平面图的拓扑结构与着色数

杨本立

摘要：定义平面图的剖分圆子图，定义极大平面图的生成子图，定义 n 点极大平面图的 n+1 点增生极大平面图，分析平面图的拓扑结构；用数学归纳法证明任一 n(n≥3)点平面图都可以生成一个 n 点极大平面图，用反向归纳法证明 n(n≥3)点极大平面图的着色数不小于 3 且不大于 4；给出平面图四色定理的一个非人机合作方式证明方法。

关键词：平面图，剖分圆，极大平面图，生成子图，增生极大平面图，数学归纳法，四色定理

中图分类号：O157,O157.5；文献标识码：A

稿件联系人：杨蜀颖

1 前言

平面图四色定理的非人机合作方式证明是尚未解决的世纪数学难题。

本文只讨论简单有限连通平面图，图中任两条边除端点外均不相交。

文中未加定义的名词术语、直接引用的结论等均源自一般图论教材。

2 平面图的拓扑结构

用 V 表示图 G 中结点的集合,E 表示图 G 中边的集合，记 G=G(V,E).用|A|表示集合 A 中元素个数，e_i^j=(v_i, v_j)（i≠j，v_i, v_j∈V）表示图 G 中邻接结点v_i和v_j的边，在避免错乱时记e_i^j=$e_{v_i}^{v_j}$.用 deg(V) 表示图 G 中结点度数之和，deg(S)表示图 G 中面的次数之和。

设有图G_1=G_1(V_1, E_1)和图G_2=G_2(V_2, E_2)，当且仅当V_1=V_2及E_1=E_2时，称图G_1和图G_2是同构的，记作G_1=G_2.

预备定理 对|V|个结点、|E|条边、|S|个面的平面图 G=G(V,E)，有下列结论成立。

（1）|V|+|S|=|E|+2 (Eular 公式)。

（2）$|E|=\frac{1}{2}\deg(V)=\frac{1}{2}\deg(S)$.

（3）图 G 中奇数度数结点的个数之和 k 为偶数，即 $k\bmod(2)=0$.

（4）若|V|≥3，则|E|≤3|V|-6.

（5）存在结点 u ∈ V 使得 1≤deg(u)≤5.

（6）当且仅当图 G 中不包含$k_{3,3}$图或k_5图在 2 度结点内同构的子图时，图 G 是平面图。（kuratowski 定理）.

前面已约定，G 是简单有限连通平面图。

定义 2.1 设 G=G(V,E)是|V|点平面图，$v_0\in V$，$\deg(v_0)=k$. 记v_0及其邻接结点的集合$\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_k\}$为 Vv_0, 记 Vv_0中结点之间邻接边的集合为 Ev_0.

⑴ 称图$\theta v_0=\theta v_0$（Vv_0，Ev_0）为图 G 中以v_0为圆心的剖分圆子图θv_0或剖分圆θv_0.

⑵ 称删去剖分圆θv_0的圆心v_0后的子图 $\bar{\theta}v_0=\theta v_0-\{v_0\}$为剖分圆$\theta v_0$的圆周子图 $\bar{\theta}v_0$，称 $\bar{\theta}v_0$中结点v_i(1≤i≤k)为θv_0的圆周结点。

⑶ 当且仅当圆周子图 $\bar{\theta}v_0$中存在长度为 k(k=deg(v_0))的简单回路

L: $v_1v_2\cdots v_kv_1$时，称剖分圆θv_0为完形剖分圆，称回路 L 为θv_0的圆周回路。

⑷ 当且仅当θv_0中每个面的次数均为 3 时称θv_0为极大剖分圆。

显然，平面图的任一剖分圆及其圆周子图均为平面图。

对结点 u $\in$ Vv_0，用 deg(u)和 $\overline{\text{deg}}$(u)分别表示结点 u 在图 G 和剖分圆θv_0中的度数。

定理 2.1 对图 G=G（V,E）中完形剖分圆θv_0=θv_0（Vv_0,Ev_0），有下列结论成立。

⑴ 对圆心结点v_0，$\overline{\text{deg}}(v_0)=\textbf{deg}(v_0)$且 deg($v_0$)⩾3.

⑵ 对圆周结 u $\in$ Vv_0，3⩽ $\overline{\text{deg}}$(u)⩽deg(v_0) 且 3⩽ $\overline{\text{deg}}$(u)⩽deg(u).

⑶ 2deg(v_0)⩽|Ev_0|⩽3(deg(v_0)-1).

⑷ 极大剖分圆是完形剖分圆。

⑸ 对极大剖分圆θv_0，|Ev_0|=3(deg(v_0)-1).

⑹ 若 3⩽deg(v_0)⩽5，则θv_0中存在圆周结点 u 使 $\overline{\text{deg}}$(u)=3.

⑺ 在 3⩽deg(v_0)⩽5 时，极大剖分圆θv_0的拓扑结构是唯一确定的。

本文不讨论结论（6）和（7）推广至 deg(v_0) ⩾6 的情形。

仅证结论（3）、（4）、（5）、（6）、（7）.

证明

⑶ 完形剖分圆θv_0中有 1 个圆心结点v_0和 deg（v_0）个圆周结点，与圆心结点邻接的有 deg(v_0)条边,圆周回路 L 中有 deg(v_0)条边,所以|Ev_0|⩾2deg(v_0)；再由预备定理结论（4），有|Ev_0|⩽3(deg(v_0)+1)-6=3(deg(v_0)-1).结论（3）成立。

⑷ 若极大剖分圆θv_0非完形剖分圆，则其圆周子图 $\bar{\theta} v_0$中不存在长度为 deg(v_0)的圆周回路 L,从而θv_0中存在以v_0为一个边界点的次数大于 3 的面使θv_0非极大剖分圆。结论（4）成立。

⑸ 记剖分圆θv_0中面的个数为|Sv_0|.由预备定理结论（2），有|Ev_0|=$\frac{3}{2}$|Sv_0|，代入 Eular 公式，由|Vv_0|+$\frac{2}{3}$|Ev_0|=|Ev_0|+2 解得|Ev_0|=3|Vv_0|-6=3(deg(v_0)+1)-6=3(deg(v_0)-1).结论（5）成立。

⑹ 由结论（3），有 2deg(v_0)≤|Ev_0|≤3(deg(v_0)-1)。若θv_0中圆周结点度数均大于 3，当有|Ev_0|≥$\frac{1}{2}$(deg(v_0)+4 deg(v_0))= $\frac{5}{2}$deg(v_0)。由$\frac{5}{2}$deg(v_0) ≤ 3(deg(v_0)-1)得到 deg(v_0)≥6，与假设 3≤deg(v_0)≤5 矛盾。结论（6）成立。

⑺ 据定理 2.1.(2)，设极大剖分圆θv_0中度数为 i（3≤i≤deg(v_0)）的结点个数为n_i，用 u 表示θv_0的圆周结点。

讨论下面关系式:

n_3≠0，（据定理 2.1.(6)）

（n_3+n_5） mod (2)=0,（据预备定理（2））

$\sum_{i=3}^{5} n_i$= deg(v_0)+1，（据定理 2.1.(1)）

3≤ $\bar{\text{d}}$eg(u)≤deg(v_0)，（据定理 2.1.(2)）

n_4+2n_5=3(deg(v_0)-3)。（据$\begin{cases} e=\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{5} i v_i = 3(\deg(v_0)-1), \\ \sum_{i=3}^{5} n_i = \deg(v_0)+1. \end{cases}$）

在$\deg(v_0)$=3 时 ,得到唯一解（n_3,n_4,n_5）＝(4, 0, 0).

在$\deg(v_0)$=4 时 ,得到唯一解（n_3,n_4,n_5）＝(2, 3, 0).

在$\deg(v_0)$=5 时：如果n_3≥3，则因圆周回路 L 的长度为 5，θv_0的圆周结点中必然有互相邻接的结点 u 和 w 使得 $\overline{\deg}(u)$＝ $\overline{\deg}(w)$＝3，从而圆周子图 $\overline{\theta}\ v_0$中必然有以e_u^w为一边的次数不小于 4 的面 S 使θv_0非极大剖分圆，故 1≤n_3≤2；若n_3=1，令在圆周回路 L：$v_1v_2v_3v_4v_5v_1$中 $\overline{\deg}(v_1)$=3, 便有 $\overline{\deg}(v_i)$＞3（i＝2,3,4,5），使得{v_1, v_3, v_4}中每一结点均须与{v_0，v_2，v_5}中每一结点邻接，从而图θv_0中包含有$k_{3,3}$子图使θv_0不为平面图。所以n_3＝2，得到唯一解（n_3, n_4, n_5）＝(2,2,2)。结论（7）成立。

综上述，定理 2.1 成立。

定义 2.2 称每个面的次数均为 3 的平面图 G=G(V,E)为|V|点极大平面图。
5 点极大平面图G_1和G_2的拓扑结构如图 2.1.(1)和图 2.1.(2)所示，G_1＝G_2.
6 点极大平面图G_3和G_4的拓扑结构如图 2.2.(1)和图 2.2.(2)所示，$G_3 \neq G_4$.

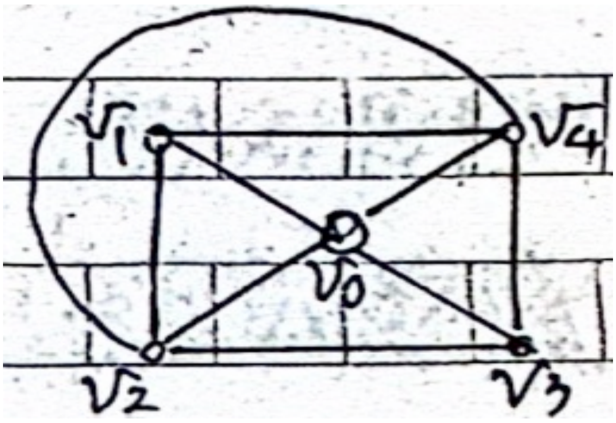

图 2.1.(1) 五点极大平面图G_1

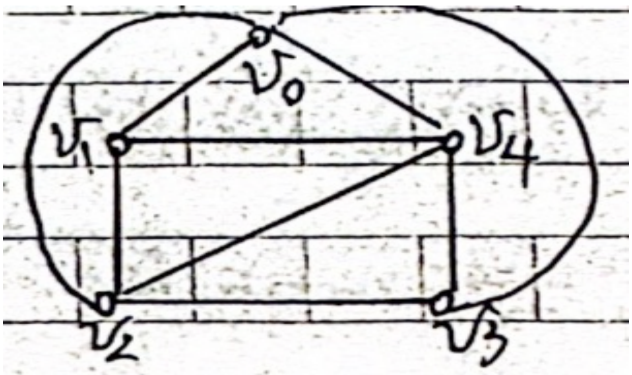

图 2.1.(2) 五点极大平面图G_2

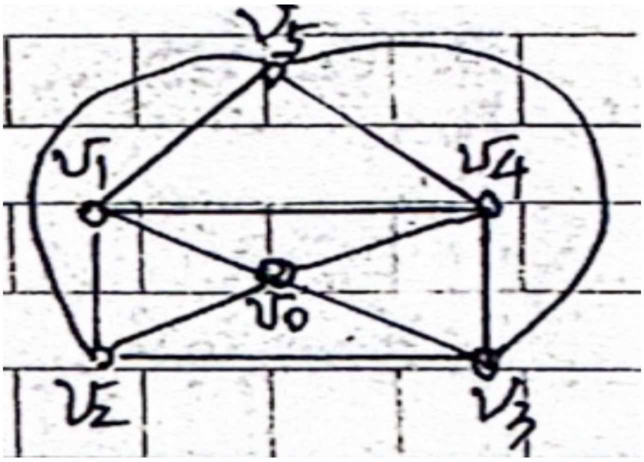

图 2.2.(1) 六点极大平面图G_3

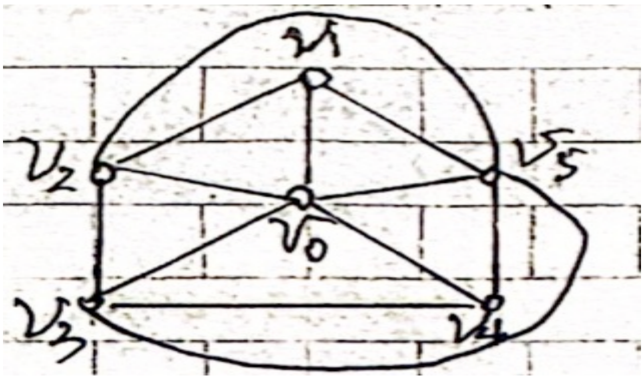

图 2.2.(2) 六点极大平面图G_4

定理 2.2 对|V|(|V|≥3)个结点、|E|条边、|S|个面的极大平面图 G=G(V,E)，有下列结论成立。

（1）|S|=$\frac{2}{3}$|E|.

（2）|E|=3|V|-6.

（3）若|V|＞3，G 中剖分圆θv_0均为完形剖分圆。

（4）若|V|＞3，对 G 中任一结点 u，deg(u)≥3.

（5）若|V|＞3，对 G 中任一边$e_{v_2}^{v_1}$，G 中存在以$e_{v_2}^{v_1}$为公共底边的面Δ$v_1v_2v_3$和Δ$v_1v_2v_4$（v_3≠v_4）.

（6）记 G 中度数为 i（3≤i≤max）的结点的个数为n_i，有关系式 3n_3+2n_4+n_5 ＝$\sum_{i=6}^{max}(i-6)n_i+12$成立。

证明

⑴ 由预备定理结论（2），|E|=$\frac{1}{2}$deg(S)=$\frac{3}{2}$|S|解得|S|=$\frac{2}{3}$|E|.

⑵ 将|S|=$\frac{2}{3}$|E|代入 Eular 公式，由|V|+$\frac{2}{3}$|E|=|E|+2 及|V|≥3，得到|E|＝3|V|-6.

⑶ 若存在结点$v_0\epsilon$V 使得θv_0非完形剖分圆，图 G 中必存在以v_0为一个边界点的面S_0使得 deg(S_0)＞3，G 非极大平面图。结论（3）成立。

⑷ 若存在结点 uϵV 使得 deg（u）＜3，G 中必存在以 u 为一个边界点的面 S 使及 deg（S）＞3，G 非极大平面图。结论（4）成立。

⑸ 若其结论非真，则 G 中必存在以$e_{v_2}^{v_1}$为一条边的面 S 使得 deg（S）>3，G 非极大平面图。

⑹ 由 |E|= $\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{max} in_i$ =3 $\sum_{i=3}^{max} n_i-6$ 有 $\sum_{i=3}^{max} in_i$ =6 $\sum_{i=3}^{max} n_i-12$ ， 解 得 3n_3+2n_4+n_5=$\sum_{i=6}^{max}(i-6)n_i+12$.

综上述，定理 2.2 成立。

结论(6)还表明：在$n_3+n_4=0$时，$n_5=\sum_{i=6}^{max}(i-6)n_i+12$≥$\sum_{i=7}^{max} n_i+12$.

定义 2.3　设|V_1|(|V_1|≥3)点连通平面图G_1=$G_1(V_1,E_1)$ 是在极大平面图 G=G(V,E)中删去 e（0≤e≤2|V|-5）条边得到的子图。

⑴ 称G_1是 G 的一个生成子图。

⑵ 称 G 是G_1的一个生成极大平面图。

|V|点连通子图G_1的生成极大平面图 G 不必是唯一的。

|V|点连通子图G_1中最少有|V|-1 条边，故有 0≤e≤2|V|-5. 因 e≤(3|V|-6)-(|V|-1)=2|V|-5.

在本文后面的叙述中：对已经存在的边执行“添边”指令时为空操作；剖分圆圆周结点按圆周回路的逆时针方向排序。

定理 2.3 任一|V_1|（|V_1|≥3）点连通平面图G_1=$G_1(V_1, E_1)$都存在生成极大平面图 G=G(V,E).

证明

若G_1已是极大平面图，结论自然成立。

下设G_1非极大平面图。对结点个数用数学归纳法。

（1）若|V_1|＝3

对G_1中结点添加邻接边生成面Δ$v_1v_2v_3$得到极大平面 G=G({v_1，v_2，v_3},{e_1^2, e_2^3, e_3^1})= G(V,E).

（2）设|V_1|＝k 时结论成立。

（3）对|V_1|＝k+1

任取G_1中度数最小的结点 u（1≤deg（u）≤5）.分以下 5 种情形分别处理。

1） 若 deg（u）＝1

记 u 的邻接结点为 w，删去结点 u 得到图G_1，用G_1生成 k 点极大平面图 G；在 G 的剖分圆θ_w的任一面Δwv_1v_2内插入结点 u 并添边{e_u^w，$e_u^{v_1}$，$e_u^{v_2}$} 生成 k+1 点极大平面图 G.

2）若 deg（u）＝2

记 u 的邻接结点为{v_1，v_2}，删去结点 u 并添边e_1^2得到图G_1，用G_1生成 k 点极大平面图 G；由定理 2.2.（5），记 G 中以e_1^2为公共底边的面为Δ$v_1v_2v_3$和Δ$v_1v_2v_4$，删去e_1^2，在面 S：Δ$v_1v_3v_2v_4v_1$中插入结点 u 并添边 {$e_u^{v_1},e_u^{v_3},e_u^{v_2},e_u^{v_4}$}生成 k＋1 点极大平面图 G.

3）若 deg（u）＝3

记 u 的邻接结点为{v_1,v_2,v_3}，添边{e_1^2，e_2^3，e_3^1}，删去结点 u 得到图G_1，用G_1生成 K 点极大平面图 G；在 G 的面Δ$v_1v_2v_3$插入结点 u 并添边{$e_u^{v_1},e_u^{v_2},e_u^{v_3}$}生成 k＋1 点极大平面图 G.

4）若 deg（u）＝4

对G_1中剖分圆θ_u，将其圆周结点接逆时针方向排列为{v_1,v_2,v_3,v_4}并设 $\overline{\deg}(v_1)$＝min（ $\overline{\deg}(v_i)$|1≤i≤4），添边 {e_1^2,e_2^3,e_3^4,e_4^1}，删去结点 u 并添边e_1^3得到图G_1，用G_1生成 k 点极大平面图 G；在图 G 中删去边e_1^3，在面 S：$v_1v_2v_3v_4v_1$中插入结点 u 并添边 {$e_u^{v_1},e_u^{v_2},e_u^{v_3},e_u^{v_4}$} 生成 k＋1 点极大平面图 G.

5）若 deg（u）＝5

对G_1中剖分圆θ_u，将其圆周结点接逆时针方向排列为{v_1,v_2,v_3，v_4,v_5}并设 $\overline{\deg}(v_1)$＝min（ $\overline{\deg}(v_i)$|1≤i≤5），添边 {$e_1^2,e_2^3,e_3^4,e_4^5,e_5^1$}，删去结点 u 并添边{$e_1^3,e_1^4$}得到图$G_1$，用$G_1$生成 k 点极大平面图 G；在图 G 中删去边{$e_1^3,e_1^4$}，在面

S：$v_1v_2v_3v_4v_5v_1$中插入结点 u 并添边｛$e_u^{v_1},e_u^{v_2},e_u^{v_3},e_u^{v_4},e_u^{v_5}$｝生成 k＋1 点极大平面图 G.

综述 1)-5)，定理在$|V_1|$＝k＋1 时成立。

定理 2.3 成立。

定义 2.4 设G_1=$G_1(V_1,E_1)$ 是 n 点极大平面图，G＝G（V，E）是 n＋1 点极大平面图，u∈V 且 3≤deg(u)≤5，剖分圆θ_u中圆周结点按圆周回路的逆时针方向排列为｛v_1,v_2，⋯，$v_{deg(u)}$｝且 $\bar{\mathrm{d}}$eg(v_1)＝3.如果：（1）删去图 G 中一个度数为 3 的结点 u 可生成图G_1，（2）删去图 G 中一个度数为 4 的结点 u 并添边e_1^3可生成图G_1，（3）删去图 G 中一个度数为 5 的结点 u 并添边$\{e_1^3,e_1^4\}$可生成图G_1。则称图 G 是图G_1的增生极大平面图。

定理 2.4 任一 n 点极大平面图G_1=$G_1(V_1,E_1)$都存在增生极大平面图 G＝G(V，E）.

其中，$|V|$=$|V_1|$+1＝n＋1,n≥3.

证明

⑴ 在图G_1的任一面Δ$v_1v_2v_3$接入结点 u 并添边｛$e_u^{v_1},e_u^{v_2},e_u^{v_3}$｝可生成增生极大平面图 G.

⑵ 删去图G_1中面$\Delta v_1v_2v_3$和面$\Delta v_1v_3v_4$的公共底边e_1^3，在面 S：$v_1v_2v_3v_4$中插入结点 u 并添边｛$e_u^{v_1},e_u^{v_2},e_u^{v_3},e_u^{v_4}$｝，在 n＞3 时，可生成增生极大平面图 G.

⑶ 删去图G_1中任一剖分圆θ_w（deg（w）≥4）中边｛$e_w^{v_1}$， $e_w^{v_2}$｝，在面 S：$v_1v_2v_3wv_{deg(w)}v_1$中插入结点 u 并添边｛$e_u^{v_1},e_u^{v_2},e_u^{v_3},e_u^{w},e_u^{v_{deg(w)}}$｝，在 n＞4 时，

可生成增生极大平面图 G.

定理 2.4 成立。

在$|V_1|$＞5 时，G_1的增生极大平面图 G 存在但不必唯一。

3 平面图的着色数

图 G 的正常着色（或称相容性着色，简称着色）要求图 G 中相邻接结点均着不同颜色。若对图着色至少需要 k 种颜色，称 K 为图 G 的着色数，记作$C(G)=k$.

本文只讨论平面图的着色数。

定义 3.1 设有|V|点已着色平面图 G＝G（V，E），着色数 C（G）＝k，1≤i，j≤k，结点 u,w∈V.

⑴ 若结点 u 着有第 i 种颜色，称结点 u 具色值 i，记作 C（u）＝i.

⑵ 若结点 u 和 w 之间存在简单通路 L 且通路 L 上结点色值交替为 i 和 j，称结 u 和 w 是 i→j 连通的。

⑶ 称图 G 中由 i→j 连通的结点及其邻接边组成的连通子图 $\overline{G}$ 为图的一个 i→j 连通分支 $\overline{G}$.

⑷ 称将图 G 中 i→j 连通分支 $\overline{G}$ 中具色值 i 的结点均改为具色值 j 而将具色值 j 的结点均改为具色值 i 的操作为对连通分支 $\overline{G}$ 作 i→j 色值对换，记作

T（ $\overline{G}$,i→j)，在 u 为 $\overline{G}$ 中结点且 C（u）＝i 时,记 T（ $\overline{G}$,i→j）＝T（u，i→j）.

规定 T（u，i→j）在 j＝i 时为空操作。

定理 3.1 设有已着色平面图 G＝G(V,E)，$\overline{G}$ 是图 G 中一个 i→j 连通分支。

⑴ 色值对换 T（ $\overline{G}$ ，i→j）不破坏图 G 着色的相容性。

⑵ 色值对换 T（ $\overline{G}$ ，i→j）不改变图 G 的着色数 C（G）.

⑶ 图 G 中子图G_1的着色数不大于图 G 的着色数，即 C（G_1）≤C（G）.

⑷ 指定图 G 中面 Δ$v_1v_2v_3$的边界点的色值 C（v_1,v_2,v_3）不破坏图 G 着色的相容性且不改变图 G 的着色数$C(G)$.

证明

仅证结论（4）.

记 1≤r,s,t≤C（G）,r≠s≠t.

对结点v_1,v_2,v_3依次作色值对换 T（v_1，C（v_1）→r）,T（v_2,C（v_2）→s),T（v_3,C（v_3）→t）,可使得 C（v_1,v_2,v_3）＝（r,s,t）.显然，指定 C（v_1,v_2,v_3）＝（r，s，t）的操作不破坏图 G 着色的相容性且不改变图 G 的着色数 C（G）.

定理 3.2 |V|（|V|≥3）点极大平面图 G＝G（V，E）的着色数 3≤C（G）≤4.

证明

设 G 已着色，用 i（1≤i≤C（G））表示结点色值。

对图 G 中结点v_0,记其圆周结点按圆周回路 L 逆时针方向排列为{$v_1,v_2,\cdots,v_{deg(v_0)}$}，且设 $\overline{\deg}(v_1)$=3.由定理 2.4，对图 G 结点个数|V|用数学归纳法的反向归纳法证明。

⑴ 在|V|＝3 及|V|＝4 时定理显然成立。在|V|＝5 时（见图 2.1.⑴及图

2.1.⑵)，有 C（v_0,v_1,v_2,v_3,v_4）=（1,2,3,2,4）,C（G）= 4.在|V|=6 时,对图 2.2.⑴所示图G_3，有 C（v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5）=（1,2,3,2,3,1）,C(G_3)=3;对图 2.2.⑵所示图G_4，有 C（v_0,v_1,v_2,v_3,v_4,v_5）=（1,2,3,2,3,4），C （G_4）= 4 .在 3≤|V|≤6 时定理 3.2 成立。

⑵ 设|V|= n + 1 时定理 3.2 成立。

⑶ 当|V|= n 时

任取图 G 中度数最小的结点v_0， 3≤$deg(v_0)$≤5.分三种情况讨论。

1 ） 若$deg(v_0)$=3

删去图 G 中结点v_0得到 n 点极大平面图G_1，有 3≤C （G_1）≤C (G)≤4 .

2 ） 若$deg(v_0)$=4

指定 C（v_0,v_1,v_2）＝（1,2,3)；记录数据{ $\overline{\mathrm{deg}}(v_i)$ |i＝1,2,3,4}；删去结点v_0得到图G_1＝G-｛v_0}；注意到 $\overline{\mathrm{deg}}$（v_1）＝3，依据 C（v_3,v_4）的 3 种可能情形，对图G_1＝G-{v_0}分别作如下处埋

① C（v_3,v_4）＝（2,3)：若v_1和v_3不是 2→1 连通的，作 T（v_1,2→1）色值对换并添边e_1^3得到 n 点极大平面图G_1，有 3≤C（G_1）＝C（G）≤4；若v_1和v_3是 2→1 连通的,作 T（v_4,3→4）色值对换并添边e_2^4得到 n 点极大平面图G_1，有

C（G_1）＝4.

② C （v_3,v_4)=(2,4) :若 $\overline{\mathrm{deg}}(v_4)$=3，添边$e_2^4$得到 n 点极大平面图$G_1$，有 3≤C（$G_1$）≤C（G）＝4；若 $\overline{\mathrm{deg}}(v_4)$＝4，作 T（$v_1$,2→1）色值对换并添边$e_1^3$得到 n 点极大平面图$G_1$，有 C （ G_1)=4

③ C（v_3,v_4)=(4，3)：因为 $\overline{\deg}(v_1)$= 3 ，v_1和v_3不相邻接，添边e_1^3 得到 n 点极大平面图G_1，有 3≤C（G_1）≤C（G）= 4 .

3 ）若$deg(v_0)$= 5

指定 C（v_0,v_1,v_2）＝（1,2,3)；记录数据（ $\overline{\deg}(v_i)$|i＝1,2,3,4,5}；删去结点v_0；注意到 $\overline{\deg}(v_1)$＝3，依据（v_3,v_4,v_5）的 5 种可能情形，对图G_1＝G-{v_0}分别作如下处理

① C（v_3,v_4,v_5)=(2,3,4)：若 $\overline{\deg}(v_5)$=3，添边｛e_2^5，e_3^5｝得到 n 点极大平面图G_1，有 3≤C（G_1）≤C（G）= 4；若 $\overline{\deg}(v_5)$ = 4 且 $\overline{\deg}(v_2)$=4，作 T(v_1,2→1)色值对换并添边{e_1^3,e_1^4}得到 n 点极大平面图G_1，有 C（G_1）＝4；若 $\overline{\deg}(v_5)$ = 4 且 $\overline{\deg}(v_3)$= 4，作 T（v_2,3→1）色值对换并添边{e_2^4，e_2^5}得到 n 点极大平面图G_1，有 C（G_1）= 4；若 $\overline{\deg}(v_5)$=5,作 T（v_1,2→1）色值对换并添边{e_1^3,e_1^4}得到 n 点极大平面图G_1，有 C（G_1）=4.

② C（v_3,v_4,v_5)=(2,4,3):因 为 $\overline{\deg}(v_1)$=3，所以 $\overline{\deg}(v_4)$=3 或者 $\overline{\deg}(v_4)$ = 4；若 $\overline{\deg}(v_4)$= 3，添边｛e_1^4,e_2^4｝得到 n 点极大平面图G_1，有 3≤C（G_1）≤C(G)=4 ；若 $\overline{\deg}(v_4)$＝4，则G_1中存在边e_2^4，作 T（v_1,2→1）色值对换并添边{e_1^3,e_1^4}得到 n 点极大平面图G_1，有 C（G_1）＝4.

③ C（v_3,v_4,v_5)=(4,2,3):若 $\overline{\deg}(v_3)$＝3，添边{e_1^3,e_3^5}得到 n 点极大平面图G_1,有 3≤C（G_1)≤C（G)=4 ；若 $\overline{\deg}(v_3)$＝4，存在边e_3^5，作 T（v_1,2→1）色值对换并添边｛e_1^3,e_1^4｝得到 n 点极大平面图G_1，有 C(G_1)=4.(因 $\overline{\deg}(v_1)$=3，故 $\overline{\deg}(v_3)$≠5）. 已约定 $\overline{\deg}(v_1)$＝3.

④ C(v_3,v_4,v_5)=(4,2,4):若 $\overline{\deg}(v_2)$=3，添边｛e_2^4,e_2^5｝得到 n 点极大平面图G_1，有 3≤C（G_1)≤C（G)=4；若 $\overline{\deg}(v_2)$=4 且 $\overline{\deg}(v_4)$=4 作 T（v_3,4→1）色值对换并添边｛e_1^3,e_3^5｝得到 n 点极大平面图G_1,有 C（G_1）＝4;若 $\overline{\deg}(v_2)$=4 且

$\overline{\mathrm{d}}\mathrm{eg}(v_5)$=4 ,作 T（$v_1$, 2→1）色值对换并添边｛$e_1^3, e_1^4$｝得到 n 点极大平面图$G_1$，有 C（$G_1$）＝4；若 $\overline{\mathrm{d}}\mathrm{eg}(v_2)$=5 ,作 T（$v_1$, 2→1）色值对换并添边｛$e_1^3, e_1^4$｝得到 n 点极大平面图$G_1$，有 C（$G_1$）＝4.

⑤ C(v_3, v_4, v_5)=(4,3,4):因为 $\overline{\mathrm{d}}\mathrm{eg}(v_1)$=3,添边{$e_1^3, e_1^4$} 得到 n 点极大平面图$G_1$，有 3≤C(G_1)≤C(G)=4 . 综述①～⑤，定理在 $\overline{\mathrm{d}}\mathrm{eg}(v_0)$＝5 时成立。综述 1）～3)，n 点极大平面图 G 的着色数 C（G）满足条件 3≤C （ G ） ≤4.

定理 3.2 成立。

定理 3.3 （平面图四色定理） |V|（|V|≥2）点简单有限连通平面图 G ＝G（V，E）的着色数 C（G）满足 2≤ C （ G ） ≤4 .

证明

对无回路的连通图 G（树 G)，有 C（G）＝2. 当 2≤|V|≤4 时结论自然成立。设|V|＞4. 由定理 2.3，任一|V|（|V|≥3）点连通平面图 G＝G（V，E）都可以生成一个|V|点极大平面图G_1=$G_1(V_1, E_1)$；由定理 3.2，任一|V|（|V|≥3）点极大平面G_1=$G_1(V_1, E_1)$的着色数 C（G_1）满足条件 3≤C（G_1）≤4 . 在|V|点连通平面图 G 的生成极大平面图G_1中删去若干条边得到图 G,显然有 C (G)≤C(G_1). 所以，2≤C (G)≤4.

定理 3.3 成立。

对于非连通平面图 G，因为 G 中每一个连通分支 $\overline{\mathrm{G}}$ 的着色数 C（ $\overline{\mathrm{G}}$）有 1≤C（ $\overline{\mathrm{G}}$）≤4，所以非连通平面图 G 的着色数 C（G）仍满足 1≤C（G）≤4. 可以证明，在有奇数度圆心结点v_0完形剖分圆θv_0的平面图 G 中，C(G)=4.

参考文献（须规范化和添加文献）

1. 现代图论 Moden Graph Theory

2. 图论导引 Introduction to Graph Theory.

3. 离散数学（美）伊利诺伊州立大学 约翰·A·多西等

4. 左孝凌、李为鉴、刘永才 编著 离散数学，上海科学技术文献出版社，1988年11月版。

5. 华罗庚 数学归纳法 科学出版社 2004年2月版

Topological Structure and Chromatic Number for Plane Graph

Abstract: This paper defines the dissecting circular subgraph of a planar graph, the spanning subgraph of a maximal planar graph, and the n+1-vertex augmented maximal planar graph of an n-vertex maximal planar graph. The topological structure of planar graphs is analyzed. Using mathematical induction, it is proven that any planar graph with n vertices ($n \geqslant 3$) can generate an n-vertex maximal planar graph. Reverse induction is employed to prove that the chromatic number of an n-vertex maximal planar graph ($n \geqslant 3$) is not less than 3 and not greater than 4. Finally, a non-human-computer collaborative proof method for the four-color theorem is presented.

Key Words: planar graph, dissecting circle, maximal planar graph, spanning subgraph, augmented maximal planar graph, mathematical induction, four-color theorem