第5章 时变电磁场和平面电磁波

Time-Varying Fields and Plane EM Waves

1、时谐电磁场的复数表示

复数形式的场方程

复数形式的能量关系;

2、平面电磁波在不同媒质中传播特性的分析;

3、电磁波的极化

§ 5.1 时谐电磁场的复数表示

Complex Representation of Time-Harmonic Fields

复振幅 $\overline{E}(t)=\hat{x}E_x(t)+\hat{y}E_y(t)+\hat{z}E_z(t)$

$$E_x(t)=E_{xm}\cos(\omega t+\phi_x)$$

$$E_x(t)=\mathrm{Re}[(E_{xm}e^{j\phi_x})e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{E}_x e^{j\omega t}]$$

$$\dot{E}_x=E_{xm}e^{j\phi_x}$$

$\dot{E}_x$称为**复振幅**或**相量**

·**复矢量** $\dot{\mathbf{E}}=\hat{\mathbf{x}}\dot{E}_x+\hat{\mathbf{y}}\dot{E}_y+\hat{\mathbf{z}}\dot{E}_z$

$$\overline{E}(t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\overline{E}}e^{j\omega t}\right]$$

$\dot{E}$只是(x,y,z)的函数，$\overline{E}(t)$是(x,y,z,t)的函数。从而将4维问题化为3维问题。

§5.2 复数形式Maxwell方程组

Complex Maxwell's Equations

$$\nabla \times \dot{\bar{\mathbf{E}}} = -j\omega \dot{\bar{\mathbf{B}}} \quad \text{(a)}$$

$$\nabla \times \dot{\bar{H}} = \dot{\bar{J}} + j\omega \dot{\bar{D}} \quad \text{(b)}$$

$$\nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{D}}} = \dot{\rho}_v \quad \text{(c)}$$

$$\nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{B}}} = 0 \quad \text{(d)}$$

电荷连续性方程：

$$\nabla \cdot \dot{\bar{\mathbf{J}}} = -j\omega \dot{\rho}_v \quad \text{(e)}$$

麦克斯韦方程的复数形式

瞬时形式 $(\boldsymbol{r}, t)$ 复数形式 $(\boldsymbol{r})$

$$\nabla\times\overline{\boldsymbol{H}}=\overline{\boldsymbol{J}}+\frac{\partial\overline{\boldsymbol{D}}}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\nabla\times\dot{\overline{\boldsymbol{H}}}=\dot{\overline{\boldsymbol{J}}}+\mathrm{j}\omega\dot{\overline{\boldsymbol{D}}}$$

$$\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}}=-\frac{\partial\overline{\boldsymbol{B}}}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\nabla\times\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}=-\mathrm{j}\omega\dot{\overline{\boldsymbol{B}}}$$

$$\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{B}}=0\quad\Rightarrow\quad\nabla\cdot\dot{\overline{\boldsymbol{B}}}=0$$

$$\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{D}}=\rho\quad\Rightarrow\quad\nabla\cdot\dot{\overline{\boldsymbol{D}}}=\dot{\rho}_v$$

$$\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{J}}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}\quad\Rightarrow\quad\nabla\cdot\dot{\overline{\boldsymbol{J}}}=-\mathrm{j}\omega\dot{\rho}$$

$$\overline{\boldsymbol{D}}=\varepsilon\overline{\boldsymbol{E}}\quad\Rightarrow\quad\dot{\overline{\boldsymbol{D}}}=\varepsilon\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}$$

$$\overline{\boldsymbol{B}}=\mu\overline{\boldsymbol{H}}\quad\Rightarrow\quad\dot{\overline{\boldsymbol{B}}}=\mu\dot{\overline{\boldsymbol{H}}}$$

$$\overline{\boldsymbol{J}}=\sigma\overline{\boldsymbol{E}}\quad\Rightarrow\quad\dot{\overline{\boldsymbol{J}}}=\sigma\dot{\overline{\boldsymbol{E}}}$$

齐次复矢量波动方程(无源区：$\dot{J}=0, \dot{\rho}_v=0$)

$$\nabla^2\dot{\bar{\mathbf{E}}}+k^2\dot{\bar{\mathbf{E}}}=0 \qquad k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\nabla^2\dot{\bar{\mathbf{H}}}+k^2\dot{\bar{\mathbf{H}}}=0$$

----亥姆霍兹方程

复矢量边界条件

$$\hat{n}\times(\dot{\bar{\mathbf{E}}}_1-\dot{\bar{\mathbf{E}}}_2)=0$$
$$\hat{n}\times(\dot{\bar{\mathbf{H}}}_1-\dot{\bar{\mathbf{H}}}_2)=\dot{\bar{J}}_s$$
$$\hat{n}\cdot(\dot{\bar{\mathbf{D}}}_1-\dot{\bar{\mathbf{D}}}_2)=\dot{\rho}_s$$
$$\hat{n}\cdot(\dot{\bar{\mathbf{B}}}_1-\dot{\bar{\mathbf{B}}}_2)=0$$

● 麦克斯韦方程组的复数形式对求解正弦电磁场具有十分重要的意义。

时谐变电磁场的求解：

- 根据给出的源写出其复矢量和复数；
- 利用麦克斯韦方程组的复数形式求出场的复矢量；
- 由电磁场的复矢量写出电磁场的瞬时表达式；

第5章 时变电磁场和平面电磁波

Time-Varying Fields and Plane EM Waves

1、时谐电磁场的复数表示

复数形式的场方程

复数形式的能量关系

2、平面电磁波在不同媒质中传播特性的分析。

3、电磁波的极化

§5.3 复坡印廷矢量和复坡印廷定理

Complex Poynting Vector and Theorem

- 电磁场是具有能量的，时谐电磁场的能量在空间以电磁波形式传播；
- Poynting定理是时变电磁场中能量守恒定律的表达形式；

Problem：复坡印廷矢量和复坡印廷定理如何表达？

一、复坡印廷矢量

(a)复坡印廷矢量的瞬时值

$$\overline{\mathbf{S}}(t)=\overline{\mathbf{E}}(t)\times\overline{\mathbf{H}}(t)$$

$$\overline{E}(t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\overline{E}}e^{j\omega t}\right]=\frac{1}{2}\left[\dot{\overline{E}}e^{j\omega t}+\dot{\overline{E}}^{*}e^{-j\omega t}\right]$$

$$\overline{H}(t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\overline{H}}e^{j\omega t}\right]=\frac{1}{2}\left[\dot{\overline{H}}e^{j\omega t}+\dot{\overline{H}}^{*}e^{-j\omega t}\right]$$

故
$$\overline{\mathbf{S}}(t)=\frac{1}{4}[\dot{\overline{\mathbf{E}}}\times\dot{\overline{\mathbf{H}}}^{*}+\dot{\overline{\mathbf{E}}}^{*}\times\dot{\overline{\mathbf{H}}}+\dot{\overline{\mathbf{E}}}\times\dot{\overline{\mathbf{H}}}e^{j2\omega t}+\dot{\overline{\mathbf{E}}}^{*}\times\dot{\overline{\mathbf{H}}}^{*}e^{-j2\omega t}]$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\overline{\mathbf{E}}}\times\dot{\overline{\mathbf{H}}}^{*}+\dot{\overline{\mathbf{E}}}\times\dot{\overline{\mathbf{H}}}e^{j2\omega t}]$$

坡印廷矢量代表瞬时电磁功率流密度。

(b) 坡印廷矢量的平均值

它在一个周期内的平均值：

$$\bar{S}^{av}=\frac{1}{T}\int_0^T\bar{S}(t)dt$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\bar{E}}\times\dot{\bar{H}}^*\right]dt+\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\dot{\bar{E}}\times\dot{\bar{H}}e^{j2\omega t}\right]dt$$

$$=\mathrm{Re}[\frac{1}{2}\dot{\bar{\mathbf{E}}}\times\dot{\bar{\mathbf{H}}}^*]=\mathrm{Re}[\dot{\bar{\mathbf{S}}}]$$

定义 $\dot{\bar{\mathbf{S}}}=\frac{1}{2}\dot{\bar{\mathbf{E}}}\times\dot{\bar{\mathbf{H}}}^*$ (5.3-2)为复坡印廷矢量,

其实部为平均功率流密度，即有功功率密度 。

复坡印廷矢量: $\dot{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}}^*$

说明： ● 坡印廷矢量的瞬时值与平均值之差是其交变分量：

$$\overline{\mathbf{S}}(t) - \overline{\mathbf{S}}^{av} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\dot{\mathbf{E}} \times \dot{\mathbf{H}} e^{j2\omega t}]$$

直接将 $\dot{\mathbf{E}} e^{j\omega t}$与 $\dot{\mathbf{H}} e^{j\omega t}$相乘，其实部代表电磁功率流密度瞬时值与平均值之差，一个周期内的平均值为0。

因此**定义式对应于**$\dot{\mathrm{E}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}$ **与** $\dot{\mathrm{H}}^*\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}$ **相乘**

● 定义式中因子“1/2”是因为平均功率密度在数值上等于$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}EH^*\right]$，

这里**E、H都代表振幅最大值,而不是有效值** $\left(E/\sqrt{2}, H/\sqrt{2}\right)$

实际中，通常测得的是余弦量的有效值;

最大值表示复矢量和有效值表示复矢量的之间的关系为

$$\dot{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r})=\sqrt{2}\dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})$$

二、复坡印廷定理

复坡印廷矢量的散度 $\nabla\cdot(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{H}}^*\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{E}}-\frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}\cdot\nabla\times\dot{\mathbf{H}}^*$

将复数形式麦氏方程代入，得到 $-\nabla\cdot(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)=j2\omega(\frac{1}{4}\mu H^2-\frac{1}{4}\varepsilon E^2)+\frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{J}}^*$

上式表示了作为点函数的功率密度关系。对其两端取体积分，得到积分形式

$$-\oint_S(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot\overline{\mathrm{d}\mathbf{s}}=j2\omega\int_V(\frac{1}{4}\mu H^2-\frac{1}{4}\varepsilon E^2)\mathrm{d}v+\int_V\frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{J}}^*\mathrm{d}v$$

——用复矢量表示的**复坡印廷定理**

取其实部得 $-\oint_S \mathrm{Re}(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot\overline{\mathrm{d}\mathbf{s}} = \int_V \frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}\cdot\dot{\mathbf{J}}^*\mathrm{d}v = \int_V \frac{1}{2}\sigma E^2\mathrm{d}v$

有功功率的平衡：输入封闭面的有功功率等于体积中热损耗功率的平均值。

虚部: $-\oint_S \mathrm{Im}(\frac{1}{2}\dot{\mathbf{E}}\times\dot{\mathbf{H}}^*)\cdot\overline{\mathrm{d}\mathbf{s}} = 2\omega\int_V (\frac{1}{4}\mu H^2 - \frac{1}{4}\varepsilon E^2)\mathrm{d}v$

无功功率的平衡：输入封闭面的无功功率等于体积中电磁场储能的最大时间变化率。

注: $2\omega(\frac{1}{4}\mu H^2 - \frac{1}{4}\varepsilon E^2)$ 代表单位体积中电磁场储能的最大时间变化率。

证明见P. 142

解题思路：


复能流密度矢量
?
能流密度矢量瞬时值
?
要求电场和磁场强度的复值
?
已知电场强度的瞬时值
?
求出电场强度的复值
?
再求磁场强度的复值
?
电场和磁场的瞬时值
?
已知电场强度的瞬时值
?
求出磁场强度的瞬时值

例 5.3-1 两无限大理想导体平行板相距d，坐标如图6. 3-1所示。在平行板间存在时谐电磁场，其电场强度为

$$\bar{E}(t)=\hat{x}E_0\sin\frac{\pi y}{d}\cos(\omega t-kz)\quad(V/m)$$

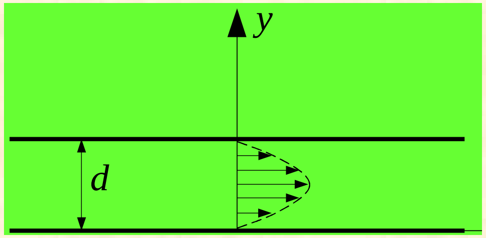

图5.3-1 平行板波导

求： (a) 磁场强度 $\bar{H}(t)$；

(b) 坡印廷矢量 $\dot{\bar{S}}$ 及平均功率流密度；

(c) y=0导体板内表面的面电流分布$\bar{J}_s(t)$ ；

解： (a)

$$\dot{\bar{E}}=\hat{x}E_0\sin\frac{\pi y}{d}e^{-jkz}$$

由 $\nabla\times\dot{\bar{E}}=-j\omega\mu\dot{\bar{H}}$ 知，

$$\dot{\bar{H}}=\frac{j}{\omega\mu}\nabla\times\dot{\bar{E}}=\frac{j}{\omega\mu}\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \dot{E}_x & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{j}{\omega\mu}\left[\hat{y}\frac{\partial\dot{E}_x}{\partial z}-\hat{z}\frac{\partial\dot{E}_x}{\partial y}\right]$$

$$=\hat{y}\frac{k}{\omega\mu}E_0\sin\frac{\pi y}{d}e^{-jkz}-\hat{z}\frac{j\pi}{\omega\mu d}E_0\cos\frac{\pi y}{d}e^{-jkz}$$

$$\bar{H}(t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\bar{H}}e^{j\omega t}\right]=\hat{y}\frac{k}{\omega\mu}E_0\sin\frac{\pi y}{d}\cos(\omega t-kz)+\hat{z}\frac{\pi}{\omega\mu d}E_0\cos\frac{\pi y}{d}\sin(\omega t-kz)\quad(A/m)$$

（b） $$\dot{S}=\frac{1}{2}\dot{E}\times\dot{H}^{*}=\hat{z}\frac{k}{2\omega\mu}E_0^2\sin^2\left(\frac{\pi y}{d}\right)-\hat{y}\frac{j\pi}{4\omega\mu d}E_0^2\sin\left(\frac{2\pi y}{d}\right)$$

$$\bar{S}^{av}=\mathrm{Re}\left[\dot{S}\right]=\hat{z}\frac{k}{2\omega\mu}E_0^2\sin^2\left(\frac{\pi y}{d}\right)\quad\left(W/m^2\right)$$

(c) y=0板：

$$\dot{\bar{J}}_s=\hat{y}\times\dot{\bar{H}}\Big|_{y=0}=-\hat{x}\frac{j\pi}{\omega\mu d}E_0e^{-jkz}$$

$$\bar{J}_s(t)=\mathrm{Re}\left[\dot{\bar{J}}_se^{j\omega t}\right]=\hat{x}\frac{\pi}{\omega\mu d}E_0\sin(\omega t-kz)\quad(A/m)$$

此平行板间电磁场有实功率沿z向传输

平行板起了引导电磁波功率的作用，故称之为平行板波导。