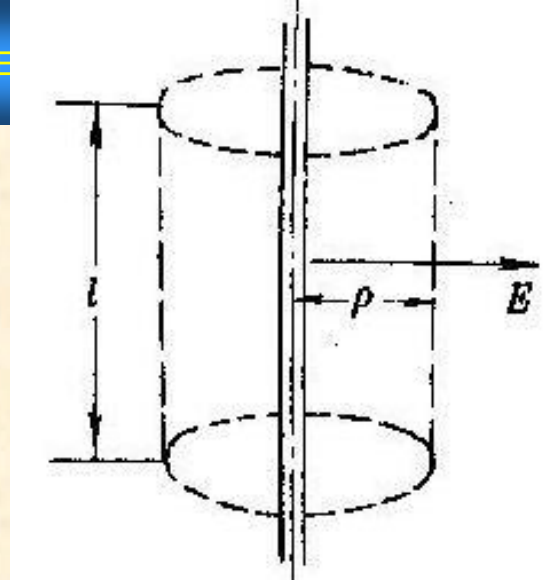
例 2 设有一电荷均匀分布的无限长细直导线, 线密度是 $\rho_l(\text{C/m})$ 。试求空间各点的电场强度。



用高斯定理计算细直导线的电场强度

解

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0}$$



上式左边是计算从闭合面上穿出的通量, 因为 E 与上下两底面平行, 没有通量穿过两底面, 所以从闭合面内穿出的通量为

$$E \hat{\rho} \cdot (S_{\text{柱}} \hat{\rho}) = E \cdot 2\pi\rho l = \frac{\rho_l l}{\epsilon_0}$$

从而得

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{\rho}$$



例2.1-2 如图2.1-3所示，同轴线的内外导体半径分别为 a 和 b 。在内外导体间加电压 U ，则内导体通过的电流为 I ，外导体返回的电流为 $-I$ 。

P. 36

a) 设内外导体上单位长度的带电量分别为 ρ_l 和 $-\rho_l$ ，

求内外导体间的 \overline{D} 及 \overline{E} ；

b) 用电压 U 来表示，则 $\overline{E} = ?$

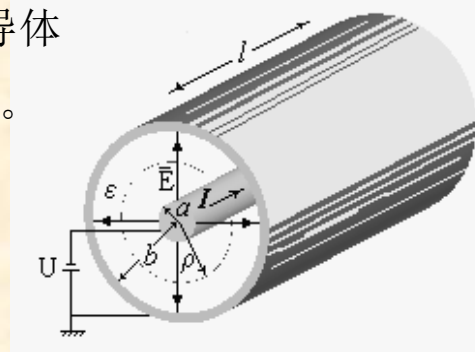


图2.1-3 同轴线

[解] a) 介质层中的电场都沿径向 $\hat{\rho}$ ，垂直于内外导体表面，其大小沿圆周方向是轴对称的。

$a < \rho < b$ 应用高斯定理，取半径 ρ 长 l 的同轴圆柱为高斯面。

作为封闭面，还应加上前后圆盘底面，但是它们与 \overline{D} 相平行，因而没有通量穿过，不必考虑。

$$\text{于是} \quad \int_s \overline{D} \cdot d\overline{s} = \overline{D} \cdot \hat{\rho} 2\pi\rho l = \rho_l l$$

得

$$\overline{D} = \hat{\rho} \frac{\rho_l}{2\pi\rho},$$

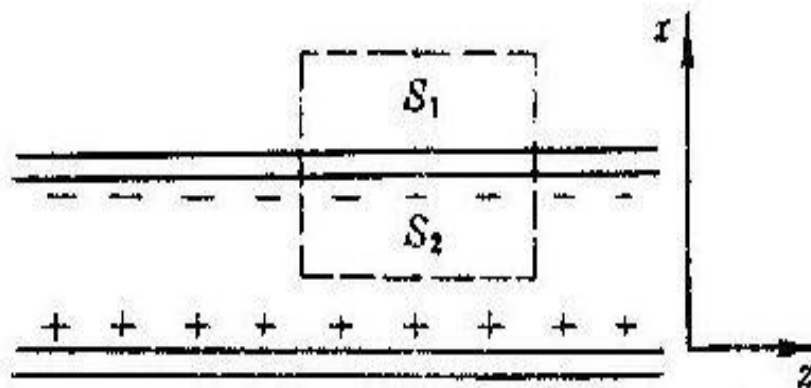
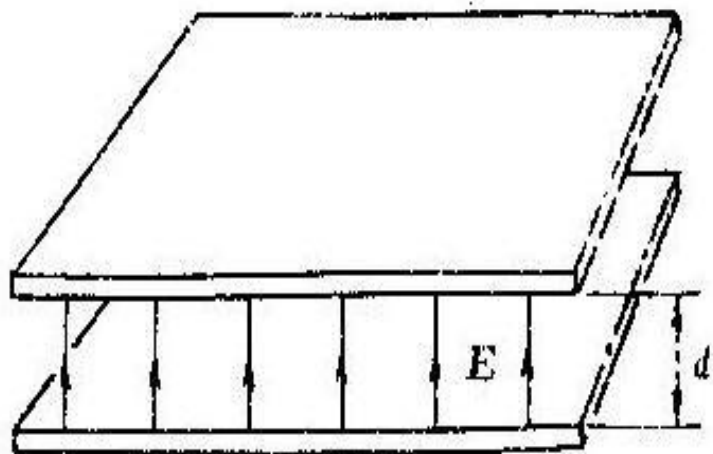
$$\overline{E} = \frac{\overline{D}}{\epsilon} = \hat{\rho} \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho}$$

$$\text{b) } U = \int_l \overline{E} \cdot d\overline{l} = \int_a^b \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon\rho} d\rho = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon} \ln \frac{b}{a} \quad \text{故}$$

$$\overline{E} = \hat{\rho} \frac{U}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$



例 3 设有二块无限大带电平行平面, 面上分别带有均匀电荷, 上极板电荷密度是 $-\rho_s(\text{C}/\text{m}^2)$, 下极板为 $+\rho_s(\text{C}/\text{m}^2)$, 两极板间距离为 $d(\text{m})$, 如图3 - 3所示。试求平行板内各点的电场强度。



平行导体板间的电场



解:

$$\oint_s \bar{E} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_s dv$$

因电场强度 \bar{E} 与柱形侧面的外法线方向垂直, 点积为零, 所以得

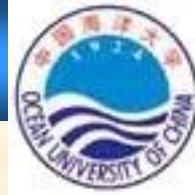
$$\oint_{s_1} \bar{E}_{\text{外}} \cdot d\bar{s} + \int_{s_2} \bar{E}_{\text{内}} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{\epsilon_0} (-\rho_s) S$$

即

$$0 + E_{\text{内}} \hat{x} \cdot (-\hat{x}) S = -\frac{\rho_s S}{\epsilon_0}$$

故求得两极板间电场强度

$$\bar{E} = \frac{\rho_s}{\epsilon_0} \hat{x} \quad (V / m)$$



例 4 设有一平板电容器, 其中两平板分别置于 $x=a$ 及 $x=b$ 处, 两极板间分布空间电荷, 且介电常数为 ε_0 , 已测得板间的电场强度为

$$\bar{E} = \frac{E_0 a}{x} \hat{x} (V/m)$$

试求两极板间空间电荷密度的分布规律。

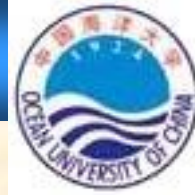
[解] 根据高斯定理
$$\nabla \cdot \bar{E}(r) = \frac{\rho_v(r)}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

将 E_x 代入上式, 则
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E_0 a}{x} \right) = \frac{\rho_v}{\varepsilon_0}$$

所以

$$\rho_v = -\varepsilon_0 E_0 \frac{a}{x^2} (C/m^3)$$



例 5 已知半径为 a 的球内、外的电场强度为

$$\vec{E} = \hat{r}E_0 \frac{a^2}{r^2} \quad (r > a)$$

$$\vec{E} = \hat{r}E_0 \left(5\frac{r}{2a} - 3\frac{r^3}{2a^3} \right) \quad (r < a)$$

求电荷分布。



解：由高斯定理的微分形式 $\nabla \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ，得电荷密度为

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \bar{E}$$

用球坐标中的散度公式

$$\nabla \cdot \bar{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

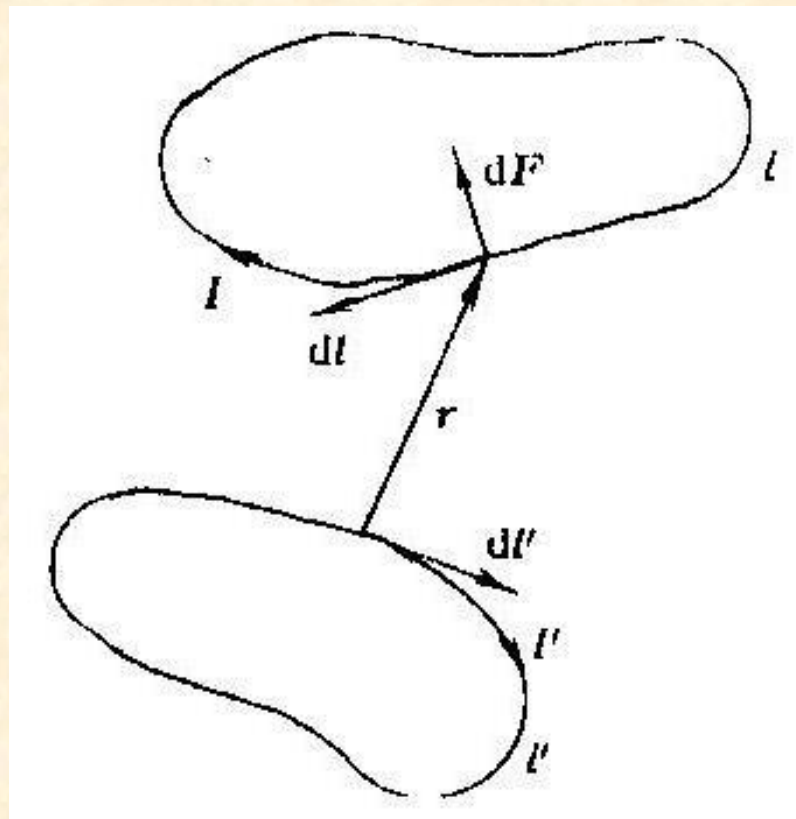
可得

$$\rho = 0 \quad (r > a)$$

$$\rho = \varepsilon_0 E_0 \frac{15}{2a^3} (a^2 - r^2) \quad (r < a)$$



2.1.4 比奥-萨伐定律, 磁通密度



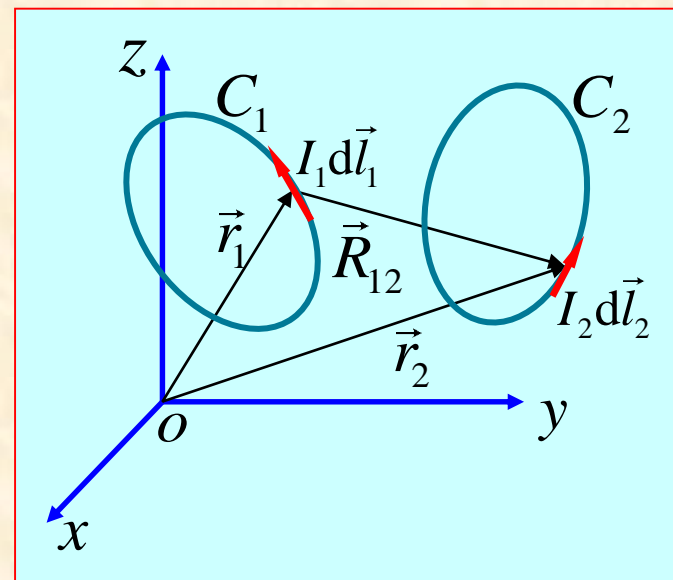
两个载流回路间的作用力



1. 安培磁力定律

安培对电流的磁效应进行了大量的实验研究，在 1821—1825 年之间，设计并完成了电流相互作用的精巧实验，得到了电流相互作用力公式，称为安培力定律。

实验表明，真空中的载流回路 C_1 对载流回路 C_2 的作用力



$$\bar{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{I_2 d\bar{l}_2 \times (I_1 d\bar{l}_1 \times \bar{R}_{12})}{R_{12}^3}$$

安培磁力定律

满足牛顿第三定律

载流回路 C_2 对载流回路 C_1 的作用力 $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$



2. 毕奥-萨伐定律，磁通密度（磁感应强度）

电流在其周围空间中产生磁场，描述磁场分布的基本物理量是**磁通密度** \vec{B} ，单位为T（特斯拉）。

磁场的重要特征是对场中的电流磁场力作用，载流回路 C_1 对载流回路 C_2 的作用力是回路 C_1 中的电流 I_1 产生的磁场对回路 C_2 中的电流 I_2 的作用力。

根据安培磁力定律，有

$$\vec{F}_{12} = \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12}}{R_{12}^3} \right) = \oint_{C_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)$$

其中

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12}}{R_{12}^3}$$

毕奥-萨伐定律

电流 I_1 在电流元 $I_2 d\vec{l}_2$ 处产生的磁通密度



任意**电流回路** C 产生的磁感应强度

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\bar{l}' \times \bar{R}}{R^3}$$

电流元 $Id\bar{l}'$ 产生的磁感应强度

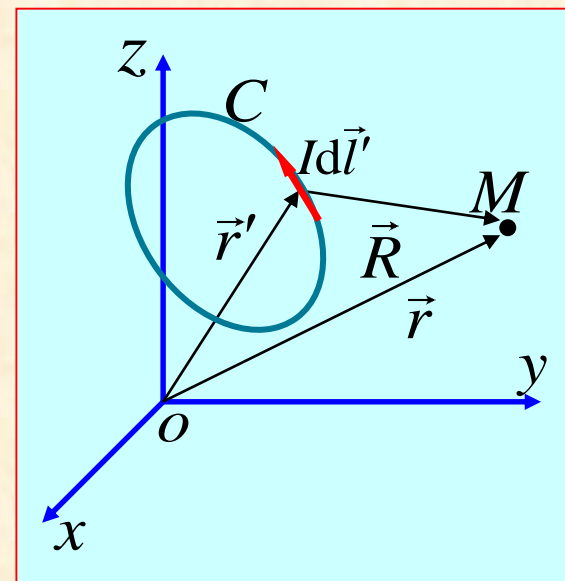
$$d\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\bar{l}' \times (\bar{r} - \bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|^3}$$

体电流 产生的磁感应强度

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{J(\bar{r}') \times \bar{R}}{R^3} dV'$$

面电流 产生的磁感应强度

$$\bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{J_s(\bar{r}') \times \bar{R}}{R^3} dS'$$



3. 几种典型电流分布的磁感应强度

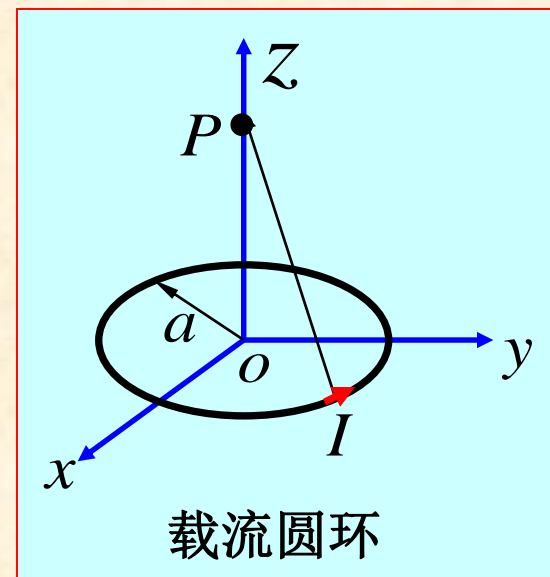
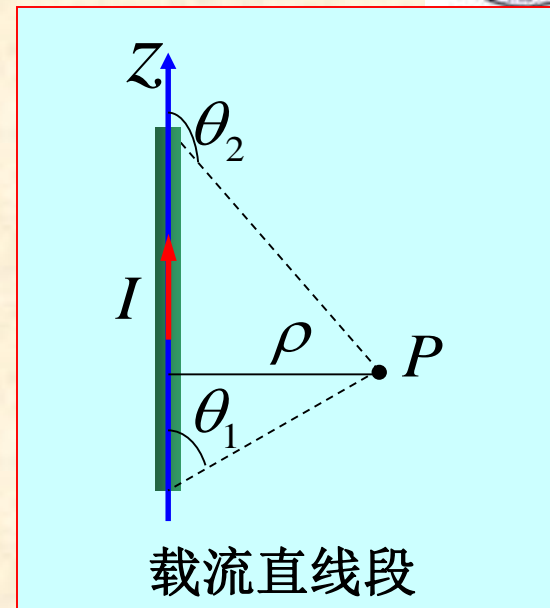
- 载流直线段的磁感应强度：

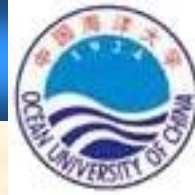
$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \quad (\text{有限长})$$

$$\vec{B} = \vec{e}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \quad (\text{无限长})$$

- 载流圆环轴线上的磁感应强度：

$$\vec{B}(0,0,z) = \vec{e}_z \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$





磁场对电流元的作用力: $\bar{F} = Id\bar{l} \times \bar{B}$

磁场对运动速度为 v 的电荷 Q 的作用力: $\bar{F} = Q\bar{v} \times \bar{B}$

磁场对点电荷 q 的作用力: $\bar{F} = q\bar{v} \times \bar{B}$

以速度 v 运动的点电荷 q 在静止电荷

和电流附近时, 它所受的总力为: $\bar{F} = q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B})$



2.1.5 磁通连续性原理与安培环路定律, 磁场强度

1. 磁通连续性原理

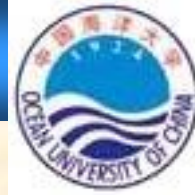
因为自然界中并不存在任何单独的磁荷, 磁力线总是闭合的。

所以 闭合的磁力线穿进封闭面多少条, 也必然要穿出同样多的条数, 结果使穿过封闭面的磁通量恒等于零, 即

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

利用散度定理, 则

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$



2. 安培环路定律

对于无限长的载流直导线, 若以 ρ 为半径绕其一周积分 \mathbf{B} , 可得

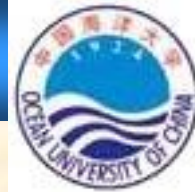
$$\oint_l \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \cdot \hat{\phi} \rho d\phi = \mu_0 I$$

$$\oint_l \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \cdot d\mathbf{l} = I$$

3. 磁场强度

在简单媒质中, 磁场强度由下式定义:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} \text{ (A/m)}$$



H 称为磁场强度, μ 是媒质的磁导率。在真空中 $\mu=\mu_0$, 于是有

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

————安培环路定律

物理意义: 磁场强度 H 沿闭合路径的线积分等于该路径所包围的电流 I 。

I : 传导电流的代数和。

可方便地计算一些具有对称特征的磁场分布。

因为 S 面是任意取的, 所以

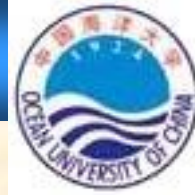
$$\int_s (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$



4. 利用安培环路定理计算磁感应强度

在磁场分布具有一定对称性的情况下，可以利用安培环路定理计算磁感应强度。



例1. 求载流无限长同轴电缆产生的磁感应强度。

解： 选用圆柱坐标系， $\vec{B} = \hat{\phi} B(\rho)$

(1) $0 \leq \rho < a$

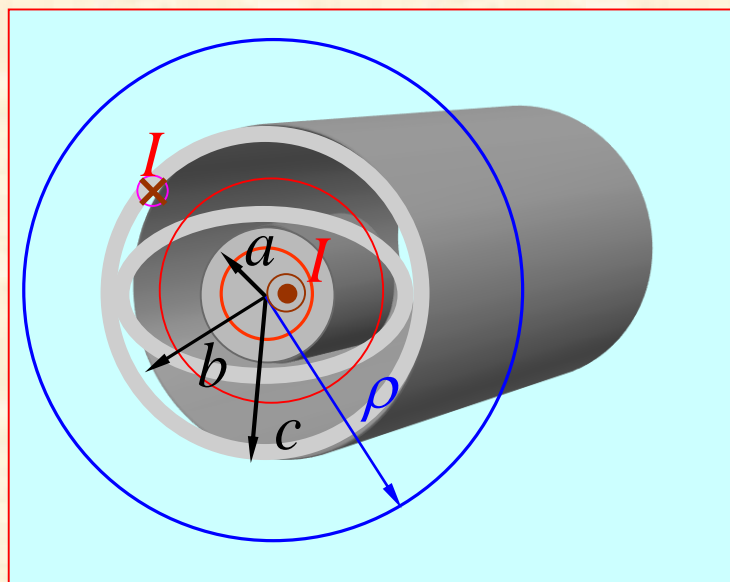
取安培环路 ($\rho < a$)，交链的电流为

$$I_1 = \frac{I}{\pi a^2} \cdot \pi \rho^2 = I \frac{\rho^2}{a^2}$$

应用安培环路定理，得

$$2\pi\rho B_1 = \mu_0 \frac{I\rho^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_1 = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I \rho}{2\pi a^2}$$



$$(2) \quad a \leq \rho < b$$

$$2\pi\rho B_2 = \mu_0 I \quad \longrightarrow \quad \bar{B}_2 = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

$$(3) \quad b \leq \rho < c$$

$$I_3 = I - I \frac{\rho^2 - b^2}{c^2 - b^2} = I \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

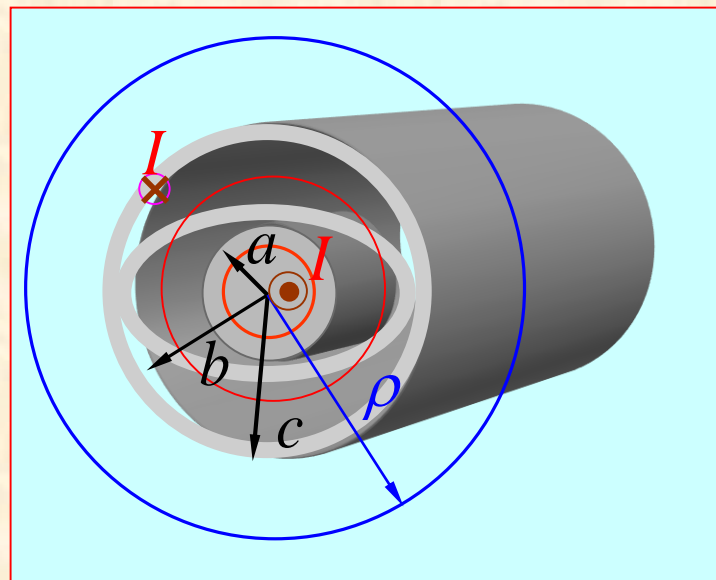
应用安培环路定理，得

$$2\pi\rho B_3 = \frac{\mu_0 I (c^2 - \rho^2)}{c^2 - b^2}$$

$$\longrightarrow \bar{B}_3 = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

$$(4) \quad c \leq \rho < \infty$$

$$I_4 = 0 \quad \longrightarrow \quad \bar{B}_4 = 0$$



§ 2.1 静态电磁场的基本定律和基本场矢量 (总结)



基本定理

积分形式

微分形式

特点

静电场: (1) $\oint_l \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = 0$ 即 $\int_s (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) \cdot d\bar{\mathbf{s}} = 0 \Rightarrow \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0$
——静电场的环路定律

无旋场 (保守场, 位场)

(2) $\oint_s \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = Q$ 即 $\int_v \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} dv = \int_v \rho_v dv \Rightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \rho_v$
——高斯定理

or $\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = \rho_v / \epsilon$

有散场, 通量源是电荷

恒定电流的磁场: (1) $\oint_l \bar{\mathbf{H}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = I$ 即 $\int_s (\nabla \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{s}} = \int_s \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} \Rightarrow \nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}}$
——安培环路定律

有旋场, 旋涡源是电流

(2) $\oint_s \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = 0$ 即 $\int_v \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} dv = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$
——磁通连续性原理

or $\nabla \cdot \bar{\mathbf{H}} = 0$

无散场 (管形场)

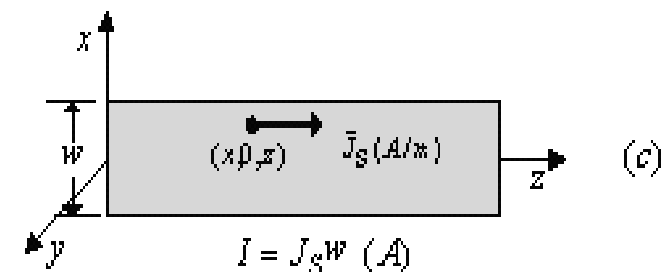
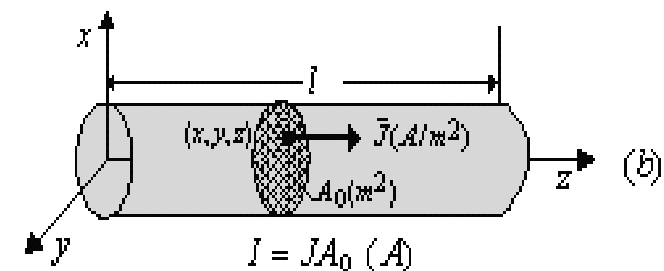
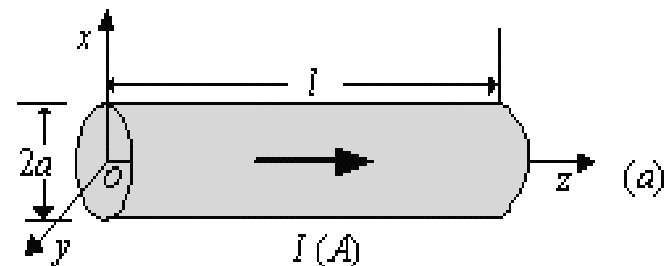
静电场有散无旋, 其通量源是静止电荷; 恒定磁场有旋无散, 其旋涡源是电流。它们互不相关。

基本场矢量

- 电场强度 \vec{E} (V/m)
- 电通 (量) 密度 \vec{D} (C/m²): $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ (简单媒质)
- 磁场强度 \vec{H} (A/m)
- 磁通 (量) 密度 \vec{B} (Wb/m²): $\vec{B} = \mu \vec{H}$ (简单媒质)

体电荷密度 ρ_v (C/m³)

体电流密度 (A/m^2) (不是 A/m^3 !)



电流密度的定义

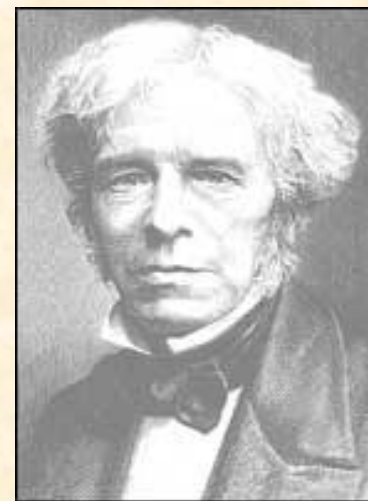


问题引入:

静电场和静磁场的场源分别是静电荷和等速运动的电荷，它们是相互独立的；

但是时变的电场和磁场之间是相互关联的。这首先由英国迈克尔·法拉第在1831年的实验中发现。

法拉第发现，当穿过导体回路的磁通量发生变化时，回路中就会出现感应电流和电动势，且感应电动势与磁通量的变化有密切关系，由此总结出了著名的**法拉第电磁感应定律**。



Michael Faraday
(1791—1867)



§ 2.2 法拉第电磁感应定律和全电流定律

Faraday's Laws of Electromagnetic Induction and the Total Current Law

- 电磁感应定律 —— 揭示时变磁场产生电场
- 位移电流 —— 揭示时变电场产生磁场
- 重要结论：在时变情况下，电场与磁场相互激励，形成统一的电磁场。

本节内容

2.2.1 电磁感应定律

2.2.2 位移电流和全电流定律

2.2.3 全电流连续性原理



一、法拉第电磁感应定律

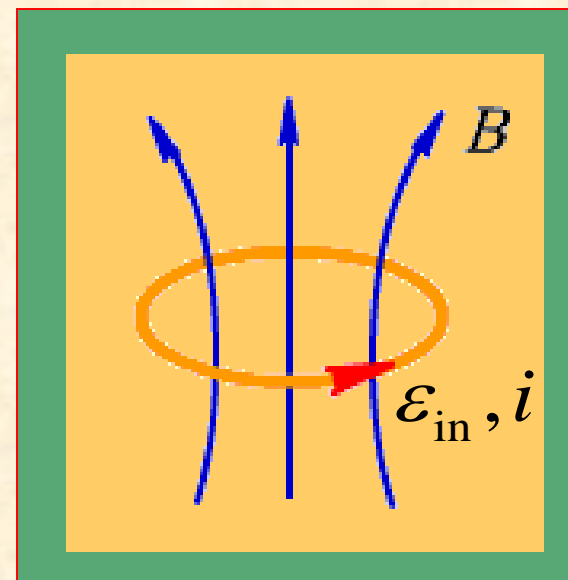
1. 法拉第电磁感应定律的表述

当通过导体回路所围面积的磁通量 Ψ 发生变化时，回路中产生的感应电动势的大小等于磁通量的时间变化率的负值，方向是要阻止回路中磁通量的改变，即

$$\varepsilon = - \frac{d\Psi_m}{dt}$$

$$\varepsilon = \oint_l \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{l} \quad \text{回路所感应的电动势}$$

$$\psi_m = \int_s \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{s} \quad \text{回路所交链的磁通量}$$



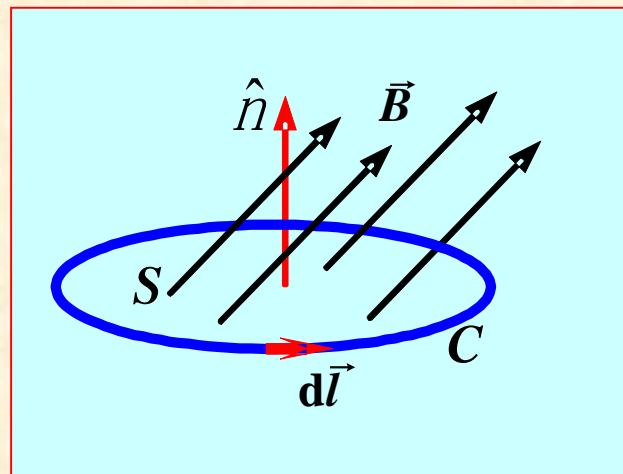
➤ 负号表示感应电流产生的磁场总是阻止磁通量的变化。



设任意导体回路 C 围成的曲面为 S ，其单位法向矢量为 \hat{n} ，则穿过回路的磁通为

$$\Psi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

→
$$\mathcal{E}_{in} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

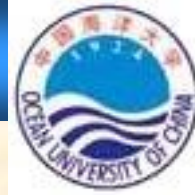


导体回路中有感应电流，表明回路中存在感应电场 \vec{E}_{in} ，回路中的感应电动势可表示为

$$\mathcal{E}_{in} = \oint_C \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l}$$

因而有

$$\oint_C \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$



2. 对感应电场的讨论

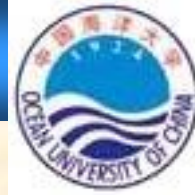
- 感应电场是由变化的磁场所激发的电场。
- 感应电场是有旋场。
- 感应电场不仅存在于导体回路中，也存在于导体回路之外的空间。
- 对空间中的任意回路（不一定是导体回路） C ，都有

$$\oint_C \vec{E}_{in} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

若空间同时存在由电荷产生的电场，则总电场 \vec{E} 应为 \vec{E}_{in} 与 \vec{E}_c 之和，即 $\vec{E} = \vec{E}_{in} + \vec{E}_c$ 。由于 $\oint_C \vec{E}_c \cdot d\vec{l} = 0$ ，故有

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

推广的法拉第
电磁感应定律



3. 引起回路中磁通变化的几种情况

(1) 回路不变，磁场随时间变化

磁通量的变化由磁场随时间变化引起，因此有

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi}{dt} = -\int_s \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{s}} \quad \text{称为感生电动势，如变压器}$$

$$\varepsilon = \oint_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\mathbf{l}}$$

应用Stokes定理，则
$$\int_s (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) \cdot d\mathbf{s} = -\int_s \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{s}}$$

因S是任意的，从而有
$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad \text{意义：随时间变化的磁场将激发电场}$$

由此，变化的磁场产生电场，那么变化的电场是否会产生磁场呢？



(2) 导体回路在恒定磁场中运动

$$\varepsilon_{in} = \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = \oint_C (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} \quad \text{—— 动生电动势}$$

(3) 回路在时变磁场中运动

$$\varepsilon_{in} = \oint_C \bar{E} \cdot d\vec{l} = \oint_C (\bar{v} \times \bar{B}) \cdot d\bar{l} - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$$



静态情况下的电场基本方程在非静态时发生了变化，即

$$\nabla \times \bar{E} = 0 \quad \text{👉} \quad \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

这不仅是方程形式的变化，而是一个本质的变化，其中包含了重要的物理事实，即 **时变磁场可以激发电场**。

问题：随时间变化的磁场要产生电场，那么随时间变化的电场是否会产生磁场？

在时变情况下，安培环路定理是否要发生变化？有什么变化？即

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

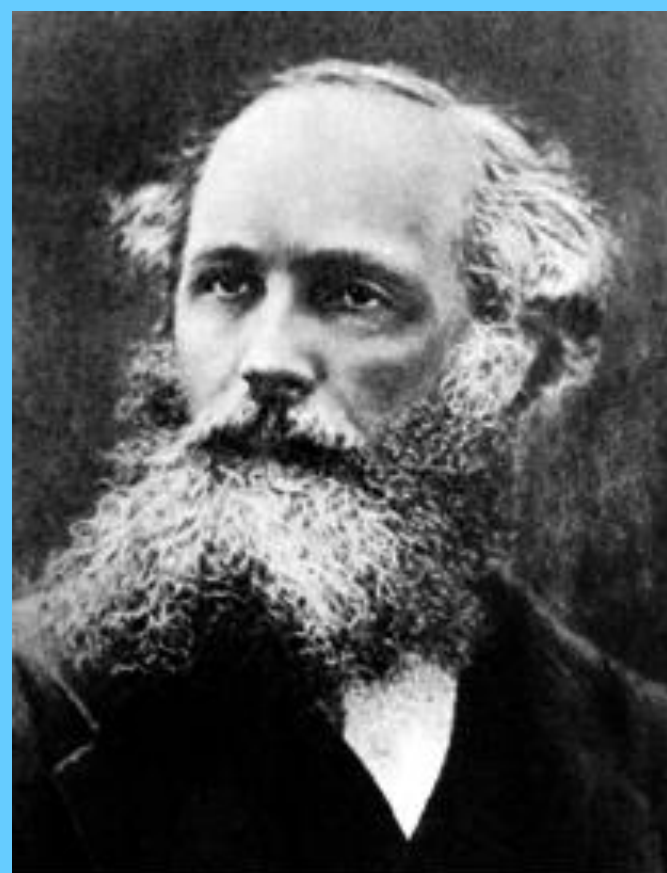
(恒定磁场)



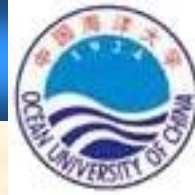
$$\nabla \times \bar{H} = ?$$

(时变场)

2.2.2 位移电流和全电流定律



麦克斯韦, J. C.



二、位移电流

1、电磁场实验规律的总结

电场中的高斯定理

$$\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \sum q_0$$

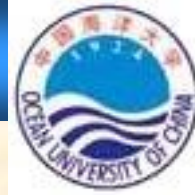
磁场中的磁通连续性原理

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

法拉第电磁感应定律 $\oint_l \bar{E}_{in} \cdot d\bar{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot d\bar{S}$

安培环路定理

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \sum I_0$$



现有方程:

$$\text{静态电场:} \quad \nabla \times \bar{\mathbf{E}}_q = 0 \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}}_q = \rho_v$$

$$\text{静态磁场:} \quad \nabla \times \bar{\mathbf{H}}_q = \bar{\mathbf{J}} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{B}}_q = 0$$

$$\text{时变电场:} \quad \nabla \times \bar{\mathbf{E}}_i = -\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

$$\text{电荷守恒定律:} \quad \oint_S \bar{\mathbf{J}} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\text{用散度定理, 将上式两端用体积分表示} \quad \int_V \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} dv = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_v dv = -\int_V \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv$$

$$\text{得} \quad \text{电流连续性方程:} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (\text{e})$$

目标: 总结出既适合静态场又适合时变场的普遍方程



麦克斯韦用对称性原理对电磁场的实验规律进行总结，

发现有两种不对称：

第一种不对称是两个通量定理：

这很好解释，因为自然界不存在磁荷。

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_0$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

第二种不对称是两个环流定理：

$$\begin{cases} \vec{E} \text{ 的环流有 } \frac{d\phi_m}{dt}, \text{ 没有 "磁流"} \\ \vec{H} \text{ 的环流有 } \sum I, \text{ 但没有 } \frac{d\phi_D}{dt} \end{cases}$$

同样的理由，因自然界无磁荷，因而在 \vec{E} 的环流中没有对应的磁流可以理解，但在 \vec{H} 的环流中没有对应的 $\frac{d\phi_D}{dt}$ ，则找不出合理的解释，因为，电位移通量及变化率是存在的，因此麦克斯韦认为，在 \vec{H} 的环流中应补上 $\frac{d\phi_D}{dt}$ ，同时，他还解释了 $\frac{d\phi_D}{dt}$ 的物理意义。



时变情况下，若电荷分布随时间变化，由电流连续性方程有

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$$

发生矛盾

而由 $\nabla \times \bar{H} = \bar{J} \implies \nabla \cdot \bar{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{H}) = 0$

在时变的情况下不适用

■ 解决办法：对安培环路定理进行修正

$$\text{由 } \nabla \cdot \bar{D} = \rho \implies \nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \bar{D}) \implies \nabla \cdot \left(\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) = 0$$

将 $\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ 修正为: $\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$

矛盾解决

时变电场会激发磁场



2. 位移电流密度 (Displacement current density)

因此麦克斯韦提出了一个**大胆的假设**：

- ① 电场中某一点的**位移电流的密度** \bar{J}_d 等于该点的电位移矢量 \bar{D} 对时间的变化率，即

$$\bar{J}_d = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

- ② 电场中某一截面处的位移电流 I_d 等于通过该截面处的电位移通量 ϕ_d 对时间的变化率，即

$$I_d = \frac{d\phi_d}{dt} = \int_s \bar{J}_d \cdot d\bar{s} = \int_s \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$$

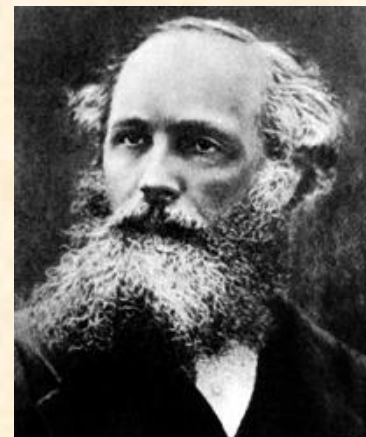


位移电流密度

$$\bar{J}_d = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

量纲: $(C/m^2)/s = A/m^2$ (安/米²)

- 电位移矢量随时间的变化率，能像电流一样产生磁场，故称“位移电流”。
- 位移电流只表示电场的变化率，与传导电流不同，它不产生热效应。
- 位移电流的引入是建立麦克斯韦方程组的至关重要的一步，它揭示了时变电场产生磁场这一重要的物理概念。



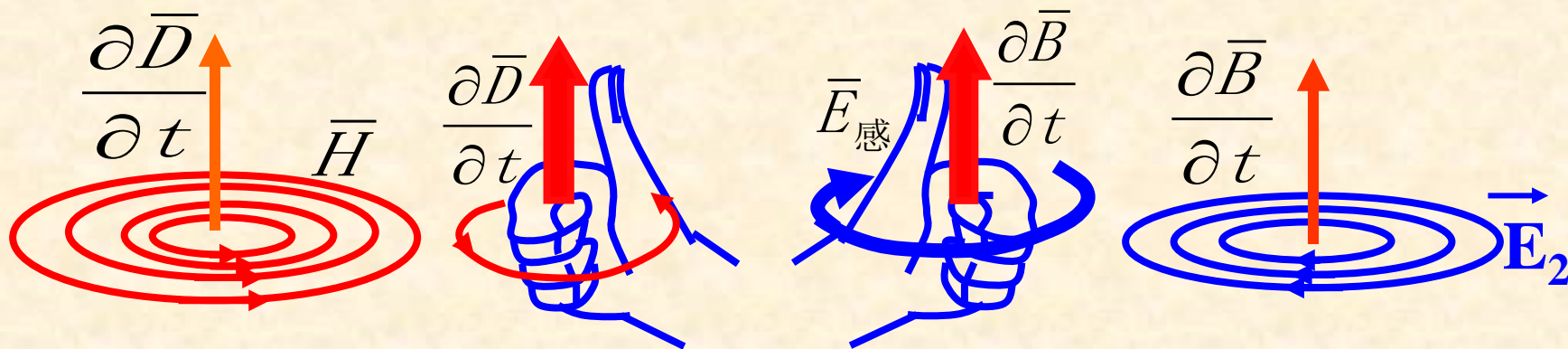
注：在绝缘介质中，无传导电流，但有位移电流。

在理想导体中，无位移电流，但有传导电流。

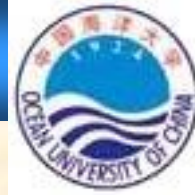
在一般介质中，既有传导电流，又有位移电流。

位移电流的性质

- 1) 实质上是变化的电场，不产生焦耳热！
- 2) 在激发磁场方面与传导电流等效
- 3) 激发的磁场与其成右手螺旋关系：



而变化的磁场激发的涡旋电场间的关系遵从左手螺旋法则。



3、全电流的概念及全电流连续性原理

全电流：通过某一截面的**传导**电流、**位移**电流和**运流**电流之代数和。

$$\bar{\mathbf{J}}_t = \bar{\mathbf{J}}_c + \bar{\mathbf{J}}_v + \bar{\mathbf{J}}_d = \bar{\mathbf{J}} + \bar{\mathbf{J}}_d$$

a) 各个电流特点如下

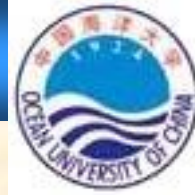
1、**传导电流**：在导体中，由自由电子的定向运动形成：

2、**运流电流**：在真空和气体中，带电粒子的定向运动形成：

$$\bar{\mathbf{J}}_v = \rho_v \bar{\mathbf{V}}$$

3、**位移电流**：电通量密度的时间变化率

$$\bar{\mathbf{J}}_d = \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}$$



b) 全电流连续性原理

将磁场的旋度方程Eq. (b) 两端取散度并用散度定理

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}_t = 0$$

$$\oint_S (\bar{\mathbf{J}}_c + \bar{\mathbf{J}}_v + \bar{\mathbf{J}}_d) \cdot d\bar{\mathbf{s}} = 0$$

$$I_t = I_c + I_d + I_v = 0$$
 穿过任一封闭面的各类电流之和恒为0



4. 全电流定律

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad \text{—— 微分形式}$$

两端作面积分，并用Stokes定理将左边的面积分化为线积分，得到积分形式的全电流定律

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s (\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) \cdot d\bar{s} \quad \text{—— 积分形式}$$

磁场强度沿任意闭合路径的线积分，等于该路径所包围曲面上的全电流。

全电流定律揭示不仅传导电流激发磁场，变化的电场也可以激发磁场。它与变化的磁场激发电场形成自然界的一个对偶关系。



积分对称关系

$$\oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \quad - \int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$$

$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s \bar{J}_c \cdot d\bar{s} + \int_s \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{s}$$



5、位移电流与传导电流之异同

①相同处：

都可以激发涡旋磁场。

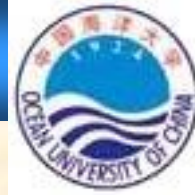
不过在一般情况下，位移电流产生的磁场很弱不易被人们所觉察，但在超高频情况下，位移电流激发的磁场也是很强的。

②不同处：

- 传导电流是自由电荷的定向移动，只能存在于导体或溶液中
位移电流不存在电荷的移动，而是电场对时间的变化率，即使在真空中也可有位移电流。
- 传导电流在导体中产生焦耳热，真空中的位移电流不产生焦耳热。



传导电流	位移电流
由宏观的电荷移动产生	由变化的电场产生，无宏观的电荷移动
有热效应	无热效应
可产生涡旋的磁场	可产生涡旋的磁场



选择：电位移矢量的时间变化率 $\frac{d\vec{D}}{dt}$ 的单位是：

(A) 库仑 / 米²

(B) 库仑 / 秒

(C) 安培 / 米²

(D) 安培 · 米²

解：首先是应明确 $\frac{d\vec{D}}{dt}$ 是位移电流密度

而电流密度 $J = \frac{dI}{ds}$

故应选 C



例 1 自由空间的磁场强度为

$$\bar{H} = \hat{x}H_m \cos(\omega t - kz) \quad (A/m)$$

式中的 k 为常数。试求：位移电流密度和电场强度。

解：自由空间的传导电流密度为0，故由式 $\nabla \times \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ ，得

$$\begin{aligned} \bar{J}_d &= \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \nabla \times \bar{H} = \left(\hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \hat{x}H_x \\ &= \hat{y} \frac{\partial H_x}{\partial z} = \hat{y} \frac{\partial}{\partial z} [H_m \cos(\omega t - kz)] \\ &= \hat{y}kH_m \sin(\omega t - kz) \quad (A/m^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\bar{D}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} dt = \frac{1}{\epsilon_0} \int \hat{y}kH_m \sin(\omega t - kz) dt \\ &= -\hat{y} \frac{k}{\omega \epsilon_0} H_m \cos(\omega t - kz) \quad (V/m) \end{aligned}$$



§ 2.3 Maxwell方程组

Maxwell's Equations

- Maxwell方程组的微分形式与积分形式
- 本构关系和波动方程
- 电磁场的位函数

经典电动力学的奠基人麦克斯韦 (J.C.Maxwell) 简介(1831--1879)

一、生平

- 法拉第发现电磁感应定律那一年，即1831年，麦克斯韦在英国出生。
- 在中学阶段，麦克斯韦就显示出了在数学和物理方面的才能，十五岁那年就写了一篇关于卵形线作图法的论文，被刊登在《爱丁堡皇家学会学报》上。
- 1847年，十六岁的麦克斯韦考入爱丁堡大学。
- 1850年又转入剑桥大学。他学习勤奋，成绩优异，经著名数学家霍普金斯和斯托克斯的指点，很快就掌握了当时先进的数学理论。这为他以后的发展打下了良好的基础。
- 1854年在剑桥大学毕业后，曾先后任亚伯丁马里夏尔学院、伦敦皇家学院和剑桥大学物理学教授。



二、主要贡献

总结了库仑、高斯、安培、法拉第、诺埃曼、汤姆逊等人的研究成果，特别是把法拉第的力线和场的概念用数学方法加以描述、论证、推广和提升，创立了一套完整的电磁场理论。

麦克斯韦除了在电磁学方面的贡献外，还是分子运动论的奠基人之一。



麦克斯韦对电场方程的修正

电场

	高斯定理	环路定理
静电场	$\oint_S \bar{D}_q \cdot d\bar{S} = \sum_{S \text{ 内}} q_0 = \int_V \rho dV$	$\oint_L \bar{E}_q \cdot d\bar{l} = 0$
感生电场	$\oint_S \bar{D}_{in} \cdot d\bar{S} = 0$	$\oint_L \bar{E}_{in} \cdot d\bar{l} = - \int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$
电场： 静电场+ 感生电场	$\bar{D} = \bar{D}_q + \bar{D}_{in}$ $\oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int_V \rho dV$	$\bar{E} = \bar{E}_q + \bar{E}_{in}$ $\oint_L \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$



麦克斯韦对磁场方程的修正

磁场

	磁通连续性原理	安培定理
恒定	$\oint_S \bar{B}_q \cdot d\bar{S} = 0$	$\oint_L \bar{H}_q \cdot d\bar{l} = \sum_L I = \int_s \bar{J} \cdot d\bar{S}$
变化 磁场	$\oint_S \bar{B}_{in} \cdot d\bar{S} = 0$	$\oint_L \bar{H}_{in} \cdot d\bar{l} = \int \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot d\bar{S}$
磁场:	$\bar{B} = \bar{B}_q + \bar{B}_{in}$	$\bar{H} = \bar{H}_q + \bar{H}_{in}$
恒定磁场 +变化磁场	$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$	$\oint_L \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s (\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) \cdot d\bar{S}$



对于时变电磁场，麦克斯韦归纳为四个方程，其积分形式和微分形式分别如下：

积分形式

微分形式

全电流定律

$$\oint_l \bar{\mathbf{H}} \cdot d\mathbf{l} = \int_s (\bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}$$

电磁感应定律

$$\oint_l \bar{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{l} = - \int_s \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} \cdot d\bar{\mathbf{S}}$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = - \frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t}$$

磁通连续性原理

$$\oint_s \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{B}} = 0$$

高斯定律

$$\oint_s \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = q$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \rho$$



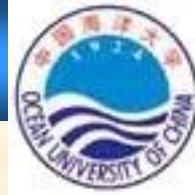
一、Maxwell方程组及电流连续性方程

综上所述, 电磁场基本方程组 (Maxwell方程组) 为

$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (a)$	\longleftrightarrow	$\oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\int_s \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{s} \quad (a')$
$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad (b)$		$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s (\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) \cdot d\bar{s} \quad (b')$
$\nabla \cdot \bar{D} = \rho_v \quad (c)$		$\oint_s \bar{D} \cdot d\bar{s} = Q \quad (c')$
$\nabla \cdot \bar{B} = 0 \quad (d)$		$\oint_s \bar{B} \cdot d\bar{s} = 0 \quad (d')$

1.四个方程的简称和所反映的物理意义

- (a) 法拉第定律: 时变磁场将激发电场;
- (b) 全电流定律: 电流和时变电场都将激发磁场;
- (c) 高斯定理: 穿过任一封闭面的电通量等于该面所包围的自由电荷电量;
- (d) 磁通连续性原理: 穿过任一封闭面的磁通量恒等于零。



2. 电流连续性方程:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (e)$$

$$\oint_s \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = -\frac{dQ}{dt} \quad (e')$$

(a) 初始场源 ρ_v 和 $\bar{\mathbf{J}}$ 是相关的, 两者只有一个是独立的。

$$(b) \bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{J}}_e + \bar{\mathbf{J}}_c \quad \text{或} \quad \bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{J}}_e + \bar{\mathbf{J}}_v$$

3. 只有 (a) (b) 是独立方程, (c) (d) 可由之导出:

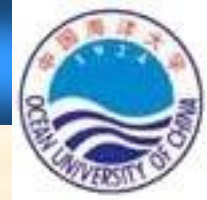
$$\nabla \cdot (b): \nabla \cdot \left(\bar{\mathbf{J}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\text{将(e)代入上式: } -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}}) = 0$$

$$\text{则} \quad -\rho_v + \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = C(\text{常数})$$

$$\text{由于 } t=0 \text{ 时, } \rho_v = 0, \text{ 处处 } \bar{\mathbf{D}} = 0, \text{ 故上式中 } C = 0. \text{ 得} \quad \nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = \rho_v(c)$$

同理可导出 (d)



4. **麦克斯韦**教授根据(a) (b) 导出电磁波的波动方程，发现其传播速度与光速相同。他进而推断光也是一种电磁波，并预言其他电磁波的存在。

1887年德国年青教授**赫兹**首次发射和接收到电磁波。

1888年证实电磁波以光速传播。从而证实了Maxwell的预言。

1895年**马可尼**和**波波夫**成功地进行了无线电报传送实验，开始了人类应用电磁波的新纪元。



Heinrich Rudolf Hertz
(1857—1894)

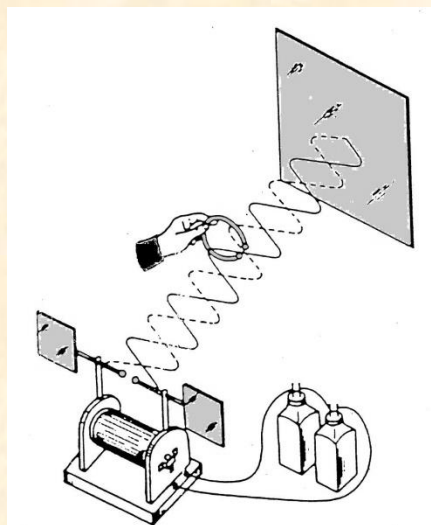
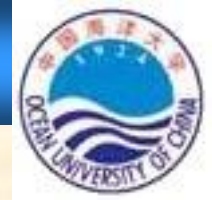


图2.3-3 赫兹的电磁波实验

理论源于实践又指导实践，
并经受实践的检验。



5. 麦克斯韦方程组反映了自然界电磁现象的和谐美。

6. Maxwell电磁理论是相对真理, 而不是绝对真理, 仅适用于宏观电磁现象。

科学上新的事实与原有理论之间的矛盾是不断出现的, 并不断地推动着科学的进一步发展---**创新**。



经典电动力学

Maxwell方程组

电流连续性方程

洛仑兹力



电磁问题的研究

树立信念 \Rightarrow 发现现象 \Rightarrow 总结规律

电磁场规律的表达

力的表达 \Rightarrow 场的积分表达 \Rightarrow 场的微分表达

为什么是麦克斯韦？

1. 在三个方程中有不同的贡献,并作系统的总结
2. 有较好的数学工具,有前人的基础和后人的发展



爱因斯坦在所著的“物理学演变”一书中关于麦克斯韦方程的一段评述：

“这个方程的提出是牛顿时代以来物理学上的一个重要事件，它是关于场的定量数学描述，方程所包含的意义比我们指出的要丰富得多。

在简单的形式下隐藏着深奥的内容，这些内容只有仔细的研究才能显示出来，方程是表示场的结构的定律。它不像牛顿定律那样，把此处发生的事件与彼处的条件联系起来，而是把此处的现在的场只与最近的刚过去的场发生联系。

假使我们已知此处的现在所发生的事件，藉助这些方程便可预测在空间稍为远一些，在时间上稍为迟一些所发生的事件”。



麦克斯韦方程除了对于科学技术的发展具有重大意义外，对于人类历史的进程也起了重要作用。

正如美国著名的物理学家弗曼在他所著的“弗曼物理学讲义”中写道“从人类历史的漫长远景来看——即使过一万年之后回头来看——毫无疑问，在十九世纪中发生的最有意义的事件将判定是麦克斯韦对于电磁定律的发现，与这一重大科学事件相比之下，同一个十年中发生的美国内战（1861-1865）将会降低为一个地区性琐事而黯然失色”。



处于信息时代的今天，从婴儿**监控器**到各种**遥控设备**、从**雷达**到**微波炉**、从**地面广播电视**到**太空卫星广播电视**、从**地面移动通信**到**宇宙星际通信**、从**室外无线局域网**到**室内蓝牙技术**、以及**全球卫星定位导航系统**等，无不利用**电磁波**作为**传播媒体**。

无线信息高速公路更使人们能在**任何地点**、**任何时间**同**任何人**取得联系，发送所需的**文本**、**声音**或**图象信息**。**电磁波**的传播还能制造一种**身在远方的感觉**，形成**无线虚拟现实**。

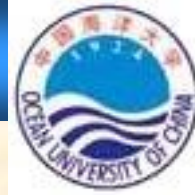
电磁波获得如此广泛的应用，更使我们深刻地体会到**19世纪**的**麦克斯韦**和**赫兹**对于人类**文明**和**进步**的伟大贡献。



二、本构关系和波动方程

在有介质存在时，电场强度矢量和磁感应强度矢量都与介质的特性有关，因此上述麦克斯韦方程组是不完备的，还需要再补充描述介质性质的方程：

——本构关系



二、本构关系和波动方程

a) 本构关系 $\bar{D} = \epsilon \bar{E}$

$$\bar{B} = \mu \bar{H}$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{理想介质: } \sigma=0 \\ \text{理想导体: } \sigma=\infty \\ \text{导电媒质: } 0 < \sigma < \infty \end{array} \right.$$

ϵ 、 μ 、 σ 分别是介质的介电常数、磁导率和电导率；

简单媒质是指均匀、线性、各向同性的媒质

若媒质参数与位置无关，称为**均匀媒质**；

若媒质参数与场强大小无关，称为**线性媒质**；

若媒质参数与场强方向无关，称为**各向同性媒质**；

若媒质参数与场强频率无关，称为**非色散媒质**；反之称为**色散媒质**。



b) 波动方程

将本构关系，代入Maxwell方程组，消去 \bar{D} 和 \bar{B} 分量，得到 \bar{E} 和 \bar{H} 的方程组：

Maxwell方程组限定形式

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} & (2.3-1a) \\ \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} & (2.3-1b) \\ \nabla \cdot \bar{E} = \rho_v / \varepsilon & (2.3-1c) \\ \nabla \cdot \bar{H} = 0 & (2.3-1d) \end{cases}$$

※无源区($\bar{J}=0, \rho_v=0$)波动方程的推导：

对(1a) 式两端取旋度： $\nabla \times \nabla \times \bar{E} = \nabla(\nabla \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{H})$

将(1b)式和(1c)式代入上式，并考虑无源情况，得到电场 \bar{E} 的齐次波动方程

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = 0$$

同理可得

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = 0$$

方程的解是一种电磁波动，其传播速度是媒质中的光速 $\frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ 。

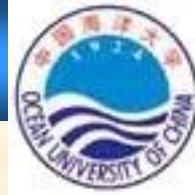


※有源区：

$$\nabla^2 \bar{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{\rho_v}{\epsilon} \right)$$

$$\nabla^2 \bar{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \bar{J}$$

可见，场强与场源的关系复杂，一般不直接求解上述方程，而是引入位函数来求解 \bar{E} 和 \bar{H} 。



三、电磁场的位函数

目的：将非齐次波动方程的求解化为较简单的位函数的求解，

在求出位函数后便可容易地得出场量 \bar{E} 和 \bar{H} 。

a) 矢量位函数 $\bar{A} : \nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) = 0$

从电磁场基本方程组出发，

$$\text{由 } \nabla \cdot \bar{B} = 0 \rightarrow \bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad \text{或} \quad \bar{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A}$$

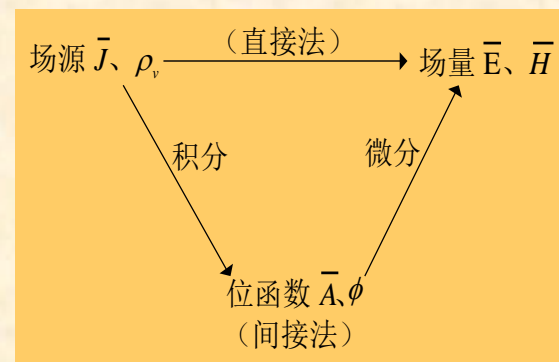


图2.3-4 由场源求场的两种方法

b) 标量位函数 $\phi : \nabla \times \nabla \phi = 0$

$$\text{由 } \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad \nabla \times (\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}) = 0 \rightarrow \bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

这样，我们就将 \bar{E} 和 \bar{H} 用矢量 \bar{A} 和标量 ϕ 表示



c) 位函数的非齐次波动方程

$$\text{由 } \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad \nabla \times \nabla \times \bar{A} = \mu \bar{J} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right)$$

$$\text{因 } \nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A}, \text{ 得 } \nabla^2 \bar{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J} + \nabla \left(\nabla \cdot \bar{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

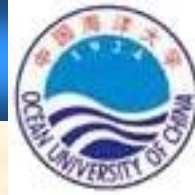
定义 \bar{A} 的散度: $\nabla \cdot \bar{A} = -\mu \varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t}$ 洛伦兹规范 (条件)

因此, 非齐次波动方程 $\nabla^2 \bar{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J}$

对 ϕ : 由 $\nabla \cdot D = \rho_v \rightarrow \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{A} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \phi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon}$$



讨论与引伸

1) 洛仑兹规范的重要意义

- 确定 $\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}}$ 的值, 与 $\bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \bar{\mathbf{A}}$ 共同惟一确定 $\bar{\mathbf{A}}$;
- 洛仑兹规范与电流连续性原理相一致。

证明: 对 ϕ 的非齐次波动方程式两边取散度:

$$\text{代入洛仑兹规范} \quad -\mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}) = -\mu \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}}$$

上式括号为 的非齐次波动方程的左边, 因此

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} (e)$$

2) 若场不随时间变化, 波动方程蜕变为泊松方程:

$$\nabla^2 \bar{\mathbf{A}} = -\mu \bar{\mathbf{J}}$$

$$\nabla^2 \phi = -\rho_v / \epsilon$$

P.51 例2.3—1 试用麦克斯韦方程组导出图2.3-5所示的RLC串联电路的电压方程（电路全长远小于波长）。

[解] 根据麦氏方程式（a'）有

$$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\psi}{dt}$$

将回路电压分段表示，得

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} + \frac{d\psi}{dt} = 0$$

$$U_{ab} = \int_a^b \frac{\bar{\mathbf{J}}}{\sigma} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = \frac{J}{\sigma} l_1 = \frac{I}{\sigma A_0} l_1 = IR, \quad R = \frac{l_1}{\sigma A_0}$$

$$U_{bc} = \frac{d\psi_m}{dt} = L \frac{dI}{dt} \quad \left(\text{例2.2-2得: } I = C \frac{dU}{dt} \right)$$

$$U_{cd} = \frac{1}{C} \int Idt$$

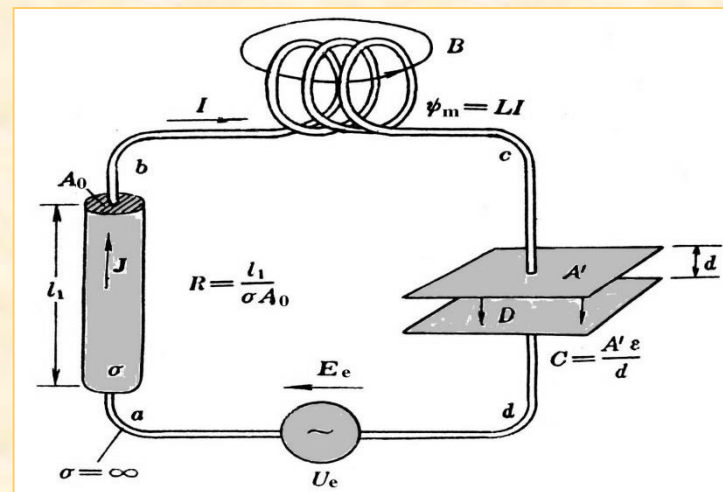
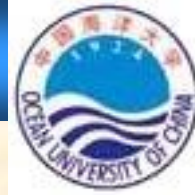


图2.3-5 RLC串联电路



设外加电场为 \bar{E}_e 则有

$$U_{da} = \int_d^a \bar{E}_e \cdot d\bar{l} = - \int_a^d \bar{E}_e \cdot d\bar{l} = -U_e$$

因为回路中的杂散磁通可略, $d\psi/dt \approx 0$ 从而得

$$IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int Idt = U_e$$

—— 基尔霍夫电压定律

采用复数表示 (设角频率为 ω):

$$U_e = IR + jI(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

可见, 电路理论的基本方程不过是场方程的一种特殊化。



P.52 例2.3—2 利用电流连续性方程和麦氏方程组证明导电媒质内部 $\rho_v = 0$

[证] 电流连续性方程 $\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$

因 $\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$, 有 $\sigma \nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t}$

将简单媒质中麦氏方程 $\nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = \rho_v / \epsilon$ 代入上式, 得

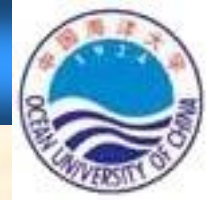
$$\frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho_v = 0$$

其解为 $\rho_v = \rho_{v0} e^{-(\sigma/\epsilon)t} \text{ (C/m}^3\text{)}$

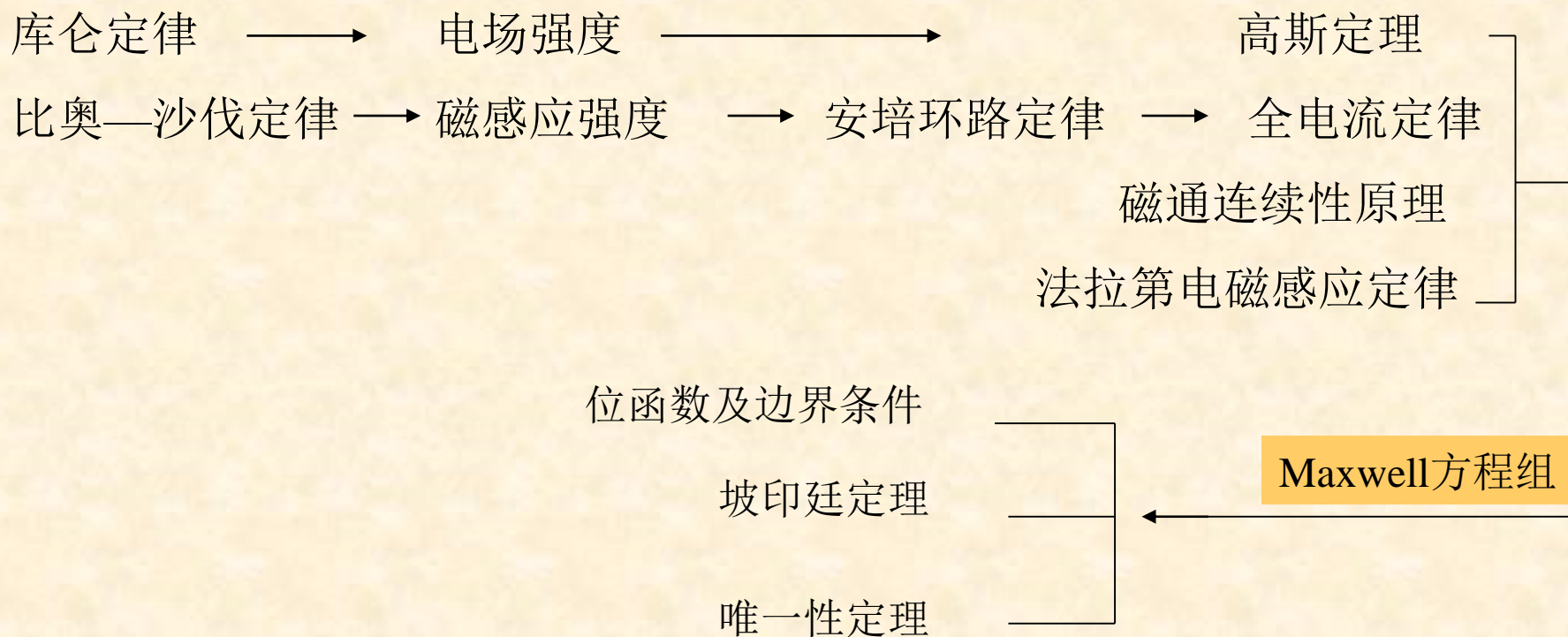
此为衰减函数, 驰豫时间 (衰减至 $1/e$ 的时间) 为 $\tau = \epsilon / \sigma$ 。

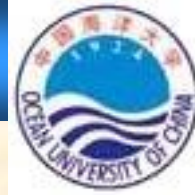
铜 $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$, $\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, 得 $\tau = 1.5 \times 10^{-19} \text{ 秒}$ 。

可见导体内的电荷衰减非常快, 使其中 ρ_v 可看作零。



第二章 电磁场基本方程





➤ 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S (\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) \cdot d\bar{S} \\ \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} \\ \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \\ \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV \end{array} \right.$$

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = - \int_V \rho dV$$



➤ 麦克斯韦方程组的微分形式

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{D} = \rho \end{cases}$$

麦克斯韦第一方程，表明传导电流和变化的电场都能产生磁场

麦克斯韦第二方程，表明变化的磁场产生电场

麦克斯韦第三方程，表明磁场是无源场，磁感线总是闭合曲线

麦克斯韦第四方程，表明电荷产生电场



➤媒质的本构关系

各向同性线性媒质的本构关系为

$$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$$

$$\bar{B} = \mu \bar{H}$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$

代入麦克斯韦方程组中，有

限定形式的麦克斯韦方程

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{H} = \sigma \bar{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \bar{E}) \\ \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu \bar{H}) \\ \nabla \cdot (\mu \bar{H}) = 0 \\ \nabla \cdot (\varepsilon \bar{E}) = \rho \end{cases}$$

(均匀媒质)

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{H} = \sigma \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{E} = -\mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \bar{H} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{E} = \rho / \varepsilon \end{cases}$$



- 时变电场的激发源除了电荷以外，还有变化的磁场；而时变磁场的激发源除了传导电流以外，还有变化的电场。电场和磁场互为激发源，相互激发。
- 时变电磁场的电场和磁场不再相互独立，而是相互关联，构成一个整体 —— 电磁场。电场和磁场分别是电磁场的两个分量。
- 在离开辐射源（如天线）的无源空间中，电荷密度和电流密度矢量为零，电场和磁场仍然可以相互激发，从而在空间形成电磁振荡并传播，这就是电磁波。

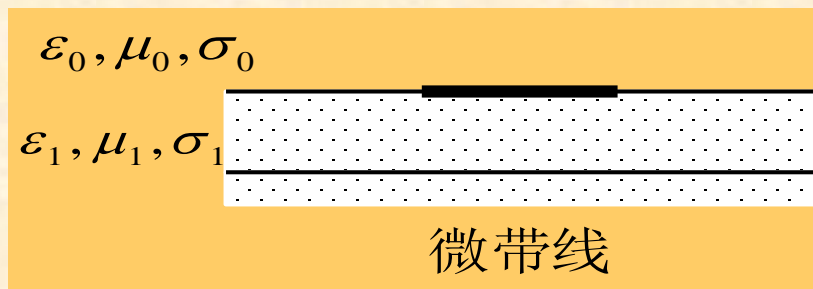


§ 2.4 电磁场的边界条件

Boundary Conditions of EM Fields

实际应用中，常要求解麦氏方程组在不同区域的特解，比如微波电路中通常用到的微带线，它就涉及三种媒质：

介质基片中的媒质、金属导带和空气



- 不同媒质的介电常数 ϵ 、磁导率 μ 、电导率 σ 不同，在分界面两侧的媒质参数有突变。
- 边界上Maxwell方程组的微分失去意义
- 从积分形式的Maxwell方程组出发推导边界两侧电磁场间的关系。



2.4 电磁场的边界条件

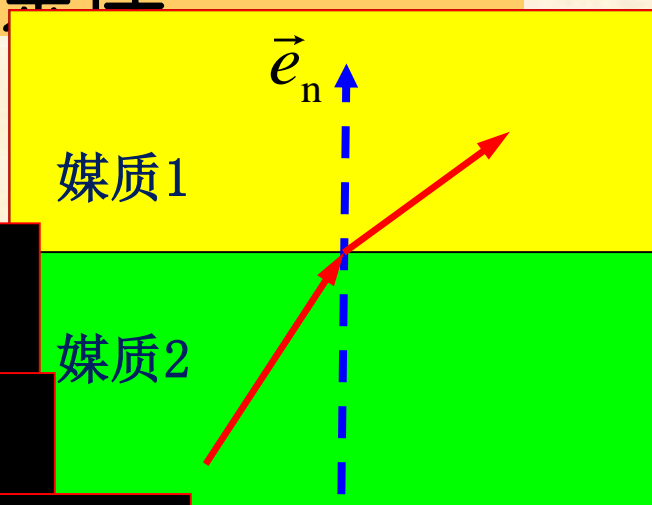
- 什么是电磁场的边界条件？

实际电磁场问题都是在一定的物理空

物理：由于在分界面两侧介质的特性参

数学：麦克斯韦方程组是微分方程组，其

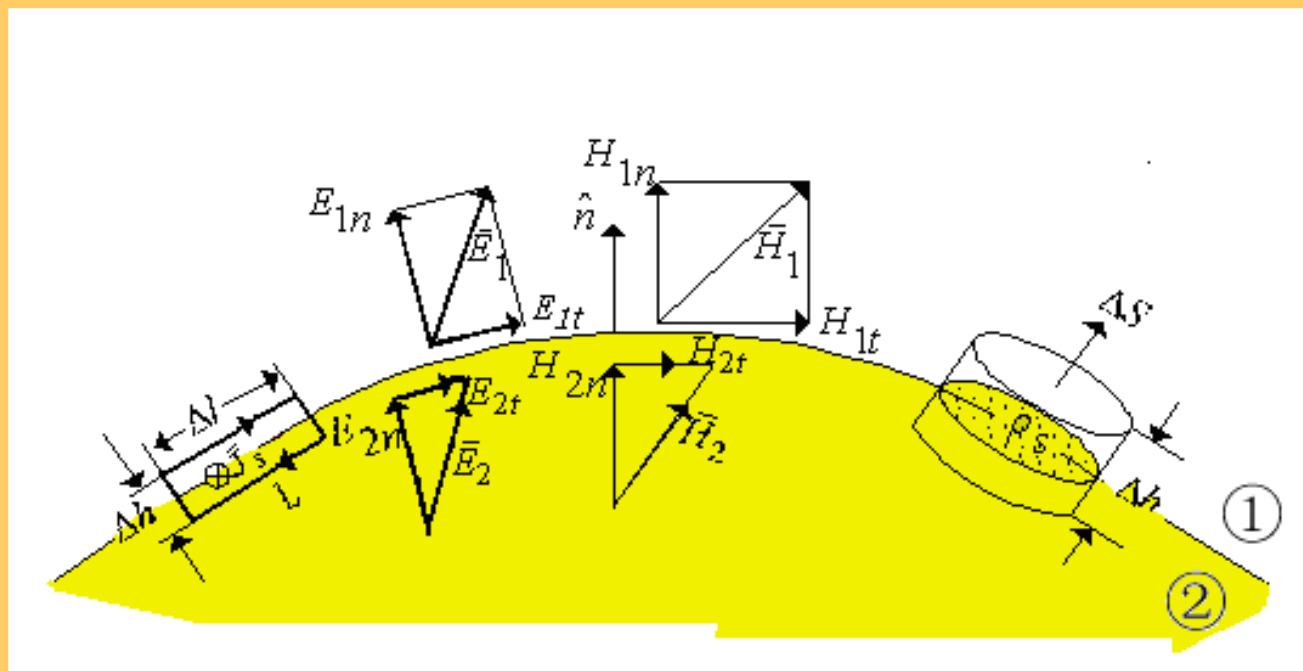
麦克斯韦方程组的积分形式在不同媒质的分界面上仍然适用，由此可导出电磁场矢量在不同媒质分界面上的边界条件。

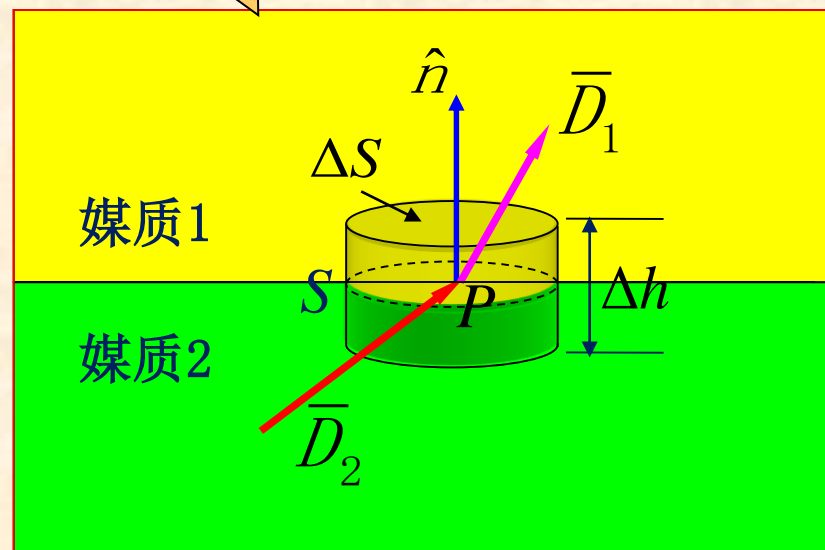
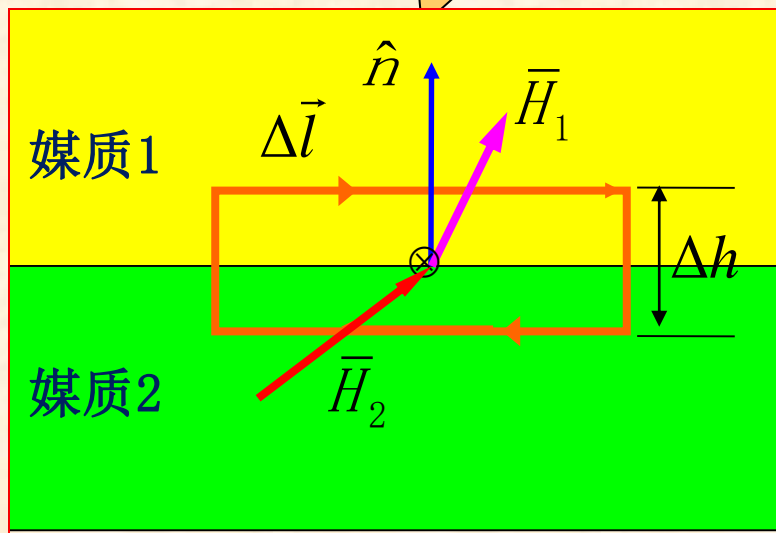
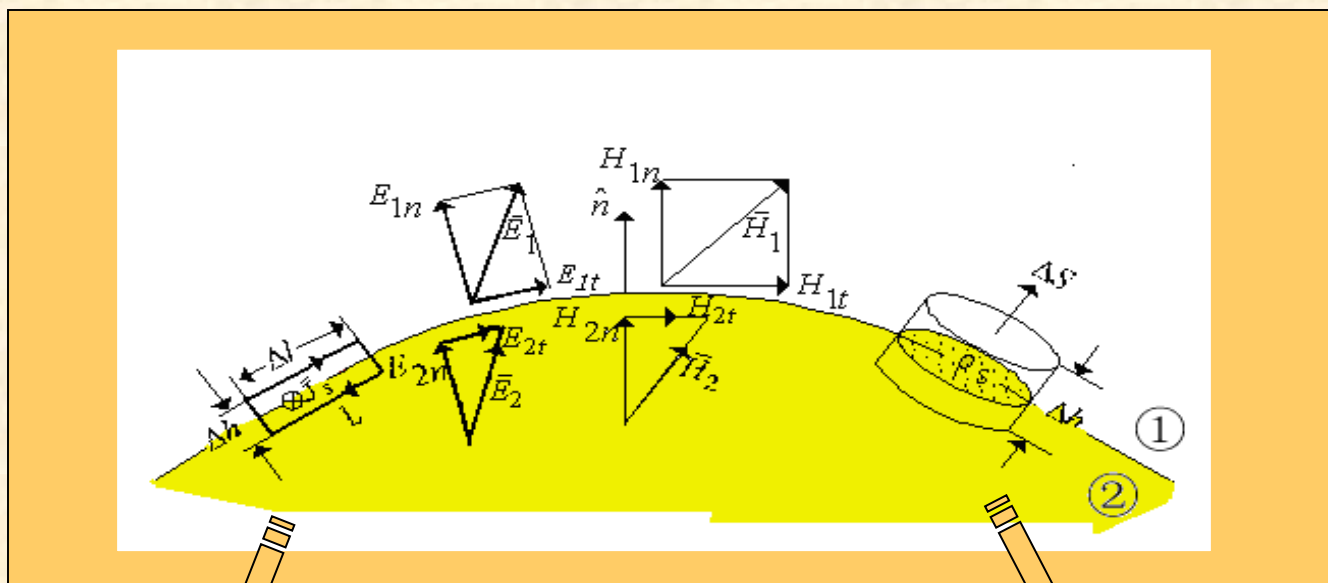


本节内容

2.4.1 边界条件的一般表达式

2.4.2 两种常见的情况







一、边界条件一般表达式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_S (\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) \cdot d\bar{S} \\ \oint_C \bar{E} \cdot d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \cdot d\bar{S} \\ \oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \\ \oint_S \bar{D} \cdot d\bar{S} = \int_V \rho dV \end{array} \right.$$

$$\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s$$

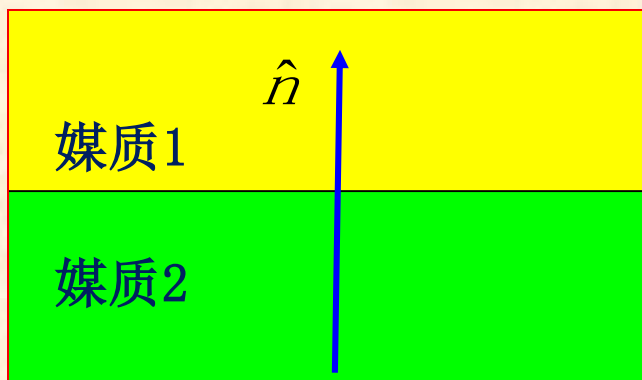
$$\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s$$

分界面上的电荷面密度

分界面上的电流面密度





§ 2.4 电磁场的边界条件

➤ 边界条件的推证

a) \vec{E} 和 \vec{H} 的切向边界条件

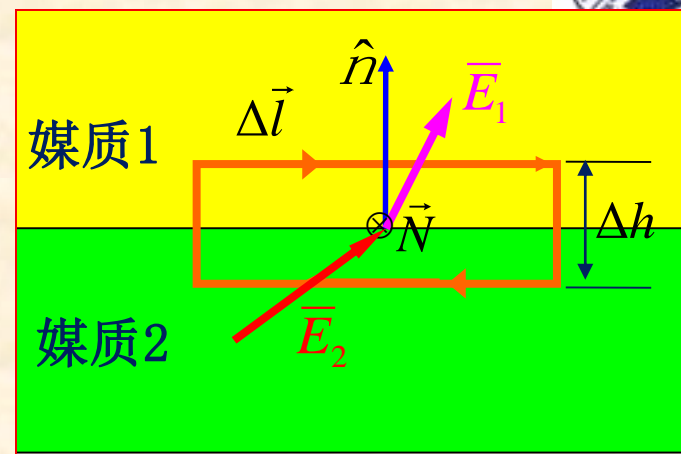
由 *Maxwell* 方程组的方程(a')

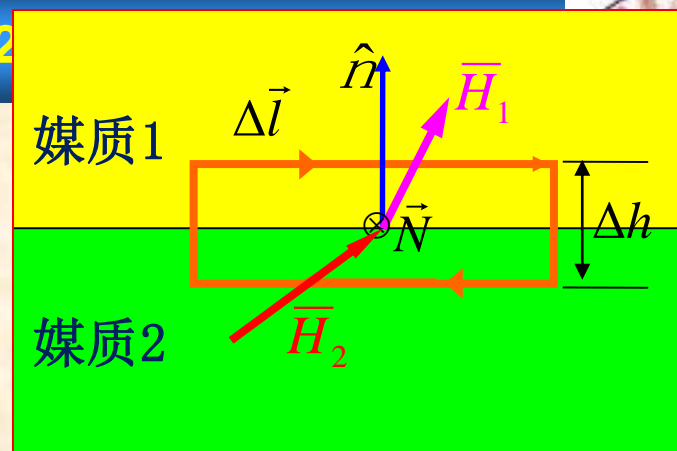
$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{l} + \vec{E}_2 \cdot (-\Delta\vec{l}) = E_{1t}\Delta l - E_{2t}\Delta l = -\int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = 0$$

• $\Delta h \rightarrow 0$ 时, $\Delta S \rightarrow 0$, 面积分可以忽略

$$E_{1t} = E_{2t}$$

分界面上电场强度的切向分量连续





由Maxwell方程组的方程(b')

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{1t} \Delta l - H_{2t} \Delta l = I + \int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = I = J_s \Delta l$$

$$H_{1t} - H_{2t} = J_s$$

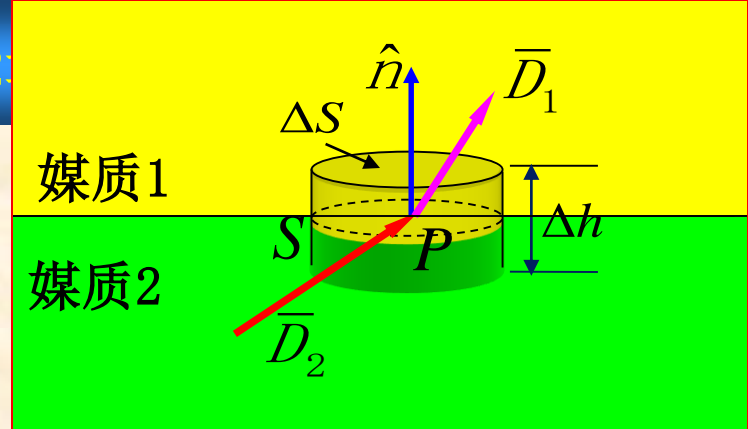
(不是J!)

- J_s 是与小回路面积相垂直方向上的传导电流密度(单位:A/m)
- $\Delta h \rightarrow 0$ 时, $\Delta S \rightarrow 0$ 面积分可以忽略
- 当分界面上有面电流时, 小回路包围电流

§ 2.4 电磁场的边界条件

b) \bar{D} 和 \bar{B} 的法向边界条件

取一个圆柱形小体积元如右图所示，忽略穿出侧壁的通量，计算通过上下底面的通量，面上的 \bar{D} 和 \bar{B} 可以视为常数。



由Maxwell方程组的方程 (c')

$$\oint_S \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{D}}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} \Delta S + \bar{\mathbf{D}}_2 \cdot (-\hat{\mathbf{n}} \Delta S) = (D_{1n} - D_{2n}) \Delta S = \rho_s \Delta S$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (\text{不是 } \rho_v)$$

ρ_s (单位: C/m²) 是分界面上自由电荷的面密度

(理想导体电导率 $\sigma \rightarrow \infty$ ，内部不存在电场，电荷只存在于理想导体表面，形成面电荷)

由Maxwell方程组的方程(d')

$$\oint_S \bar{\mathbf{B}} \cdot d\bar{\mathbf{s}} = (B_{1n} - B_{2n}) \Delta S = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

分界面上磁通密度的法向分量连续

电磁场的边界条件:

代数式

$$E_{1t} = E_{2t} \quad (1a)$$

$$H_{1t} - H_{2t} = J_s \quad (1b)$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \rho_s \quad (1c)$$

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (1d)$$

矢量式

$$\hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \quad (2a)$$

$$\hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_s \quad (2b)$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \rho_s \quad (2c)$$

$$\hat{n} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0 \quad (2d)$$

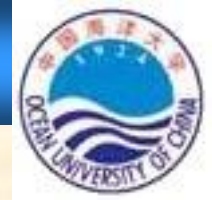
(a) 任何分界面上**电场强度** \bar{E} 的切向分量连续。

(b) 分界面上若**存在面电流**，则**磁场强度** \bar{H} 的切向分量不连续，其差等于面电流密度，（这种情况只在理想导体表面存在，即，只有理想导体表面存在面电流）；**否则磁场强度** \bar{H} 的切向分量连续。

(c) 分界面上**有面电荷时**，**电通密度的法向分量不连续**，其差等于面电荷密度，（这种情况也只在理想导体表面存在，即，只有理想导体表面存在面电荷）；

否则电通密度 \bar{D} 的法向分量连续。

(d) 任何分界面上**磁通密度** \bar{B} 的法向分量连续。

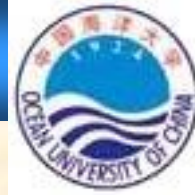


§ 2.4 电磁场的边界条件



讨论与引伸

- 基于两个散度方程得出的边界条件与基于两个旋度方程得出的边界条件是否完全相独立？
- \vec{E} 的切向分量边界条件成立，则 \vec{B} 的法向分量边界条件必成立(例2.4-3)；
- \vec{H} 的切向分量边界条件成立，则 \vec{D} 的法向分量边界条件也必成立。
- 在分析时变场问题时，只需用 \vec{E} 和 \vec{H} 在分界面上的切向分量边界条件即可。



§ 2.4 电磁场的边界条件

二、两种常见情形

a) 两种理想介质间的边界条件

理想介质 $\sigma=0$ 的分界面上, $\overline{J}_s=0$ $\rho_s=0$

代数式

$$E_{1t} = E_{2t}$$

$$H_{1t} - H_{2t} = 0$$

$$D_{1n} - D_{2n} = 0$$

$$B_{1n} = B_{2n}$$

矢量式

$$\hat{n} \times \overline{E}_1 = \hat{n} \times \overline{E}_2$$

$$\hat{n} \times \overline{H}_1 = \hat{n} \times \overline{H}_2$$

$$\hat{n} \cdot \overline{D}_1 = \hat{n} \cdot \overline{D}_2$$

$$\hat{n} \cdot \overline{B}_1 = \hat{n} \cdot \overline{B}_2$$



\overline{E} 的切向分量连续



\overline{H} 的切向分量连续

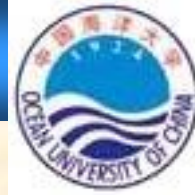


\overline{D} 的法向分量连续



\overline{B} 的法向分量连续

b) 理想介质与理想导体间的边界条件



§ 2.4 电磁场的边界条件

b) 理想介质与理想导体间的边界条件

- **理想导体**：电导率为无限大的导电媒质
- **特征**：电磁场不可能进入理想导体内

设媒质①是理想介质，②是理想导体 $\overline{\mathbf{E}}_2 = \overline{\mathbf{D}}_2 = 0$ $\mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_2 = 0$

代数式

$$E_{1t} = 0$$

$$H_{1t} = J_s$$

$$D_{1n} = \rho_s$$

$$B_{1n} = 0$$

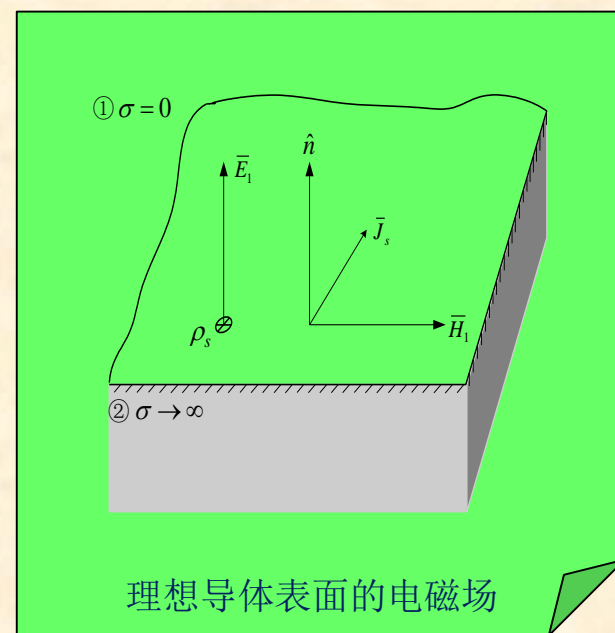
矢量式

$$\hat{n} \times \overline{\mathbf{E}}_1 = 0$$

$$\hat{n} \times \overline{\mathbf{H}}_1 = \overline{\mathbf{J}}_s$$

$$\hat{n} \cdot \overline{\mathbf{D}}_1 = \rho_s$$

$$\hat{n} \cdot \overline{\mathbf{B}}_1 = 0$$



理想导体表面的电磁场

导体表面处：电场只有法向分量，而磁场只有切向分量。

“电立不躺，磁躺不立”



习题2.4-1 同轴线通过直流电流 I ，内外导体上电流大小相等，方向相反。求各区域中的磁场 \bar{H} 和其旋度 $\nabla \times \bar{H}$ ，并验证各分界面处的边界条件。

[解] 圆柱坐标系下直流导体中通过的电流密度是均匀的。

内导体的电流密度大小: $J_a = \frac{I}{\pi a^2}$

外导体 $J_b = \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$

应用Maxwell方程组的方程 :

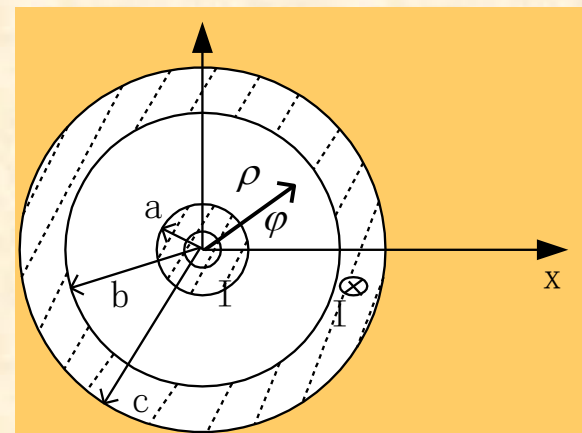
$$\oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s (\bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}) \cdot d\bar{s} = \int_s \bar{J} \cdot d\bar{s}$$

(a) 内导体区域: $\rho < a$

$$H \cdot 2\pi\rho = J_a \cdot \pi\rho^2$$

$$H = \frac{I\rho}{2\pi a^2}$$

$$\bar{H} = \hat{\phi} \frac{I\rho}{2\pi a^2}$$



题图2-1 同轴线横截面

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{H} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\rho & \rho H_\phi & H_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho} \left\{ \hat{\rho} \left[-\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial z} \right] + \hat{z} \left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \right] \right\} \\ &= \hat{z} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \right] = \hat{z} \frac{I}{\pi a^2} = \bar{J}_a \end{aligned}$$

(b) $a < \rho < b$

$$H \cdot 2\pi\rho = I$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi\rho}$$

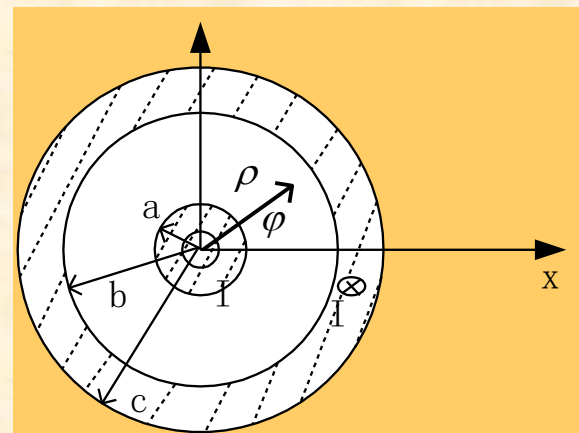
$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{I}{2\pi} \right) \right] = 0$$

(c) $b < \rho < c$

$$H \cdot 2\pi\rho = I - J_b \pi(\rho^2 - b^2) = I \cdot \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi\rho} \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2}$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{I}{2\pi} \cdot \frac{c^2 - \rho^2}{c^2 - b^2} \right) = \hat{\mathbf{z}} \frac{I}{\pi(c^2 - b^2)}$$



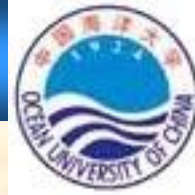
题图2-1 同轴线横截面

(d) $\rho > c$

$$H \cdot 2\pi\rho = I - I = 0$$

$$\bar{\mathbf{H}} = 0$$

$$\nabla \times \bar{\mathbf{H}} = 0$$



下面验证边界条件:

$$(a) \rho = a \text{ 处} \quad H_{1t} = H_{1\varphi} = \frac{I}{2\pi a^2} \cdot a$$

$$H_{2t} = H_{2\varphi} = \frac{I}{2\pi a^2} \cdot a$$

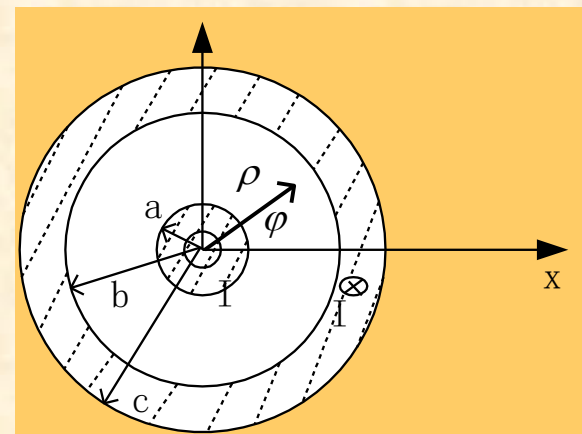
$$\therefore H_{1t} = H_{2t} = \frac{I}{2\pi a}$$

$$(b) \rho = b \text{ 处} \quad H_{2t} = H_{2\varphi} = \frac{I}{2\pi b}$$

$$H_{3t} = H_{3\varphi} = \frac{I}{2\pi b}$$

$$\therefore H_{2t} = H_{3t} = \frac{I}{2\pi b}$$

$$(c) \rho = c \text{ 处} \quad H_{3t} = \frac{I}{2\pi c} \cdot \frac{c^2 - c^2}{c^2 - b^2} = 0 \quad H_{4t} = 0 \quad \therefore H_{3t} = H_{4t}$$



题图2-1 同轴线横截面

所以各分界面处的切向磁场分量连续另外，法向分量 B_n ，即 B_ρ 处处为0，因此它也是连续的。



例1 $z < 0$ 的区域的媒质参数为 $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$ 、 $\mu_1 = \mu_0$ 、 $\sigma_1 = 0$ ， $z > 0$ 区域的媒质参数为 $\varepsilon_2 = 5\varepsilon_0$ 、 $\mu_2 = 20\mu_0$ 、 $\sigma_2 = 0$ 。若媒质1中的电场强度为 $\bar{E}_1(z, t) = \hat{x}[60 \cos(15 \times 10^8 t - 5z) + 20 \cos(15 \times 10^8 t + 5z)] V/m$

媒质2中的电场强度为 $\bar{E}_2(z, t) = \hat{x}A \cos(15 \times 10^8 t - 50z) V/m$

- (1) 试确定常数A的值；(2) 求磁场强度 $\bar{H}_1(z, t)$ 和 $\bar{H}_2(z, t)$ ；
(3) 验证 $\bar{H}_1(z, t)$ 和 $\bar{H}_2(z, t)$ 满足边界条件。

解：(1) 这是两种电介质的分界面，在分界面 $z = 0$ 处，有

$$\begin{aligned}\bar{E}_1(0, t) &= \hat{x}[60 \cos(15 \times 10^8 t) + 20 \cos(15 \times 10^8 t)] \\ &= \hat{x}80 \cos(15 \times 10^8 t) V/m\end{aligned}$$

$$\bar{E}_2(0, t) = \hat{x}A \cos(15 \times 10^8 t) V/m$$



利用两种电介质分界面上电场强度的切向分量连续的边界条件

$$E_1(0, t) = E_2(0, t) \quad \text{得到} \quad A = 80 \quad \text{V/m}$$

$$(2) \text{ 由 } \nabla \times \bar{E}_1 = -\mu_1 \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial t}, \text{ 有}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_1} \nabla \times \bar{E}_1 = -\hat{y} \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial E_{1x}}{\partial z} \\ &= -\hat{y} \frac{1}{\mu_1} \left[300 \sin(15 \times 10^8 t - 5z) - 100 \sin(15 \times 10^8 t + 5z) \right] \end{aligned}$$

将上式对时间 t 积分, 得

$$\bar{H}_1(z, t) = \hat{y} \frac{1}{\mu_0} \left[2 \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t - 5z) - \frac{2}{3} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t + 5z) \right] \text{ A/m}$$



同样，由 $\nabla \times \bar{E}_2 = -\mu_2 \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial t}$ ，得

$$\bar{H}_2(z, t) = \hat{y} \frac{4}{3\mu_0} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t - 5z) A/m$$

(3) $z = 0$ 时

$$\bar{H}_1(0, t) = \hat{y} \frac{1}{\mu_0} \left[2 \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) - \frac{2}{3} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) \right]$$

$$= \hat{y} \frac{4}{3\mu_0} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) A/m$$

$$\bar{H}_2(0, t) = \hat{y} \frac{4}{3\mu_0} \times 10^{-7} \cos(15 \times 10^8 t) A/m$$

可见，在 $z = 0$ 处，磁场强度的切向分量是连续的，因为在分界面上 ($z = 0$) 不存在面电流。



例2 在两导体平板 ($z = 0$ 和 $z = d$) 之间的空气中, 已知电场强度

$$\bar{E} = \hat{y}E_0 \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) V/m$$

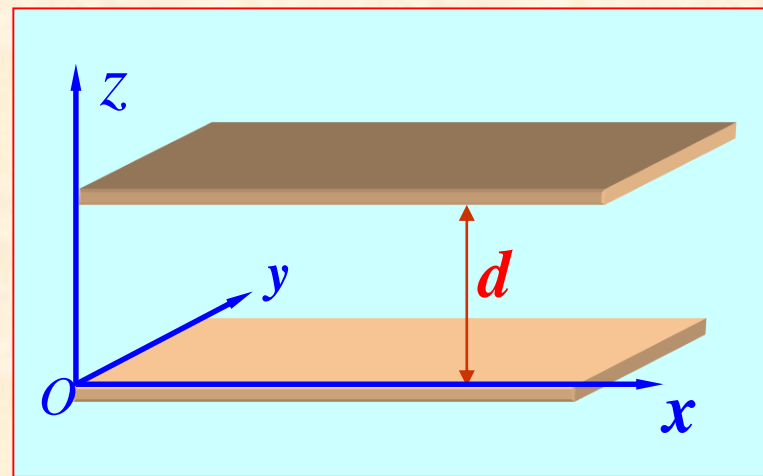
试求: (1) 磁场强度 \bar{H} ; (2) 导体表面的电流密度 \bar{J}_s 。

解 (1) 由 $\nabla \times \bar{E} = -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$, 有

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{E}$$

$$= -\frac{1}{\mu_0} \left(-\hat{x} \frac{\partial E_y}{\partial z} + \hat{z} \frac{\partial E_y}{\partial x} \right)$$

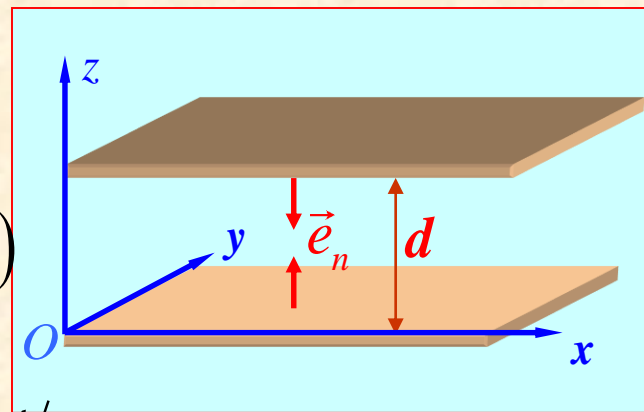
$$= \frac{E_0}{\mu_0} \left[\hat{x} \frac{\pi}{d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) - \hat{z} k_x \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) \right]$$





将上式对时间 t 积分, 得

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, z, t) &= \int \frac{\partial \bar{H}(x, z, t)}{\partial t} dt \\ &= \hat{x} \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \cos\left(\frac{\pi}{d} z\right) \sin(\omega t - k_x x) \\ &\quad + \hat{z} \frac{k_x E_0}{\omega \mu_0} \sin\left(\frac{\pi}{d} z\right) \cos(\omega t - k_x x) A/m\end{aligned}$$



(2) $z = 0$ 处导体表面的电流密度为

$$\bar{J}_s = \hat{z} \times \bar{H}\big|_{z=0} = \hat{y} \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \sin(\omega t - k_x x) A/m$$

$z = d$ 处导体表面的电流密度为

$$\bar{J}_s = (-\hat{z}) \times \bar{H}\big|_{z=d} = -\hat{y} \frac{\pi E_0}{\omega \mu_0 d} \sin(\omega t - k_x x) A/m$$



§ 2.5 坡印廷定理和坡印廷矢量

Poynting Theorem and Poynting Vector

- 电磁场是具有能量的；
- 时变电磁场中的能量守恒定律——坡印廷定理；
- 坡印廷矢量是描述电磁场能量流动的物理量。



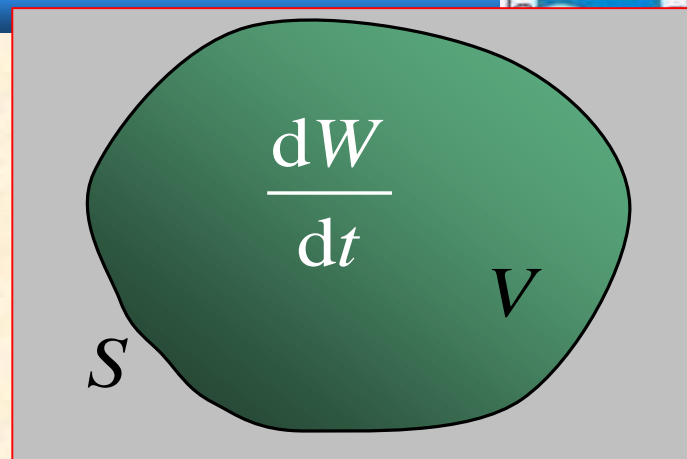
电磁能量及守恒关系

电场能量密度: $w_e = \frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{D}$

磁场能量密度: $w_m = \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B}$

电磁能量密度: $w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B}$

空间区域 V 中的电磁能量: $W = \int_V w dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B} \right) dV$



特点: 当场随时间变化时, 空间各点的电磁场能量密度也要随时间改变, 从而引起电磁能量流动。

电磁能量守恒关系:

进入体积 V 的能量 = 体积 V 内增加的能量 + 体积 V 内损耗的能量



一、坡印廷定理----表征电磁能量守恒关系的定理

微分形式:
$$-\nabla \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \right) + \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{J}}$$

积分形式:
$$-\oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{S}} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \right) dV + \int_V \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{J}} dV$$

其中: $\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{D}} + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{H}} \cdot \bar{\mathbf{B}} \right) dV$ —— 单位时间内体积 V 中所增加的电磁能量。

$\int_V \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{J}} dV$ —— 单位时间内电场对体积 V 中的电流所做的功;
在导电媒质中, 即为体积 V 内总的损耗功率。

$-\oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{S}}$ —— 通过曲面 S 进入体积 V 的电磁功率。



§ 2.5 坡印廷定理和坡印廷矢量

简单媒质:

$$-\oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{s}} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) dv + \int_V \sigma E^2 dv$$

- 右端代表体积V中电磁场能量的增加率和热损耗功率
- 左端是单位时间内流入封闭面S的能量。

 **物理意义:** 单位时间内, 通过曲面S 进入体积V的电磁能量等于体积V 中所增加的电磁场能量与损耗的能量之和。

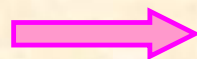
Poynting定理-----时变电磁场中的能量守恒定律



推证

由

$$\begin{cases} \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H} = \bar{E} \cdot \bar{J} + \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \bar{H} \cdot \nabla \times \bar{E} = -\bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \end{cases}$$

将以上两式相减，得到

$$\bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H} - \bar{H} \cdot \nabla \times \bar{E} = \bar{E} \cdot \bar{J} + \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

在线性和各向同性的媒质中，当参数都不随时间变化时，则有

$$\bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon \bar{E} \cdot \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial (\bar{E} \cdot \bar{E})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{D} \right)$$

$$\bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \mu \bar{H} \cdot \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial (\bar{H} \cdot \bar{H})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B} \right)$$



再利用矢量恒等式： $\bar{E} \cdot \nabla \times \bar{H} - \bar{H} \cdot \nabla \times \bar{E} = -\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H})$

即可得到坡印廷定理的微分形式

$$-\nabla \cdot (\bar{E} \times \bar{H}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B} \right) + \bar{E} \cdot \bar{J}$$

在任意闭曲面 S 所包围的体积 V 上，对上式两端积分，并应用散度定理，即可得到坡印廷定理的积分形式

$$-\oint_S (\bar{E} \times \bar{H}) \cdot d\bar{S} = \frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \bar{E} \cdot \bar{D} + \frac{1}{2} \bar{H} \cdot \bar{B} \right) dV + \int_V \bar{E} \cdot \bar{J} dV$$

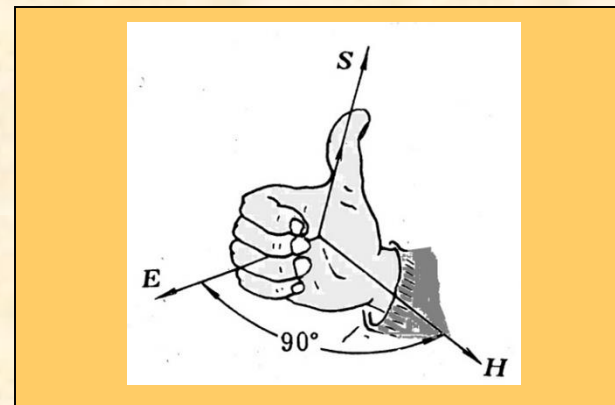


二、坡印廷矢量（电磁能流密度矢量）

描述时变电磁场中电磁能量传输的一个重要物理量

定义： $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$ W/m^2

物理意义：



\bar{S} 的方向 —— 波传播的方向
电磁能量传输的方向

\bar{S} 的大小 —— 通过垂直于能量传输方向的单位面积的电磁功率，
亦即功率流密度；

$$-\oint_s \bar{S} \cdot d\bar{s} = \frac{\partial}{\partial t} \int_v (w_e + w_m) dv + \int_v p_\sigma dv$$

例 2.5-1 导线半径为 a ，长为 l ，电导率为 σ ，试用坡印廷矢量计算导线损耗的能量。

[解] 思路： 设 $I \rightarrow \bar{\mathbf{E}}$ ， $\bar{\mathbf{H}} \rightarrow \bar{\mathbf{S}} \rightarrow P$ 。

导体内电场强度 $\bar{\mathbf{E}} = \frac{\bar{\mathbf{J}}}{\sigma} = \hat{\mathbf{z}} \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$

磁场强度 $\bar{\mathbf{H}} = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi a^2} \rho$

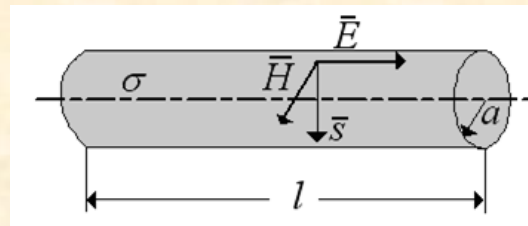


图2.5-3直流导线段

以导体表面为闭合面，则导体吸收的电磁场功率为

$$I^2 R$$

$$P = -\oint_S (\bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}) \cdot d\bar{\mathbf{S}} = -\oint_S (-\hat{\rho}) \frac{I}{\pi a^2 \sigma} \cdot \frac{I}{2\pi a^2} a \cdot \hat{\rho} 2\pi a dl = I^2 \frac{l}{\pi a^2 \sigma} = I^2 R$$

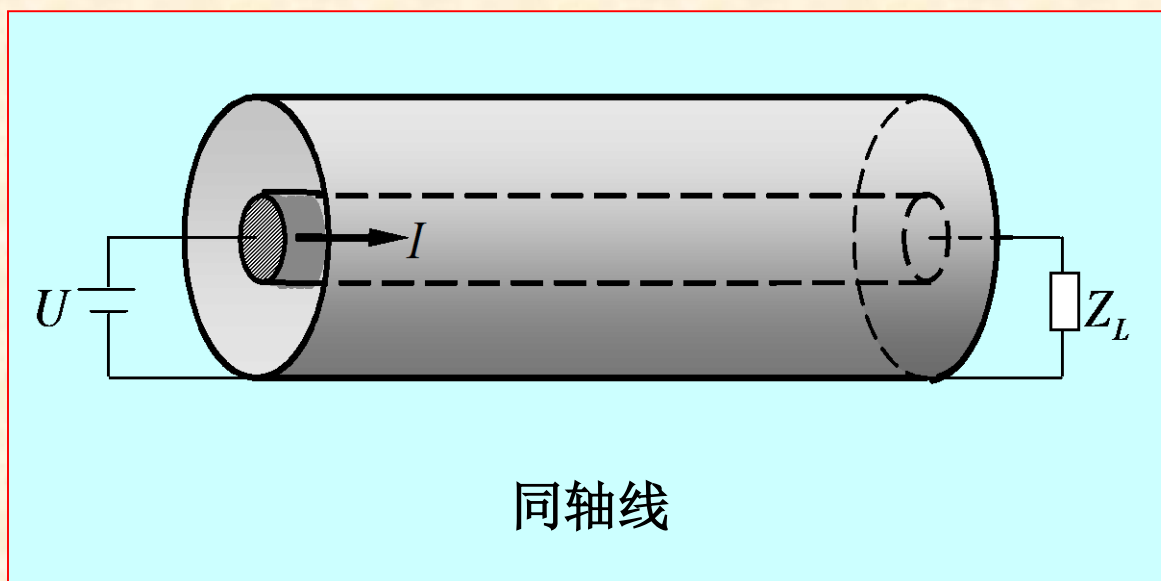
上面我们从场的观点也导出了电路中的焦耳定理： $P = I^2 R$ ，

其微分形式为： $P_\sigma = \bar{\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{J}} = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$

可见，传给导体的电磁场功率就等于该导体电阻的损耗功率



例1 同轴线的内导体半径为 a 、外导体的内半径为 b ，其间填充均匀的理想介质。设内外导体间的电压为 U ，导体中流过的电流为 I 。（1）在导体为理想导体的情况下，计算同轴线中传输的功率；（2）当导体的电导率 σ 为有限值时，计算通过内导体表面进入每单位长度内导体的功率。





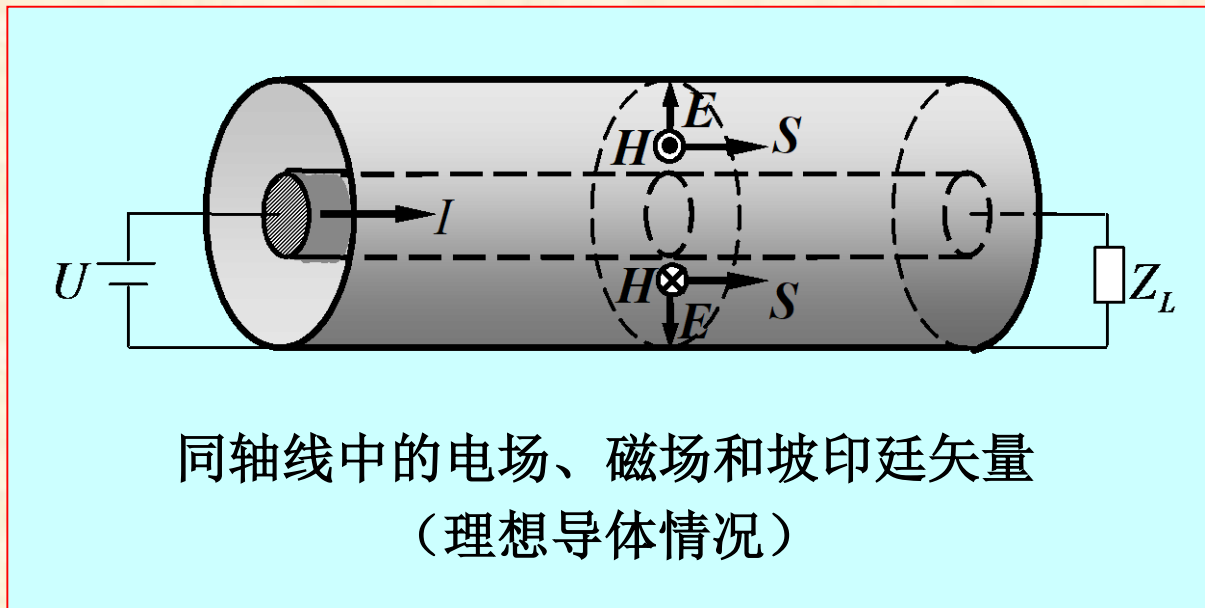
解：（1）在内外导体为理想导体的情况下，电场和磁场只存在于内外导体之间的理想介质中，内外导体表面的电场无切向分量，只有电场的径向分量。利用高斯定理和安培环路定理，容易求得内外导体之间的电场和磁场分别为

$$\bar{E} = \hat{\rho} \frac{U}{\rho \ln(b/a)} \quad \bar{H} = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi\rho} \quad (a < \rho < b)$$

内外导体之间任意横截面上的坡印廷矢量

$$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H} = \left[\hat{\rho} \frac{U}{\rho \ln(b/a)} \right] \times \left(\hat{\phi} \frac{I}{2\pi\rho} \right) = \hat{z} \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)}$$

电磁能量在内外导体之间的介质中沿轴方向流动，即由电源流向负载，如图所示。



穿过任意横截面的功率为

$$P = \int_s \bar{S} \cdot \hat{z} ds = \int_a^b \frac{UI}{2\pi\rho^2 \ln(b/a)} 2\pi\rho d\rho = UI$$

(2) 当导体的电导率 σ 为有限值时, 导体内部存在沿电流方向的电场

$$\bar{E}_{\text{内}} = \frac{\bar{J}}{\sigma} = \hat{z} \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

根据边界条件, 在内导体表面上电场的切向分量连续, 即 $E_{\text{外}z} = E_{\text{内}z}$

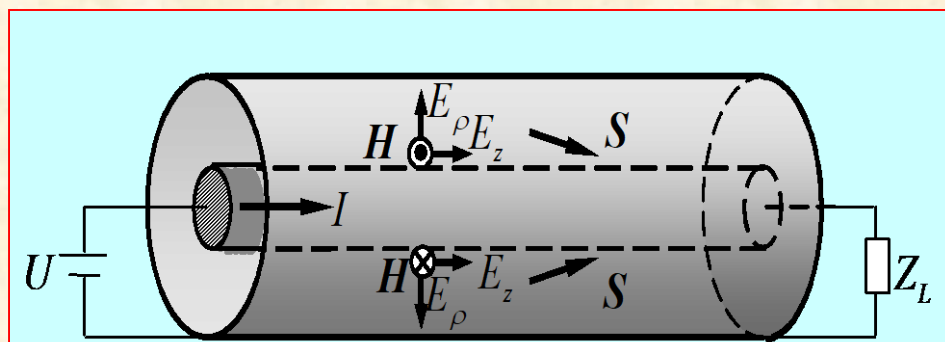
因此, 在内导体表面外侧的电场为

$$\bar{E}_{\text{外}}|_{\rho=a} = \hat{\rho} \frac{U}{a \ln(b/a)} + \hat{z} \frac{I}{\pi a^2 \sigma}$$

磁场则仍为
$$\bar{H}_{\text{外}}|_{\rho=a} = \hat{\phi} \frac{I}{2\pi a}$$

内导体表面外侧的坡印廷矢量为

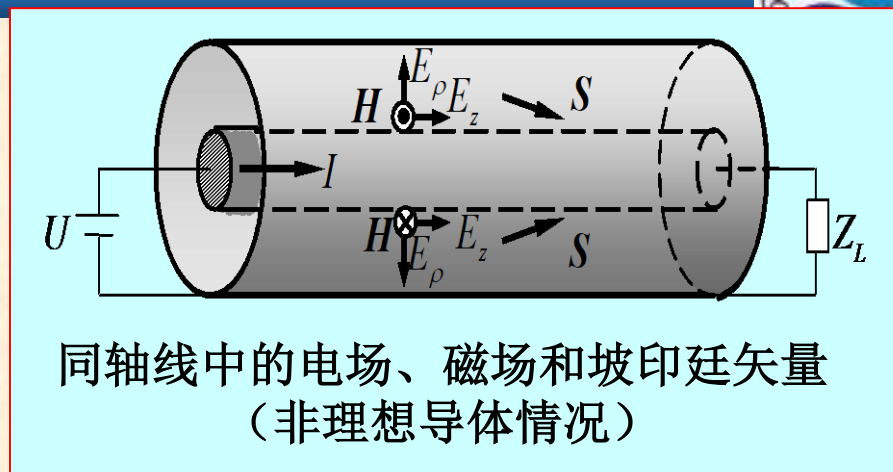
$$\bar{S}_{\text{外}}|_{\rho=a} = (\bar{E}_{\text{外}} \times \bar{H}_{\text{外}})|_{\rho=a} = -\hat{\rho} \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} + \hat{z} \frac{UI}{2\pi a^2 \ln(b/a)} +$$



同轴线中的电场、磁场和坡印廷矢量
(非理想导体情况)



由此可见，内导体表面外侧的坡印廷矢量既有轴向分量，也有径向分量，如图所示。进入每单位长度内导体的功率为



$$P = \int_s \bar{S}_{\text{外}} \Big|_{\rho=a} \cdot (-\hat{\rho}) ds = \int_0^1 \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \sigma} 2\pi a dz = \frac{I^2}{\pi a^2 \sigma} = RI^2$$

式中 $R = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$ 是单位长度内导体的电阻。由此可见，进入内导体中功率等于这段导体的焦耳损耗功率。

以上分析表明电磁能量是由电磁场传输的，导体仅起着定向引导电磁能流的作用。当导体的电导率为有限值时，进入导体中的功率全部被导体所吸收，成为导体中的焦耳热损耗功率。



例2：已知无源自由空间中，时变电磁场的电场强度为

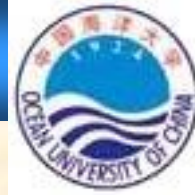
$$\bar{E} = \hat{y}E_0 \cos(\omega t - kz) (V/m)$$

求：(1) 磁场强度；(2) 瞬时坡印廷矢量；(3) 平均坡印廷矢量

解：(1) $\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

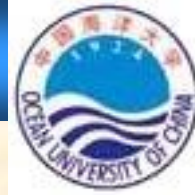
$$-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \hat{z} \frac{\partial E_y}{\partial x} - \hat{x} \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\hat{x} k E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$\Rightarrow \bar{H} = \frac{1}{\mu_0} \int \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} dt = -\hat{x} \frac{k E_0}{\omega \mu_0} \cos(\omega t - kz)$$



$$\begin{aligned}
 (2) \quad \bar{S}(t) &= \bar{E}(t) \times \bar{H}(t) \\
 &= -\hat{y}E_0(\omega t - kz) \times \hat{x} \frac{kE_0}{\omega\mu_0} \cos(\omega t - kz) \\
 &= \hat{z} \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \cos^2(\omega t - kz)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \bar{S}_{av} &= \frac{1}{T} \int_0^T \bar{E}(t) \times \bar{H}(t) dt \\
 &= \hat{z} \frac{kE_0}{\omega\mu_0 T} \int_0^T \cos^2(\omega t - kz) dt \\
 &= \hat{z} \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0 T} \int_0^T \frac{\cos(2\omega t - 2kz) + 1}{2} dt = \hat{z} \frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0} (W/m^2)
 \end{aligned}$$



三、场与路的一些对应关系

电路理论中电压U和电流I是某一物理区域中电磁反应的总和：

$$U = \int_l \bar{E} \cdot d\bar{l}$$

$$I = \oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l}$$

	场	路
电场强度	\bar{E}	电压 U
磁场强度	\bar{H}	电流 I
功率流密度	$\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$	功率 $P = UI$
电阻导体	$\bar{J} = \sigma \bar{E}$	$I = \frac{U}{R}$
	$p_\sigma = \sigma E^2 = \frac{J^2}{\sigma}$	$P = \frac{U^2}{R} = I^2 R$
电容器	$\bar{J}_d = \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$	$I = C \frac{dU}{dt}$
	$w_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2$	$W_e = \frac{1}{2} C U^2$
电感	$w_m = \frac{1}{2} \mu H^2$	$W_m = \frac{1}{2} L I^2$



§ 2.6 惟一性定理

Uniqueness Theorem

● 惟一性问题

在分析有界区域的时变电磁场问题时，常常需要在给定的初始条件和边界条件下，求解麦克斯韦方程。

在什么定解条件下，有界区域中的麦克斯韦方程的解才是惟一的呢？

这就是麦克斯韦方程的解的惟一问题。

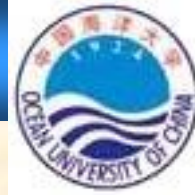


一、惟一性定理表述

对于时变电磁场，对封闭面 S 所包围的体积 V ，若给定 S 面上电场或磁场的切向分量，则在体积 V 内任一点，场方程的解是惟一的。

反证法——证明

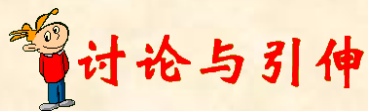
● 惟一性定理指出了获得惟一解所必须满足的条件，为电磁场问题的求解提供了理论依据，具有非常重要的意义和广泛的应用。



给定S面上电场或磁场二者之一的切向分量即可。

边界上电场的切向分量给定

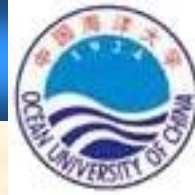
- 边界上磁场的切向分量给定。
- 部分边界上电场的切向分量和其余边界上磁场的切向分量给定。



讨论与引伸

为了能由麦氏方程组求解出时变电磁场，

一般需同时应用边界上电场和磁场二者的切向边界条件。



一. 麦氏方程组的完整表达

1. 微分形式

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{D} = \rho \\ \nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \\ \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \end{cases}$$

2. 积分形式

$$\begin{cases} \oint_l \bar{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \bar{J} \cdot d\vec{s} + \frac{\partial}{\partial t} \int_s \bar{D} \cdot d\vec{s} \\ \oint_l \bar{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \bar{D} \cdot d\vec{s} \\ \oint_s \bar{B} \cdot d\vec{s} = 0 \\ \oint_s \bar{D} \cdot d\vec{s} = \int_v \rho dv \end{cases}$$



3. 电流连续性方程

$$\nabla \cdot \bar{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

非常值得信赖,是电路**Kirchhoff**定律的扩展,
适用于量子电动力学

4. 本构关系

$$\begin{cases} \bar{D} = \epsilon \bar{E} \\ \bar{B} = \mu \bar{H} \\ \bar{J} = \sigma \bar{E} \end{cases}$$

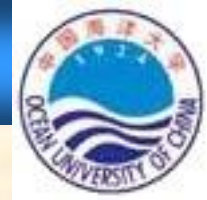


5. 边界条件

$$\begin{cases} \hat{n} \times (\overline{H}_1 - \overline{H}_2) = \overline{J}_s \\ \hat{n} \times (\overline{E}_1 - \overline{E}_2) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\overline{B}_1 - \overline{B}_2) = 0 \\ \hat{n} \cdot (\overline{D}_1 - \overline{D}_2) = \rho_s \end{cases}$$

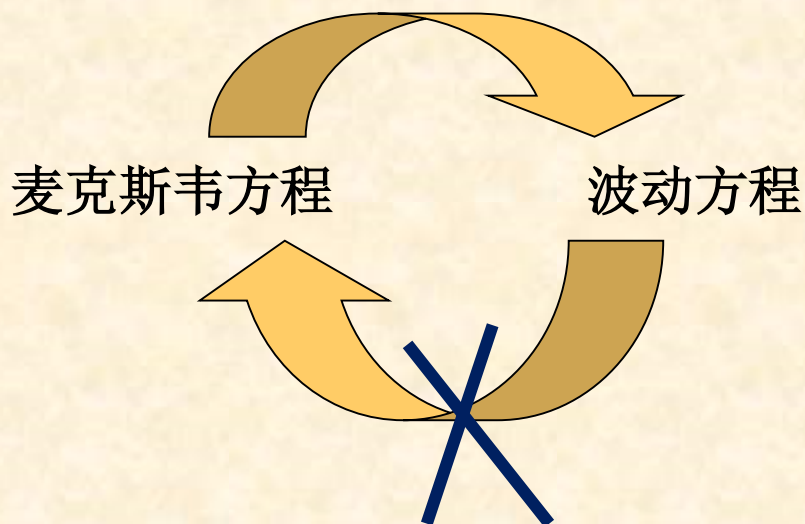
二. 独立方程

两个旋度方程+电流连续性方程



四. 波动方程

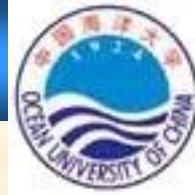
$$\begin{cases} (\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \bar{H} = -\nabla \times \bar{J} \\ (\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \bar{E} = \mu \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} + \nabla(\frac{\rho}{\varepsilon}) \end{cases}$$



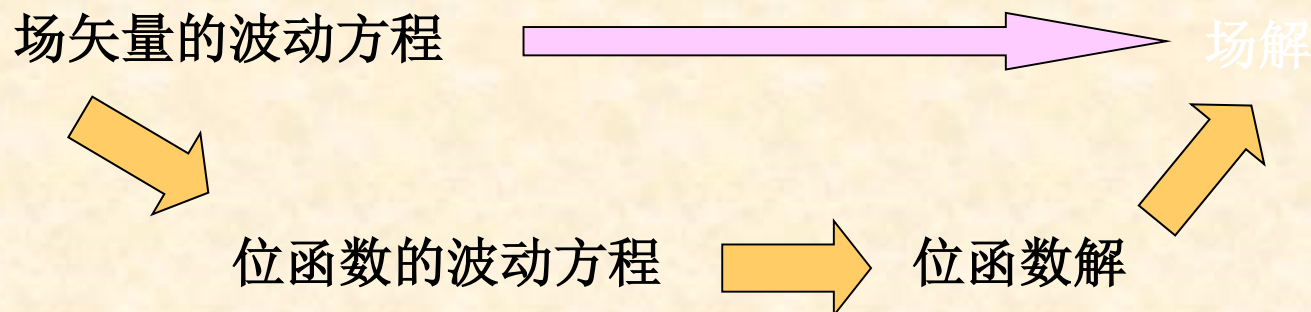
非齐次矢量亥姆霍兹方程

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2) \bar{H} = -\nabla \times \bar{J} \\ (\nabla^2 + k^2) \bar{E} = j\omega\mu\bar{J} - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla(\nabla \cdot \bar{J}) \end{cases}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu\varepsilon$$



五. 电磁场中的位函数



1. 位函数

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{B} &= 0 \\ \nabla \cdot (\nabla \times \bar{A}) &= 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{?} \quad \text{令 } \bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

则有:
$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \bar{A}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\bar{E} + \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) &= 0 \\ \nabla \times \nabla \varphi &= 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{?} \quad \text{令 } \bar{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$



两个散度方程用于确定场矢量与位函数的关系

两个旋度方程用于确定位函数所满足的波动方程

$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \nabla \times \bar{A} = \nabla(\nabla \cdot \bar{A}) - \nabla^2 \bar{A} = \mu \bar{J} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \nabla(\mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t})$$

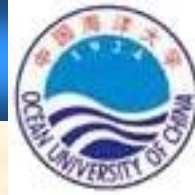
$$(\nabla^2 - \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \bar{A} = -\mu \bar{J} + \nabla(\nabla \cdot \bar{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t})$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{A} + \mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t})$$

位函数的波动方程

优点：场源直接

缺点：两个位函数相关



2. 洛伦兹规范

洛伦兹条件: $\nabla \cdot \bar{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$

洛伦兹规范下的位函数波动方程

$$(\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2})\bar{A} = -\mu\bar{J}$$

$$(\nabla^2 - \mu\epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2})\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$



小结： 麦克斯韦方程适用范围：一切宏观电磁现象。

