2005 -2006 学年第一学期

一．填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$ ______ $\underline{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$

2. 若 n 阶方阵 A 的秩 $r < n$，则 $|A| =$ ___0___.

3. 设 $A\vec{x} = \vec{0}$，A 是 5 阶方阵，且 $R(A) = 3$，则基础解系中含___2___个解向量.

4. 若 3 阶矩阵 A 的特征值为 2，2，3，则 $|A| =$ ___12___.

5. 设 λ_1, λ_2 是对称阵 A 的两个不同的特征值，$\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 是对应的特征向量，则 $[\vec{p}_1, \vec{p}_2] =$ ___0___.

二．选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若 A 为 3 阶方阵，且 $|A| = 2$，则 $|-2A| =$ （ C ）.

   A．-4　B．4　C．-16　D．16

2. 设 A, B 为 n 阶方阵，满足等式 $AB = O$，则必有（ B ）.

   A．$A = O$ 或 $B = O$　B．$|A| = 0$ 或 $|B| = 0$　C．$A + B = O$　D．$|A| + |B| = 0$

3. 设 n 元线性方程组 $A\vec{x} = \vec{b}$，且 $R(A) = R(A, \vec{b}) = n$，则该方程组（ B ）

   A．有无穷多解　B．有唯一解　C．无解　D．不确定

4. 设 P 为正交矩阵，则 P 的列向量（ A ）

   A. 组成单位正交向量组　B. 都是单位向量　C. 两两正交　D. 必含零向量

5. 若二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ 为正定，则对应系数矩阵 A 的特征值（ A ）

   A．都大于 0；　B．都大于等于 0；　C．可能正也可能负　D．都小于 0

三．（8 分）计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

解．$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underline{\underline{r_1 + r_2 + r_3 + r_4}} \; 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \underline{\underline{\begin{matrix} r_2 - r \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r \end{matrix}}} \; 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$

四．（8 分）设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 A^{-1}.

解：$(A\ \ E)=\begin{pmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&1&-2&0\\0&1&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_2-2r_3]{r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&0&0&1&-2&1\\0&1&0&0&1&-2\\0&0&1&0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ （或用伴随矩阵）

五．（8 分）求齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1-x_2-2x_3+3x_4=0\end{cases}$的基础解系及通解．

解：$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&-1&1&-3\\1&-1&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&2&-4\\0&0&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\0&0&1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

通解方程组$\begin{cases}x_1-x_2-x_4=0\\x_3-2x_4=0\end{cases}$，基础解系$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$，通解为$k_1\vec{\xi}_1+k_2\vec{\xi}_2$，（$k_1,k_2$为任意常数）

六．(8 分)已知向量$\vec{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\vec{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\3\\5\end{pmatrix}$，求向量组的秩及一个极大线性无关组，并把其余向量用极大线性无关组表示．

解：$A=(\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&3\\2&1&3\\3&1&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&2\\0&-1&1\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

极大无关组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2$，且$\vec{\alpha}_3=2\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2$．

七．（10 分）讨论λ取何值时，非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2\ \ (1+\lambda)x_3=0\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda\\(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=\lambda^2\end{cases}$

(1) 有唯一解； (2) 无解； (3) 有无穷多解．

解：法 1 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1+\lambda\\1&1+\lambda&1\\1+\lambda&1&1\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda+3)$

（1） 当$\lambda\neq0$且$\lambda\neq-3$时，有$|A|\neq0$，方程组有惟一解；

（2）当$\lambda=-3$时，$\overline{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2&0\\1&-2&1&-3\\-2&1&1&9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&-2&0\\0&-3&3&-3\\0&0&0&6\end{bmatrix}$，

$R(A)=2<R(\overline{A})=3$，所以无解；

（3）当$\lambda=0$时，$\overline{A}\to\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$， $R(A)=R(\overline{A})=1$，方程组有无穷多解.

法 2

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\1&1+\lambda&1&\lambda\\1+\lambda&1&1&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\0&\lambda&-\lambda&\lambda\\\lambda&0&-\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\0&\lambda&-\lambda&\lambda\\0&-\lambda&-\lambda(\lambda+2)&\lambda^2\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1+\lambda&0\\0&\lambda&-\lambda&\lambda\\0&0&-\lambda(\lambda+3)&\lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}$$

八.（8 分）用配方法将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+4x_1x_3$化为标准形，并求可逆的线性变换.（或上届题？）

解：$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+4x_1x_3+4x_3^2)-2x_2^2-6x_3^2=(x_1+2x_3)^2-2x_2^2-6x_3^2$，

令$\begin{cases}y_1=x_1+2x_3\\y_2=x_2\\y_3=x_3\end{cases}$，即$\begin{cases}x_1=y_1-2y_3\\x_2=y_2\\x_3=y_3\end{cases}$，所以$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，

变换矩阵$C=\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$|C|=1\neq0$. 标准形$f=y_1^2-2y_2^2-6y_3^2$.

九.（10 分）求矩阵$A=\begin{pmatrix}0&2&0\\2&3&0\\0&0&4\end{pmatrix}$的特征值与最大特征值所对应的特征向量.

解：$|A-\lambda E|=-(\lambda-4)^2(\lambda+1)$，特征值$\lambda_1=\lambda_2=4,\lambda_3=-1$.

当$\lambda_1=\lambda_2=4$时，解$(A-4E)\vec{x}=\vec{0}$ 得$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$，$\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$，$A$的对应于$\lambda_1=\lambda_2=4$的

全体特征向量为$\eta=k_1\vec{\xi}_2+k_2\vec{\xi}_2$， $(k_1^2+k_2^2\neq0)$.

十．（每小题 5 分，共 10 分）

1． 设向量组$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关，讨论向量组 $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$的线性相关性.

解：令$k_1\vec{\alpha}_1+k_2(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2)+k_3(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3)=\vec{0},$ 即

$$(k_1+k_2+k_3)\vec{\alpha}_1+(k_2+k_3)\vec{\alpha}_2+k_3\vec{\alpha}_3=\vec{0}$$

因为$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3$线性无关，所以有$\begin{cases}k_1\ +k_2+k_3=0\\ k_2+k_2=0\\ k_3=0\end{cases}$，

由于方程组只有零解，故$\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3$线性无关。

2． 设 A 为满足等式 $A^2-3A+2E=O$ 的矩阵，证明 A 可逆，并求 A^{-1}.

解：$A^2-3A+2E=O\Rightarrow A(A-3E)=-2E\Rightarrow A\cdot\dfrac{-1}{2}(A-3E)=E$

所以 A 可逆，且 $A^{-1}=\dfrac{1}{2}(3E-A)$

2008 --2009 学年第一学期 A 卷

一、填空题（共 75 分每空 3 分）

得分	

1．设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&1&3\end{pmatrix}$，则 $|-A|=$ __- 6__， $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1/2&1/2&0\\-1/6&-1/6&1/3\end{pmatrix}$，

$|A^2|=$ __36__ .

2. $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\2&0\\1&2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&8\\5&12\end{pmatrix}$.

3．行列式$\begin{vmatrix}1&1&1\\2&1&2\\3&3&6\end{vmatrix}=$ __18__，行列式$\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&-2\\0&2&2\end{vmatrix}=$ __12__.

4． 两个向量$\alpha_1'=(1,\ 1,\ 0),\alpha_2'=(1,\ 2,\ 1)$的内积为：__3__， 夹角为：$\pi/6$;

把α_1，α_2用施密特正交化方法得:$\beta_1=\alpha_1$，$\beta_2=$ $(-1/2,1/2,0)'$

5．若向量 $\beta'=(4,7),\alpha_1'=(1,2),\alpha_2'=(2,3)$，则 β 用 α_1,α_2 组合的表达式是 $\underline{\beta=2\alpha_1+\alpha_2}$.

6．向量组 $\alpha_1'=(2,\ 0,\ 0),\alpha_2'=(1,-1,\ 1),\alpha_3'=(0,\ 1,\ 0),\alpha'_4=(3,1,3)$ 的线性相关性为：<u>线性相关</u>，它的秩是<u>　3　　　</u>.

7．已知向量组 $\alpha_1=(1,0,0)$, $\alpha_2=(2,5,2)$, $\alpha_3=(1,5,k)$ 线性相关,则 $k=$<u>　2　　　　</u>.

8．若 3 阶方阵 A 的三个根分别是 1，2，3，则 方阵 A 的行列式 $|A|\underline{=6}$

9．设矩阵 A= $\begin{pmatrix}1&0&-1&0&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$，则矩阵 A 的秩为<u>　2　</u>，线性方程组 $AX=O$ 的基础解系的向量个数为<u>　3　</u>.

10．给定线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda\\x_1+x_2+(\lambda+1)\ x_3=\lambda^2\end{cases},$$

则：当<u>λ≠1 且 λ≠0　　　</u>时，方程组有唯一解；当 λ=<u>　1　</u>时方程组有无穷解；　　当 λ=<u>　0　　</u>时方程组无解.

11．矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&-1\\1&0&1\end{pmatrix}$ 的特征值为：<u>　2　　　</u>、1，对应于特征值 $\lambda=1$ 的特征向量为：$\underline{k\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},k\neq 0}$.

12．　设 A 设方阵 A 满足 $A'A=E$，则 $|A|=$<u>　　±1　　　　</u>.

13．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+2x_2x_3+2x_3^2$ 的矩阵的系数矩阵为：$\underline{A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}}$，该二次型为<u>　正　</u>定二次型.

二、计算题（共 5 分）

得分	

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，求矩阵 X，使 $AX = A+2E$

解　由 $AX = A+2E$　得 $X = A^{-1}(A+2E)$　　2’

$$\begin{pmatrix}A & A+2E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & -2\\ 0 & 1 & -2 & 5\end{pmatrix}$$ 3’

即 $X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

三、计算题（共 6 分）

得分	

已知向量组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}2\\2\\2\\1\end{pmatrix}.$$

求向量组 α_1，α_2，α_3，α_4 的一组极大线性无关组,并把其余向量用此组向量表示出来.

解　$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 3 & 2\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由此可知，α_1，α_2,α_4 为一组极大线性无关向量组，

$$\alpha_3 = 2\alpha_1+\alpha_2$$

四、计算题（共 6 分）

得分	

求非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=-2\\ 2x_1-2x_2+x_3-x_4=2\end{cases}$ 的通解.

解　增广矩阵 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$　　2’

还原成线性方程组$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 + 2 \end{cases}$ 1'

可得方程组通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2$为任意常数. 2'

五、限选题（共 8 分）

得分	

（经管类学生可选做第 1、2 小题中的一题，理工类学生仅限做第 2 小题）

(1) (**理工类学生不做此小题**)已知二次型 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$，

a）出二次型所对应的矩阵 A

b）用配方法将二次型化为标准型，

C)写出相应的可逆线性变换矩阵。

解 a）$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2'

b) $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3 = (x_1 - x_3)^2 + x_2^2$ 2'

令$\begin{cases} y_1 = x_1 - x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

即有变换$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ ，$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

把二次型 $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_3$ 化为标准型 $f(x) = y_1^2 + y_2^2$ 2'

C) 对应变换矩阵 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2'

(2) （**理工类学生必做此小题**）已知二次型 $f(x) = ax_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2$ 的秩为 2,

a) 写出二次型所对应的矩阵 A，并求参数 a

b) 求出二次型所对应的矩阵 A 的特征值

c) 求正交变换 $X = PY$，把二次型化成标准形（不写正交变换）.

解 a）$A=\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2'

$\because R(A)=2,\therefore |A|=0 \Rightarrow a=1$ 1'

b)解特征方程$|A-\lambda E|=0$，得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$ 2'

C）分别解方程组（$A-\lambda_i$）$X=O, i=1,2,3$， 得单位特征向量

$$p_1=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}，\quad p_2=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}，\quad p_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

及正交矩阵$P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$， 正交变换 $X=PY$ 2'

把二次型变为标准型: $f=2y_2^2+3y_3^2$ 1'

2008 --2009 学年第一学期 B 卷

一、填空题（共 66 分每空 3 分）

得分	

1．设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则行列式：$|-A|=$ __- 6__ ，$|AB|=$ __-12__ ，$|A^{-1}|=$ __1/6__ ，$|A^*|=$ __36__ .

2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ ， 则 $8A+B=$ $\begin{pmatrix} 17 & 2 & 3 \\ 4 & 21 & 6 \\ 7 & 8 & 25 \end{pmatrix}$ ，

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$,

3．设 A 是三阶方阵，$|A| = 8$,则：

$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \underline{\quad 8 \quad}$，$2a_{31}A_{11} + 2a_{32}A_{12} + 2a_{33}A_{13} = \underline{\quad 0 \quad}$其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

4． $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，它的第 3 行第 2 列元素 0 的代数余子式 $A_{32} = \underline{\quad -2 \quad}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5. 向量 $\alpha' = (1,1,0)$ 与向量 $\beta' = (0,-1,1)$，则: 向量 α 的长度 $\|\alpha\| = \underline{\sqrt{2}}$，$\alpha$与$\beta$的夹角

$= \dfrac{3}{4}\pi$ ，

6. 向量 $\alpha_1' = (1,2,1)$ $\alpha_2' = (3,4,3)$，$\alpha_3' = (1,1,1)$，则向量组 α_1， α_2， α_3 的秩等于$\underline{\quad 2 \quad}$，该组向量线性$\underline{\quad 相 \quad}$关.

7. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$， $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$,则

当 $\lambda \neq \underline{\quad 2 \quad}$ 时，线性方程组 $AX = B$ 有唯一解；

当 $\lambda = 1$ 时，线性方程组 $AX = B$ 的解 $X' = k\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$,$k$ 为任意常数.

8．设 $A\vec{x} = \vec{0}$， A 是 4×5 阶矩阵， $R(A) = 2$，则基础解系中含有$\underline{\quad 3 \quad}$个解向量.

9．设 λ_1, λ_2 是对称阵 A 的两个不同的特征值， $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ 是对应的特征向量，则$[\vec{p}_1, \vec{p}_2] =$

0____.

10 设 2 阶实对称矩阵 A 的两个特征值分别为 $-2,-3$，则矩阵 A 为__负定__定矩阵，$|A|=$__6__；多项式 $f(x)=x^2-x-1$，则 $|f(A)|=$__55__.

二、选择题（共 14 分每空 2 分）

得分	

1．设 n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$，且 $R(A)=R(A,\vec{b})=n$，则该方程组（ B ）

A．无解　B．有唯一解　C．有无穷多解　D．不确定

2．设 n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{O}$，且 $R(A)=n-1$，则该方程组的解由（ A ）个向量构成.

A．有无穷多个　B．1　C．$n-k$　D．不确定

3．设 A,B 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=O$，则必有（ B ）.

A．$A=O$ 或 $B=O$　B．$|A|=0$ 或 $|B|=0$　C．$A+B=O$　D．$|A|+|B|=0$

4．设 $A\neq O,B\neq O$ 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=O$，则必有（ D ）.

A．$R(A)=0$　B．$R(B)=0$　C．$R(A)+R(B)=n$　D．$R(A)+R(B)\leq n$

5．设 P 为正交矩阵，则 P 的列向量（ C ）

A. 可能不正交　B. 有非单位向量　C. 组成单位正交向量组　C. 必含零向量

6. n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$，则 A 的列向量（ A ）

A．线性相关　B．线性无关　C．$R(A)=0$　D．$R(A)\neq 0$

7．n 阶方阵 A 的行列式 $|A|\neq 0$ 是矩阵 A 可逆的（ C ）

A．充分条件　B．必要条件　C．充要条件　D．无关条件

三、计算题（共 6 分）

得分	

向量 $\alpha_1'=(1,2,2)$ $\alpha_2'=(-2,-1,2)$，$\alpha_3'=(-2,2,-1)$，$\beta_1'=(0,3,0)$，$\beta_2'=(0.3,3)$ 请把向量组 β_1，β_2 表示成向量组 α_1，α_2，α_3 的线性组合.

线

解 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2)=\begin{pmatrix}1 & -2 & -2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 4’

由此可知

$\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3$

$\beta_2 = 4\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ 2’

四、计算题（共 6 分）

得分	

非齐次线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1 - x_2 - x_3 = 1\\ -x_1 + \lambda x_2 - x_3 = -\lambda\\ -x_1 - x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2\end{cases}$当$\lambda$取何值时（1）无解；（2）有唯一解；（3）有无穷解，并相应的通解.

解 方程组的系数矩阵$A=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & -1\\ -1 & -1 & \lambda\end{pmatrix}$的行列式$|A|=(\lambda-2)(\lambda+1)^2$ 2’

（1） 当$\lambda \neq -1$且$\lambda \neq 2$时，方程有唯一解； 1’

（2） 当$\lambda = 2$时，方程组无解； 1’

（3） 当$\lambda = -1$时，增广矩阵$B\overset{r}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，可得方程组有无穷多解

通解为$X = c_1\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ 2’

五、计算题（共 8 分）

得分	

试求一个正交的相似变换矩阵, 把矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}$ 化为对角矩阵

解　解特征方程 $|A-\lambda E|=0$，得特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=3$　　3’

解方程 $(A-\lambda_1)X=O$,得相应的特征向量 $X=C_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$,.　$C_1^2+c_2^2\neq 0$　　1’

解方程 $(A-\lambda_3)X=O$,得相应的特征向量 $X=C\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$,$C\neq 0$.　　1’

令 $P_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，$P_3=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$　　1’

$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，正交相似变换 $P'AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,　　2’

2008 --2009 学年第一学期 C 卷

一、填空题（共 60 分每空 3 分）

得分	

1. 行列式: $\begin{vmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{vmatrix}=$ __28__ ,它的第 2 行第 3 列元素 1 的代数余子式 $A_{23}=$ __- 2__.

2．若 A，B 为 3 阶方阵，且 $|A|=2$，$|B|=2$，则 $|-2A|=$ __- 16__ ，$|(A\cdot B)'|=$ __4__，

$|A^{-1}|=$ __1/2__.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A\cdot B=\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&4\end{pmatrix}}$,

$A^{-1}=\underline{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}}$.

4．设 A 是 3 阶方阵，$|A|=3$，则：

$a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$____3____，　$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=$____0____ .

5. 向量 $\alpha'=(1,0,1)$ 与向量 $\beta'=(1,-1,0)$，则：α与β的夹角= $\underline{\dfrac{\pi}{3}}$，

6. 向量 $\alpha_1'=(1,2,3)$ $\alpha_2'=(3,2,1)$，$\alpha_3'=(1,1,1)$，则向量组 α_1，α_2，α_3 的秩等于__2___，该组向量线性___相___ 关.

7. 设 $A=\begin{pmatrix}\lambda&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$,则

当 $\lambda\neq$____0____ 时，线性方程组 $AX=B$ 有唯一解；

当 $\lambda=2$ 时，线性方程组 $AX=B$ 的解 $X'=$ __（1，-1，0）____ 。

8．设 $A\vec{x}=\vec{0}$，A 是 3×4 阶矩阵，基础解系中含有 1 个解向量，则 $R(A)=$__3_____.

9．设 λ_1,λ_2 是对称阵 A 的两个不同的特征值，$\vec{p}_1,\vec{p}_2$ 是对应的特征向量，则 $[\vec{p}_1,\vec{p}_2]=$ 0___.

10．设 3 阶实对称矩阵 A 的三个特征值分别为 $1,2,3$，则矩阵 A 为___正___定矩阵，A 的行列式 $|A|=$6____.

11．二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_2x_3$ 所对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$，该矩阵的最大特征值是_2_______，该特征值对应的特征向量是 $\underline{c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, c\neq0}$.

二、选择题（共 20 分每空 2 分）

得分	

1．设 n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{b}$，且 $R(A,\vec{b})=n+1$，则该方程组（ B）

A．有唯一解 B．有无穷多解 C．无解 D．不确定

2．设 n 元线性方程组 $A\vec{x}=\vec{O}$，且 $R(A)=k$，则该方程组的基础解系由（ C ）个向量构成.

A．有无穷多个 B．有唯一一个 C．$n-k$ D．不确定

3．设矩阵 A,B，C 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=C$，则下列错误的论述是（ B ）.

A．矩阵 C 的行向量由矩阵 A 的行向量线性表示 ；

B．矩阵 C 的列向量由矩阵 A 的列向量线性表示；

C. $|A\cdot B|=|C|$ ；

D．矩阵 C 的行向量由矩阵 B 的行向量线性表示.

4．设矩阵 A,B，C 为 n 阶方阵，满足等式 $AB=C$，则下列关于矩阵秩的论述正确的是（ D）.

A．$R(A)<R(C)$ B．$R(B)<R(C)$ C．$R(A)+R(B)=n$ D．$R(A)\geq R(C)$

5．设 P 为正交矩阵，则 P 的列向量（ C ）

A. 可能不正交 B. 有非单位向量 C. 组成单位正交向量组 C. 必含零向量

6. n 阶方阵 A，B 的乘积的行列式 $|AB|=5$,则 A 的列向量（ B）

A．方阵 A 的列向量线性相关 B．方阵 A 的列向量线性无关

C．$R(A)=5$ D．$R(A)<n$

7．n 阶方阵 A 的行列式 $|A|=0$ 是齐次线性方程组 $AX=O$ 有非零解的（ C ）(注:此空得分值为 2 分)

A．充分条件 B．必要条件 C．充要条件 D．无关条件

三、计算题（共 6 分）

得分	

向量 $\alpha_1'=(1,2,2)$ $\alpha_2'=(-2,-1,2)$，$\alpha_3'=(-2,2,-1)$，请把向量 $\beta'=(1,0,0)$ 表示成向量组 α_1，α_2，α_3 的线性组合.

解 解方程

专业: 线

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)X = \beta,$

即$AX = \beta$ 1'

$$知X = A^{-1}\beta = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3’

即$\frac{1}{9}\alpha_1 - \frac{2}{9}\alpha_2 - \frac{2}{9}\alpha_3 = \beta$ 1’

四、计算题（共 6 分）

得分	

求非齐次线性方程组$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$的通解.

解　增广矩阵$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 1 & -1 & 2 \\ \end{pmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 2’

还原成线性方程组$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_4 + 2 \end{cases}$ 1’

可得方程组通解为$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c_1, c_2$为任意常数. 2’.

五、计算题（共 8 分）

得分	

用配方法将二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$化为标准形，并求可逆的线性变换.

解　$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 - 6x_3^2$ 2’

令$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - 2x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

得$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 + 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

即有可逆线性变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 2’

把二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$ 化为标准形

$f(x_1, x_2, x_3) = {y_1}^2 + y_2^2 - 6y_3^2$ 1’

附：

试 卷 命 题 计 划

课程名称	线性代数	考试时间		课程性质	必修
考试班级	本科理工、经管类各班级			考试方式	闭卷

题号	题型	所占比例（%）与出题说明	出题人
1	填空	75% 考察向量、矩阵、方阵的行列式、线性方程组的解法与矩阵的关系等等基本概念	李绍明，刘群锋
2	计算题	5% 考察用矩阵	李绍明、刘群锋
3	计算题	6%	李绍明，刘群锋
4	计算题	6%求解简单线性方程组	李绍明，刘群锋
5	限选题	8%矩阵的特征值与特征向量、二次型的标准型等	李绍明，刘群锋

6			
7			

教研室主任审核签名：　　　　　　　　　　**系主任审核签名：**