第6章平面电磁波的反射和折射

Reflection and Refraction of Plane Waves

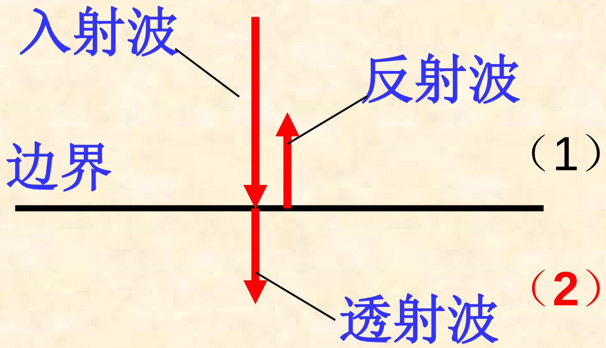
实际应用中电磁波在传播中会遇到不同媒质的分界面。

如：金属波导中传播的微波、光导纤维中传播的光波、地面上传播的无线电波等。

讨论与引伸

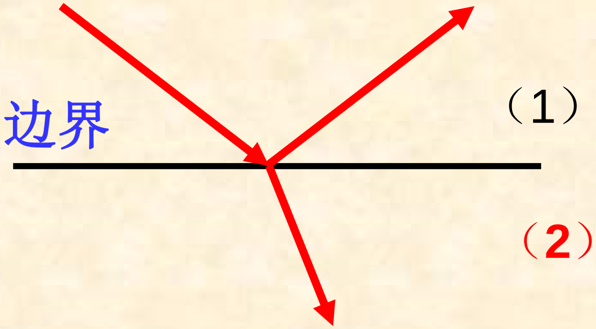
如何确定分界面两侧场的分布？

- **现象**：电磁波入射到不同媒质分界面上时，一部分波被分界面反射，一部分波透过分界 面。



垂直入射

- **入射方式**：垂直入射、斜入射；



斜入射

- **媒质类型**：

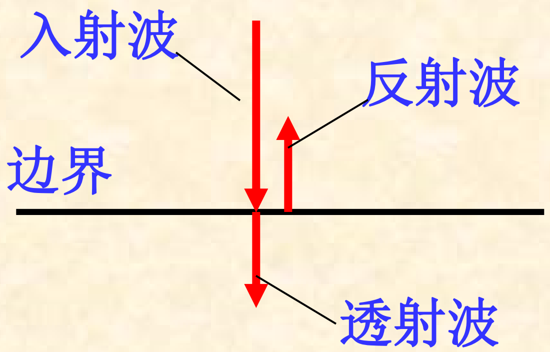
理想导体、理想介质

- **分析方法**：

入射波（已知）＋反射波（未知） $\overset{\text{边界条件}}{\longleftrightarrow}$ 透射波（未知）

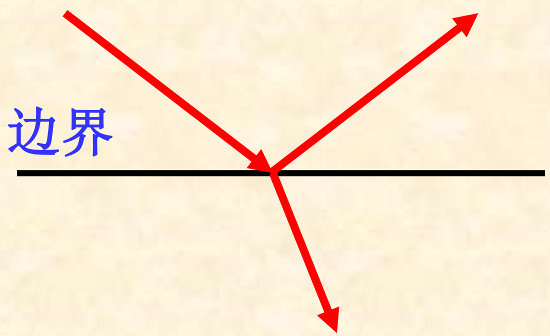
● 平面波在边界上的反射及透射规律与媒质特性及边界形状有关。

✓ 仅讨论平面波在无限大的平面边界上的反射及透射特性。



垂直入射

✓ 首先讨论平面波向平面边界的**垂直入射**。



斜入射

✓ 再讨论平面波以任意角度向平面边界的**斜入射**。

本章内容

- 波的垂直入射
  - 理想介质与理想导体分界面
  - 理想介质与理想介质分界面
  - 多层介质
- 波的斜入射
  - 理想导体
    - 垂直极化波
    - 平行极化波
  - 介质分界面
    - 垂直极化波
    - 平行极化波
    - 全折射及全反射
- **全反射和全折射**
- **电磁波的应用**

§ 6.1 平面波对平面边界的垂直入射
Normal Incidence at a Plane Boundary

本节内容

- 对**理想导体**的垂直入射
- 对理想介质的垂直入射
- 对多层边界的垂直入射

§6.1 平面波对平面边界的垂直入射

思路： 根据边界条件（BC）来确定

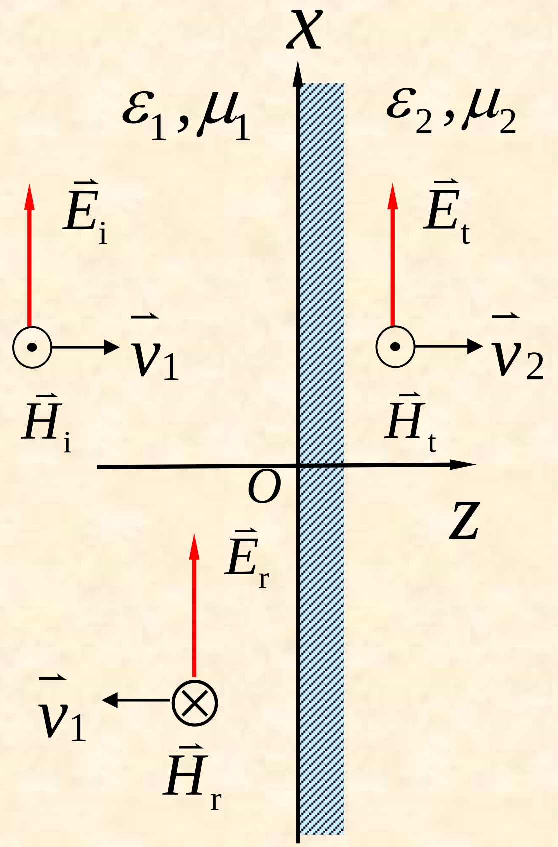
BC：边界条件（Boundary Condition)

入射波 (Incident Wave)

反射波 (Reflected Wave) ---- 一部分能量被反射回来形成

透射波 (Transmitted Wave) ---- 另一部分能量穿过边界形成

概　念



入射波：投射到分界面上的波。

反射波：从分界面返回，与入射波在同一媒质中传播的波。

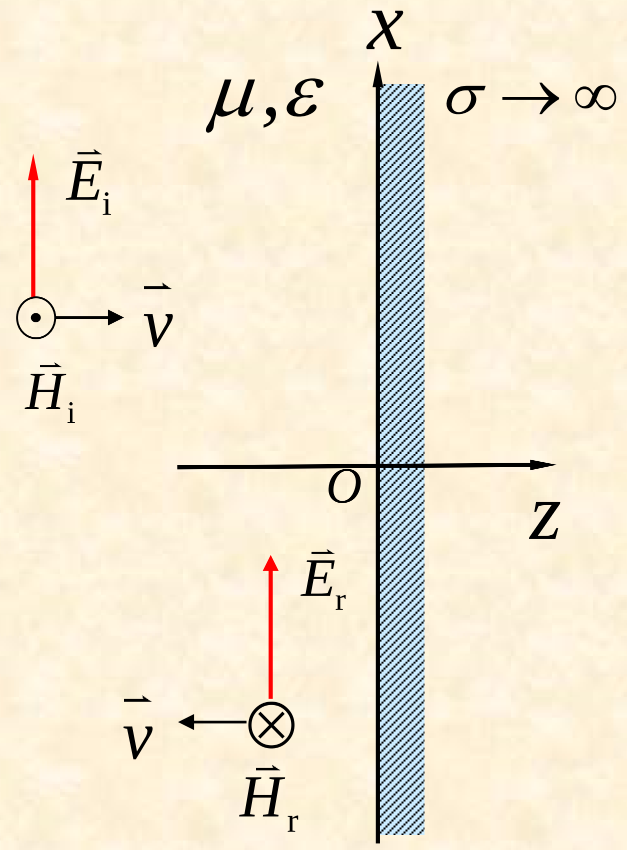
透射波：进入分界面另一侧传播的波。

垂直入射：入射波的传播方向与分界面的法线平行。

反射波与折射波的特性由分界面两侧媒质的参数确定。

一、 平面波对理想导体表面的垂直入射

✓**线极化波的垂直入射**



取理想介质1（$\sigma_1=0$）与理想导体2（$\sigma_2=\infty$）的分界面为z=0平面。

均匀平面波沿z轴方向由媒质1垂直射入媒质2。

1. 入射场和反射场关系

思路: 入射场 $\xrightarrow{\text{BC}}$ 反射场 $\xrightarrow{\text{叠加}}$ 合成场

BC(边界条件):

电场的切向分量为0: $\hat{\mathbf{n}} \times \overline{\mathbf{E}}_1 = 0$

存在切向磁场: $\hat{\mathbf{n}} \times \overline{\mathbf{H}}_1 = \overline{\mathbf{J}}_s$

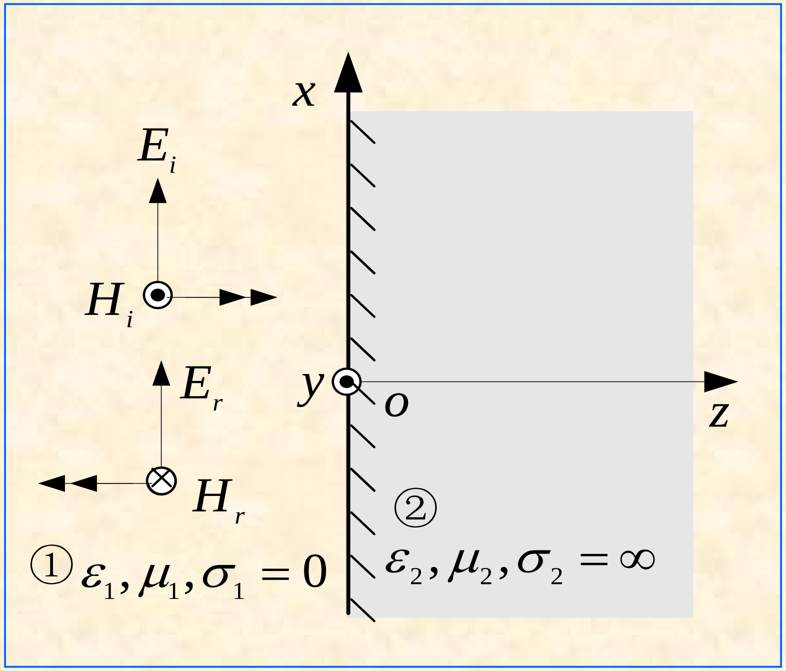
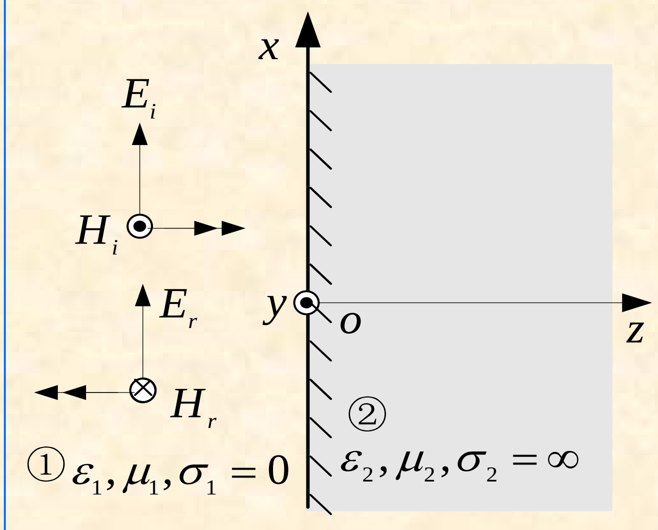


图6.1-1　平面波的垂直入射

由于电场沿理想导体切向为零，假设入射波是x向极化的，如图，则反射波也是x向极化的(从而可相消)。



入射波：

$$\bar{E}_i = \hat{x} E_{i0} e^{-jk_1 z}$$

$$\bar{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \hat{z} \times \bar{E}_i = \hat{y} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-jk_1 z}$$

反射波：

$$\bar{E}_r = \hat{x} E_{r0} e^{jk_1 z}$$

$$\bar{H}_r = \frac{1}{\eta_1} (-\hat{z}) \times \bar{E}_r = -\hat{y} \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{jk_1 z}$$

其中 $k_1 = \omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} = \dfrac{2\pi}{\lambda_1}$, $\eta_1 = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$

在介质空间内任一点的电场： $\bar{E}_1 = \left(E_{i0} e^{-jkz} + E_{ro} e^{jkz}\right)\hat{x}$

边界条件：理想导体表面上电场强度切向分量为零。

$z = 0$ 时　$E_{i0} + E_{r0} = 0 \longrightarrow E_{r0} = -E_{i0}$

反射波电场可表示为：$\vec{E}_{\mathrm{r}} = -E_{\mathrm{i}0}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\hat{a}_x$

相应的反射波磁场为：$\vec{H}_{\mathrm{r}} = -\dfrac{E_{\mathrm{r}0}}{\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\hat{a}_y = \dfrac{E_{\mathrm{i}0}}{\eta}\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\hat{a}_y$

媒质1中 (z<0)，合成电场强度和磁场强度复矢量分别为：

$$\overline{E}_1 = \overline{E}_i + \overline{E}_r = \hat{x}E_{i0}(e^{-jk_1z} - e^{jk_1z}) = -\hat{x}j2E_{i0}\sin(k_1z)$$

$$\overline{H}_1 = \overline{H}_i + \overline{H}_r = \hat{y}\frac{E_{i0}}{\eta_1}(e^{-jk_1z} + e^{jk_1z}) = \hat{y}\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos(k_1z)$$

合成场的瞬时形式为：

$$\overline{E}_1(t) = \hat{x}2E_{i0}\sin(k_1z)\cos(\omega\omega - \frac{\pi}{2}) = \hat{x}2E_{i0}\sin(k_1z)\sin\omega t$$

$$\overline{H}_1(t) = \hat{y}\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos(k_1z)\cos\omega t$$

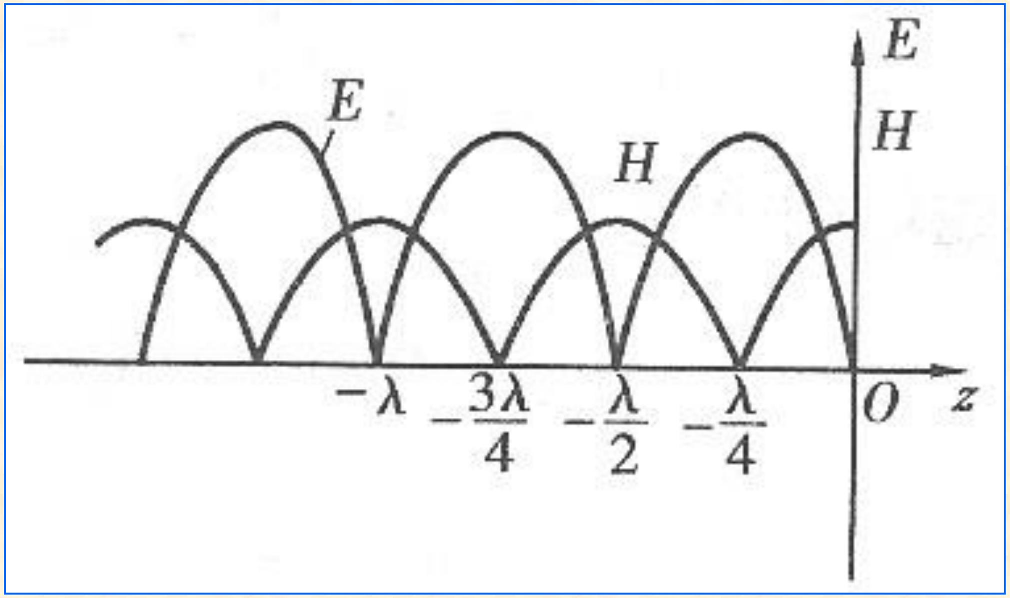
- 合成场的瞬时形式为：

$$\overline{\mathbf{E}}_1(t)=\hat{\mathbf{x}}2E_{i0}\sin(k_1z)\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})=\hat{\mathbf{x}}2E_{i0}\sin(k_1z)\sin\omega t$$

$$\overline{\mathbf{H}}_1(t)=\hat{\mathbf{y}}\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos(k_1z)\cos\omega t$$

结论： 合成电磁场的振幅随空间坐标 z 按正弦函数分布，而在空间一点，电磁场随时间作简谐振动。

——驻波分布



合成电磁场的振幅随空间坐标的分布

2. 合成场特点

(1) 驻波

$$\overline{\mathbf{E}}_1(t) = \hat{\mathbf{x}} 2E_{i0} \sin(k_1 z) \sin \omega t$$

电场强度振幅随z按正弦规律变化，零值发生于 $\sin(k_1 z) = 0$

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = 0, -\pi, -2\pi, \ldots$$

$$z = 0, -\lambda_1 / 2, \ -\lambda_1, \cdots$$

尽管时间t会变化，但是这些零点位置固定不变，称为电场**波节点**。

电场最大点位于 $\sin(k_1 z) = \pm 1$

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

$$z = -\lambda_1 / 4, \ -\frac{3\lambda_1}{4}, -\frac{5\lambda_1}{4} \cdots$$

这些最大点的位置也不随时间而改变，称为电场**波腹点**。

当$k_1z=-n\pi$时，即 $z=-n\dfrac{\lambda_1}{2}$　$(n=0,1,2,\cdots)$ $\longrightarrow$ $\sin k_1z=0$

波节点：在任意时刻，电场强度的值总为零的点。

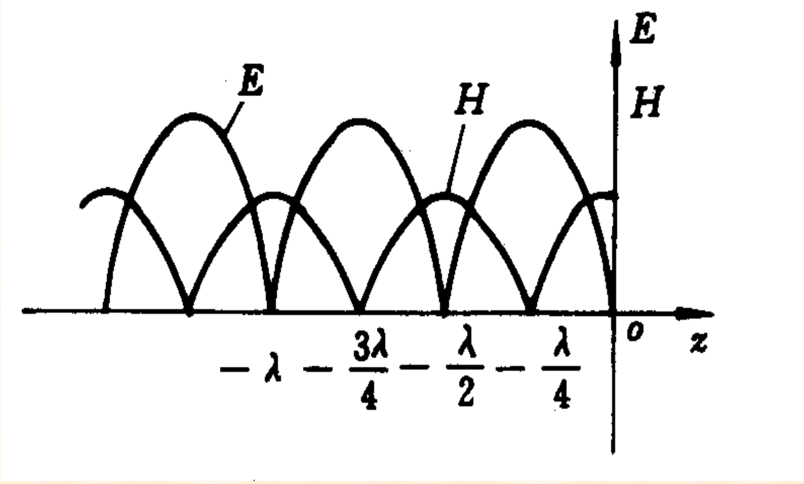
当 $k_1z=-\dfrac{\pi}{2}(2n+1)$时，即 $z=-(2n+1)\dfrac{\lambda_1}{4}$　$(n=0,1,2,\cdots)$

$\longrightarrow$ $|\sin kz|=1$

波腹点：任意时刻，电场强度的值为最大的点。

驻波：这种波节点和波腹点位置固定的波称为驻波。

纯驻波：节点处值为零的驻波称为纯驻波。



$$\overline{\mathbf{E}}_1(t) = \hat{\mathbf{x}} 2E_{i0} \sin(k_1 z) \sin \omega t$$

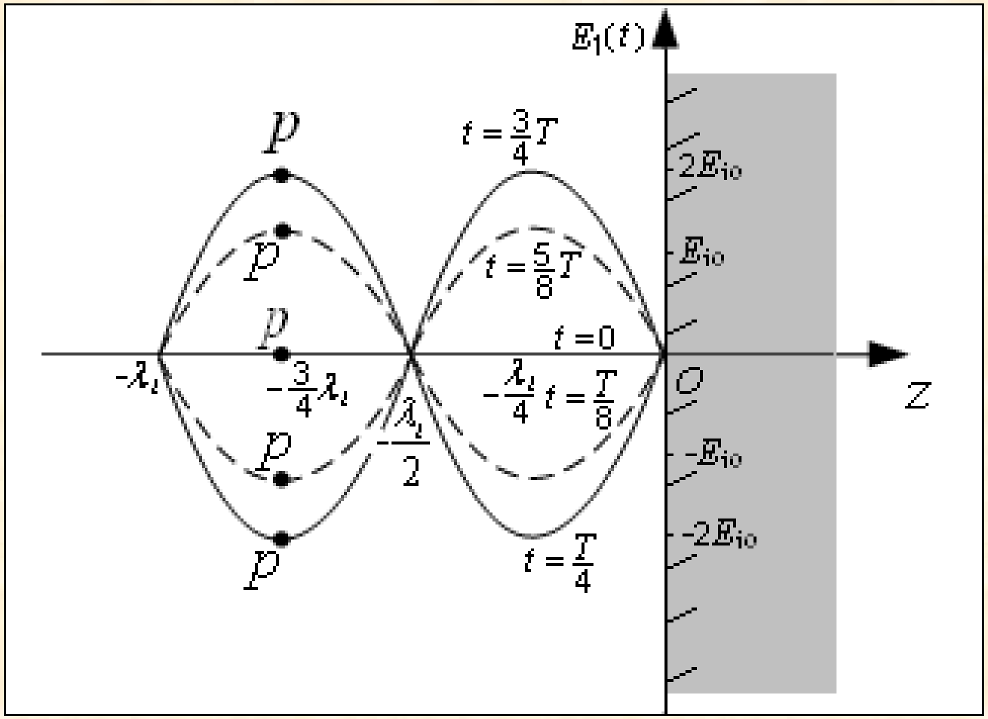


图6.1-2　不同瞬间的驻波

t=0时，　$\mathbf{E}_1(t) = 0$ ，　沿X轴

t=T/8,　$\mathbf{E}_1(t) = \sqrt{2}E_{i0}\sin(k_1 z)$

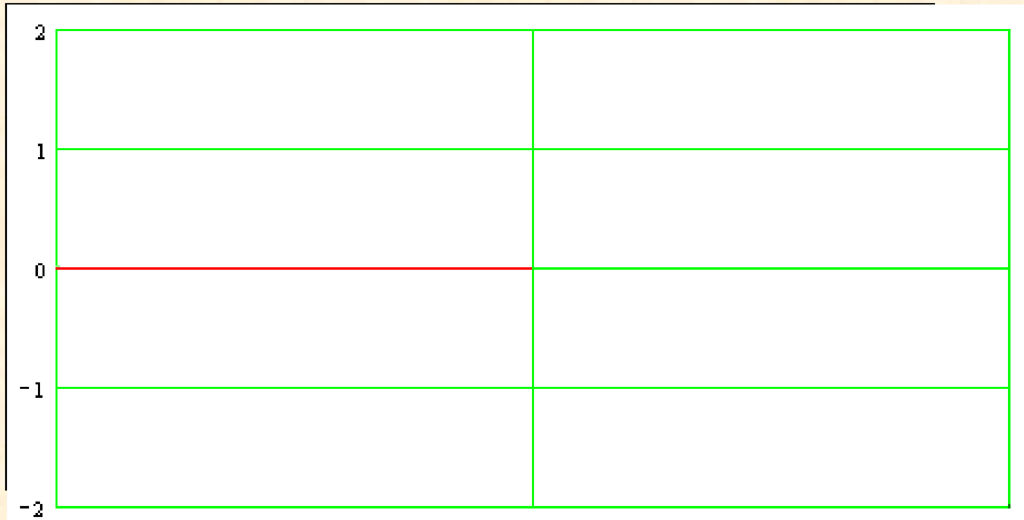
t=T/4,　$\mathbf{E}_1(t) = 2E_{i0}\sin(k_1 z)$

t=3T/8,　$\mathbf{E}_1(t) = \sqrt{2}E_{i0}\sin(k_1 z)$

t=T/2,　$\mathbf{E}_1(t) = 0$

t=5T/8,7T/8,　$\mathbf{E}_1(t) = -\sqrt{2}E_{i0}\sin(k_1 z)$

t=3T/4,　$\mathbf{E}_1(t) = -2E_{i0}\sin(k_1 z)$



动画：垂直入射于理想导体平面波的反射

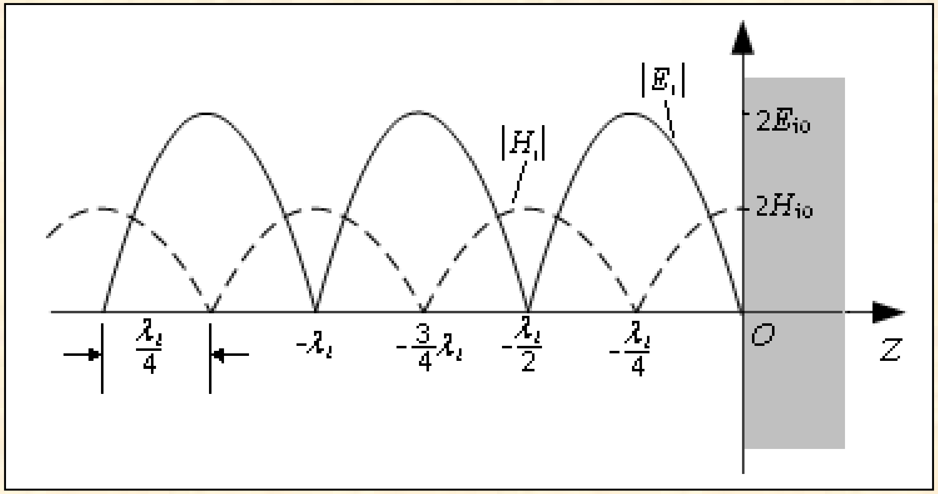
- 空间各点的电场都随时间t按正弦规律变化，但是波腹和波节点的位置均固定不变。
- 这种波与行波不同，它是驻立不动的，称之为驻波。
- 驻波就是波腹点和波节点固定不动的电磁波。

驻波的物理意义：

驻波是振幅相等的两个反向行波——入射波和反射波相互叠加的结果。

在电场波腹点，二者电场同相叠加，故振幅呈现最大值；

在电场波节点，二者电场反相叠加，互相抵消为零。



驻波电磁场振幅

由图知，

· 电场波节点和波腹点每隔$\lambda/4$交替出现；

电场波腹点相隔$\lambda/2$， 电场波节点也相隔$\lambda/2$；

--这个特性在实验和实际中被用于测量驻波的工作波长。

· 磁场的波腹点是电场的波节点，

磁场的波节点是电场的波腹点。

----例如在z=0点，反射电场与入射电场反相抵消，反射磁场与入射磁场同相相加：

$$\bar{E}_1\Big|_{z=0} = \hat{x}E_{i0}(1-1) = 0$$

$$\bar{H}_1\Big|_{z=0} = \hat{y}H_{i0}(1+1) = \hat{y}2H_{i0}$$

(2) 面电流

由BC，理想导体分界面两侧的磁场分量不连续，分界面上存在面电流：

$$\overline{\mathbf{J}}_s = \hat{\mathbf{n}} \times \overline{\mathbf{H}}_1 \big|_{z=0} = -\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} 2H_{i0} = \hat{\mathbf{x}} 2H_{i0}$$

$$\overline{\mathbf{H}}_1 = \overline{\mathbf{H}}_i + \overline{\mathbf{H}}_r = \hat{\mathbf{y}} \frac{E_{i0}}{\eta_1}(e^{-jk_1 z} + e^{jk_1 z}) = \hat{\mathbf{y}} \frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos(k_1 z) = \hat{\mathbf{y}} 2H_{i0}\cos(k_1 z)$$

(3) 功率流密度

平均功率流密度（平均坡印廷矢量）为：

$$\bar{S}_1^{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\bar{E}\times\bar{H}^*\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{E}_1 &= -\hat{x}j2E_{i0}\sin(k_1 z)\\ \bar{H}_1 &= \hat{y}\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos(k_1 z)\end{aligned}}$$

$$\bar{S}_1^{av} = \hat{z}\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[-4j\frac{E_{i0}^2}{\eta}\sin kz\cos kz\right] = 0$$

驻波没有单向流动的实功率，它不能传输能量，只有虚功率。

瞬时功率流密度为

$$\overline{E}_1(t)=\hat{x}2E_{i0}\sin(k_1 z)\sin\omega t$$

$$\overline{H}_1(t)=\hat{y}\frac{2E_{i0}}{\eta_1}\cos(k_1 z)\cos\omega t$$

$$\overline{S}_1(t)=\overline{E}_1(t)\times\overline{H}_1(t)$$

$$=\hat{z}\frac{4E_{i0}^2}{\eta_1}\sin(k_1 z)\cos(k_1 z)\sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

$$=\hat{z}\frac{E_{i0}^2}{\eta_1}\sin(2k_1 z)\sin(2\omega t)$$

结论：瞬时功率流随时间以 ***T*/2**为周期按正弦规律变化

$$\bar{S}_1(t) = \hat{z}\frac{E_{i0}^2}{\eta_1}\sin(2k_1 z)\sin(2\omega t)$$

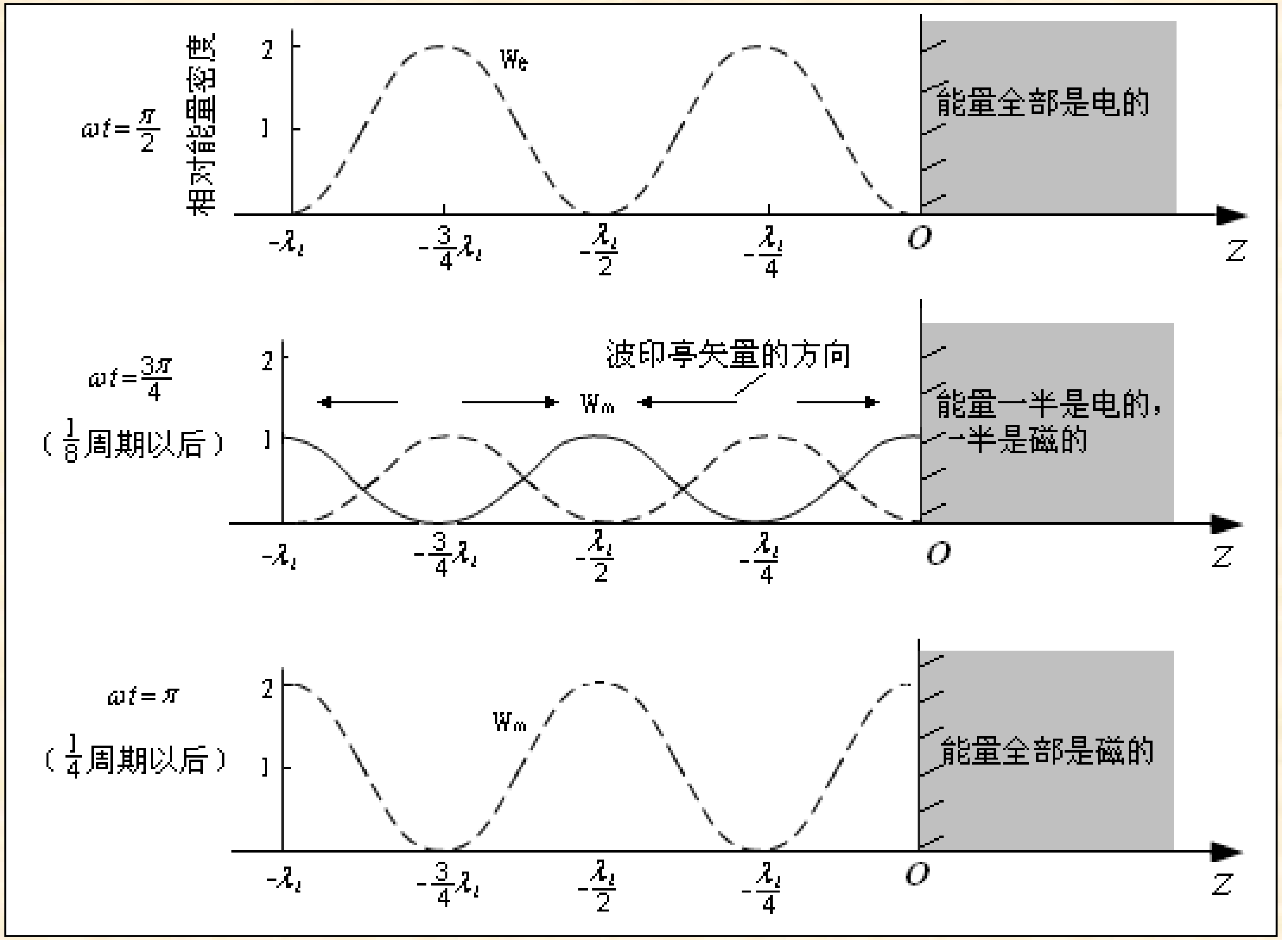


图6. 1-4 驻波场的瞬时电能和磁能密度分布

结论：

- 当均匀平面波垂直入射到理想导体表面时，在表面上发生全反射，反射波与入射波的迭加在自由空间中形成驻波。

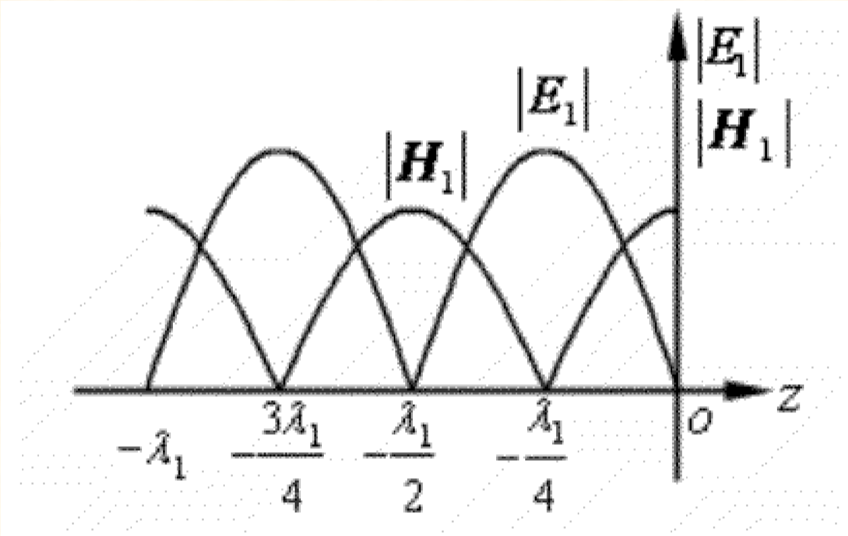
- 在理想导体表面上，电场为零，磁场为最大值。

- 根据边界条件可知，电磁波将在导体表面上感应出面电流，即 $z=0$ 处 $\bar{J}_s = \hat{n}\times\overline{H}_1|_{z=0} = -\hat{z}\times\hat{y}2H_{i0} = \hat{x}2H_{i0}$

- 在自由空间中，波的平均坡印廷矢量为零，可见，**驻波不能传输电磁能量，而只存在电场能和磁场能的相互转换。**

合成波的特点

- 媒质1中的合成波是驻波。电场振幅的最大值为$2E_{im}$，最小值为0；磁场振幅的最大值为$2E_{im}/\eta_1$，最小值也为0。

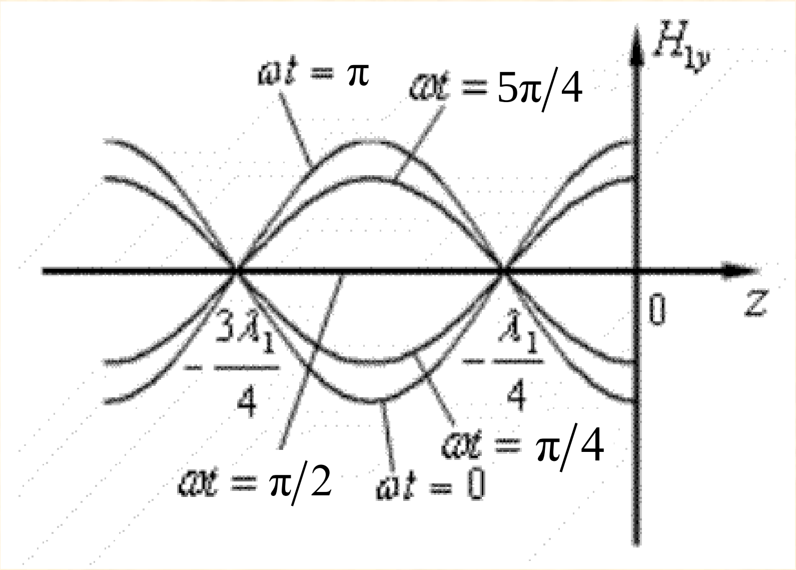


- 电场波节点（$|E_1(z)|$的最小值的位置）

$$k_1 z_{\min} = -n\pi \quad \Rightarrow \quad z_{\min} = -\frac{n\lambda_1}{2} \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$$

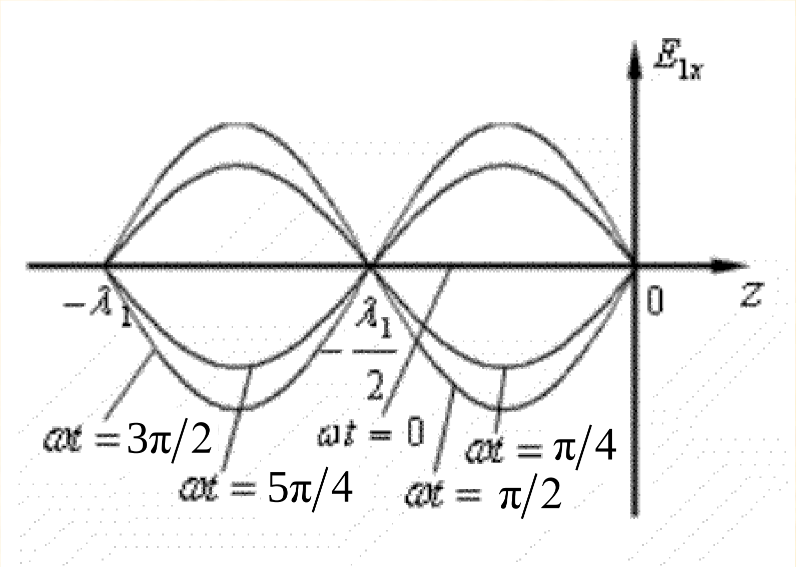
- 电场波腹点（$|\vec{E}_1(z)|$的最大值的位置）

$$k_1 z_{\max} = -\frac{\pi}{2}(2n+1) \quad \Rightarrow \quad z_{\max} = -\frac{(2n+1)\lambda_1}{4} \quad (n = 0,1,2,3,\cdots)$$



- $\vec{E}_1$、$\vec{H}_1$在时间上有**π/ 2** 的相移。

- $\vec{E}_1$、$\vec{H}_1$在空间上错开**λ/ 4**，电场的波腹（节）点正好是磁场的波节腹）点。



- 坡印廷矢量的平均值为零，不发生能量传输过程，仅在两个波节间进行电场能量和磁场能的交换。

➢ **圆极化波的垂直入射**

入射波电场： $\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}} = E_{\mathrm{i0}} e^{-\mathrm{j}kz} (\hat{a}_x - \mathrm{j}\hat{a}_y)$　　右旋圆极化波

反射波电场： $\vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{r}} = -E_{\mathrm{i0}} e^{\mathrm{j}kz} (\hat{a}_x - \mathrm{j}\hat{a}_y)$　　左旋圆极化波

合成波电场为： $\vec{\boldsymbol{E}} = \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{i}} + \vec{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{r}} = -\mathrm{j}2E_{\mathrm{i0}} \sin kz (\hat{a}_x - j\hat{a}_y)$　　纯驻波

例1：有一频率为100MHz，x方向极化的均匀平面波，从空气垂直入射到z=0的理想导体表面上，设入射波电场强度振幅为6mV/m，试写出：

(1) 入射波电场强度 $\overline{\mathbf{E}}_i$ 和磁场强度 H_i 的复数和瞬时表达式;

(2) 反射波电场强度 $\overline{E}_r$ 和磁场强度 $\overline{H}_r$ 的复数和瞬时表达式;

(3) 空气中的合成场 $\overline{E}$ 和 $\overline{H}$;

(4) 空气中离界面第一个电场强度波腹点的位置;

(5) 理想导体表面的感应电流密度。

解： (1)入射波电场强度复数形式 $\overline{E}_i = \hat{x}E_{i0}e^{-jk_1z}$

$$E_{i0} = 6\times10^{-3} \quad \mathrm{V/m}$$

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 2\pi f \frac{1}{1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$= \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi\times100\times10^6}{3\times10^8} = \frac{2}{3}\pi \quad \mathrm{rad/m}$$

$$\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$$

复数表达式为：

$$\begin{cases}\overline{E}_i = \hat{x}6\times10^{-3}\times e^{-j\frac{2}{3}\pi z} \\ \overline{H}_i = \dfrac{1}{\eta}\hat{z}\times\overline{E}_i = \hat{y}\dfrac{10^{-4}}{2\pi}e^{-j\frac{2}{3}\pi z}\end{cases}$$

瞬时表达式为：

$$\begin{cases}\overline{E}_i(z,t) = \mathrm{Re}\left[\overline{E}_i e^{j\omega\omega}\right] = \hat{x}6\times10^{-3}\cos\left(2\pi\times10^8 t-\dfrac{2}{3}\pi z\right) \\ \overline{H}_i(z,t) = \hat{y}\dfrac{10^{-4}}{2\pi}\cos\left(2\pi\times10^8 t-\dfrac{2}{3}\pi z\right)\end{cases}$$

(2)反射波电磁场复数形式

$$E_{r0} = -E_{i0} \longrightarrow \begin{cases}\overline{E}_r = -\hat{x}6\times10^{-3}\times e^{j\frac{2}{3}\pi z} \\ \overline{H}_r = \hat{y}\dfrac{10^{-4}}{2\pi}e^{j\frac{2}{3}\pi z}\end{cases}$$

瞬时表达式为：

$$\begin{cases}\overline{E}_r(z,t) = -\hat{x}6\times10^{-3}\cos\left(2\pi\times10^8 t+\dfrac{2}{3}\pi z\right) \\ \overline{H}_r(z,t) = \hat{y}\dfrac{10^{-4}}{2\pi}\cos\left(2\pi\times10^8 t+\dfrac{2}{3}\pi z\right)\end{cases}$$

(3)空气中的合成场复数形式

$$\overline{E}=\overline{E}_i+\overline{E}_r=-\hat{x}j12\times10^{-3}\sin\left(\frac{2}{3}\pi z\right)$$

$$\overline{H}=\overline{H}_i+\overline{H}_r=\hat{y}\frac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(\frac{2}{3}\pi z\right)$$

瞬时表达式为:

$$\overline{E}(z,t)=\mathrm{Re}\left(\overline{E}e^{j\omega\omega}\right)$$

$$=\hat{x}12\times10^{-3}\sin\left(\frac{2}{3}\pi z\right)\sin\left(2\pi\times10^{8}t\right)$$

$$\overline{H}(z,t)=\mathrm{Re}\left(\overline{H}e^{j\omega t}\right)$$

$$=\hat{y}\frac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(\frac{2}{3}\pi z\right)\cos\left(2\pi\times10^{8}t\right)$$

(4) 在空气中离开界面第一个电场强度波腹点位于

$$\sin(\frac{2}{3}\pi z)=1 \qquad \text{即：} \quad \frac{2}{3}\pi z=-\frac{\pi}{2}$$

得： $z=-0.75 \quad \text{m}$

(5) 在 $z=0$ 的理想导体边界上感应电流密度：

空气中合成磁场: $\overline{H}(z,t)=\hat{y}\dfrac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi z\right)\cos\left(2\pi\times10^{8}t\right)$

则: $\overline{J}_s=\hat{n}\times\overline{H}(z,t)\Big|_{z=0}$

$$=(-\hat{z})\times\hat{y}\frac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(2\pi\times10^{8}t\right)$$

$$=\hat{x}\frac{10^{-4}}{\pi}\cos\left(2\pi\times10^{8}t\right) \qquad A/m$$

例2 一均匀平面波沿+z方向传播，其电场强度矢量为

$$\overline{E}_i = \hat{x}100\sin(\omega t - \beta z) + \hat{y}200\cos(\omega t - \beta z) \quad V/m$$

（1）求相伴的磁场强度；

（2）若在传播方向上 $z = 0$处，放置一无限大的理想导体平板，求区域 $z < 0$ 中的电场强度 和磁场强度；

（3）求理想导体板表面的电流密度。

解：（1） 电场强度的复数表示

$$\overline{E}_i = \hat{x}100e^{-j\beta z}e^{-j\pi/2} + \hat{y}200e^{-j\beta z}$$

$$\overline{H}_i = \frac{1}{\eta_0}\hat{z}\times\overline{E}_i = \frac{1}{\eta_0}\left(-\hat{x}200e^{-j\beta z} + \hat{y}100e^{-j\beta z}e^{-j\pi/2}\right)$$

磁场瞬时表达式

$$H_i(z,t)=\mathrm{Re}\left[H_i(z)e^{j\omega t}\right]$$
$$=\frac{1}{\eta_0}\left(-\hat{x}200\cos(\omega t-\beta z)+\hat{y}100\cos\left(\omega t-\beta z-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

(2) 反射波的电场为

$$\overline{E}_r(z)=-\hat{x}100e^{j\beta z}e^{-j\pi/2}-\hat{y}200e^{j\beta z}$$

反射波的磁场为

$$\overline{H}_r(z)=\frac{1}{\eta_0}\left(-\hat{z}\times\overline{E}_r\right)=\frac{1}{\eta_0}\left(-\hat{x}200e^{j\beta z}+\hat{y}100e^{j\beta z}e^{-j\pi/2}\right)$$

在区域 $z<0$ 的合成波电场和磁场分别为

$$\overline{E}_1=\overline{E}_i+\overline{E}_r=-\hat{x}j200e^{-j\pi/2}\sin(\beta z)-\hat{y}j400\sin(\beta z)$$

$$\overline{H}_1=\overline{H}_i+\overline{H}_r=\frac{1}{\eta_0}\left[-\hat{x}400\cos(\beta z)+\hat{y}200e^{-j\pi/2}\cos(\beta z)\right]$$

(3) 理想导体表面电流密度为

$$\overline{J}_s=-\hat{z}\times\overline{H}_1\Big|_{z=0}$$

$$=\hat{x}\frac{200}{\eta_0}e^{-j\pi/2}+\hat{y}\frac{400}{\eta_0}=-\hat{x}j0.53+\hat{y}1.06$$

§ 6.1 平面波对平面边界的垂直入射
Normal Incidence at a Plane Boundary

- 对理想导体的垂直入射
- **对理想介质的垂直入射**
- 对多层边界的垂直入射

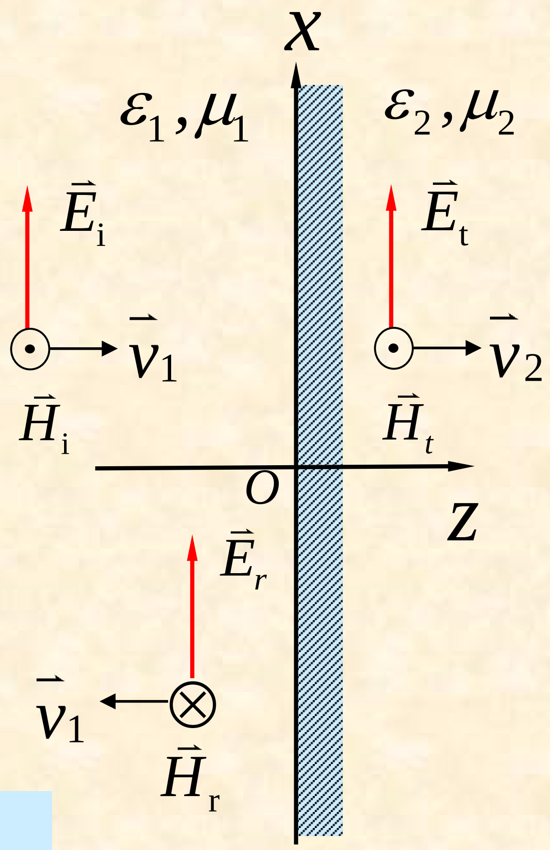
二、对理想介质的垂直入射

1. 场量表示

入射波表示为：
$$\begin{cases} \bar{E}_i = \hat{x}E_{i0}e^{-jk_1 z} \\ \bar{H}_i = \dfrac{1}{\eta_1}\hat{z}\times\bar{E}_i = \hat{y}\dfrac{E_{i0}}{\eta_1}e^{-jk_1 z} \end{cases}$$

反射波表示为：
$$\begin{cases} \bar{E}_r = \hat{x}E_{r0}e^{jk_1 z} \\ \bar{H}_r = \dfrac{1}{\eta_1}(-\hat{z})\times\bar{E}_r = -\hat{y}\dfrac{E_{r0}}{\eta_1}e^{jk_1 z} \end{cases}$$

透射波表示为：
$$\begin{cases} \dot{\bar{E}}_t = \hat{x}\dot{E}_{t0}e^{-jk_2 z} \\ \dot{\bar{H}}_t = \dfrac{1}{\eta_2}\hat{z}\times\dot{E}_t = \hat{y}\dfrac{\dot{E}_{t0}}{\eta_2}e^{-jk_2 z} \end{cases}$$



根据边界条件：在 $z=0$ 处有：　$E_{1t}=E_{2t}$　　$H_{1t}=H_{2t}$

其中
$$k_1=\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}=\frac{2\pi}{\lambda_1},\quad \eta_1=\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}}$$

$$k_2=\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}=\frac{2\pi}{\lambda_2},\quad \eta_2=\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}$$

在交界面z=0处，根据边界两侧的切向电场连续： $\hat{x}\dot{E}_{i0}+\hat{x}\dot{E}_{r0}=\hat{x}\dot{E}_{t0}$

交界面两侧的切向磁场也连续： $\hat{y}\dfrac{\dot{E}_{i0}}{\eta_1}-\hat{y}\dfrac{\dot{E}_{r0}}{\eta_1}=\hat{y}\dfrac{\dot{E}_{t0}}{\eta_2}$

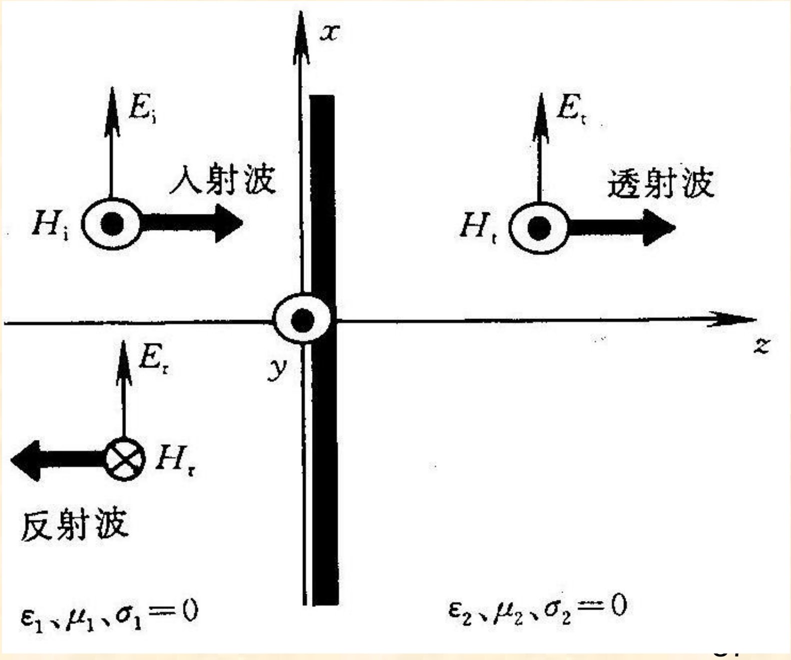
由上两式得到：

$$\begin{cases}\dot{E}_{i0}+\dot{E}_{r0}=\dot{E}_{t0}\\ \dfrac{\dot{E}_{i0}}{\eta_1}-\dfrac{\dot{E}_{r0}}{\eta_1}=\dfrac{\dot{E}_{t0}}{\eta_2}\end{cases}$$

解得：

$$\dot{E}_{ro}=\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1}\dot{E}_{i0}=\Gamma\dot{E}_{i0}$$

$$\dot{E}_{to}=\frac{2\eta_2}{\eta_2+\eta_1}\dot{E}_{i0}=T\dot{E}_{i0}$$



反射系数 $\Gamma = \dfrac{\dot{E}_{r0}}{\dot{E}_{i0}} = \dfrac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$

反射系数 Γ：分界面上反射波电场强度与入射波电场强度之比。

透射系数 $T = \dfrac{\dot{E}_{t0}}{\dot{E}_{i0}} = \dfrac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$

透射系数 T 分界面上透射波电场强度与入射波电场强度之比。

R与T之间的关系为：$1 + \Gamma = T$

2. 合成场特点

1) 媒质2中的电场磁场

媒质2中的电场强度和磁场强度：

$$\bar{\dot{E}}_2 = \bar{\dot{E}}_t = \hat{x}T\dot{E}_{i0}e^{-jk_2 z}$$

$$\bar{\dot{H}}_2 = \bar{\dot{H}}_t = \hat{y}\frac{T\dot{E}_{i0}}{\eta_2}e^{-jk_2 z}$$

透射波：　向z方向前进的波；

与无界理想介质中的均匀平面波相同；

2)媒质1中的电场和磁场

对于理想介质和一般的电介质，其磁导率 μ 非常接近于真空的磁导率 μ_0 ， $\mu_1=\mu_2=\mu_0$

因此，可简化 ：

$$\Gamma = \frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_2+\eta_1} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}}+\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}$$

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}$$

结论：

- 波在介质分界面上的反射和透射主要取决于两介质介电常数（或折射率）的差异。
- 若$\varepsilon_1>\varepsilon_2$， 则反射波电场与入射波电场同相；
- 若$\varepsilon_1<\varepsilon_2$， 则反射波电场与入射波电场反相。
- 透射波电场与入射波电场总是同相的。

设 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ 若$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, 即$\eta_1 \rangle \eta_2$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} = -|\Gamma| \qquad 0 \le |\Gamma| \le 1$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = 1 - |\Gamma|$$

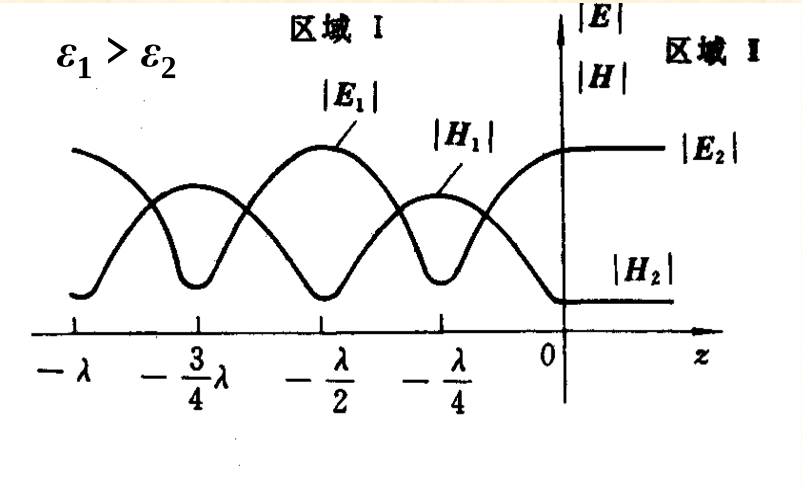
$$\dot{\vec{E}}_1 = \dot{\vec{E}}_i + \dot{\vec{E}}_r = \hat{x}\dot{E}_{i0}\left(e^{-jk_1 z} + \Gamma e^{jk_1 z}\right)$$

$$\dot{\vec{H}}_1 = \dot{\vec{H}}_i + \dot{\vec{H}}_r = \hat{y}\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta_1}\left(e^{-jk_1 z} - \Gamma e^{jk_1 z}\right)$$

媒质1中的电场强度和磁场强度：

$$\dot{E}_1 = \dot{E}_i + \dot{E}_r = \hat{x}\dot{E}_{i0}\left(e^{-jk_1z} + \Gamma e^{jk_1z}\right)$$

$$\dot{H}_1 = \dot{H}_i + \dot{H}_r = \hat{y}\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta_1}\left(e^{-jk_1z} - \Gamma e^{jk_1z}\right)$$



$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} - \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_2}} + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$$

$$T = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$$

- 若$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$，则反射波电场与入射波电场反相；在分界面处总电场达到极小值。
- 若$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$，则反射波电场与入射波电场同相；在分界面处总电场达到极大值。

(1) 行驻波　设 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$　若 $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$，即 $\eta_1 > \eta_2$

讨论：

媒质1中的电磁场：

$$\dot{\vec{E}}_1 = \hat{x}\dot{E}_{i0}\left(1 - |\Gamma| e^{j2k_1z}\right)e^{-jk_1z}$$

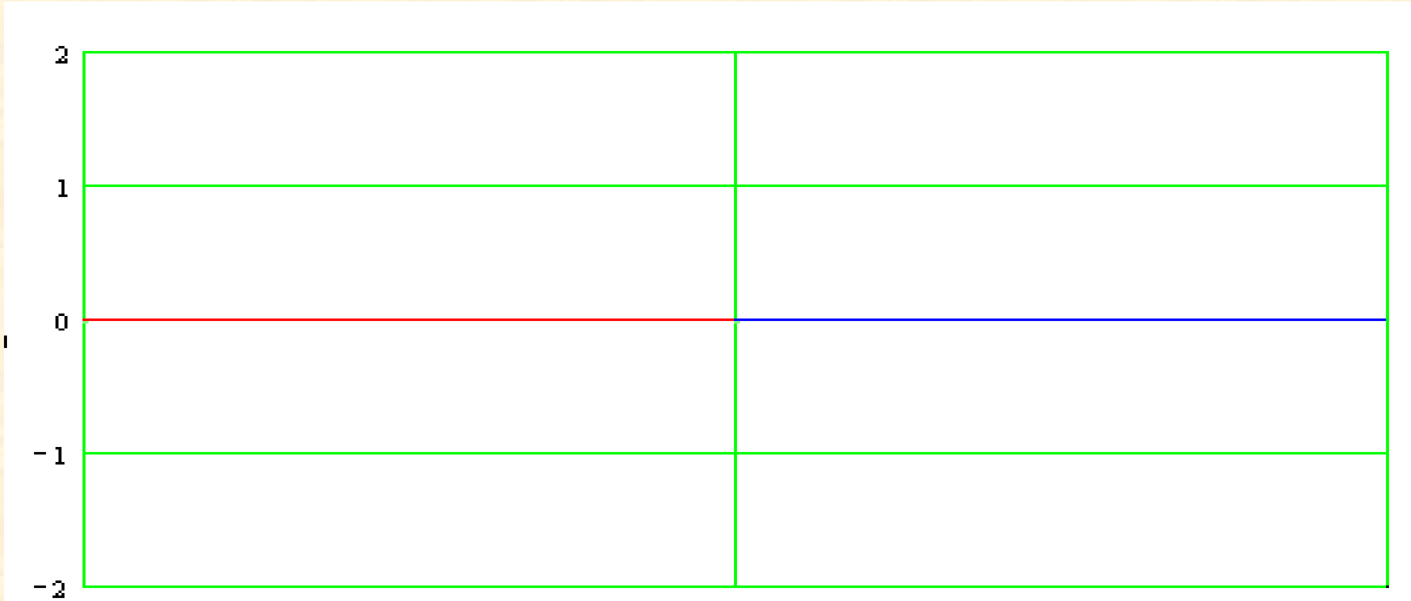
$$\dot{\vec{H}}_1 = \hat{y}\frac{\dot{E}_{i0}}{\eta_1}\left(1 + |\Gamma| e^{j2k_1z}\right)e^{-jk_1z}$$

在 $2\beta_1 z = -2n\pi$ 即 $z = -n\lambda_1/2$ 处，电场振幅达到最小值(电场波节点)

$$\left|\dot{\vec{E}}_1\right|_{\min} = \dot{E}_{i0}\left(1 - |\Gamma|\right)$$

在 $2\beta_1 z = -(2n+1)\pi$，即 $z = -(2n+1)\lambda_1/4$ 处，电场振幅达到最大值(电场波腹点)

$$\left|\dot{\vec{E}}_1\right|_{\max} = \dot{E}_{i0}\left(1 + |\Gamma|\right)$$

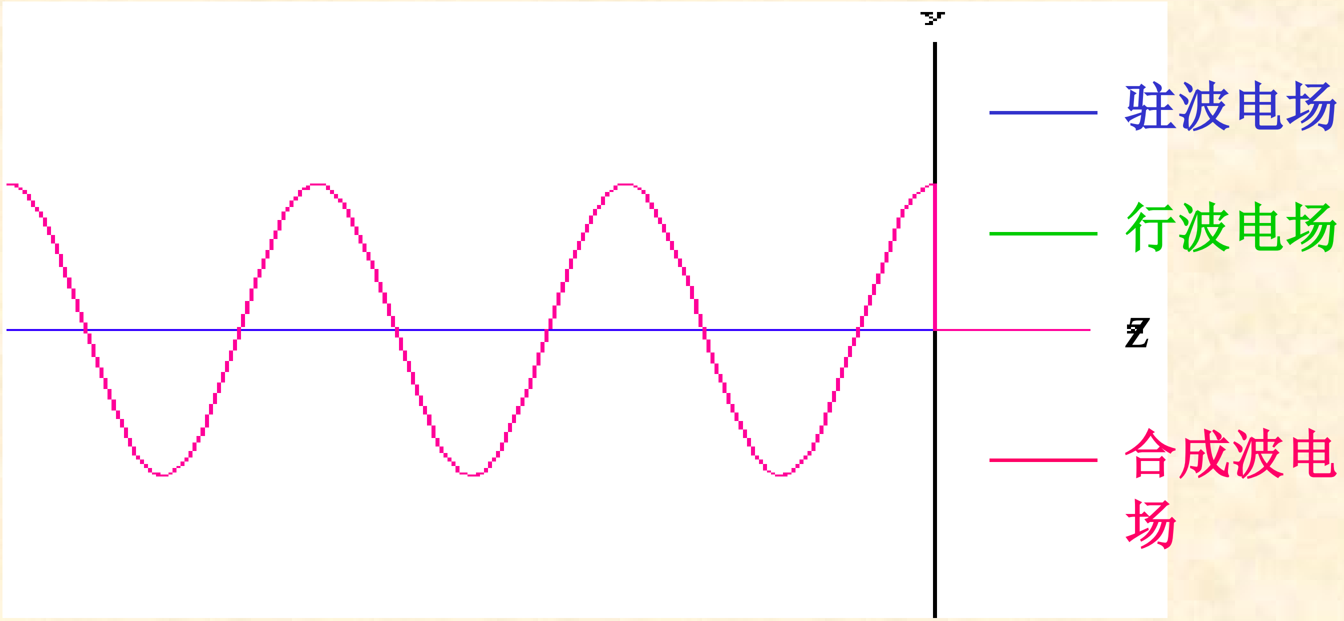


动画：垂直入射于理想介质平面波的反射

(a)　行驻波的电磁场振幅分布　　合成场振幅最小值和最大值的形成

- **波节点，反射波和入射波的电场反相，合成场最小；波腹点，反射波和入射波的电场同相，合成场最大**。这些值的位置不随时间而变化，具有驻波特性。
- 反射波振幅只是入射波振幅的一部分，**反射波与入射波的一部分形成驻波**，另一部分还是行波，电场振幅的最小值不为零，最大值也不为 $2E_{i0}$ 。行驻波（既有驻波部分，也有行波部分）。
- 同样，磁场振幅也呈行驻波的周期性变化，磁场的波节点对应于电场的波腹点，磁场的波腹点对应于电场的波节点。

设 $\mu_1 = \mu_2, = \mu_0$ 若 $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, 即 $\eta_1 < \eta_2$ $R > 0$



(2) 驻波比 S（电场振幅最大值与最小值之比，VSWR）

$$S = \frac{\left|\dot{E}\right|_{\max}}{\left|\dot{E}\right|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

$$|\Gamma| = \frac{S - 1}{S + 1}$$

讨论

- 当$\Gamma=0$ 时，$S=1$，无反射波为行波，称为匹配状态，全部入射功率都进入媒质2。 。

例：光学镜片、 “隐身”飞机。

- 当$\Gamma=\pm 1$ 时，$S=\infty$，是纯驻波。

- 当 $0<|\Gamma|<1$时，$1<S<\infty$，为混合波，即行驻波。

(3) 入射波能量、反射波能量和透射波能量间的关系——坡印廷矢量平均值

$$\bar{S}_i^{av} = \mathrm{Re}[\frac{1}{2}\dot{\bar{E}}_i \times \dot{\bar{H}}_i^*] = \hat{z}\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}$$

$$\bar{S}_r^{av} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\dot{\bar{E}}_r \times \dot{\bar{H}}_r^*\right] = -\hat{z}\frac{|\Gamma|^2 E_{i0}^2}{2\eta_1} = -|\Gamma|^2 \bar{S}_i^{av}$$

区域1中合成场传输的总平均功率流密度：

$$\bar{S}_1^{av} = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\dot{\bar{E}}_1 \times \dot{\bar{H}}_1^*\right] = \hat{z}\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}\left(1-|\Gamma|^2\right) = \bar{S}_i^{av}\left(1-|\Gamma|^2\right)$$

等于入射波传输的功率减去反向传输的反射波功率。

区域2中z向透射波传输的平均功率流密度：

$$\bar{S}_2^{av} = \bar{S}_t^{av} = \mathrm{Re}[\frac{1}{2}\dot{\bar{E}}_t \times \dot{\bar{H}}_t^*] = \hat{z}\frac{|T|^2 E_{i0}^2}{2\eta_2} = \frac{\eta_1}{\eta_2}|T|^2 S_i^{av}$$

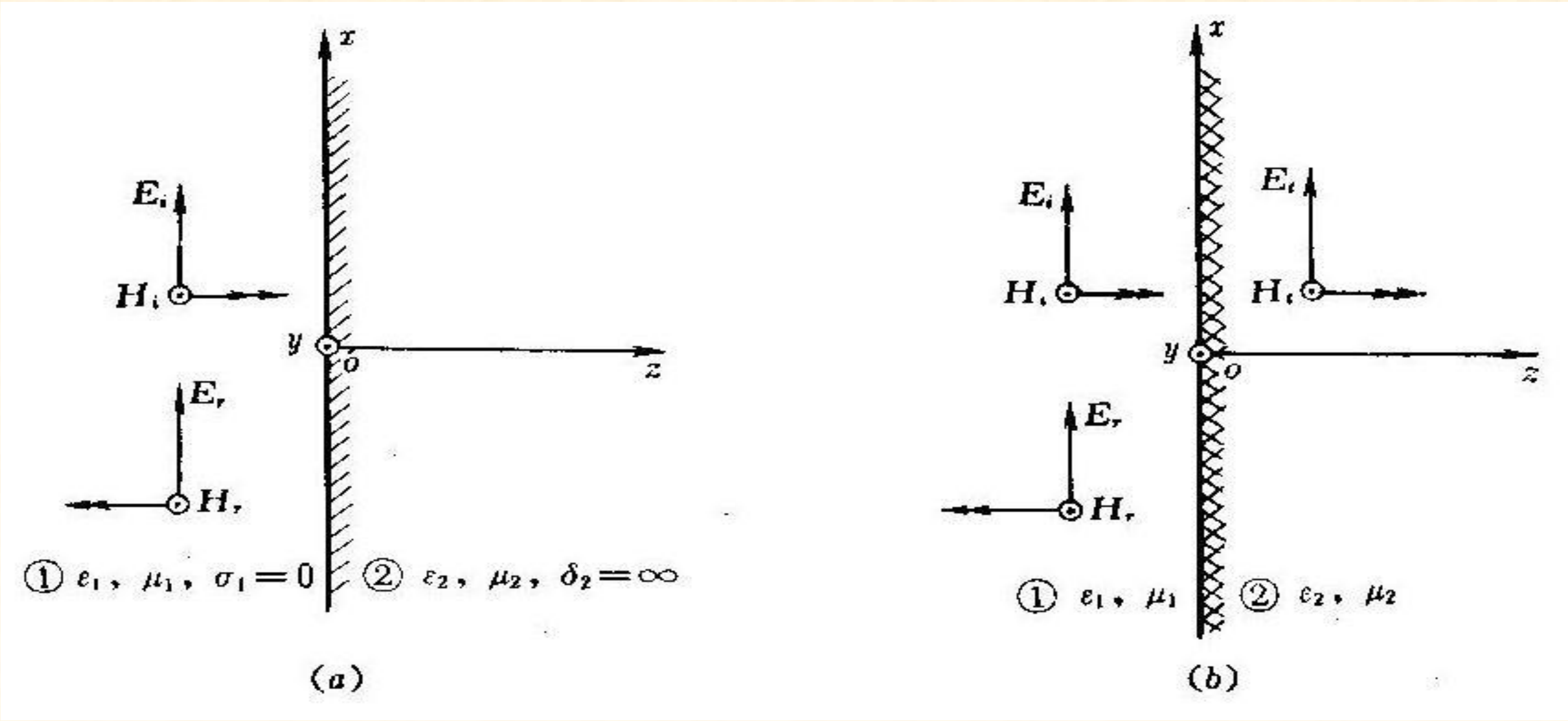
由于 $$\bar{S}_1^{\text{av}} = \bar{S}_i^{\text{av}}\left(1-|\Gamma|^2\right) = \bar{S}_i^{\text{av}} \frac{4\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\left(1+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)^2}$$

而 $$\bar{S}_2^{\text{av}} = \bar{S}_i^{\text{av}} \frac{\eta_1}{\eta_2}|T|^2 = \bar{S}_i^{\text{av}} \frac{4\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\left(1+\sqrt{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)^2}$$

所以 $$\bar{S}_1^{av} = \bar{S}_2^{av}$$

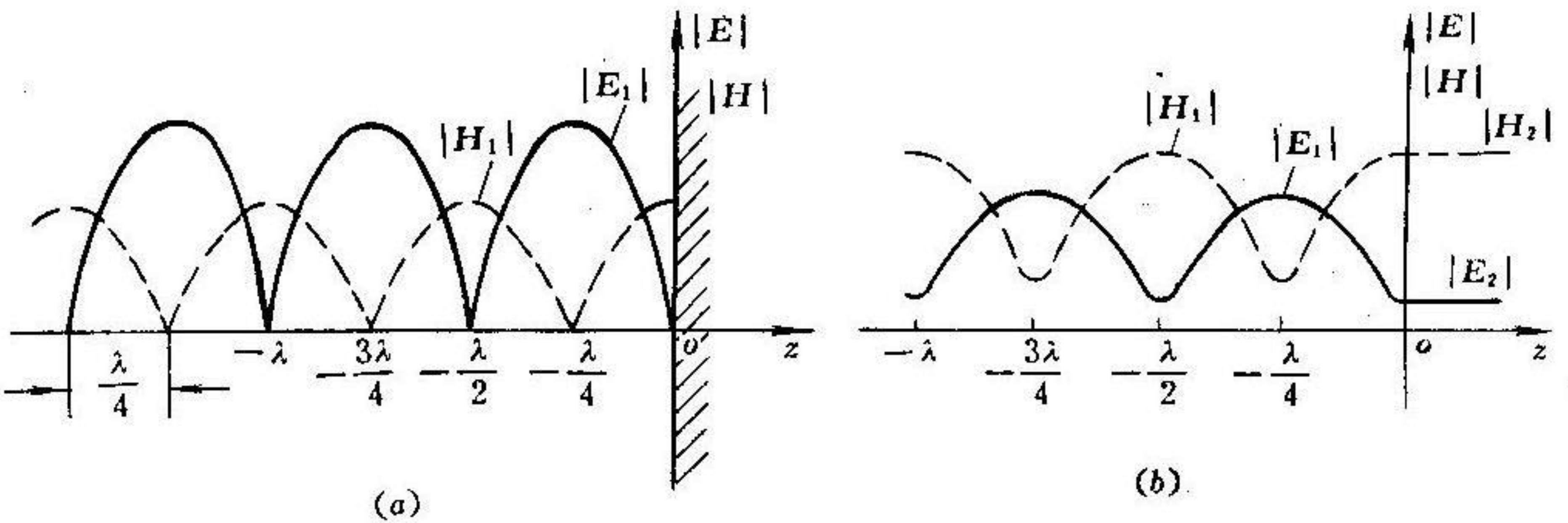
区域1中传输的合成场功率等于向区域2透射的功率

平面波的垂直入射 ---小结



$$\Gamma = \frac{\dot{E}_{r0}}{\dot{E}_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$T = \frac{\dot{E}_{t0}}{\dot{E}_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$



$$S = \frac{\left|\dot{E}\right|_{\max}}{\left|\dot{E}\right|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

驻波和行驻波的电磁场振幅分布

能量关系

$$\bar{S}_i^{av} = \hat{z}\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \qquad \bar{S}_r^{av} = -|\Gamma|^2 \bar{S}_i^{av}$$

区域1中合成场传输的总平均功率流密度：

$$\bar{S}_1^{av} = \bar{S}_i^{av}\left(1 - |\Gamma|^2\right)$$

等于入射波传输的功率减去反向传输的反射波功率。

区域2中z向透射波传输的平均功率流密度：

$$\bar{S}_2^{av} = \bar{S}_t^{av} = \bar{S}_i^{av}\frac{\eta_1}{\eta_2}|T|^2 = \bar{S}_1^{av} = \left(1 - |\Gamma|^2\right)\bar{S}_i^{av}$$

例3 频率为f=300MHz的线极化均匀平面电磁波，其电场强度振幅值为2V/m，从空气垂直入射到ε_r=4、μ_r=1的理想介质平面上，求：

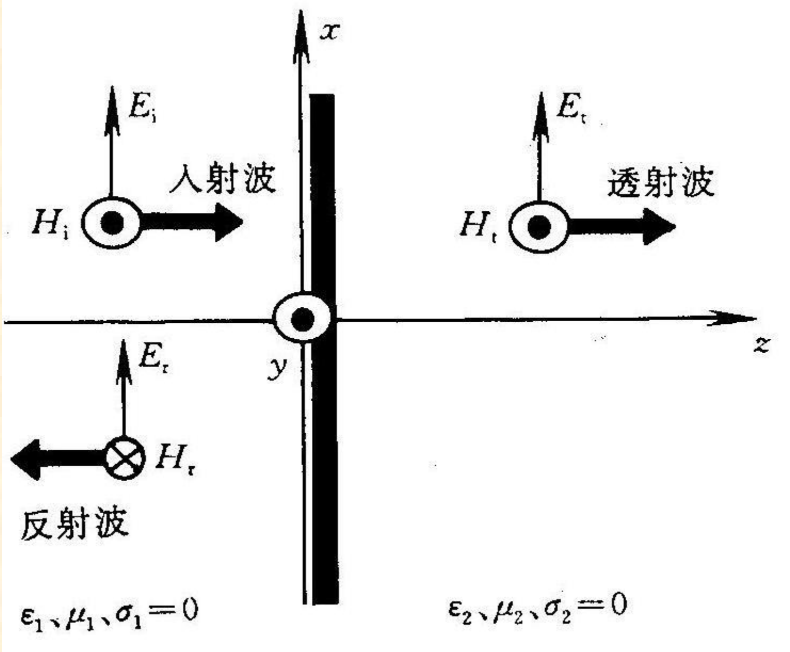
(1) 反射系数、透射系数、驻波比；

(2) 入射波、反射波和透射波的电场和磁场；

(3) 入射功率、反射功率和透射功率。

解：设入射波为x方向的线极化波，

沿z方向传播



(1) 波阻抗

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi, \qquad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi$$

反射系数、透射系数和驻波比：

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{1}{3}$$

$$T = \frac{2\eta_{21}}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = 2$$

（2）入射波、反射波、透射波的电场和磁场：

$$f = 300MHz, \qquad \lambda_1 = \frac{c}{f} = 1m, \qquad \lambda_2 = \frac{v_2}{f} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r} \cdot f} = 0.5m$$

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = 2\pi, \qquad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} = 4\pi$$

$$\overline{E}_{\mathrm{i}} = \hat{x}E_{i0}e^{-jk_1 z} = \hat{x}2e^{-j2\pi z} \qquad \overline{H}_{\mathrm{i}} = \hat{y}\frac{E_i}{\eta_1}e^{-jk_1 z} = \hat{y}\frac{1}{60\pi}e^{-j2\pi z}$$

$$\overline{E}_{\mathrm{r}} = \hat{x}\Gamma E_i e^{jk_1 z} = -\hat{x}\frac{2}{3}e^{j2\pi z} \qquad \overline{H}_{\mathrm{r}} = -\hat{y}\Gamma\frac{E_i}{\eta_1}e^{jk_1 z} = \hat{y}\frac{1}{180\pi}e^{j2\pi z}$$

$$\overline{E}_t = \hat{x}TE_{i0}e^{-jk_2 z} = \hat{x}\frac{4}{3}e^{-j4\pi z}, \qquad \overline{H}_t = \hat{y}\frac{TE_{i0}}{\eta_2}e^{-jk_2 z} = \hat{y}\frac{1}{45\pi}e^{-j4\pi z}$$

(3) 入射波、反射波、透射波的平均功率密度为

$$\bar{S}_i^{\text{av}} = \hat{z}\frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} = \hat{z}\frac{1}{60\pi}$$

$$\bar{S}_r^{\text{av}} = -\hat{z}\frac{E_{r0}^2}{2\eta_1} = -\hat{z}\frac{|\Gamma|^2 E_{i0}^2}{2\eta_1} = -\hat{z}\frac{1}{540\pi}$$

$$\bar{S}_t^{\text{av}} = \hat{z}\frac{E_{t0}^2}{2\eta_2} = \hat{z}\frac{|T|^2 E_{i0}^2}{2\eta_2} = \hat{z}\frac{2}{135\pi}$$

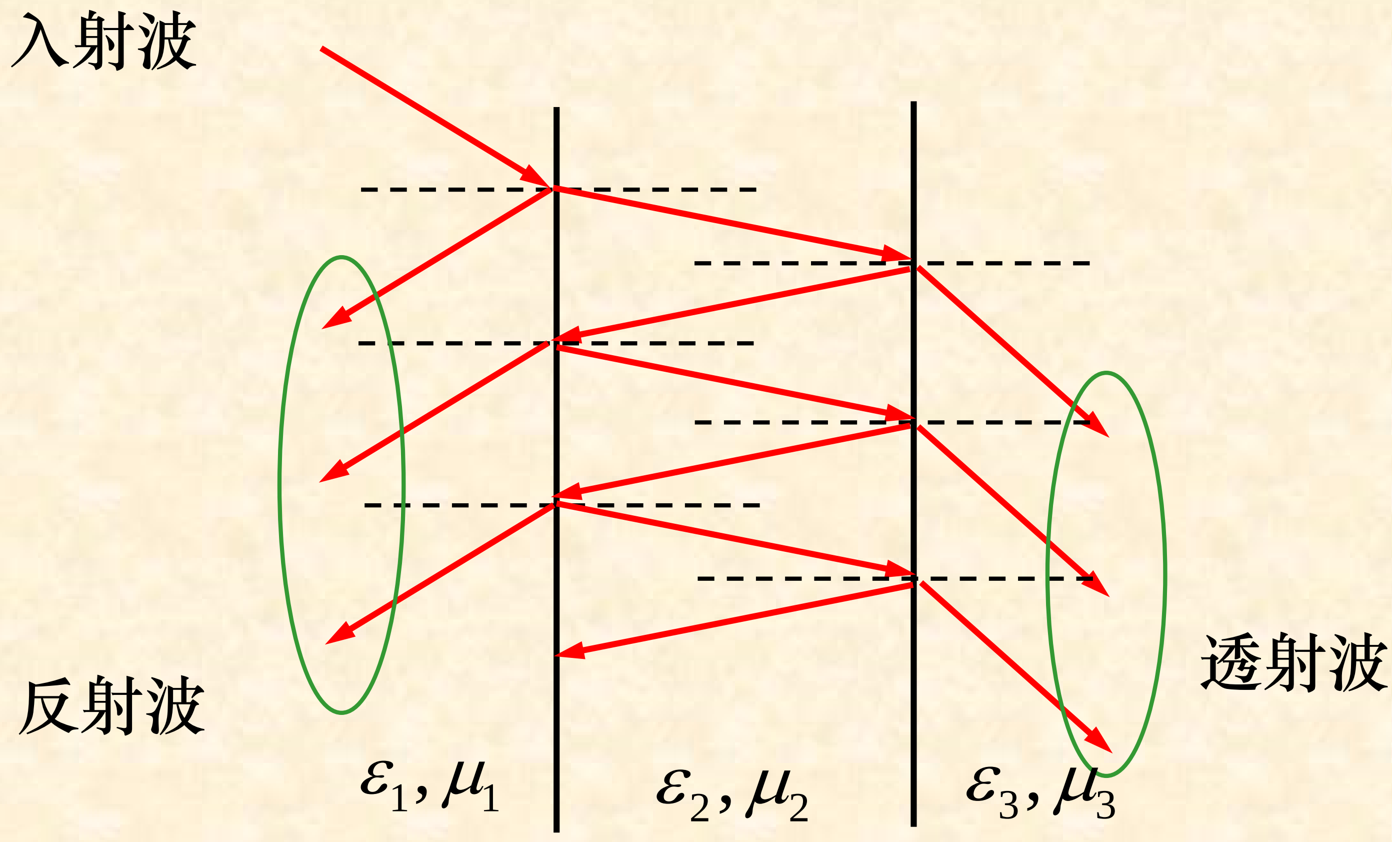
$$\left|\bar{S}_i^{\text{av}}\right| - \left|\bar{S}_r^{\text{av}}\right| = \left|\bar{S}_i^{\text{av}}\right|\left(1 - |\Gamma|^2\right) = \left|\bar{S}_t^{\text{av}}\right|$$

P.170　例6.1-1

例6.1-2

三、 均匀平面波对多层介质分界平面的垂直入射

在工程实际中，多层介质的应用很广：如雷达罩、频率选择表面、吸波涂层等。

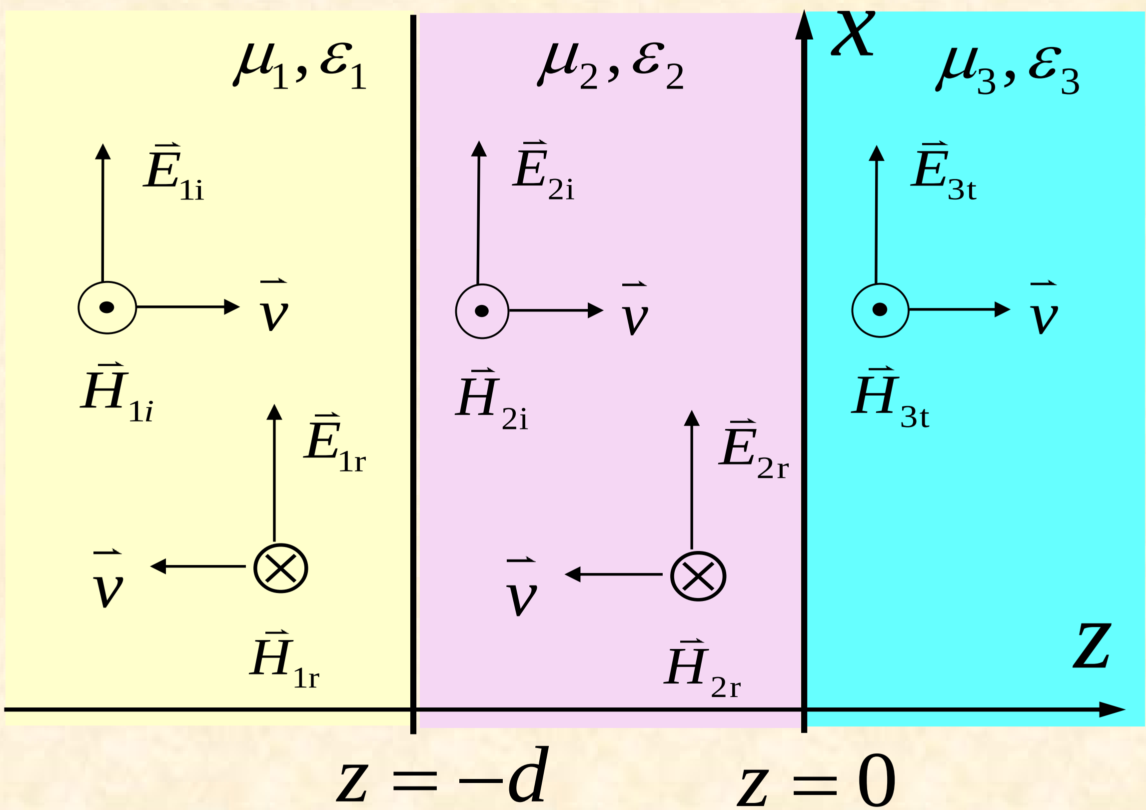


本节内容

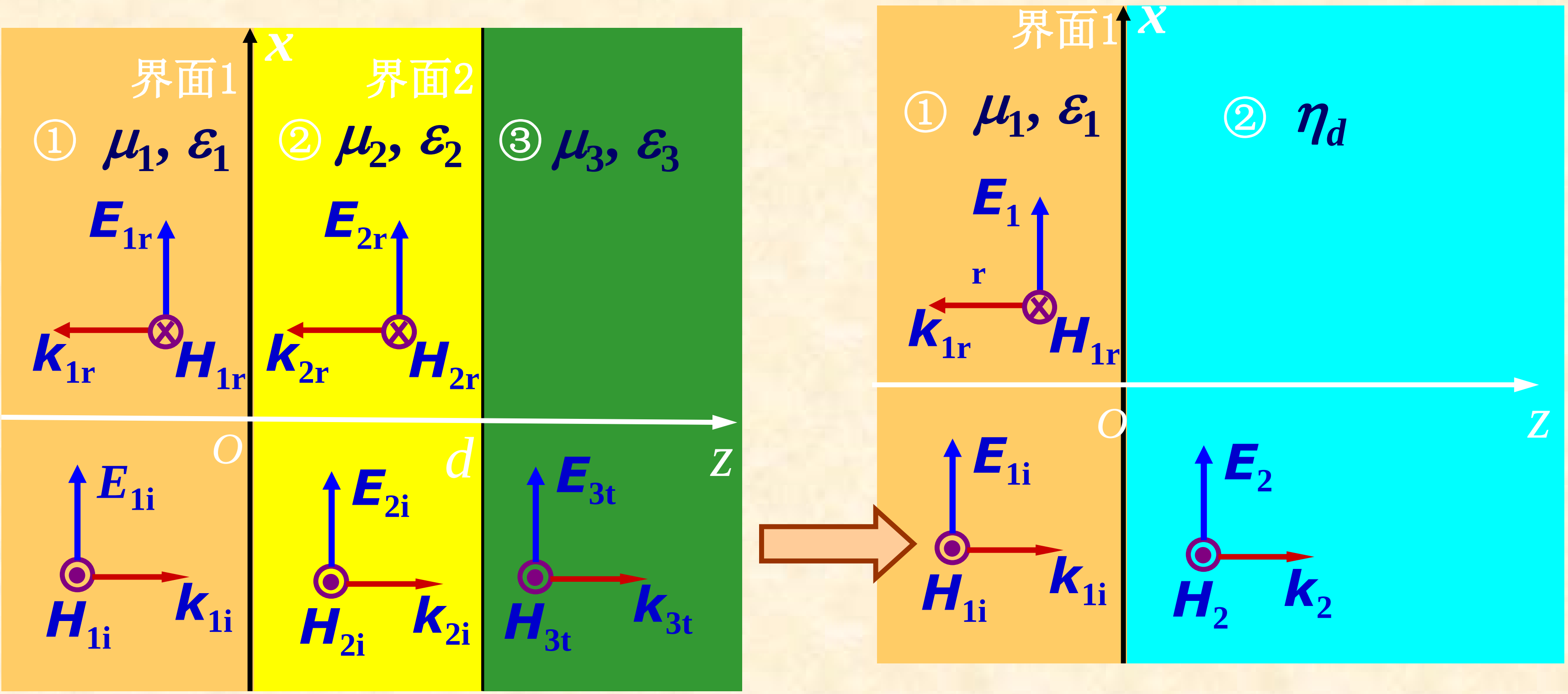
1. 多层介质中的场量关系与等效波阻抗
2. 四分之一波长匹配层多
3. 半波长介质窗

1.多层介质中的场量关系与等效波阻抗

(1）场量关系——边界条件



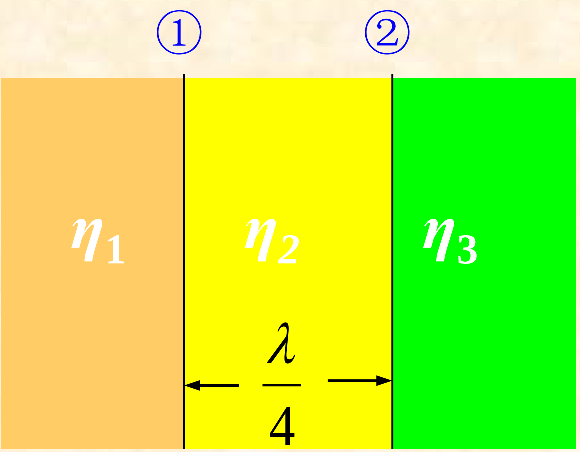
(2) 等效阻抗 $\eta_d = \eta_2 \dfrac{\eta_3 + j\eta_2 \tan k_2 d}{\eta_2 + j\eta_3 \tan k_2 d}$



引入等效波阻抗以后，在计算第一层媒质分界面上的反射系数 Γ_1 时，第二层媒质和第三层媒质可以看作等效波阻抗为 η_d 的一种媒质。

2. 四分之一波长匹配层

设两种理想介质的波阻抗分别为η_1 与η_3 ，为了消除分界面的反射，可在两种理想介质中间插入厚度为四分之一波长（该波长是指平面波在夹层中的波长）的理想介质夹层，如图所示。



$$\eta_d = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \tan k_2 d}{\eta_2 + j\eta_3 \tan k_2 d}$$

为了消除反射，必须要求 $\eta_d = \eta_1$，那么由上式得

$$\eta_1 = \frac{\eta_2^{\ 2}}{\eta_3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}}$$

P.183　例 6.1-4

3. 半波长介质窗

如果介质1和介质3是相同的介质，即 $\eta_3=\eta_1$，当介质2的厚度 $d=\lambda_2/2$ 时，有

$$\eta_d=\eta_2\frac{\eta_3+j\eta_2\tan k_2 d}{\eta_2+j\eta_3\tan k_2 d}=\eta_3=\eta_1$$

则，介质1与介质2分界面上的反射系数 $R_{z=-d}=\frac{\eta_d-\eta_1}{\eta_d+\eta_1}=0$

同时，$E_{3\mathrm{tm}}=-E_{1\mathrm{im}}$

结论：电磁波可以**无损耗**地通过厚度为 $\lambda/2$ 的介质层。

因此，这种厚度 $d=\lambda/2$ 的介质层又称为**半波长介质窗**。

应用：雷达天线罩

为了使雷达天线免受恶劣环境的影响，通常用天线罩将天线保护起来；

若天线罩的**介质层厚度**设计为该介质中的**电磁波的半个波长**，根据半波长介质窗原理，就可以消除天线罩对电磁波的反射。

P.173　例 6.1-3

例4

在介质(1)中传播的均匀平面波的电场强度

$$\overline{E}_i(t)=\hat{x}\cos\pi\left(10^8t-z\right)+\hat{y}2\sin\pi\left(10^8t-z\right)(V/m)$$

求：1、其真空中波长λ_0、（1）区中波长λ_1及（1）区媒质相对介电常数

2、写出该平面波的电场复矢量和磁场复矢量和，并指出这是什么极化波；

3、若此平面波向理想导体（2）表面垂直入射，求反射波电场复矢量和磁场复矢量，这是什么极化波；

解：1. $\lambda_0 = \dfrac{c}{\omega/2\pi} = \dfrac{3\times10^8}{10^8\pi/2\pi} = 6m$　　$\lambda = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2m$

,　$\sqrt{\varepsilon_r} = \dfrac{k}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \dfrac{kc}{\omega} = \dfrac{\pi\times3\times10^8}{10^8\pi} = 3$　　$\varepsilon_r = 9$

2. $\overline{E}_i = \hat{x}e^{-j\pi z} + \hat{y}2e^{-j\pi z - j\frac{\pi}{2}} = (\hat{x} - \hat{y}j2)e^{-j\pi z} \quad (V/m)$

$\overline{H}_i = \dfrac{1}{\eta}\hat{z}\times\overline{E}_i = (\hat{x}j2 + \hat{y})\dfrac{1}{\eta}e^{-j\pi z} \quad (A/m)$　式中　$\eta = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}} = \dfrac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 40\pi \ (\Omega)$

右旋椭圆极化波

3. $\overline{E}_r = -(\hat{x} - \hat{y}j2)e^{j\pi z}$

$\overline{H}_r = \dfrac{1}{\eta}(-\hat{z})\times\overline{E}_r = (\hat{x}j2 + \hat{y})\dfrac{1}{\eta}e^{j\pi z}$　　$\eta = 40\pi \ (\Omega)$

左旋椭圆极化波

作　业：　6.1-4