

线性代数自测题 5

学院电气 班级 1907 姓名 张新雨 学号 191485

1. 填空题

(1) 以初等矩阵 $C_{31}(-3)$ 右乘矩阵 $A = [a^1, a^2, a^3]$, 相当于对 A 进行初等列变换, 结果为 $[a_1 - 3a_3, a_2, a_3]$

(2) 设 $A \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - 3a_{31} & a_{12} - 3a_{32} & a_{13} - 3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 则 $A = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

(3) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 $AB = I$, 则 $BA = \boxed{I}$.

(4) 矩阵 A 经过有限次初等变换化为矩阵 B , 则矩阵 A 与 B 的秩 相同.

(5) 若 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}}$

(6) 设有两个系数矩阵相同的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2; \end{cases} \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = c_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 = c_2. \end{cases}$$

若记 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$, 这两个方程组可以表示为一个矩阵等式 $\boxed{AX = D}$, 当系数矩阵 A 非退化时, 可以解出 $X = \boxed{A^{-1}D}$.

2. 选择题

(1) 在下列矩阵中, 不是初等矩阵的是 (B)

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(2) 下列矩阵可逆的是 (B)

- A. n 阶对角矩阵
C. n 阶实对称矩阵

- B. n 阶初等矩阵 ✓
D. n 阶上三角阵 X

(3) 设 A 为 n 阶对称矩阵, 且 A 可逆, 那么有 (C).

- A. $A^{-1} = A^T$
C. $A^T A^{-1} = I$
B. $A^T = -A$
D. 以上结论都不对



(4) 当 $ad \neq bc$ 时, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = (\text{B})$.

A. $\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

C. $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$

B. $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

D. $\frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix}$.

(5) 若矩阵 $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, 满足 $AX = B$, 则 $X = (\text{C})$.

A. $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}$

(6) 下列说法正确的是(C).

A. 对单位阵施行初等变换后所得的矩阵都是初等矩阵

B. 初等矩阵的乘积还是初等矩阵

C. 可逆阵经过初等变换后仍为可逆阵

D. 对任一 $m \times n$ 矩阵, 仅经过行初等变换可化为形如 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的矩阵

3. 计算题

(1) 用行初等变换法求下列矩阵的逆矩阵:

$$\textcircled{1} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \textcircled{2} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 从矩阵方程 $AX = B$ 中解出 X , 其中 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$[A:B] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 4 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 6 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -5 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 4 & 6 & 4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 19 & 21 \end{array} \right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 12 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & -5 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 0 & -10 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

(3) 设 A 满足 $A^2 - A - 4I = O$, 证明, $A - I$, $A - 2I$ 都可逆.

• 128 •

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right]$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ -4 & -\frac{9}{2} \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$



张新雨
电气 1907
191485



河北工业大学

HEBEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

自测5

3.11.7 ①

$$\text{解: } [A:I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 - 3r_1 \\ r_3 + 4r_1 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & 6 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{r_2 + \frac{1}{2}r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 16 & -7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 + 11r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 16 & -7 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_3 + 16r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 13 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 16 & -7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 + \frac{1}{2}r_1 \\ r_3 + 16r_2 \end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -16 & 7 & -1 & 1 \end{array} \right] A^{-1} = \left[\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 0 \\ -\frac{13}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \\ -16 & 7 & -1 \end{array} \right]$$

②

$$\text{解: } [A:I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} r_2 + r_1 \\ r_3 + r_1 \\ \dots \\ r_{11} + r_1 \end{matrix}} \dots \xrightarrow{r_{11} \leftrightarrow r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$A^{-1} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array} \right]$$

13) 由 $A^2 - A - 4I = 0$, 得:

$$A(A - I) = 4I$$

$$\text{即: } A\left(\frac{A-I}{4}\right) = I \Rightarrow A^{-1} = \frac{A-I}{4}$$

$$\text{由 } A^2 - A - 2I = 2I, \text{ 得:}$$

$$(A - 2I)(A + I) = 2I$$

$$\text{即: } (A - 2I)\left(\frac{A+I}{2}\right) = I \Rightarrow (A - 2I)^{-1} = \frac{A+I}{2}$$



扫描全能王 创建

线性代数自测题 6

学院 电气 班级 1907 姓名 张新雨 学号 191485

1. 填空题

(1) 设 a^1, a^2, \dots, a^m 是矩阵 A 的 m 个行向量, b^1, b^2, \dots, b^n 是 B 的 n 个列向量,

$$\text{则 } \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} da^1 \\ da^2 \\ \vdots \\ dm a^m \end{bmatrix},$$

$$[b^1 \ b^2 \ \dots \ b^n] \begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix} = [b^1 d_1 \ b^2 d_2 \ \dots \ b^n d_n].$$

(2) 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则 $[(2A^T)^{-1}]^T = \frac{1}{2}A^{-1}$.

(3) 已知 $A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $A^{-1} = \boxed{A}$.

(4) 设 A 为 n 阶矩阵, 且 $\det A = a \neq 0$, $\text{adj}A$ 为其转置伴随阵, 则 $\det(\text{adj}A) = \boxed{a^{n-1}}$.

(5) 设 A 是 n 阶矩阵, $\text{adj}A$ 是其转置伴随阵, 则 $A \text{adj}A = (\text{adj}A)A = \boxed{|A|I}$.

2. 选择题

(1) 设 A, B 均为 n 阶可逆方阵, 则 $\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \boxed{C}$.

A. $\begin{bmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ B^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix}$

(2) 设 A, B, C 是同阶方阵, 且 A 可逆, 则下列各式中不一定成立的是(\boxed{B})

A. 若 $AB = AC$, 则 $B = C$ ✓

B. $AB = CA$, 则 $B = C$

C. 若 $AB = 0$, 则 $B = 0$

D. 若 $BA = CA$, 则 $B = C$ ✓





3. 计算题

$$|5A^*|^{-1}$$

(1) 设 A 是 n 阶矩阵, $\text{adj}A$ 是 A 的转置伴随阵, 若 $\det A = 5$, 求 $\det[(5\text{adj}A)^{-1}]$ 的值.

$$\det[(5\text{adj}A)^{-1}] = \frac{1}{|5A^*|} = \frac{1}{5^n |A^*|} \quad \checkmark \quad \frac{1}{5^n |A|^n} = \frac{1}{5^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{|5A^*|} = \frac{1}{5^n 5^{n-1}} = \frac{1}{5^{2n-1}}$$

(2) 利用矩阵的分块乘法计算乘积 AB , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 5 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$\text{记 } A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} I & 6I \\ B_1 & 8I \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_1 & 6A_1 \\ A_2 + A_3 B_1 & 6A_2 + 8A_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_2 + A_3 B_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 40 & 48 \\ 55 & 54 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 43 & 54 \\ 59 & 61 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$6A_2 + 8A_3 = \begin{bmatrix} 82 & 36 \\ 96 & 122 \end{bmatrix}$$

• 130 • $A \cdot B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 18 & 36 \\ 4 & 7 & 24 & 42 \\ 43 & 54 & 82 & 36 \\ 59 & 61 & 96 & 122 \end{bmatrix}$



线性代数自测题 7

学院 电气 班级 1907 姓名 张新雨 学号 191485

1. 填空题

(1) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则 A 的秩 r 与 m, n 之间的关系是 $r \leq \min\{m, n\}$

(2) 设 4 阶矩阵的秩为 2, 则其转置伴随阵 $\text{adj}A$ 的秩为 0.

(3) 若矩阵 A 与 B 等价, 则 $r(A) = r(B)$.

(4) n 元非齐次方程组 $AX = b$ 有唯一解的充要条件是 (A, b) = $\text{R}(A) = n$.

(5) 方程组 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n = a, \\ 3x_1 + 3x_2 + \dots + 3x_n = b \end{cases}$ 有解的条件为 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$.

2. 选择题

(1) 设 A, B 为 n 阶矩阵, 则下式中不正确的是 (C)

A. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ✓ B. $\det(AB) = \det(BA)$

C. $AB = BA$ ✗ D. $(AB)^T = B^TA^T$ ✓

(2) 设 A, B 均为 2 阶矩阵, 且 $\det A = -1, \det B = 2$, 则 $\det[2(A^T B^{-1})^2] =$ (D).

A. 1 B. $\frac{1}{2}$

C. -1 D. 2

(3) 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times s$ 矩阵, 则 ()

A. $R(A) < R(A+B)x B.R$ B. $R(A) < R(AB)$

C. $R(A) \leq R(A+B)$ D. $R(A) \leq R(A+B)$

3. 计算题

(1) 设 $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix}$, 计算 AA^T 与 $(\det A)^2$

1. $A^T =$

$AA^T =$



电气 1907
张新雨
191485



河北工业大学

HEBEI UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

自测 7.

$$3.117 \quad A \cdot A^T = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2+b^2+c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a \begin{vmatrix} a & d & -c \\ -d & a & b \\ c & -b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -b & d & -c \\ -c & a & b \\ -d & -b & a \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} -b & a & -c \\ -c & -d & b \\ -d & c & a \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} -b & a & d \\ -c & -d & a \\ -d & c & -b \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+d^2)^3$$

$$|A|^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2)^4$$



扫描全能王 创建

29. 用逆矩阵公式求逆阵，并由此解下面的矩阵方程.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{C}$$

$$|\mathbf{A}| = 6 \quad |\mathbf{B}| = 2 \quad |\mathbf{C}| = -3$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B}^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

