机电214　李鑫朋　210554

解

一、$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3$

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & a-2 \\ 0 & a-1 & 1 \end{vmatrix} = -(3-a^2+3a-2) = a^2-3a-1$

则由题意可得 $a^2-3a-1+3=0$

$a^2-3a+2=0$　则 $a=2$ 或 $a=1$

$(a-2)(a-1)=0$

二、解由题意得 $A^{-1}BA=6A+BA \Rightarrow A^{-1}BA-BA=6A$

$(A^{-1}-E)BA=6A \Rightarrow B=6(A^{-1}-E)^{-1}AA^{-1} = 6[A^{-1}(E-A)]^{-1}$

$B=6(E-A)^{-1}A$

~~$(E-A)^{-1}=$~~ $E-A=\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & & \\ & \frac{3}{4} & \\ & & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$　$(E-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{4}{3} & \\ & & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$

$B=6\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & & \\ & \frac{4}{3} & \\ & & \frac{7}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & \\ & \frac{1}{4} & \\ & & \frac{1}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

三、解　由题意得，有增广矩阵 B

$B=\begin{bmatrix} 1 & -a & -2 & -1 \\ 1 & -1 & a & 2 \\ 5 & -5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -a & -2 & -1 \\ 0 & a-1 & a+2 & 3 \\ 0 & 5a-5 & 6 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -a & -2 & -1 \\ 0 & a-1 & a+2 & 3 \\ 0 & 0 & 5a+4 & 9 \end{bmatrix}$

$A\begin{bmatrix} 1 & -a & -2 \\ 1 & -1 & a \\ 5 & -5 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -a & -2 \\ 0 & a-1 & a+2 \\ 0 & 0 & 5a+4 \end{bmatrix}$

当 $a=-\frac{4}{5}$ 时　$R(B)=3$　$R(A)=2$ 方程组无解

当 $a\neq 1$ $a\neq -\frac{4}{5}$ 时　$R(B)=R(A)=3$ 方程组有唯一解

当 $a=1$ 时　$R(B)=R(A)=2$ 方程组无穷多组解

此时 $B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

四 机电2班 李鑫丽 210554

四、解：

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\2&0&3&-1&3\\1&1&0&4&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&-2&-1&-5&1\\0&0&-2&2&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&2&1\\0&2&1&5&-1\\0&0&-2&2&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由梯形矩阵得矩阵A列向量的秩为3 行秩等于列秩均为3

A的列向量组线性相关

则 $a_1=[1,0,2,1]^T$ $a_2=[1,2,0,1]^T$ $a_3=[2,1,3,0]^T$

为极大线性无关组 且 a_4 a_5 可用 a_1, a_2 a_3 表示

$a_4=-\frac{1}{7}a_1-\frac{3}{7}a_2-\frac{3}{7}a_3$ $a_5=-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{3}a_2-\frac{4}{3}a_3$

所以可知 $a_1=[1,0,2,1]^T$ $a_2=[1,2,0,1]^T$ $a_3=[2,1,3,0]^T$ 为最大线性无关组

行秩为3 列秩也为3

五、解. 该二次型的矩阵为 $\begin{bmatrix}0&0&1\\0&2&0\\1&0&0\end{bmatrix}$

特征方程为 $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}0-\lambda&0&1\\0&2-\lambda&0\\1&0&0-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda I)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=-1$ $\lambda_2=1$ $\lambda_3=2$

当 $\lambda_1=-1$ 时 $A+I=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&3&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

$\begin{cases}-x_1+x_3=0\\3x_2=0\end{cases}$ 则 $a_1=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

当 $\lambda_2=1$ 时 $A-I=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{bmatrix}$

$\begin{cases}-x_1+x_3=0\\x_2=0\end{cases}$ 则 $a_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

当 $\lambda_3=2$ 时 $A-2I=\begin{bmatrix}-2&0&1\\0&0&0\\1&0&-2\end{bmatrix}$

$\begin{cases}-2x_1+x_3=0\\x_1-2x_3=0\end{cases}$ 则 $a_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

正交化单位化得

$e^1=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ $e^2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\0\\\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ $e^3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$e^1=\frac{a_1}{|a_1|}$ $e^2=\frac{a_2}{|a_2|}$

则 $Q=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&1\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\end{bmatrix}$

$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$

令 $X=QY$ 将二次型化为标准型

$f=-y_1^2+y_2^2+2y_3^2$

机电214 李鑫朋 210554

六.我对线性代数中的二次型的理论认识较为突出 他是含有n个变量$x_1 \cdots x_n$的二次齐次多项式

首先我认为 二次型对之前学习的知识会进行系统的应用

当进行二次型的~~正交~~标准化时 我们会求取 二次型矩阵和他的

特征值 又会通过特征值求取对应的特征向量 求出基础解系

最后 以矩阵的n个两两正交的单位特征向量为列 构成正交矩阵

综合运用了线代大部分知识

二次型的理论广泛应用于数学 物理 工程技术 经济学等方面

对于某些出的意 最后代表一些二次曲面类似于椭~~球~~圆面

解析几何中 可以将复杂函数简单化 寻找事物规律

也可以在微分方程的求解 多元函数的极值等方面~~取得~~起到作用