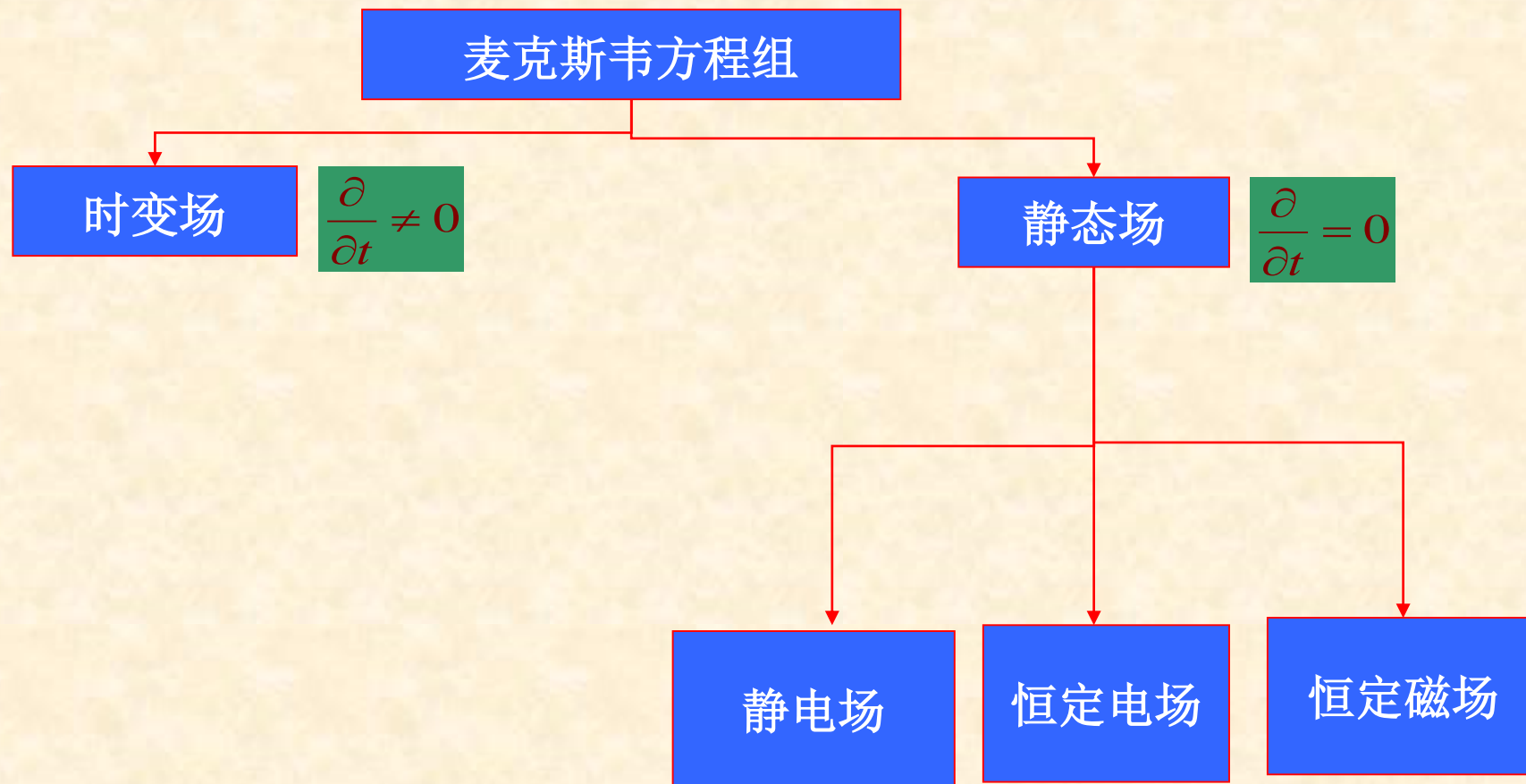
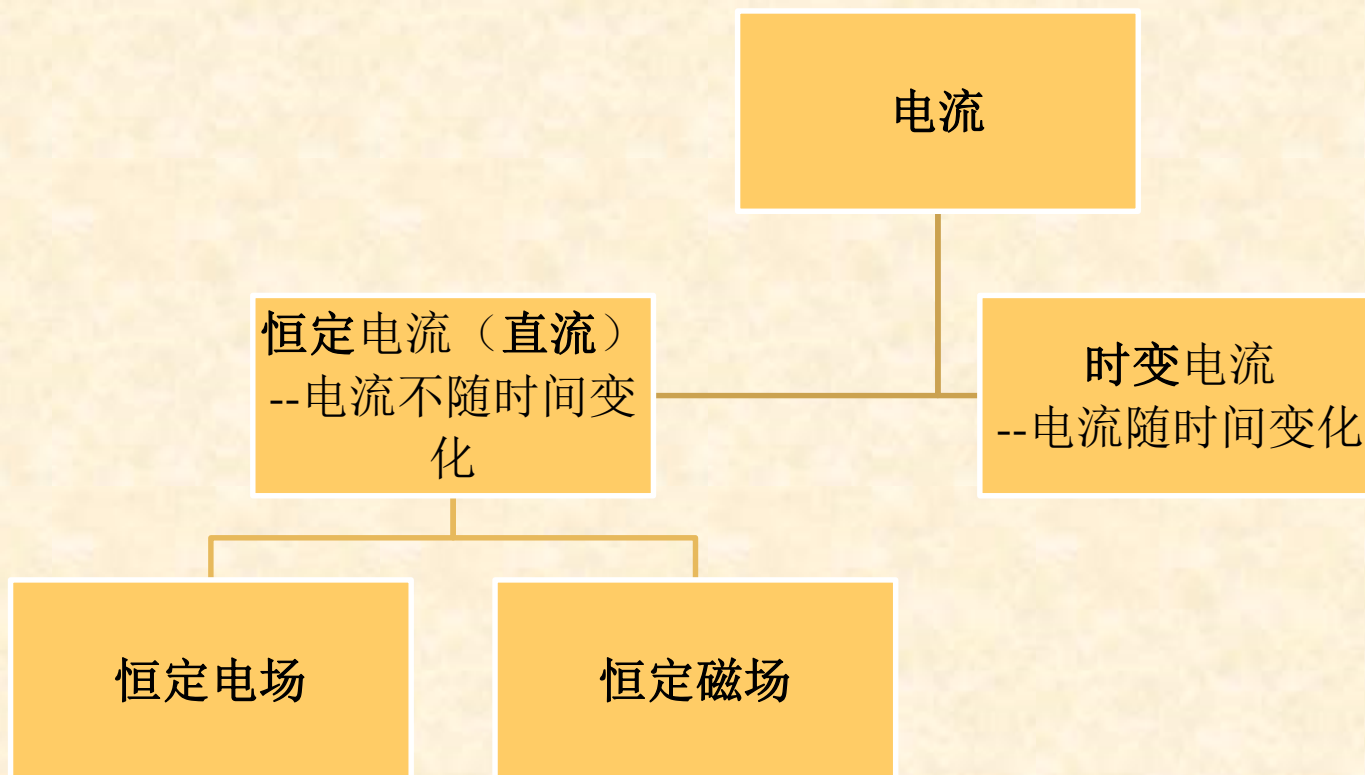


宏观电磁理论的核心:





电荷在电场作用下 \longrightarrow 定向运动 \longrightarrow 电流
 产生 形成





第四章 恒定电场和恒定磁场

- 基本方程
- 边界条件
- 恒定电场与静电场的静电比拟法
----计算电导（电阻）
- 恒定磁场的矢量磁位
- 电感及其计算



§ 4.1 恒定电场

- 恒定电场的基本方程
- 恒定电场的电位及其方程
- 恒定电场的边界条件
- 静电比拟法



一、恒定电场的基本方程

- 恒定电场：恒定电流所产生的电场；（考虑导电媒质中）
- 恒定电场的基本场矢量是电流密度 $\bar{\mathbf{J}}(\bar{\mathbf{r}})$ 和电场强度 $\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}})$ ；
- 恒定电场的基本方程：

微分形式：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0 \\ \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0 \end{cases}$$

积分形式：

$$\begin{cases} \oint_S \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = 0 \\ \oint_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = 0 \end{cases}$$

- 线性各向同性导电媒质的本构关系 $\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$



➤ 恒定电场和静电场都是有源无旋场，具有相同的性质。

● 恒定电场与静电场的重要区别：

(1) 恒定电场可以存在于导体内部；

(2) 恒定电场中有电场能量的损耗, 要维持导体中的恒定电流，就必须有外加电源来不断补充被损耗的电场能量。



二、恒定电场的电位及其方程

若媒质是均匀的，则 $\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = \nabla \cdot (\sigma \bar{\mathbf{E}}) = \sigma \nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0$

- 恒定电场的电位函数

均匀导电媒质中
没有体分布电荷

$$\nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0 \Rightarrow \bar{\mathbf{E}} = -\nabla \varphi$$

由 $\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (-\sigma \nabla \varphi) = 0 \Rightarrow \nabla^2 \varphi = 0$



三、恒定电场的边界条件

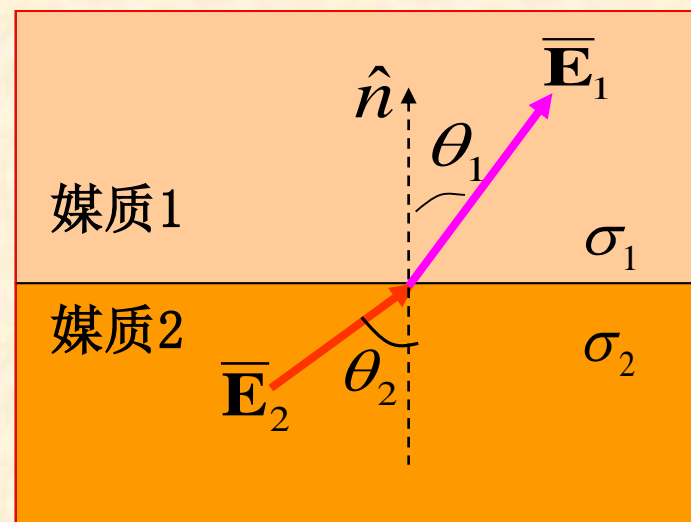
- 场矢量的边界条件

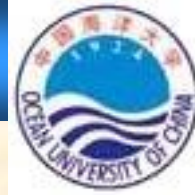
$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S} = 0 \implies \hat{n} \cdot (\bar{J}_1 - \bar{J}_2) = 0 \quad \text{即} \quad J_{1n} = J_{2n}$$

$$\oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0 \implies \hat{n} \times (\bar{E}_1 - \bar{E}_2) = 0 \quad \text{即} \quad E_{1t} = E_{2t}$$

场矢量的折射关系

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{E_{1t} / E_{1n}}{E_{2t} / E_{2n}} = \frac{E_{2n}}{E_{1n}} = \frac{J_{2n} / \sigma_2}{J_{1n} / \sigma_1} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$





- 导电媒质分界面上的电荷面密度

$$\rho_s = \hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = \hat{n} \cdot \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} \bar{J}_1 - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \bar{J}_2 \right) = \left(\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} - \frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \right) J_n$$

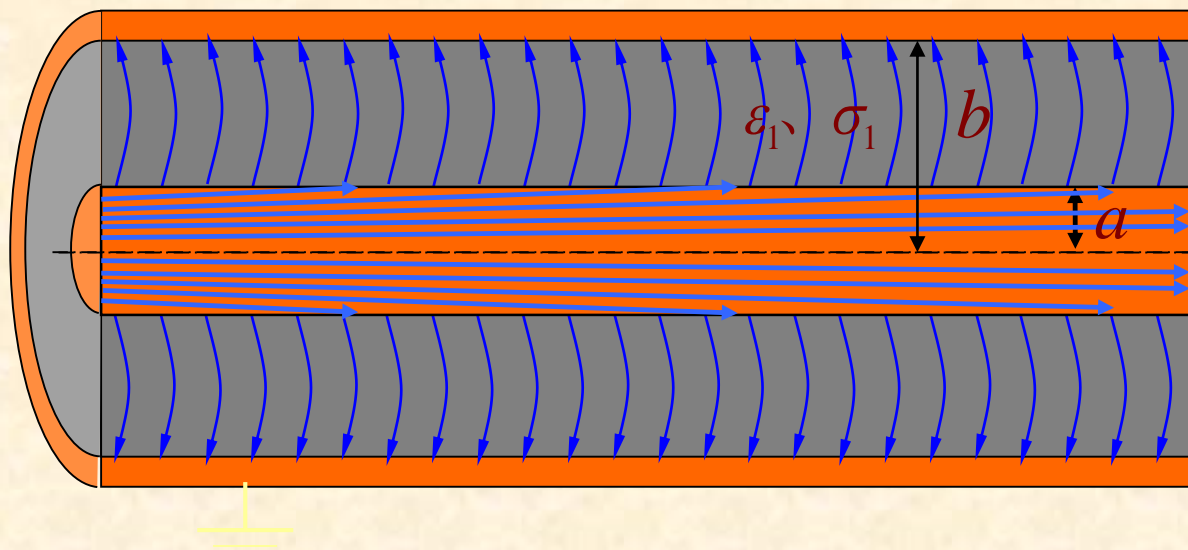
\hat{n} : 分界面的法向单位矢量, 由媒质2指向媒质1

- 电位的边界条件

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$$

说明

- 恒定电场同时存在于导体内部和外部，在导体表面上的电场既有法向分量又有切向分量，电场并不垂直于导体表面，因而导体表面不是等位面；





推论1

电流由良导体进入不良导体时,在不良导体里的电流线近似与良导体表面垂直,即良导体表面可以近似地看作等位面.

●如两种导电媒质的电导率 $\sigma_2 \gg \sigma_1$:

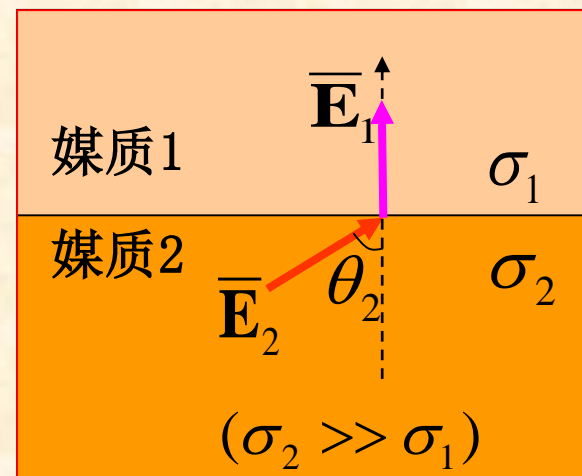
即,一种导电媒质为良导体(σ_2 很大),且 $\theta_2 \neq 90^\circ$

另一种导电媒质为不良导体($\sigma_1 \neq 0$, 但很小),

则 $\theta_1 = 0$, 即电场线近似垂直于与良导体表面。

此时, 良导体表面可近似地看作为等位面;

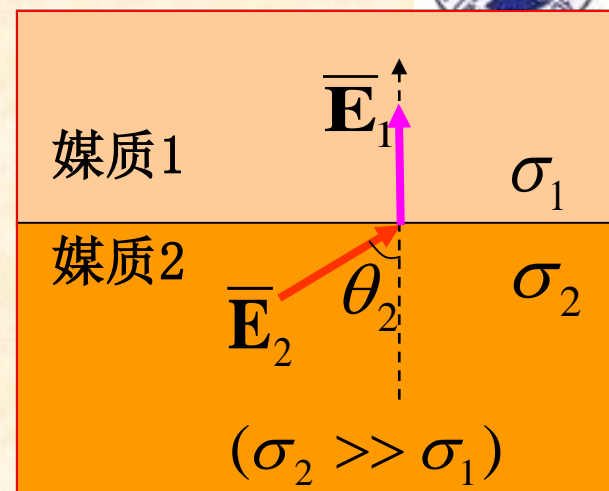
$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$





例如:

同轴线的内外导体通常由电导率很高 (10^7 数量级)的铜或铝制成,而填充在两导体间的材料不可能是理想的绝缘电介质,总有很小的漏电导存在。



例如, 聚乙烯的电导率为 10^{-10} 数量级, 则

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_1}{\operatorname{tg} \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \approx \frac{10^{-10}}{10^7} = 10^{-17}$$

$$\therefore \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \operatorname{tg} \theta_2 \approx \frac{10^{-10}}{10^7} \operatorname{tg} \theta_2 = 10^{-17} \operatorname{tg} \theta_2 \rightarrow 0, \left(\text{当 } \theta_2 \neq \frac{\pi}{2} \text{ 时} \right)$$

$$\therefore \theta_1 \rightarrow 0$$



推论2: 当恒定电流通过电导率不同的两导电媒质时,其电流密度和电场强度要发生突变。故分界面上必有电荷分布 ρ_s 。

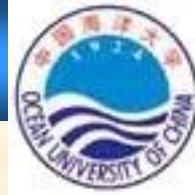
两种导电媒质的分界面上, 根据 $\rho_s = D_{1n} - D_{2n}$,

(通常认为导电媒质的介电常数为 ε_0), 则得
$$\frac{\rho_s}{\varepsilon_0} = E_{1n} - E_{2n}$$

$$\because J_{1n} = J_{2n} \quad \therefore \sigma_1 E_{1n} = \sigma_2 E_{2n}$$

$$\therefore \rho_s = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) E_{1n}$$

可见, 只要 $\sigma_1 \neq \sigma_2$, 分界面上必定有一层自由电荷密度。

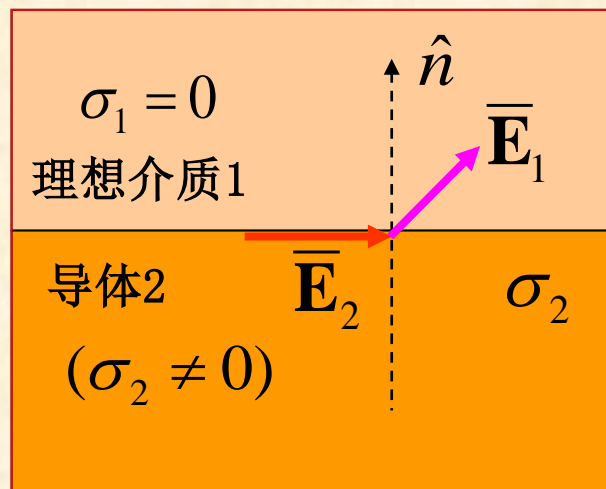


推论3.

若媒质1为理想介质,即 $\sigma_1=0$; 媒质2为导体,

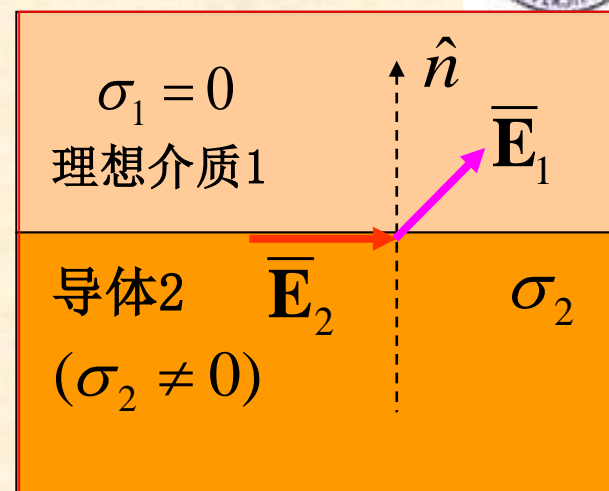
则 $J_1=0$, 故 $J_{2n}=J_{1n}=0$ $E_{2n}=0$,

即导体中的电流和电场只有切向分量, 即与分界面平行。





$$E_1 = \sqrt{E_{1n}^2 + E_{1t}^2}$$



由上式可知 E_1 不垂直导体表面，那么导体表面不是等位面，导体也不是等位体，这是由于 σ_2 有限，导体中沿电流方向存在电场。

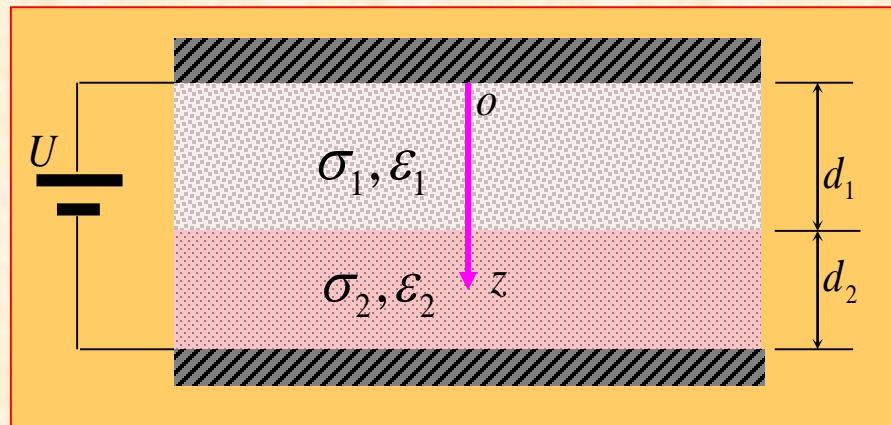
而在静电场中，导体内电场强度为零，介质中的场强总是垂直导体表面，导体是等位体，其表面是等位面。这一点，恒定电场与静电场有根本的区别。

然而 σ_2 越大， E_{2t} 和 E_{1t} 越小， θ_1 也越小，直至 $\sigma_2 = \infty$ 时， E_1 就垂直导体表面，导体表面为等位面。



例1 一个填充有两层导电媒质的平行板电容器，媒质参数分别为 ε_1 、 σ_1 和 ε_2 、 σ_2 ，外加电压 U 。求介质分界面上的自由电荷密度。

解：极板是理想导体，为等位面，电流沿 z 方向。



$$\text{由 } J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \bar{J}_1 = \bar{J}_2 = J\hat{z}$$

$$\Rightarrow \bar{E}_1 = \frac{\bar{J}_1}{\sigma_1} = \frac{J}{\sigma_1} \hat{z}, \quad \bar{E}_2 = \frac{\bar{J}_2}{\sigma_2} = \frac{J}{\sigma_2} \hat{z}$$

$$\Rightarrow U = U_1 + U_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2} \right) J \Rightarrow J = U / \left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2} \right)$$

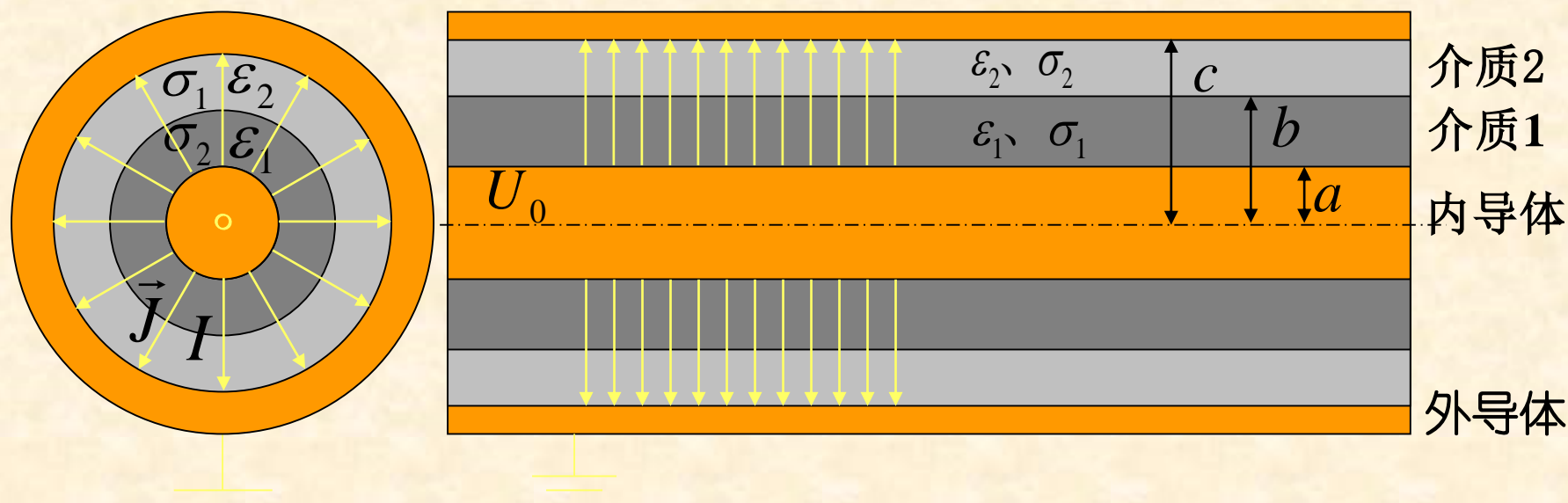
$$\Rightarrow \rho_{s\text{上}} = \hat{n} \cdot \bar{D}_1 = \hat{z} \cdot \varepsilon_1 \bar{E}_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} J \quad \rho_{s\text{下}} = \hat{n} \cdot \bar{D}_2 = (-\hat{z}) \cdot \varepsilon_2 \bar{E}_2 = -\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} J$$

$$\rho_{s\text{介质}} = \hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) = -\hat{z} \cdot (D_1 - D_2)\hat{z} = D_2 - D_1 = \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right) J = \frac{\sigma_1 \varepsilon_2 - \sigma_2 \varepsilon_1}{\sigma_2 d_1 + \sigma_1 d_2} U$$

\hat{n} 媒质2指向媒质1

例2 填充有两层介质的同轴电缆，内导体半径为 a ，外导体半径为 c ，介质的分界面半径为 b 。两层介质的介电常数为 ε_1 和 ε_2 、电导率为 σ_1 和 σ_2 。设内导体的电压为 U_0 ，外导体接地。求：

- (1) 两导体之间的电流密度和电场强度分布；
- (2) 介质分界面上的自由电荷面密度。





解： 电流由内导体流向外导体，在分界面上只有法向分量，

所以电流密度成轴对称分布。

先假设电流为 I ，由求出电流密 \bar{J} 的表达式，

然后求出 \bar{E}_1 和 \bar{E}_2 ，再由 $U_0 = \int_a^b \bar{E}_1 \cdot d\bar{\rho} + \int_b^c \bar{E}_2 \cdot d\bar{\rho}$ 确定出电流 I 。

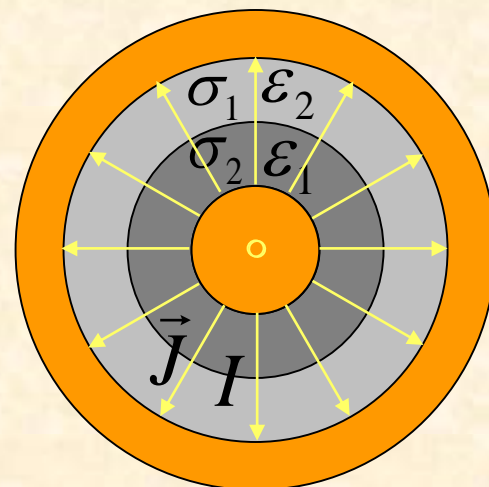
(1) 设同轴电缆中单位长度的径向电流为 I ，则由 $I = \oint_S \bar{J} \cdot d\bar{S}$

得电流密度 $\bar{J} = \hat{\rho} \frac{I}{2\pi\rho} \quad a < \rho < c$

介质中的电场

$$\bar{E}_1 = \frac{\bar{J}}{\sigma_1} = \hat{\rho} \frac{I}{2\pi\sigma_1\rho} \quad a < \rho < b$$

$$\bar{E}_2 = \frac{\bar{J}}{\sigma_2} = \hat{\rho} \frac{I}{2\pi\sigma_2\rho} \quad b < \rho < c$$





由于
$$U_0 = \int_a^b \bar{E}_1 \cdot d\bar{\rho} + \int_b^c \bar{E}_2 \cdot d\bar{\rho} = \frac{I}{2\pi\sigma_1} \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{I}{2\pi\sigma_2} \ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

则
$$I = \frac{2\pi\sigma_1\sigma_2 U_0}{\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)}$$

故两种介质中的电流密度和电场强度分别为：

$$\bar{J} = \hat{\rho} \frac{I}{2\pi\rho} = \hat{\rho} \frac{\sigma_1\sigma_2 U_0}{\rho[\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)]} \quad a < \rho < c$$

$$\bar{E}_1 = \hat{\rho} \frac{J}{\sigma_1} = \hat{\rho} \frac{\sigma_2 U_0}{\rho[\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)]} \quad a < \rho < b$$

$$\bar{E}_2 = \hat{\rho} \frac{J}{\sigma_2} = \hat{\rho} \frac{\sigma_1 U_0}{\rho[\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)]} \quad b < \rho < c$$



(2) 由 $\rho_s = \hat{n} \cdot \bar{D} = \hat{n} \cdot \epsilon \bar{E}$, 介质1与内导体分界面电荷面密度:

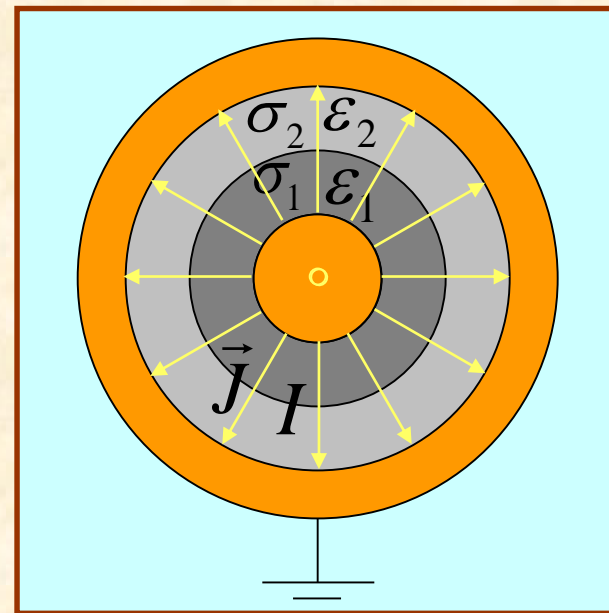
$$\rho_{s1} = \hat{\rho} \cdot \epsilon_1 \bar{E}_1 \Big|_{\rho=a} = \frac{\epsilon_1 \sigma_2 U_0}{a [\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)]}$$

介质2外表面的电荷面密度为:

$$\rho_{s2} = (-\hat{\rho}) \cdot \epsilon_2 \bar{E}_2 \Big|_{\rho=c} = \frac{-\epsilon_2 \sigma_1 U_0}{c [\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)]}$$

两种介质分界面上的电荷面密度为:

$$\begin{aligned} \rho_{s12} &= \hat{n} \cdot (\bar{D}_1 - \bar{D}_2) \Big|_{\rho=b} = (-\hat{\rho}) \cdot (\epsilon_1 \bar{E}_1 - \epsilon_2 \bar{E}_2) \Big|_{\rho=b} \\ &= \frac{(\epsilon_2 \sigma_1 - \epsilon_1 \sigma_2) U_0}{b [\sigma_2 \ln(b/a) + \sigma_1 \ln(c/b)]} \end{aligned}$$

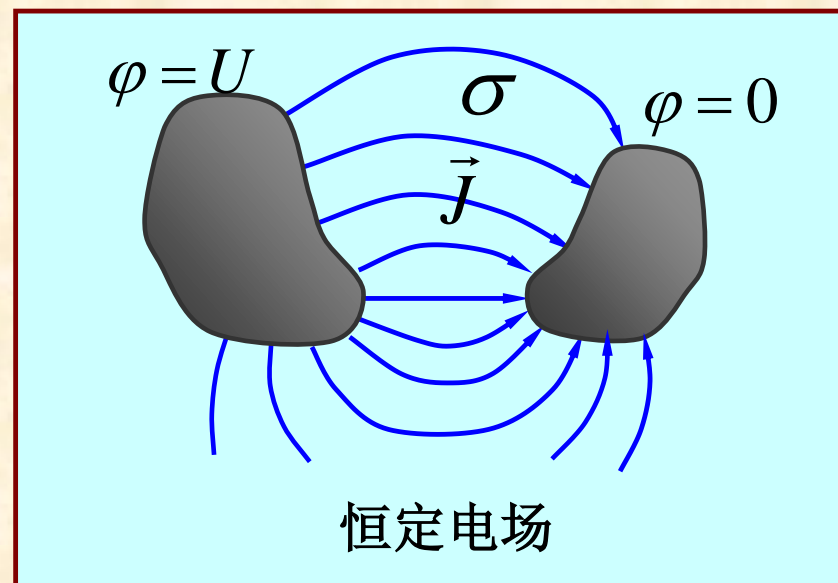
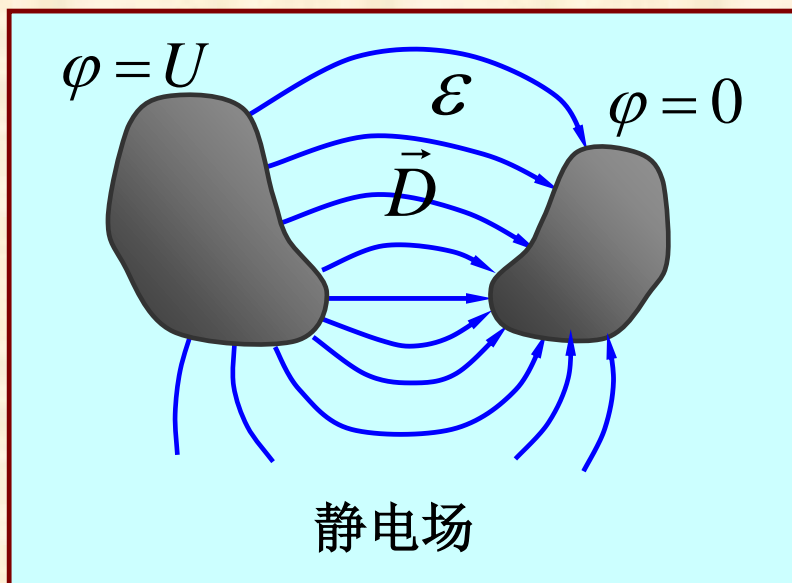




四、静电比拟法

比拟法:

用一种物理场的解来类比与其有相同数学描述的另一种物理场的解的方法.





恒定电场与静电场的比较

| | 静电场 ($\rho=0$ 区域) | 恒定电场 (电源外) |
|------|--|--|
| 基本方程 | $\oint_S \bar{\mathbf{D}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = 0, \quad \oint_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = 0$ | $\oint_S \bar{\mathbf{J}} \cdot d\bar{\mathbf{S}} = 0, \quad \oint_C \bar{\mathbf{E}} \cdot d\bar{\mathbf{l}} = 0$ |
| | $\nabla \cdot \bar{\mathbf{D}} = 0, \quad \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0$ | $\nabla \cdot \bar{\mathbf{J}} = 0, \quad \nabla \times \bar{\mathbf{E}} = 0$ |
| 本构关系 | $\bar{\mathbf{D}} = \varepsilon \bar{\mathbf{E}}$ | $\bar{\mathbf{J}} = \sigma \bar{\mathbf{E}}$ |
| 位函数 | $\bar{\mathbf{E}} = -\nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0$ | $\bar{\mathbf{E}} = -\nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0$ |
| 边界条件 | $E_{1t} = E_{2t} \quad D_{1n} = D_{2n}$ | $E_{1t} = E_{2t} \quad J_{1n} = J_{2n}$ |
| | $\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ | $\varphi_1 = \varphi_2, \quad \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$ |



➤ 结论

1. 两个场的相同数学表达式中的场量之间有一一对应的关系；

| | | | | | | | |
|-------|------|-----------|-----------|-----------|-----|---------------|-----|
| 对应物理量 | 静电场 | \bar{E} | \bar{D} | φ | q | ε | C |
| | 恒定电场 | \bar{E} | \bar{J} | φ | I | σ | G |

2. 两种场的电位函数定义相同, 都满足拉普拉斯方程, 若处于相同的边界条件下, 根据唯一性定理, 电位函数必有相同的解.

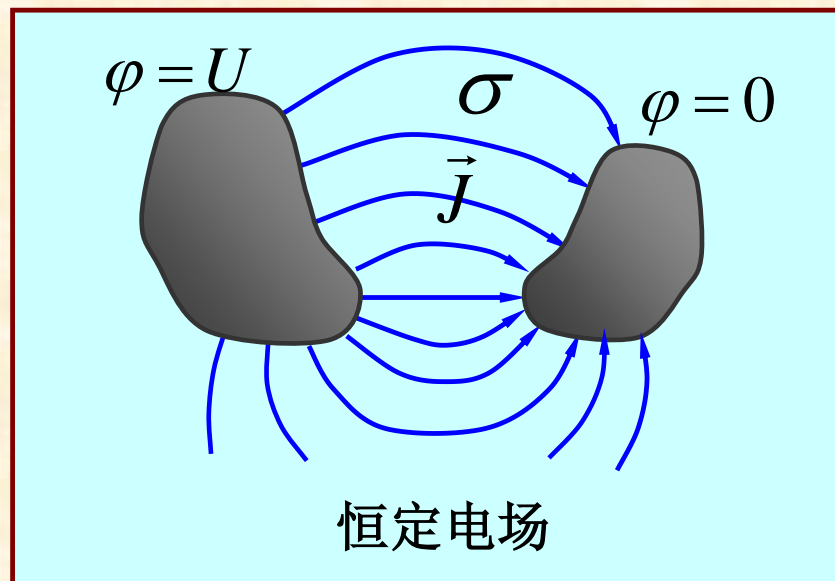
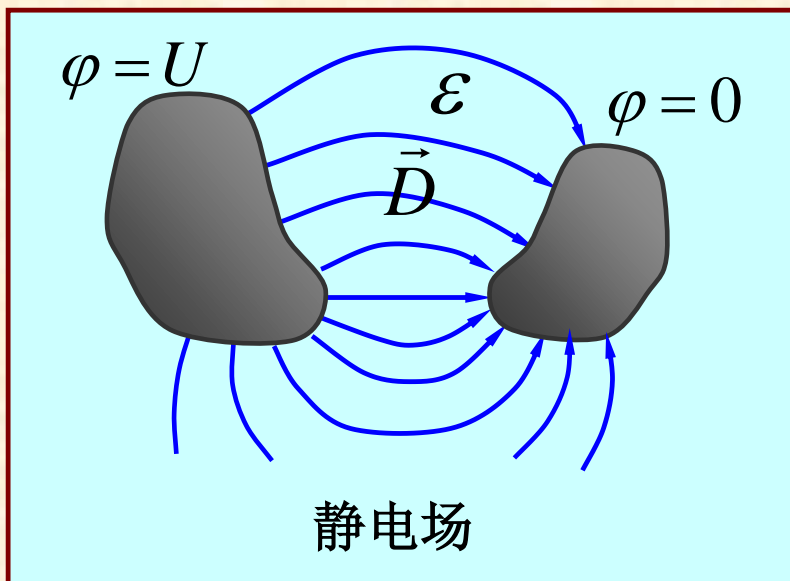
所以两种场的等位面及电场强度分布相同, J 和 D 矢量线的分布也相同;

恒定电场与静电场是可比拟的



静电比拟法:

在一定条件下, 可以将静电场或恒定电场的计算和实验所得的结果, 推广应用于另一种场.





漏电导

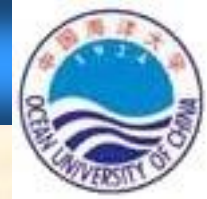
工程上，常在电容器两极板之间、同轴电缆的芯线与外壳之间，填充不导电的材料作电绝缘。这些绝缘材料的电导率远远小于金属材料的电导率，但毕竟不为零，因而当在电极间加上电压 U 时，必定会有微小的漏电流 I 存在。

漏电流与电压之比为漏电导，即

$$G = \frac{I}{U}$$

其倒数称为绝缘电阻，即

$$R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I}$$



●用静电比拟法求电导

两导体电极间的电容:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_{S_1} \rho_s ds}{\int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}} = \frac{\varepsilon \oint_{S_1} \bar{E} \cdot d\bar{s}}{\int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}}$$

两导体电极间的电导:

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint_{S_1} \bar{J} \cdot d\bar{s}}{\int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}} = \frac{\sigma \oint_{S_1} \bar{E} \cdot d\bar{s}}{\int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}}$$

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

两导体电极间的电阻:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{\int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}}{\sigma \oint_{S_1} \bar{E} \cdot d\bar{s}}$$



根据静电比拟法

◆ 只要两电极之间的导电媒质与作为电极的金属材料相比较为不良导电媒质，则当两电极之间的电容为已知时，把 ε 换成 σ ，便可以得到两极板之间的电导。

例如：内外电极半径为 a 和 b 的球形电容器，当其两极间介质为 ε 时：

$$C = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b - a}$$

当其极间的媒质为不良导电媒质 σ 时：

$$G = \frac{4\pi\sigma ab}{b - a}$$



• 计算电导的方法一：

- (1) 假定两电极间的电流为 I ；
- (2) 计算两电极间的电流密度矢量 \bar{J} ；
- (3) 由 $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ 得到 \bar{E} ；
- (4) 由 $U = \int_1^2 \bar{E} \cdot d\bar{l}$ ，求出两导体间的电位差；
- (5) 求比值 $G = I/U$ ，即得出所求电导。

• 计算电导的方法二：

- (1) 假定两电极间的电位差为 U ；
- (2) 计算两电极间的电位分布 ϕ ；
- (3) 由 $\bar{E} = -\nabla \phi$ 得到 \bar{E} ；
- (4) 由 $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ 得到 \bar{J} ；
- (5) 由 $I = \int_S \bar{J} \cdot d\bar{S}$ ，求出两导体间电流；
- (6) 求比值 $G = I/U$ ，即得出所求电导。

• 计算电导的方法三：

静电比拟法：

$$\frac{G}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \Rightarrow G = \frac{\sigma}{\varepsilon} C$$



例3 求同轴电缆的绝缘电阻。设内外的半径分别为 a 、 b ，长度为 l ，其间媒质的电导率为 σ 、介电常数为 ε 。

解法1: 直接用恒定电场的计算方法

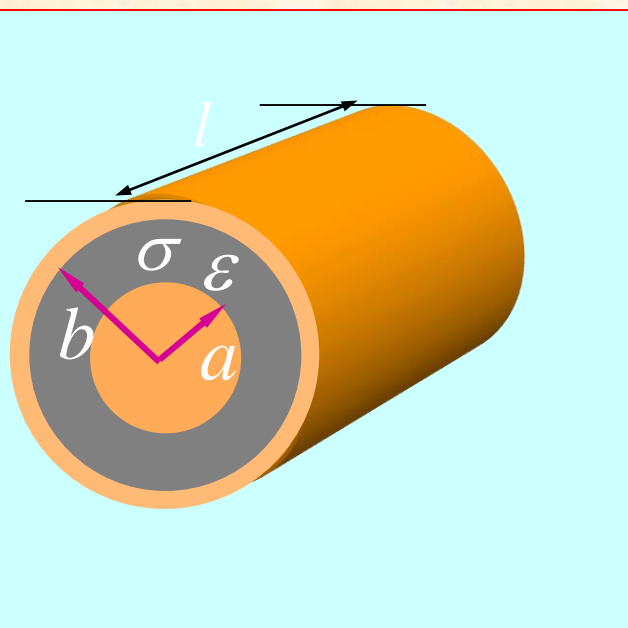
设由内导体流向外导体的电流为 I 。

$$\text{则 } I \Rightarrow \vec{J} = \frac{I}{2\pi\rho l} \hat{\rho} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{I}{2\pi\rho l\sigma} \hat{\rho}$$

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{I}{2\pi\rho l\sigma} d\rho = \frac{I}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$

电导
$$G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\sigma l}{\ln(b/a)}$$

绝缘电阻
$$R = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\sigma l} \ln \frac{b}{a}$$





解法2: 静电比拟法

电容 $C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln(b/a)}$ (教材P.74 例3.3-1)

电导 $G = \frac{I}{U} = \frac{2\pi\sigma l}{\ln(b/a)}$

则单位长度绝缘电阻是

$$R_1 = \frac{1}{G} = \frac{1}{2\pi\sigma} \ln \frac{b}{a}$$



恒定电场的计算

1.直接法: 假设电流

利用基本方程结合边界条件求场分布、 电导或电阻

2.间接法: 求解电位的边值问题,

求场分布:电场强度、电流密度矢量、 电导或电阻



◆ 接地电阻

- 接地：将电气设备的某一部分和大地连接。

- 保护接地：

为了保护工作人员的安全,并使设备可靠地工作而接地；

- 工作接地：

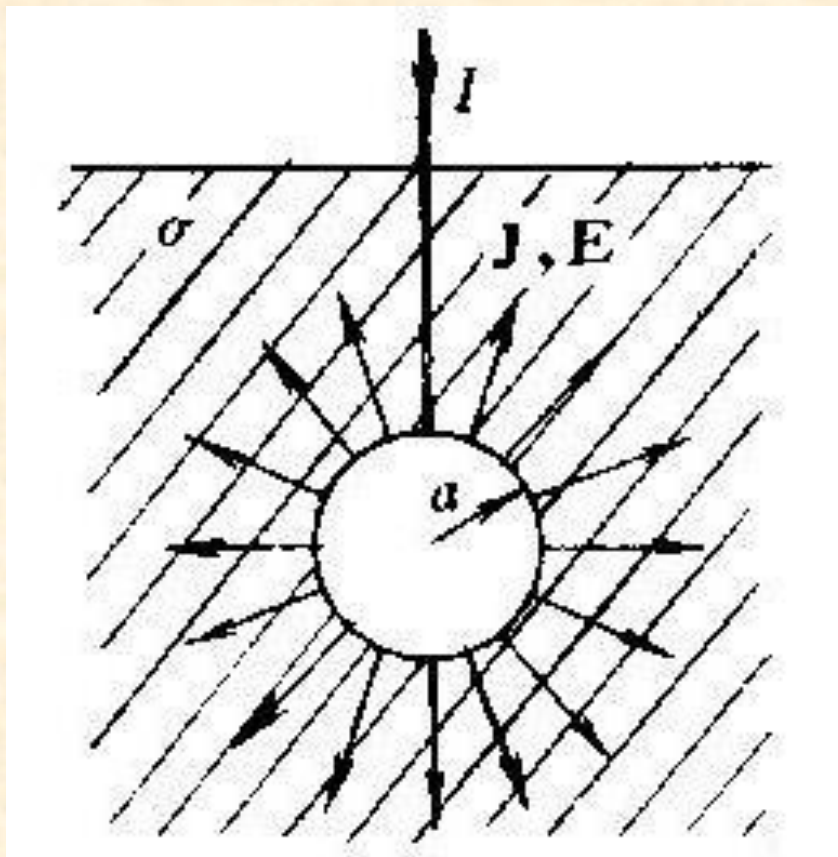
利用大地作为传输导线,或者消除设备的导电部分对地电压的升高而接地。

- 接地体:埋在地里的导体或导体系统。

- 接地电阻:电流由设备经接地体流向大地和电流流经大地时遇到的电阻。



例 4 试计算如图所示的深埋在地下的铜球的接地电阻, 设铜球的半径为 a 。



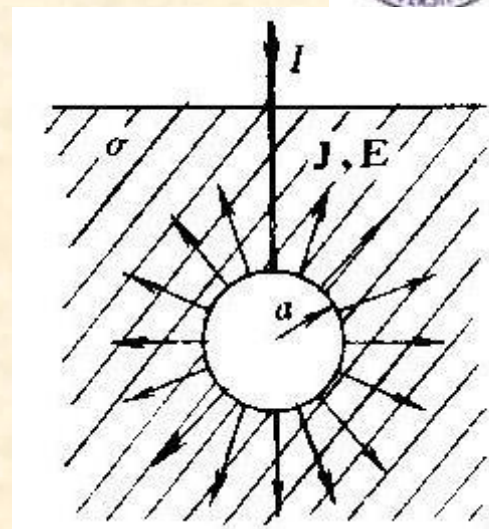
解：大地中任一点的电流密度为 $\bar{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \hat{r}$

电场强度：
$$\bar{E} = \frac{\bar{J}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi r^2 \sigma} \hat{r}$$

铜球至无限远处电压是(认为电流流至无限远处)

$$U = \int_a^\infty \bar{E} \cdot d\bar{r} = \frac{I}{4\pi\sigma} \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\sigma a}$$

所以接地电阻：
$$R = \frac{U}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma a} \quad (\Omega) \quad (\text{式中}\sigma\text{是土壤的电导率})$$





◆教材 P.109 例4.1-2

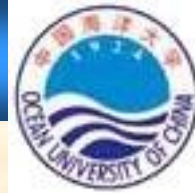


§ 4.2 恒定磁场的基本方程和边界条件

1. 基本方程 微分形式:
$$\begin{cases} \nabla \times \bar{H} = \bar{J} \\ \nabla \cdot \bar{B} = 0 \end{cases}$$

积分形式:
$$\begin{cases} \oint_l \bar{H} \cdot d\bar{l} = \int_s \bar{J} \cdot d\bar{S} \\ \oint_s \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0 \end{cases}$$

本构关系:
$$\bar{B} = \mu \bar{H}$$



2. 边界条件

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0 \\ \hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = \bar{J}_S \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} = J_S \end{cases}$$

若分界面上不存在面电流, 即 $J_S=0$, 则

$$\begin{cases} \hat{n} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2) = 0 \\ \hat{n} \times (\bar{H}_1 - \bar{H}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} B_{1n} - B_{2n} = 0 \\ H_{1t} - H_{2t} = 0 \end{cases}$$



◆ $\bar{J}_s = 0$ 时界面两侧场量方向与媒质磁导率的关系

磁场经过媒质分界面时要突变, 包含方向的改变

当 $\bar{J}_s = 0$ 时,

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

式中 θ_1 、 θ_2 分别为磁场强度与交界面法线方向的夹角



§ 4.3 恒定磁场的矢量磁位

1. 矢量磁位的定义

矢量磁位或称磁矢位

$$\text{由 } \nabla \cdot \bar{B} = 0 \longrightarrow \bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

■ 磁矢位的任意性

磁矢位的任意性是因为只规定了它的旋度，没有规定其散度造成的。

为了得到确定的 A ，可以对 A 的散度加以限制，在恒定磁场中通常规定 $\nabla \cdot \bar{A} = 0$ 并称为**库仑规范**。



2、矢量磁位的微分方程

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{B}} = \nabla \times \bar{\mathbf{A}} \\ \nabla \times \bar{\mathbf{B}} = \mu \bar{\mathbf{J}} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla \times \nabla \times \bar{\mathbf{A}} = \mu \bar{\mathbf{J}} \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}}) - \nabla^2 \bar{\mathbf{A}} = \mu \bar{\mathbf{J}}$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{A}} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \bar{\mathbf{A}} = -\mu \bar{\mathbf{J}} \quad \text{—— 矢量泊松方程}$$

$$\text{在无源区: } \bar{\mathbf{J}} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \bar{\mathbf{A}} = 0 \quad \text{—— 矢量拉普拉斯方程}$$



3、矢量磁位的表达式

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\bar{R}}{R^3}$$

$$\begin{aligned}\bar{B}(\bar{r}) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\bar{J}(\bar{r}') \times \bar{R}}{R^3} dv' = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \times \bar{J}(\bar{r}') dv' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_v \left[\nabla \times \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} - \frac{1}{R} \nabla \times \bar{J}(\bar{r}') \right] dv'\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\phi \bar{A}) = \phi \nabla \times \bar{A} + \nabla \phi \times \bar{A}$$

由于 $\bar{J}(\bar{r}')$ 是源点坐标的函数，而旋度运算是场点坐标进行的，所以 $\nabla \times \bar{J}(\bar{r}') = 0$

$$\text{故, } \bar{B}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \nabla \times \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} dv' = \nabla \times \left[\frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} dv' \right]$$

$$\text{又, } \bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

$$\text{则: } \bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} dv', \quad R = |\bar{r} - \bar{r}'|$$



对于面电流和细导线电流回路，磁矢位分别为

面电流: $\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\bar{J}_s(\bar{r}')}{R} \mathbf{d}\bar{S}'$

细线电流: $\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_C \frac{\mathbf{d}\bar{l}'}{R}$

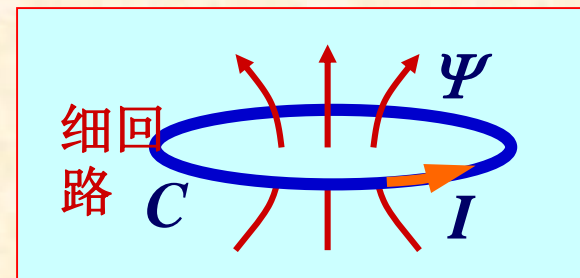
■ 利用磁矢位计算磁通量:

$$\Phi = \int_S \bar{B} \cdot \mathbf{d}\bar{S} = \int_S \nabla \times \bar{A} \cdot \mathbf{d}\bar{S} = \oint_C \bar{A} \cdot \mathbf{d}\bar{l}$$

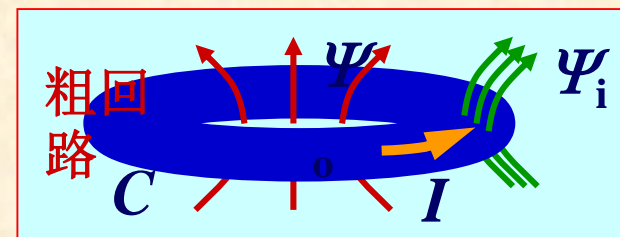
§ 4.4 电感 Inductance

一、磁通与磁链

- 单匝线圈形成回路的磁链定义为穿过该回路的磁通量 $\Psi = \Phi$



- 多匝线圈形成的导线回路的磁链定义为所有线圈的磁通总和 $\Psi = \sum_i \Phi_i$



- 粗导线构成的回路，磁链分为两部分：
 一部分是粗导线包围的、磁力线不穿过导体的外磁通量 Ψ_o ；
 另一部分是磁力线穿过导体、只有粗导线的一部分包围的内磁通量 Ψ_i 。



二、电 感

与回路交链的磁通总量(磁链)和与产生该磁链的电流之比值.

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

* 电感取决于导线回路的形状、大小、材料及周围媒质的磁导率等。



电感 $\left\{ \begin{array}{l} \text{自感} \\ \text{互感} \end{array} \right.$

➤ 自感（记为 L ）：

回路交链的磁链为本身回路上的电流所产生，总是正值；

➤ 互感（记为 M ）：

回路交链的磁链是别的回路上的电流所产生，有可能为负值；

互感是互易的； $M_{12} = M_{21}$



三、自感

设回路 C 中的电流为 I ，所产生的磁场与回路 C 交链的磁链为 Ψ ，则磁链 Ψ 与回路 C 中的电流 I 有正比关系，其比值

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

称为回路 C 的自感系数，简称自感。

粗导体回路的自感： $L = L_i + L_o$

$$L_i = \frac{\Psi_i}{I} \text{ —— 内自感； } L_o = \frac{\Psi_o}{I} \text{ —— 外自感}$$

■ 自感的特点：

自感只与回路的几何形状、尺寸以及周围的磁介质有关，与电流无关。



四、互感

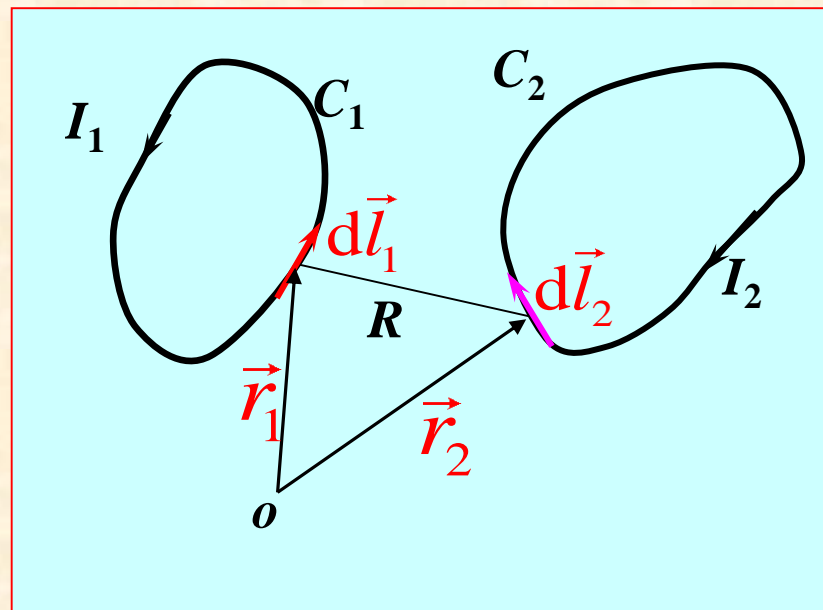
对两个彼此邻近的闭合回路 C_1 和回路 C_2 ，当回路 C_1 中通过电流 I_1 时，不仅与回路 C_1 交链的磁链与 I_1 成正比，而且与回路 C_2 交链的磁链 Ψ_{12} 也与 I_1 成正比，其比例系数

$$M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{I_1}$$

称为回路 C_1 对回路 C_2 的互感系数，简称互感。

同理，回路 C_2 对回路 C_1 的互感为

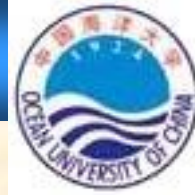
$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{I_2}$$





互感的特点：

- 互感只与回路的几何形状、尺寸、两回路的相对位置以及周围磁介质有关，而与电流无关。
- 满足互易关系，即 $M_{12} = M_{21}$
- 当与回路交链的互感磁通与自感磁通具有相同的符号时，互感系数 M 为正值；反之，则互感系数 M 为负值。



恒定电场小结

恒定电场的基本方程为：

微分形式

$$\nabla \cdot \bar{J} = 0$$

$$\nabla \times \bar{E} = 0$$

积分形式

$$\oint_S \bar{J} \cdot d\bar{s} = 0$$

$$\oint_l \bar{E} \cdot d\bar{l} = 0$$

欧姆定律的微分形式：

$$\bar{J} = \sigma \bar{E}$$



恒定电场的边界条件

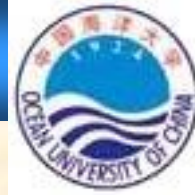
$$\left\{ \begin{array}{l} J_{1n} = J_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} \\ \phi_1 = \phi_2 \end{array} \right.$$

推论1: $\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ 电流从良导体进入不良导体时, 在不良导体里的电场线近似与良导体表面垂直, 良导体表面近似为等位面。

推论2:

当恒定电流通过电导率不同的两导电媒质时, 分界面上必有电荷分布。

• 静电比拟法



恒定磁场小结

☆ 基本方程

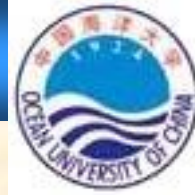
$$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$$

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\oint_C \bar{H} \cdot d\bar{l} = I$$

$$\oint_S \bar{B} \cdot d\bar{S} = 0$$

线性各向同性磁介质的本构关系 $\bar{B} = \mu \bar{H}$



矢量磁位 \bar{A} 和矢量泊松方程

$$\nabla \cdot \bar{B} = 0$$

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad \bar{A} : \text{矢量磁位}$$

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0 \quad \text{-----库仑规范}$$

$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu_0 \bar{J}$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\bar{J} dV'}{R}$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\bar{J}_s dS'}{R}$$

$$\bar{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C'} \frac{Idl'}{r}$$



\vec{B} : 三种方法来计算

- 比奥—沙伐定律
- 利用安培环路定律
- 矢量磁位 $\vec{A} \longrightarrow \vec{B}$