第5章 时变电磁场和平面电磁波

Time-Varying Fields and Plane EM Waves

1、时谐电磁场的复数表示

复数形式的场方程

复数形式的能量关系

2、平面电磁波在不同媒质中传播特性的分析。

3、电磁波的极化

小 结

- 复振幅、复矢量

- **复振幅**

$$\overline{E}(t)=\hat{x}E_x(t)+\hat{y}E_y(t)+\hat{z}E_z(t)$$

$$E_x(t)=E_{xm}\cos(\omega t+\phi_x)$$

$$E_x(t)=\mathrm{Re}[(E_{xm}e^{j\phi_x})e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{E}_x e^{j\omega t}]$$

$$\dot{E}_x=E_{xm}e^{j\phi_x}$$

$\dot{E}_x$：**复振幅**或**相量**

复振幅的求导运算

$$\frac{\partial}{\partial t}E_x(t)=\mathrm{Re}\left[\frac{\partial}{\partial t}(\dot{E}_x e^{j\omega t})\right]=\mathrm{Re}\left[j\omega\dot{E}_x e^{j\omega t}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_x(t)=\mathrm{Re}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\dot{E}_x e^{j\omega t})\right]=\mathrm{Re}\left[-\omega^2\dot{E}_x e^{j\omega t}\right]$$

因此 $\boxed{\frac{\partial}{\partial t}E_x(t)\leftrightarrow j\omega\dot{E}_x}$

$E_x(t)$对时间的微分可化为对复振幅 $\dot{E}_x$乘以$j\omega$ 的代数运算

·**复矢量** $\dot{\bar{E}}$

$$\begin{aligned}\bar{E}(t) &= \hat{x}E_{xm}\cos(\omega t+\phi_x)+\hat{y}E_{ym}\cos(\omega t+\phi_y)+\hat{z}E_{zm}\cos(\omega t+\phi_z)\\ &=\mathrm{Re}\left[\left(\hat{x}E_{xm}e^{j\phi_x}+\hat{y}E_{ym}e^{j\phi_y}+\hat{z}E_{zm}e^{j\phi_z}\right)e^{j\omega t}\right]\\ &=\mathrm{Re}\left[\left(\hat{x}\dot{E}_x+\hat{y}\dot{E}_y+\hat{z}\dot{E}_z\right)e^{j\omega t}\right]\\ &=\mathrm{Re}\left[\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}\right]\end{aligned}$$

$$\boxed{\bar{E}(t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}\right]}$$

·复矢量 $\dot{\mathbf{E}}=\hat{\mathbf{x}}E_{xm}e^{j\phi_x}+\hat{\mathbf{y}}E_{ym}e^{j\phi_y}+\hat{\mathbf{z}}E_{zm}e^{j\phi_z}=\hat{\mathbf{x}}\dot{E}_x+\hat{\mathbf{y}}\dot{E}_y+\hat{\mathbf{z}}\dot{E}_z$

$\dot{\bar{E}}$只是(x,y,z)的函数，$\bar{E}(t)$是(x,y,z,t)的函数。从而将4维问题化为3维问题。

第5章 时变电磁场和平面电磁波

Time-Varying Fields and Plane EM Waves

1、时谐电磁场的复数表示

复数形式的场方程

复数形式的能量关系

2、平面电磁波在不同媒质中传播特性的分析。

3、电磁波的极化

§5.2 复数形式Maxwell方程组

Complex Maxwell's Equations

本节内容

- Maxwell方程组的复数形式
- 本构关系和边界条件的复数形式

$$\nabla \times \bar{E}(x, y, z, t) = -\frac{\partial \bar{B}(x, y, z, t)}{\partial t}$$

一、复数形式Maxwell方程组的导出

$$\nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathrm{Re}\,[\dot{\bar{E}} e^{j\omega t}] = -\frac{\partial \left[\mathrm{Re}\left(\dot{\bar{B}} e^{j\omega t}\right)\right]}{\partial t} = -\mathrm{Re}\left[j\omega \dot{\bar{B}} e^{j\omega t}\right]$$

$$\nabla \times \mathrm{Re}[\dot{\bar{E}} e^{j\omega t}] = -\mathrm{Re}\left[j\omega \dot{\bar{B}} e^{j\omega t}\right]$$

即 $\mathrm{Re}\left[\nabla \times \dot{\bar{E}} e^{j\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[-j\omega \dot{\bar{B}} e^{j\omega t}\right]$

故 $\nabla \times \dot{\bar{E}} = -j\omega \dot{\bar{B}}$ (a)

同理，$\nabla \times \dot{\bar{H}} = \dot{\bar{J}} + j\omega \dot{\bar{D}}$ (b)

$\nabla \cdot \dot{\bar{D}} = \dot{\rho}_V$ (c)

$\nabla \cdot \dot{\bar{B}} = 0$ (d)

电荷连续性方程： $\nabla \cdot \dot{\bar{J}} = -j\omega \dot{\rho}_V$ (e)

二、本构关系和边界条件复数形式

$$\dot{\mathbf{D}} = \varepsilon\dot{\mathbf{E}}$$
$$\dot{\mathbf{B}} = \mu\dot{\mathbf{H}}$$
$$\dot{\mathbf{J}} = \sigma\dot{\mathbf{E}}$$

限定形式复Maxwell方程组

$$\nabla\times\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\dot{\mathbf{H}} \qquad (a)$$
$$\nabla\times\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{J}} + j\omega\varepsilon\dot{\mathbf{E}} \qquad (b)$$
$$\nabla\cdot\dot{\mathbf{E}} = \frac{\dot{\rho}_v}{\varepsilon} \qquad (c)$$
$$\nabla\cdot\dot{\mathbf{H}} = 0 \qquad (d)$$

齐次复矢量波动方程(无源区： $\dot{J}=0, \dot{\rho}_v=0$)

$$\text{由}(a), \nabla\times\nabla\times\dot{\mathrm{E}}=-\mathrm{j}\omega\mu\nabla\times\dot{\mathrm{H}}$$

$$\text{将}(b)\text{代入,有}\nabla\left(\nabla\cdot\dot{\mathrm{E}}\right)-\nabla^2\dot{\mathrm{E}}=\omega^2\mu\varepsilon\dot{\mathrm{E}}$$

将(c)代入,得

$$\boxed{\nabla^2\dot{\mathbf{E}}+k^2\dot{\mathbf{E}}=0} \qquad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

同理,

$$\boxed{\nabla^2\dot{\mathbf{H}}+k^2\dot{\mathbf{H}}=0}$$

复矢量边界条件

$$\begin{aligned}
&\hat{n}\times(\dot{\mathbf{E}}_1-\dot{\mathbf{E}}_2)=0\\
&\hat{n}\times(\dot{\mathbf{H}}_1-\dot{\mathbf{H}}_2)=\dot{J}_s\\
&\hat{n}\cdot(\dot{\mathbf{D}}_1-\dot{\mathbf{D}}_2)=\dot{\rho}_s\\
&\hat{n}\cdot(\dot{\mathbf{B}}_1-\dot{\mathbf{B}}_2)=0
\end{aligned}$$

例1 设自由空间某点电磁场的电场强度为

$$\bar{E}(t) = \hat{x}E_0 \sin(\omega t - kz) \qquad (V/m)$$

求（a）电场强度复矢量 $\dot{\bar{E}}$

（b）磁场强度 $\bar{H}(t)$

$$\nabla \times \dot{\bar{E}} = -j\omega\mu\dot{\bar{H}}$$

[解] $(a)\dot{\bar{E}} = \hat{x}E_0 e^{-jkz - j\frac{\pi}{2}} = \hat{x}\dot{E}_x$

$$(b)\dot{\bar{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu_0}\nabla \times \dot{\bar{E}} = j\frac{1}{\omega\mu_0}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{y}\frac{j}{\omega\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}\dot{E}_x = \hat{y}\frac{k}{\omega\mu_0}E_0 e^{-jkz - j\frac{\pi}{2}}$$

$$\bar{H}(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{\bar{H}}e^{j\omega t}\right] = \hat{y}\frac{k}{\omega\mu_0}E_0\cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{2})$$

$$= \hat{y}\frac{E_0}{\eta_0}\sin(\omega t - kz)$$

$$\frac{\omega\mu_0}{k} = \frac{\omega\mu_0}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0$$

例2 某卫星地面站在空中某点形成频率为5GHz的时谐电磁场，其磁场强度复矢量为

$$\dot{\bar{H}} = \hat{y}0.01e^{-j(100\pi/3)z} \qquad (\mu A/m)$$

求：(a) 磁场强度瞬时值 $\bar{H}(t)$

(b) 电场强度瞬时值 $\bar{E}(t)$

［解］（a）磁场强度在$\hat{y}$方向，振幅$0.01\mu A/m$，角频率为$\omega = 2\pi f = 2\pi\times5.0\times10^{9} = 10^{10}\pi$

$$\bar{H}(t) = \mathrm{Re}\left[\dot{\bar{H}}e^{j\omega t}\right]$$

$$= \mathrm{Re}[\hat{y}0.01e^{-j(100\pi/3)z + j10^{10}\pi t}]$$

$$= \hat{y}0.01\cos[(10^{10}\pi t - \frac{100}{3}\pi z)] \qquad (\mu A/m)$$

（b）在无源区内 $\nabla\times\dot{\bar{H}}=j\omega\varepsilon_0\dot{\bar{E}}$

$$\dot{\bar{E}}=\frac{-j}{\omega\varepsilon_0}\nabla\times\dot{\bar{H}}$$

$$=\frac{-\mathrm{j}}{10^{10}\pi\times\dfrac{1}{36\pi}\times10^{-9}}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0.01e^{-\mathrm{j}\frac{100\pi}{3}z} & 0\end{vmatrix}$$

$$=+\mathrm{j}3.6\hat{x}0.01e^{-\mathrm{j}(100\pi/3)z}\left(-\mathrm{j}\frac{100\pi}{3}\right)=\hat{x}1.2\pi e^{-\mathrm{j}(100\pi/3)z}$$

$$\bar{E}(t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\bar{E}}e^{j\omega t}\right]$$

$$=\mathrm{Re}[\hat{x}1.2\pi e^{-j(100\pi/3)z+j\pi10^{10}t}]$$

$$=\hat{x}1.2\pi\cos(10^{10}\pi t-\frac{100}{3}\pi z)\qquad(\mu V/m)$$