

# 河北工业大学考 (A 卷)

课程名称 线性代数 2016-2017学年第一学期考试

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
题分	15	15	32	14	14	10					100

备注： 学生不得在试题纸上答题(含填空题、选择题等客观题)

### 一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

$$1、\text{设} D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \text{则 } D = \underline{\hspace{10em}}.$$

2、设  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , 且  $ad - bc = 2$ , 则  $A^{-1} = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

3、已知  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  是三元齐次线性方程组  $Ax=0$  的两个不同的解, 且  $R(A)=2$ , 则该方程组的通解为  $\xi_1 + k\xi_2$ 。

4、已知向量组  $\alpha_1 = (1,0,0)^T$ ,  $\alpha_2 = (1,0,1)^T$ ,  $\alpha_3 = (1,2,0)^T$ ,  $\alpha_4 = (1,3,1)^T$ , 则  $R(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) =$  \_\_\_\_\_。

5、设三阶方阵  $A$  与对角阵  $\Lambda = \text{diag}(1, -1, 3)$  相似，则  $|A - 2E| = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

### 二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是 n 维列向量, 且  $|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = 1$ , 则  $|2\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n| = (\quad)$ 。



2、设 $|A_1|=2$ ,  $|A_2|=1/2$ ,  $A=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$ , 则 $|A^{-1}|=$ ( )。



3、设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  是向量空间  $R^3$  的一个基，则下列仍是  $R^3$  的一个基的是（ ）。

- (A)  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, -2\alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$       (B)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$   
 (C)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + 2\alpha_3$       (D)  $\alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1$

4、二次型  $f = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$  是正定二次型，则  $t$  应满足 ( )。

- (A)  $-2 < t < 2$       (B)  $-2 < t < 0$       (C)  $0 < t < 1$       (D)  $-2 < t < 1$

5、设  $A$  为  $n$  阶方阵， $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵，且  $R(A)=n-2$ ，则  $A^*$  的秩为（ ）。

- (A)  $n-1$       (B)  $n-2$       (C) 1      (D) 0

### 三、计算题(每小题 8 分, 共 32 分)

1、已知  $A_{ij}$  是行列式  $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$  的元素  $a_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) 的代数余子式, 计算  $A_{13} - 3A_{23} + A_{33}$ ;

2、设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ , 求矩阵  $X$ , 使其满足  $X = AX + B$ ;

3、设  $A$  为  $n$  阶方阵, 且  $|A| = 2$ , 计算  $\left| A^* + \left(\frac{1}{3}A\right)^{-1} \right|$ ;

4、设  $\alpha_1 = (1, 2, 0)^T$ ,  $\alpha_2 = (1, a+2, -3a)^T$ ,  $\alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b)^T$ ,  $\beta = (1, 3, -3)^T$ , 求:  $a$ 、 $b$  为何值时,  $\beta$  能由  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示, 且表示唯一, 并求出表示式。

### 四、(14 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a - 3 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2 \end{cases}$$

- (1) 求:  $a$  为何值时, 方程组有唯一解、无解、有无穷多个解;  
 (2) 在方程组有无穷多个解时, 用其对应的齐次线性方程组的基础解系表示其通解。

五、(14 分) 已知实二次型  $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$ ,

(1) 写出  $f$  的矩阵  $A$ ;

(2) 求  $f$  的秩;

(3) 求正交变换  $X = PY$  (必须写出正交变换矩阵  $P$ ), 把  $f$  化为标准形。

### 六、证明题(共 10 分)

1、(6 分) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  是齐次线性方程组  $Ax = 0$  的一个基础解系, 证明:  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_1, \alpha_3 + \alpha_4$  也是该方程组的一个基础解系;

2、(4 分) 设  $A$  为  $2n+1$  阶方阵, 且  $AA^T = E$ ,  $|A| > 0$ , 证明:  $|A - E| = 0$ 。