河北工业大学 考试试题纸 （A 卷）

课程名称 线 性 代 数

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
题分	15	15	32	14	14	10					100

备注： 学生不得在 试题纸 上答 题(含填空题、选择题 等客 观题)

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $D=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}$，则 $D=$____________。

2、设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，且 $ad-bc=2$，则 $A^{-1}=$____________。

3、已知 ξ_1，ξ_2是三元齐次线性方程组 $Ax=0$ 的两个不同的解，且 $R(A)=2$，则该方程组的通解为 __________。

4、已知向量组 $\alpha_1=(1,0,0)^T$，$\alpha_2=(1,0,1)^T$，$\alpha_3=(1,2,0)^T$，$\alpha_4=(1,3,1)^T$，则 $R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ $=$__________。

5、设三阶方阵 A 与对角阵 $\Lambda=\mathrm{diag}(1,-1,3)$ 相似，则 $|A-2E|=$________。

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维列向量，且 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=1$，则 $|2\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=$（ ）。

(A) 1　　(B) 0　　(C) 2　　(D) 2^n

2、设 $|A_1|=2$，$|A_2|=1/2$，$A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}$，则 $|A^{-1}|=$（ ）。

(A) 1　　(B) 2　　(C) 1/2　　(D) 4

3、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量空间 R^3的一个基，则下列仍是 R^3的一个基的是（ ）。

(A) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ -2\alpha_2,\ -\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$　　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_1$

(C) $\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_1+2\alpha_3$　　(D) $\alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_1$

4、二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$是正定二次型，则 t 应满足（ ）。

(A) $-2<t<2$　　(B) $-2<t<0$　　(C) $0<t<1$　　(D) $-2<t<1$

5、设 A为 n 阶方阵，A^*为 A 的伴随矩阵，且 $R(A)=n-2$，则 A^*的秩为（ ）。

(A) $n-1$　　(B) $n-2$　　(C) 1　　(D) 0

三、计算题 (每小题 8 分，共 32 分)

1、已知 A_{ij} 是行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & -2 \\ -5 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 的元素 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3,4)$ 的代数余子式，计算 $A_{13}-3A_{23}+A_{33}$；

2、设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$，求矩阵 X，使其满足 $X=AX+B$；

3、设 A 为 n 阶方阵，且 $|A|=2$，计算 $\left|A^*+(\frac{1}{3}A)^{-1}\right|$；

4、设 $\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(1,a+2,-3a)^T$，$\alpha_3=(-1,-b-2,a+2b)^T$，$\beta=(1,3,-3)^T$，求：$a$、$b$ 为

何值时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示唯一，并求出表示式。

四、(14 分) 已知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=a-3 \\ x_1+ax_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+ax_3=-2 \end{cases},$$

（1） 求：a 为何值时，方程组有唯一解、无解、有无穷多个解；

（2） 在方程组有无穷多个解时，用其对应的齐次线性方程组的基础解系表示其通解。

五、（14 分） 已知实二次型 $f(x_1,x_2)=5x_1^2+4x_1x_2+2x_2^2$，

（1）写出 f 的矩阵 A；

（2）求 f 的秩；

（3）求正交变换 $X=PY$ （必须写出正交变换矩阵 P)，把 f 化为标准形。

六、证明题（共 10 分）

1、（6 分） 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系， 证明：$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，

$\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1$，$\alpha_3+\alpha_4$ 也是该方程组的一个基础解系；

2、（4 分） 设 A 为 $2n+1$ 阶方阵，且 $AA^T=E$，$|A|>0$，证明：$|A-E|=0$。

河北工业大学教务处

试题标准答案及评分标准用纸

课程名称:线性代数　　　　（ A 卷）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、-3；　2、$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$；　3、$k(\xi_1-\xi_2), k\in R$；　4、3；　5、3.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、C　2、A　3、B　4、D　5、D

三、解答题（每小题 8 分，共 32 分）

1、

$$A_{13}-3A_{23}+A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ ……………………………………………………………………………（ 3 分）

$=0$ ………………………………………………………………………………（ 8 分）

2、由 $X=AX+B$ 得

$(E-A)X=B$ ……………………………………………………………（ 2 分）

因 $(E-A,B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ……………………………………………………（6 分）

所以

$X=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ……………………………………………………………………（ 8 分）

3、因

$A^* = |A| A^{-1} = 2A^{-1}$, ……………………………………………………

………（2分）

所以

$A^* + (\frac{1}{3}$ $-\Big|$ $\Big|$ $\Big|$ ……………………………………………………$A)^{-1} =$ $-$

…（4分）

$=$ $|5A^{-1}|$ $=$ 5^n

$|A^{-1}|$ ……………………………………………………（6分）

$=$ 5^n

$A|^{-1} = \frac{5^n}{2}$ ……………………………………………………（8分）

4、记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，设

$\beta = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3$ ……………………………（2分）

解法一：
$$(A,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix}$$
…………………… ……………………（4分）

故当 $a \neq 0$ 且 $b \neq a$ 时，方程组有唯一解，即 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，且表示式唯一； ………（6分）

此时，$(A, \beta) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，

$\beta = (1-\frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2$. …………………… ……………………（8分）

解法二：

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{vmatrix} = a(a-b)$$ …………………… ………………… …（2 分）

故当 $a \neq 0$ 且 $b \neq a$ 时，方程组（1）有唯一解，即 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示式唯一；……（4 分）

此时，$(A,\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{pmatrix}$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1-\frac{1}{a} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{a} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ ………… ……………………（4 分）

$$\beta = (1-\frac{1}{a})\alpha_1 + \frac{1}{a}\alpha_2$$ ………… ……………………………… …………（8 分）

四（14 分）、

系数矩阵为 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，增广矩阵为 $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{pmatrix}$，

（1）解法一 $B \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3a-3 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & -2 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(a+2) & 3a-3 \end{pmatrix}$$ … …………………（4 分）

当 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时，$R(B) = R(A) = 3$，方程组有唯一解；

当 $a=-2$ 时，$B\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&-2\\0&3&-3&0\\0&0&0&-9\end{pmatrix}$，$R(B)=3, R(A)=2$，方程组无解；

当 $a=1$ 时，$B\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$R(B)=R(A)=1<3$，方程组有无穷多个解。………………（7 分）

解法二

$$|A|=\begin{vmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{vmatrix}=(a+2)(a-1)^2,$$ … ………… … ……………

……（4 分）

当 $a\neq1$ 且 $a\neq-2$ 时，$|A|\neq0$，$R(A)=3=R(B)$，方程组有唯一解；

当 $a=-2$ 时，$B=\begin{pmatrix}-2&1&1&-5\\1&-2&1&-2\\1&1&-2&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-2&-2\\0&3&-3&0\\0&0&0&-9\end{pmatrix}$，$R(B)=3, R(A)=2$，方程组无解；

当 $a=1$ 时，$B=\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\1&1&1&-2\\1&1&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$R(B)=R(A)=1<3$，方程组有无穷多个解。… …………… ……………

… ………………（7 分）

(2) 在方程组有无穷多个解时，得同解方程组 $x_1=-x_2-x_3-2$，取 $x_2=x_3=0$，得原方程组一特解

$\eta^*=(-2, 0, 0)^T$；……………………………………………

……………………（9 分）

在 $x_1=-x_2-x_3$ 中取 $(x_2, x_3)^T=(1, 0)^T, (0, 1)^T$，得原方程组对应齐次线性方程组的基础解系为 $\xi_1=(-1, 1, 0)^T$，

$\xi_2=(-1,0,1)^T$；………………………………………………

（12 分）

所以原方程组的通解为 $x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\eta^*$，$c_1, c_2$ 为任意常

数。 ……………………………………（ 14 分）

注：此题基础解系有很多种表示形式，改卷时需注意。

五（14 分）、（1）f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$； ………………………………………………………………（ 2 分）（2）因 $|A|=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=10-4\neq 0$，$R(A)=2$，所以 f 的秩为 2； ……………………………………………（ 3 分）

（3）由 $|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}5-\lambda & 2\\ 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-6)$，得 A 的特征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=6$。 ……………（ 6 分）

当 $\lambda_1=1$ 时，解方程 $(A-E)x=0$，由 $A-6E=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\xi_1=(-1,2)^T$；

当 $\lambda_2=6$ 时，解方程 $(A-6E)x=0$，由 $A-6E=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，得基础解系 $\xi_2=(2,1)^T$；

把 ξ_1,ξ_2 单位化，得 $p_1=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$，$p_2=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ ……………………………………………（ 12 分）

则有正交阵 $P=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5}\\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$和正交变换 $x=Py$，把 f 化为标准形

$f=y_1^2+6y_2^2$. ……………………………………………………………………………（ 14 分）

注：此题基础解系有很多种表示形式，故正交阵 P 有多种形式，改卷时需注意。

六、证明题

1、（6 分）证法一：由其次线性方程组解的性质知 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,

$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1$，$\beta_4=\alpha_3+\alpha_4$ 都是 $Ax=0$ 的解；……………………………………………………………（ 2 分）

则有 $B=AK$，$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，

$$K=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{pmatrix}，$$ 因 $|K|=-1\neq 0$, 所以 K 可逆,

或 $K\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, $R(K)=4$, 所以 K 可逆，从而 $R(B)=R(A)$.

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，故它们线性无关，$R(A)=4$，于是 $R(B)=4$，解向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关，故是该方程组的一个基础解系。 ………………………………………………（ 6 分）

证法二：由其次线性方程组解的性质知 $\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_3=\alpha_3+\alpha_4+\alpha_1$，$\beta_4=\alpha_3+\alpha_4$ 都是 $Ax=0$ 的解；……………………………………………………………（ 2 分）

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3+k_4\beta_4=0$，则有

$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_1+k_2+k_3+k_4)\alpha_3+(k_2+k_3+k_4)\alpha_4=0$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，它们线性无关，故有

$$\begin{cases}k_1+k_3=0\\k_1+k_2=0\\k_2+k_3+k_4=0\\k_1+k_2+k_3+k_4=0\end{cases}$$

其系数行列式为 $\begin{vmatrix}1&0&1&0\\1&1&0&0\\1&1&1&1\\0&1&1&1\end{vmatrix}=-1$，方程组有唯一零解 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$，所以

解向量组 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 线性无关，故是该方程组的一个基础解

系。……………………………………………………（6 分）

2、证法一：因为 $A^T A = E, |A| > 0$，所以 $|A| = 1$，……………………………………………………………（1 分）

则有 $|A - E| = |A||E - A^T| = |E - A| = (-1)^{2n+1}|A - E| = -|A - E|$，

故有 $|A - E| = 0$。…………………………………………………………………………………（4 分）

证法二：$|A - E| = |A||E - A^T| = |A||E - A| = (-1)^{2n+1}|A||A - E| = -|A||A - E|$，因此

$(1 + |A|)|A - E| = 0$。…………………………………………………………………………（3 分）

又因为 $|A| > 0$，所以有 $|A - E| = 0$。……………………………………………………………（4 分）