

1. 請寫出下列複數的共軛，如範例：

Ex. $1 + 3i$: 共軛 $= 1 - 3i$.

(a) $2 + 4i$:

(b) $20 - 2i$:

(c) $12 + 13i$:

(d) $\cos(45^\circ) + i \sin(45^\circ)$

2. 在量子計算中，矩陣是一個極為重要的工具，這個概念也在學測的考試範圍中。請閱讀以下有關矩陣的介紹並完成題目。

(a) 矩陣就是將數字排成二維陣列，如下：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

由左到右，其大小分別為 3×4 ， 2×2 ， 3×2 。（先看多少列橫列，再看多少行直行）

i.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的大小為？

ii.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

的大小為？

iii.

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

的大小為？

(b) 同大小的矩陣可以做加法，如範例所示

Ex.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3=7 & 6 & 6 \\ 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

i.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1+i \\ 2-i & 3+i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2-i & 3+2i \\ 3-8i & 2 \end{bmatrix} = ?$$

- (c) 矩陣中可以塞入複數，以此，我們介紹一種重要的操作：轉置共軛。本題目先考慮一些簡單的矩陣。轉置共軛的符號為 \dagger ，會寫在矩陣的右上方（有點像是次方）。

Ex1.

$$\begin{bmatrix} 1-i & 3i & 2+i \end{bmatrix}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1+i \\ -3i \\ 2-i \end{bmatrix}$$

Ex2.

$$\begin{bmatrix} 1-i \\ 2-i \\ 3+i \\ 4-i \end{bmatrix}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1+i & 2+i & 3-i & 4+i \end{bmatrix}$$

i.

$$\begin{bmatrix} 1+4i & 2+i \end{bmatrix}^{\dagger} = ?$$

ii.

$$\begin{bmatrix} 2+2i \\ 2-6i \end{bmatrix}^{\dagger} = ?$$

- (d) Tensor product: 請觀察以下的範例，並完成問題

Ex.

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & -30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & -30 \end{bmatrix} & 8 \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & -30 \end{bmatrix} \\ 2 \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & -30 \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} 10 & 30 \\ 20 & -30 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 30 & 80 & 240 \\ 20 & -30 & 160 & -240 \\ 20 & 60 & 40 & 120 \\ 40 & -60 & 80 & -120 \end{bmatrix}$$

i.

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = ?$$