

数字图像处理报告十：灰度图像形态学处理

姓名：鲁国锐

学号：17020021031

专业：电子信息科学与技术

2020 年 5 月 27 日

目录

1	题目描述	2
2	形态学图像处理简述	2
3	二值图像中的形态学操作	2
3.1	二值膨胀	2
3.2	二值腐蚀	2
3.3	二值开启和闭合	3
3.3.1	二值开启	3
3.3.2	二值闭合	3
4	灰度图像中的形态学操作	3
4.1	灰度膨胀	3
4.1.1	简述	3
4.1.2	计算实例	3
4.2	灰度腐蚀	5
4.2.1	简述	5
4.2.2	计算实例	5
4.3	灰度开启和闭合	6
4.3.1	灰度开启	6
4.3.2	灰度闭合	6
5	总结	7

1 题目描述

思考下如何对灰度图像直接做形态学操作（可查阅文献）。

2 形态学图像处理简述

形态学通常表示生物学的一个分支，该分支主要研究动植物的形态和结构 [1]。在图像处理领域，这一术语表示数学形态学（也称图像代数）。它作为一种数学工具为我们从图像中提取信息提供了有力的支持。其基本思想为“用具有一定形态的结构元素，去量度和提取图像中的对应形状，以达到对图像分析和识别的目的” [3]。

数学形态学的理论基础和语言是集合论。不同于在传统方法中占有重要地位的线性系统理论，数学形态学是一种非线性图像处理和理论 [2]。在这门理论中，用集合表示图像中的对象，它既可以是二值图像，也可以是灰度（彩色）图像。这样做的一个自然结果是形态学算子的性能将主要以几何方式进行刻画，而传统的数值建模分析方法则以解析的方式描述算子的性能，而显示的几何描述特点更适合于视觉信息的处理和分析 [2]，这也是用数学形态学进行图像处理的一个显著优势。

对于不同的图像（二值和灰度等），数学形态学的基本运算与算法也不尽相同，但经常用到的都可归结为四类：膨胀、腐蚀、开启和闭合。本次报告将在第3节和第4节中分别针对二值图像和灰度图像中的形态学操作进行简要介绍。

3 二值图像中的形态学操作

本节主要参考：《图像工程》[3]；上海交通大学顾力栩教授的慕课“[数字图像处理](#)”

二值形态学中的运算对象是两个集合，一般称 A 为图像集合， B 为结构元素（本身仍是图像集合），数学形态学运算是用 B 对 A 进行操作。每个结构元素有一个原点，它是结构元素参与形态学运算的参考点，但原点并不一定要属于结构元素。本节中将分别对第2节中提到的四种运算在二值图像中的操作进行介绍。

3.1 二值膨胀

膨胀的算子为 \oplus ， A 用 B 来膨胀写作 $A \oplus B$ ，定义为

$$A \oplus B = \{x \mid [(\hat{B})_x \cap A] \neq \emptyset\} \quad (1)$$

也可写成

$$A \oplus B = \{x \mid [(\hat{B})_x \cap A] \subseteq A\} \quad (2)$$

该操作可以看做是将集合 A 中的每一个非零元素，以 B 中每一个非零元素相对于原点的方向和距离，平移相同的长度，然后对包括原集合在内的每一个平移后的几何去并集，即得膨胀后的结果。

该操作也可以形象地理解为，用结构元素的原点对 A 中每一个 1 “盖章”，盖章后的结果就是膨胀后的结果。

3.2 二值腐蚀

腐蚀的算子为 \ominus ， A 用 B 来腐蚀写作 $A \ominus B$ ，定义为

$$A \ominus B = \{x \mid (B)_x \subseteq A\} \quad (3)$$

与膨胀相反，腐蚀操作可以看做是将集合 A 中的每一个非零元素，以 B 中每一个非零元素相对于原点的方向和距离，平移相同的长度，然后对包括原集合在内的每一个平移后的几何取交集的结果。

同样，该操作也可以形象地理解为，将结构元素的原点依次“摁”在 A 中的每一个 1 上，若结构元素能被完全地包含在 A 中，则该点保留，否则置为 0。

3.3 二值开启和闭合

膨胀和腐蚀并互为逆运算，所以二者级联使用可以得到不同的结果。如果对图像先腐蚀后膨胀，该操作就称为开启；反之，如果对图像先膨胀后腐蚀，该操作就称为闭合。

3.3.1 二值开启

开启的算子为 \circ ， A 用 B 来腐蚀写作 $A \circ B$ ，定义为

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (4)$$

开启运算可以把比结构元素小的突刺滤掉，切断细长搭接而起到分离作用。

3.3.2 二值闭合

闭合的算子为 \bullet ， A 用 B 来腐蚀写作 $A \bullet B$ ，定义为

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B \quad (5)$$

闭合运算可以把比结构元素小的缺口或孔填充上，搭接短的间断而起到连同作用。

4 灰度图像中的形态学操作

本节主要参考：《图像工程》[3]；上海交通大学顾力栩教授的慕课“[数字图像处理](#)”。

灰度数学形态学与二值数学形态学有密切的联系和对应的关系。二值数学形态学基于集合运算，而在灰度数学形态学中，灰度的排序起着类似的作用；二值数学形态学的操作对象是集合，而在灰度数学形态学中的操作对象是图像函数。

本节中，以 $f(x, y)$ 表示输入图像，以 $b(x, y)$ 表示结构元素，它本身也是一副小图像。

4.1 灰度膨胀

4.1.1 简述

与二值膨胀类似，用结构元素 b 对输入图像 f 进行灰度膨胀记为 $f \oplus b$ ，定义为

$$(f \oplus b)(s, t) = \max \{f(x, y) + b(s - x, t - y) \mid (x, y) \in D_f, [(s - x), (t - y)] \in D_b\} \quad (6)$$

式中， D_f 和 D_b 分别是 f 和 b 的定义域。

在二值图像中，膨胀是将集合进行平移，然后求并集的操作，而在灰度图像中则将“集合”这一概念替换为了灰度曲线。而膨胀这一操作在灰度图像中就相当于是将整个曲线进行平移，然后在定义域的并集内所有曲线求最大值。

4.1.2 计算实例

给定一个曲线，其每个位置取值如图1中 F 所示：

$F = (7 \ 9 \ 8 \ 3 \ 8 \ 9 \ 9);$								$k = (-3 \ 0_{\#} -3)$	
$F_{-1}-3 = (4 \ 6 \ 5 \ 0 \ 5 \ 6 \ 6 \ *)$									
$F_0+0 = (* \ 7 \ 9 \ 8 \ 3 \ 8 \ 9 \ 9 \ *)$									
$F_{+1}-3 = (* \ * \ 4 \ 6 \ 5 \ 0 \ 5 \ 6 \ 6)$									
$F \oplus_g k = (4 \ 7 \ 9 \ 8 \ 5 \ 8 \ 9 \ 9 \ 6)$								max	

图 1: 灰度膨胀计算

结构元素为 k ，有三个元素，其中 0 是其原点。

根据膨胀的定义，先将整个曲线沿每一个非零元素相对于原点的方向和距离平移相同的长度，即左右各移动一个单位，如图1中 F_{-1} 和 F_{+1} 所示。然后对平移后的曲线加上相应点的值，即左右移动过的曲线各减去 3，为移动过不变（加 0）。最后再在这三条曲线中，对每一个位置去最大的值，所得新曲线就是灰度膨胀的结果，如图1中 $F \oplus_g k$ 所示。

另外再从几何的层面给出两个二维坐标系中的实例，如图2和图3所示。

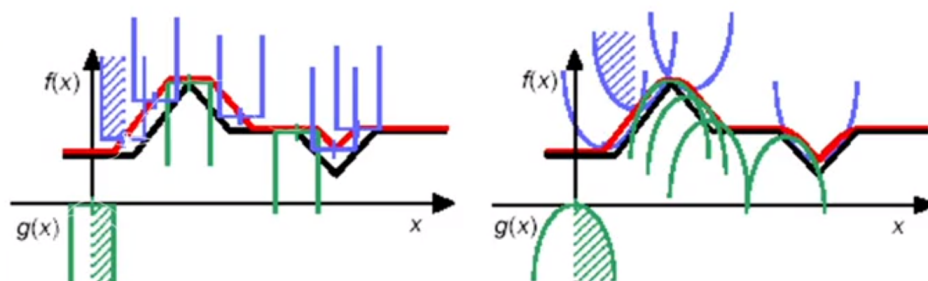


图 2: 灰度膨胀实例 1

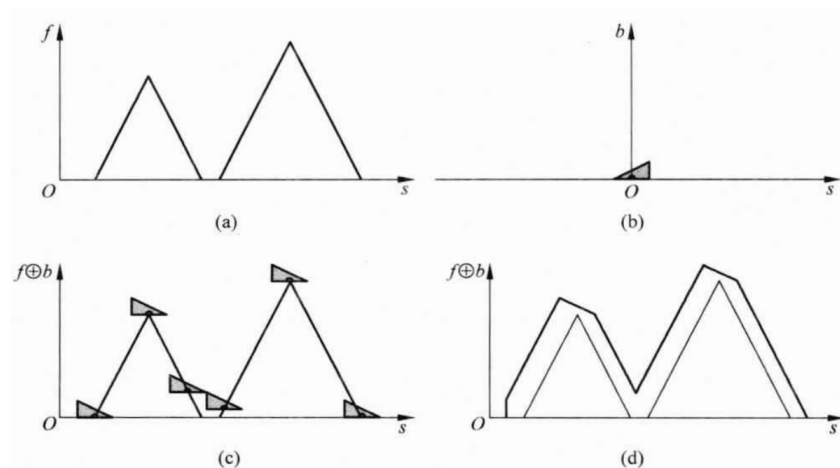


图 3: 灰度膨胀实例 2

4.2 灰度腐蚀

4.2.1 简述

用结构元素 b 对输入图像 f 进行灰度腐蚀记为 $f \ominus b$ ，定义为

$$(f \ominus b)(s, t) = \min \{ f(x, y) - b(s + x, t + y) \mid (x, y) \in D_f, [(s + x), (t + y)] \in D_b \} \quad (7)$$

同二值中的情况类似，灰度腐蚀的操作与灰度膨胀刚好相反：平移方向相反；灰度值做减法；定义域求交集；取最小值。

4.2.2 计算实例

如图4所示，给定一条曲线 F 和结构元素 k ，沿每一个非零元素相对于原点的反方向和平移相同的长度，即左右各移动一个单位（注意与图1中刚好相反），然后对每条曲线减去结构元素中相应点的值，最后再在这三条曲线定义域的交集上去每一点的最小值，所得新曲线就是灰度腐蚀的结果。

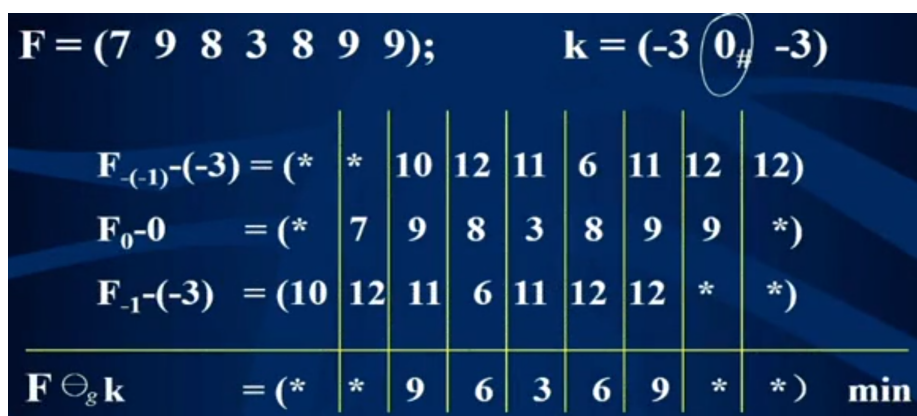


图 4: 灰度腐蚀计算

本节同样再从几何层面给出两个二维坐标系中的实例，如图5和图6所示。

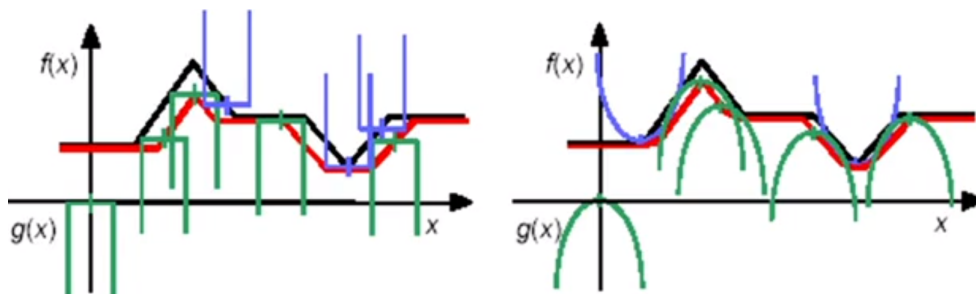


图 5: 灰度腐蚀实例 1

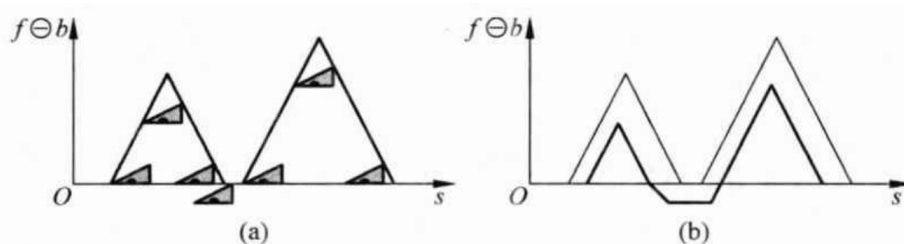


图 6: 灰度腐蚀实例 2

4.3 灰度开启和闭合

在灰度图像中，膨胀和腐蚀两个操作仍然不是可逆的。所以与二值的情况类似，通过对这两种操作的排列我们可以得到灰度开启和灰度闭合两种操作。

4.3.1 灰度开启

开启的算子为 \circ ， A 用 B 来腐蚀写作 $A \circ B$ ，定义为

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B \quad (8)$$

灰度中的开启运算不仅在尺寸上会去除一些区域，还会将灰度值的“尖峰”抹去或变平滑，如图7所示。

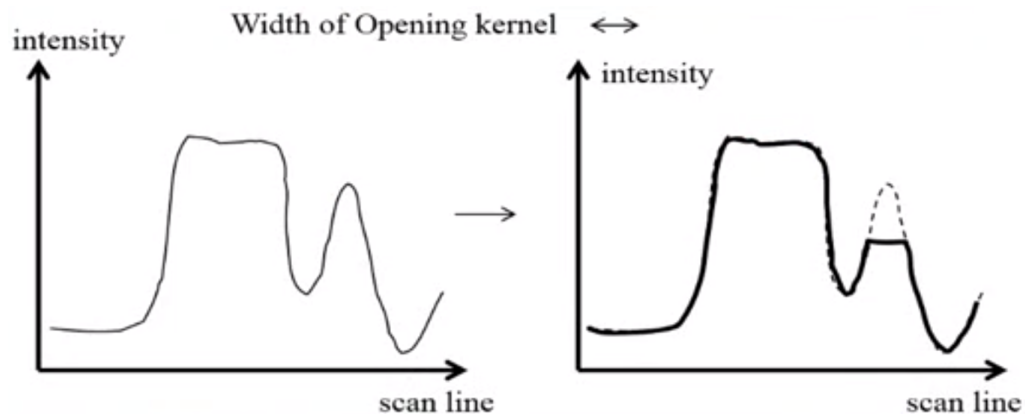


图 7: 灰度开启

总体而言，开启操作可以概括为：第一步的腐蚀去除了小的亮细节并减弱了图像的亮度，第二步的膨胀基本恢复了图像亮度但又不重新引入之前抹去的亮细节。

4.3.2 灰度闭合

闭合的算子为 \bullet ， A 用 B 来腐蚀写作 $A \bullet B$ ，定义为

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B \quad (9)$$

与开启运算相反，闭合运算会将灰度的“尖谷”抹平或变平滑，如图8所示。

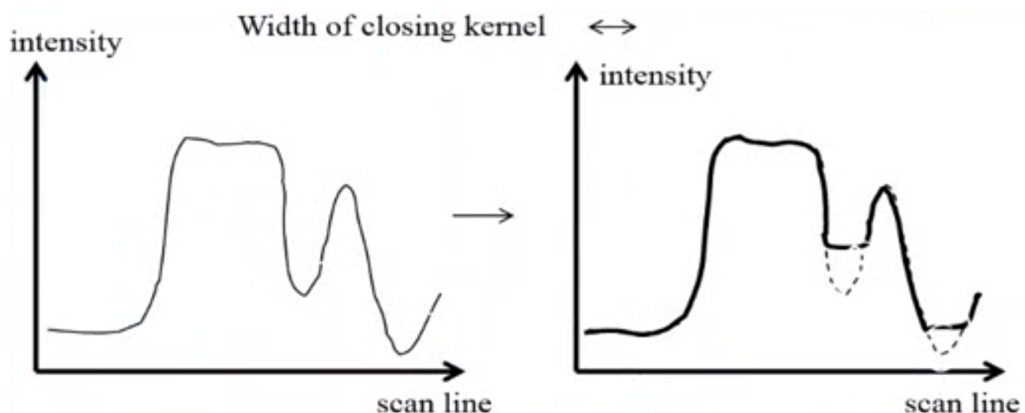


图 8: 灰度闭合

总体而言，闭合操作可以概括为：第一步的膨胀去除了小的暗细节并增强了图像的亮度，第二步的腐蚀基本恢复了图像亮度但又不重新引入之前抹去的暗细节。

5 总结

灰度形态学操作的数学表达式比较复杂，不太容易理解，所以本次报告重点从几何的角度用语言来描述四种操作。

从性能上来说，形态学有着坚实的数学理论支撑，同时操作简单，计算复杂度低，相比之前的各种滤波操作，在很多情况下形态学操作有着难以替代的优势，是提取图像特征，如边界、骨架、凸壳等的有力工具。

参考文献

- [1] Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods. 数字图像处理（第三版）. 电子工业出版社, 2011.6. 2
- [2] 冯桂, 桂预风, 林宗坚. 灰度图像边缘检测中的形态学方法. 遥感信息, (3):10-14, 2000. 2
- [3] 章毓晋. 图像工程. 清华大学出版社有限公司, 2005. 2, 3