POD 和 DMD 算法

参考文献：cwrowley.princeton.edu/theses/tu.pdf

设每个样本为列向量u，共有 M 个采样点:

$$u_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iM} \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

假设采样点的网格大小为$V_i, i = 1 \cdots \mathrm{M}$，从而可以构造权矩阵：

$$G = diag(\frac{V_1}{V}, \frac{V_2}{V}, \cdots, \frac{V_{M-1}}{V}, \frac{V_M}{V}), V = \sum_i V_i \tag{1.2}$$

并在时间上存在 N+1 个样本，记为两组，大小均为 M*N，单位均为[U]，时间采样间隔假设为均匀：

$$\begin{aligned} U_{N-1} &= \left(u_0, u_1, \cdots, u_{N-2}, u_{N-1}\right) \\ U_N &= \left(u_1, u_2, \cdots, u_{N-1}, u_N\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

1 对U_{N-1}做 POD

1.1 求互相关矩阵C:

$$C = U_{N-1}^T \times G \times U_{N-1} \tag{1.4}$$

矩阵大小：N×N，单位$[U]^2$

1.2 求解互相关矩阵的特征值问题：

$$\begin{aligned} &\Phi_t \times C = \Lambda \times \Phi_t \\ &\Lambda = \Sigma^2 = diag(\lambda_i), i = 1 \cdots N \end{aligned} \tag{1.5}$$

其中Φ_t为 POD 时间模态矩阵，大小 NxN，无量纲，第 i 行ϕ_{ti}为对应特征值λ_i，奇异值为$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$的特征向量，也是第 i 个时间模态，两个 POD 时间模态间正交。

1.3 求出空间模态：

$$\Phi_s = U_{N-1} \times \Phi_t^T \times \Sigma^{-1} \tag{1.6}$$

空间模态矩阵Φ_s为大小 M×N，无量纲的矩阵，第 j 列ϕ_{sj}对应奇异值为σ_j，两个空间模态间G正交。

通常，因为 M>>N，为了节约空间，只求出 P<<N 个 POD 空间模态即可，P 的选取与能量覆盖程度有关。

1.4 求出重构的流场

先求出 P 阶的重构矩阵

$$R_P = \Phi_{t,P}^{T} \times \Phi_{t,P} \tag{1.7}$$

$\Phi_{t,P}$ 为前 P 个时间模态组成的矩阵，为 P×N 大小，无量纲。R_P 为 N×N 大小，无量纲。

则重构流场为：

$$U_R^P = U_{N-1} \times R_P \tag{1.8}$$

通常挑选若干时间输出进行对比即可。

2 做 DMD

2.1 用前 N 个采样表示第 N+1 个采样

即求解线性代数方程组：

$$\sqrt{G} \times U_{N-1} \times s = \sqrt{G} \times u_N \tag{1.9}$$

该方程超定，所以只能用最小二乘法来接，利用U_{N-1}的 SVD 分解结果可得：

$$\begin{aligned} s &= C^{-1} \times U_{N-1}^{T} \times G \times u_N \\ &= \Phi_t^{T} \times \Sigma^{-2} \times \Phi_t \times U_{N-1}^{T} \times G \times u_N \end{aligned} \tag{1.10}$$

其中 s 为 N×1 的列向量，无量纲。

这样就可以组成 N×N 大小的无量纲的友矩阵(companion matrix):

$$S = \begin{pmatrix} 0 & & & & s_0 \\ 1 & 0 & & & s_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 & s_{N-1} \\ & & & 1 & s_N \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

从而近似有：

$$A \times U_{N-1} = U_N \approx U_{N-1} \times S \tag{1.12}$$

本来我们要解算矩阵 A 的谱和模态，但是 A 是 M×M 大小的矩阵，特别困难，因此用较小的矩阵 S 代替(S 相当于 U_N 在 U_{N-1} 上的投影)，如果约等号成立，则有如下性质：

$$
\begin{gathered}
S \times a_i = \mu_i a_i \\
\Downarrow \\
A \times U_{N-1} \times a_i = \mu_i U_{N-1} \times a_i
\end{gathered}
\tag{1.13}
$$

其中 μ_i 为 S 的特征值，即 DMD 特征值，a_i 为矩阵 S 的特征向量，$b_i = U_{N-1} \times a_i$ 为矩阵 A 的特征向量，即 DMD 模态。根据代数基本定理，DMD 特征值必为一对一对的共轭复数 $\mu_k = r \pm iw$，对应着 $\frac{r}{\Delta T}$ 表示模态的增长率，$\frac{w}{\Delta T}$ 表示模态的频率，其中 ΔT 为采样时间间隔。

3 使用细节

1. 首先需要指定时间范围 t_0 和 t_f，至少包含 5 个最大周期
2. 其次要指定空间积分范围，默认为全计算域，可以进行切片（slice）降低数据维度或者修剪（clip）减少数据量，一般需要切掉定常流部分
3. 再次要指定是否进行网格体积加权
4. 指定需要的 POD 模态包含总能量的多少，比如 99.99%，从而确定需要输出多少阶的模态。流场均方根误差与原流场均方根值之比为剩余能量的平方根
5. 确定是否输出重构的流场，指定输出的时间步
6. 指定输出的 DMD 模态数量

4 适用范围

1. POD 对周期流动效果较好
2. DMD 适用于研究流场对某个激励的相应，能看出模态增长率和频率。