

第二学期期末试卷A

一、填空题(本题24分,每题3分):

1. 设 A 、 B 为 3 阶方阵, 若 $|A|=2$, $|B|=-3$, 则 $|2A^*B^{-1}|=$ _____

2. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 3$, 则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & 3a_{12}-a_{13} \\ a_{21} & 2a_{22} & 3a_{22}-a_{23} \\ a_{31} & 2a_{32} & 3a_{32}-a_{33} \end{vmatrix} =$ _____

**3. 点 $(1, 2, 3)$ 到直线 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-1}$ 的距离是 _____

4. 已知 4 元非齐次线性方程组系数矩阵的秩为 3, η_1, η_2, η_3 是该方程组的 3 个解向量,

$\eta_1 + \eta_2 = (2, 2, 0, 4)^T$, $\eta_3 = (3, 1, 2, 3)$. 则方程组的通解为 _____

5. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$, 则 $f(A) =$ _____

6. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, 则 $A^{-1} =$ _____.

7. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\beta_1 = 2\alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_2 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, $\beta_3 = 2\alpha_3 - \alpha_1$, 则

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性 _____

**8. 在 $P^{2 \times 2}$ 中, 已知 $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是 $P^{2 \times 2}$

的基, 那么, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 在该基下的坐标为 _____

二、选择题(本题12分,每题3分)

*1. 直线 $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+4}{-7} = \frac{z}{3}$ 与平面 $4x - 2y - 2z = 3$ 的相关位置是()

(A) 垂直; (B) 平行; (C) 相交; (D) 直线在平面上

2. 若 A 可逆, 则 $(A^*)^{-1} =$ _____ ()

(A) $\frac{1}{|A|}A$ (B) $\frac{1}{|A|}A^{-1}$ (C) $|A|A$ (D) $|A|A^{-1}$

3. 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵, 且 $AB=O$, 则 A 和 B 的秩 ()

(A) 必有一个等于零; (B) 都小于 n ; (C) 一个小于 n , 一个等于 n ; (D) 都等于 n .

**4. 两个向量组生成子空间相同的充要条件是 ()

A. 两个向量组完全相同; B. 两个向量组包含的向量个数相同
C. 两个向量组具有相等的秩; D. 两个向量组等价

三、计算题(60分)

1 (10分) 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

2. (10分) 求解矩阵方程 $AX = A + X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. (10分) a, b 为何值时, 方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = a \\ 7x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = b \end{cases}$ 有解? 有解时求其通解。

4. (10分) 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 的秩和一个极大无关组, 并将其余向量用这个极大无关组表示。

5. (10分) 已知异面直线 $\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1}$ 与 $\frac{x+3}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-6}{4}$

求它们的距离及公垂线方程

6 (10分) 求过点 $P(2, -1, 3)$ 且与已知直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{1}$ 相交, 又与平面 $3x - 2y + z + 3 = 0$ 平行的直线方程。

四: 证明题(4分)

设 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\ n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\ n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n\ n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$, 证明线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1\ n-1}x_{n-1} = a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2\ n-1}x_{n-1} = a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n\ n-1}x_{n-1} = a_{nn} \end{cases}$$

无解。