

河北工业大学考 (A 卷)

课程名称 线 性 代 数 2016-2017 学年第一学期考试

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
题分	15	15	32	14	14	10					100

备注： 学生不得在试题纸上答题(含填空题、选择题等客观题)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、设 $D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, 则 $D =$ _____。

2、设 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 且 $ad - bc = 2$, 则 $A^{-1} =$ _____。

3、已知 ξ_1, ξ_2 是三元齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的两个不同的解, 且 $R(A) = 2$, 则该方程组的通解为_____。

4、已知向量组 $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, 0, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, 0)^T$, $\alpha_4 = (1, 3, 1)^T$, 则 $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$ _____。

5、设三阶方阵 A 与对角阵 $\Lambda = \text{diag}(1, -1, 3)$ 相似, 则 $|A - 2E| =$ _____。

二、单项选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1、设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维列向量, 且 $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 1$, 则 $|2\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| =$ ()。

- (A) 1 (B) 0 (C) 2 (D) 2^n

2、设 $|A_1| = 2$, $|A_2| = 1/2$, $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, 则 $|A^{-1}| =$ ()。

- (A) 1 (B) 2 (C) $1/2$ (D) 4

3、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是向量空间 R^3 的一个基, 则下列仍是 R^3 的一个基的是 ()。

- (A) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -2\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$ (B) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$
(C) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_3$ (D) $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

4、二次型 $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ 是正定二次型, 则 t 应满足 ()。

- (A) $-2 < t < 2$ (B) $-2 < t < 0$ (C) $0 < t < 1$ (D) $-2 < t < 1$

5、设 A 为 n 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵, 且 $R(A) = n - 2$, 则 A^* 的秩为 ()。

- (A) $n - 1$ (B) $n - 2$ (C) 1 (D) 0

三、计算题(每小题 8 分, 共 32 分)

1、已知 A_{ij} 是行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 的元素 $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$ 的代数余子式, 计算 $A_{13} - 3A_{23} + A_{33}$;

2、设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, 求矩阵 X , 使其满足 $X = AX + B$;

3、设 A 为 n 阶方阵, 且 $|A| = 2$, 计算 $\left| A^* + \left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} \right|$;

4、设 $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$, $\alpha_2 = (1, a+2, -3a)^T$, $\alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b)^T$, $\beta = (1, 3, -3)^T$, 求: a 、 b 为何值时, β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示, 且表示唯一, 并求出表示式。

四、(14 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a - 3 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2 \end{cases},$$

(1) 求: a 为何值时, 方程组有唯一解、无解、有无穷多个解;

(2) 在方程组有无穷多个解时, 用其对应的齐次线性方程组的基础解系表示其通解。

五、(14 分) 已知实二次型 $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$,

(1) 写出 f 的矩阵 A ;

(2) 求 f 的秩;

(3) 求正交变换 $X = PY$ (必须写出正交变换矩阵 P), 把 f 化为标准形。

六、证明题 (共 10 分)

1、(6 分) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 证明: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1$, $\alpha_4 + \alpha_1 + \alpha_2$ 也是该方程组的一个基础解系;

2、(4 分) 设 A 为 $2n+1$ 阶方阵, 且 $AA^T = E$, $|A| > 0$, 证明: $|A - E| = 0$ 。