## 5.1 单调函数的可微性

**定义.** 设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族球, $E$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, 若对于 $\forall x \in E, \forall \delta > 0$, 存在球 $I \in \mathcal{B}$, $r(I) \leq \delta$, 使得 $x \in I$, 则称 $\mathcal{B}$ 为 $E$ 的 Vitali 覆盖.

若 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族闭球, 且含于开集 $G$, $m^*(G) < \infty$. 显然闭球的半径是有界的, 即 $\sup\limits_{B\in\mathcal{B}} r(B) < \infty$, 为叙述方便, 将其记为 $D$. 可以找到一个 $\mathcal{B}$ 的一个有限子集 $\mathcal{B}_1 = \{B_{1,i}\}$, 满足: (1) $\frac{D}{2^1} \leq r(B_{1,i}) \leq D, \forall i$; (2) $B_{1,i} \cap B_{1,j} = \emptyset, \forall i \neq j$; (3) 对于$\mathcal{B}$ 中任何不含于 $\mathcal{B}_1$ 且半径介于 $\frac{D}{2^1}$ 和 $D$ 的闭球 (如果存在的话), 一定和 $\mathcal{B}_1$ 中的某个闭球有交集. 构造过程如下: 在闭球集 $\mathcal{B}$ 中寻找半径介于 $\frac{D}{2^1}$ 和 $D$ 的闭球 $B_{1,1}$, 由上确界的定义, 这样的闭球一定存在, 将其收录进 $\mathcal{B}_1$, 继续寻找半径介于 $\frac{D}{2^1}$ 和 $D$ 的闭球, 此时要求不得与 $B_1^1$ 相交, 如果存在则记为 $B_{1,2}$ , 依次继续进行下去, 每一次都要求新加入的闭球不得与之前找到的闭球相交. 因为 $m^*(G) < \infty$, 所以这样的搜寻过程至多只能进行有限次, 最终得到 $\mathcal{B}_1$. 进而还可以得到 $\mathcal{B}_n = \{B_{n,i}\}$, 满足: (1) $\frac{D}{2^n} \leq r(B_{n,i}) \leq \frac{D}{2^{n-1}}, \forall i$; (2) $B_{n,i} \cap B_{n,j} = \emptyset, \forall i \neq j$; (3) 对于$\mathcal{B}$ 中任何不含于 $\mathcal{B}_n$ 且半径介于 $\frac{D}{2^n}$ 和 $\frac{D}{2^{n-1}}$ 的闭球 (如果存在的话), 一定和 $\mathcal{B}_n$ 中的某个闭球有交集, (4) $\mathcal{B}_n$ 中的闭球和 $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{n-1}$ 中的闭球不相交. (搜索方法相同, 只是搜寻时还要额外要求找到的闭球和 $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{n-1}$ 中的闭球也不相交, 如果搜索不到可以为空集.) 这样就得到了一个可数的闭球列 $\hat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots\}$. 对于任意 $B \in \mathcal{B}$ 且 $B \notin \mathcal{B}_n, \forall n$, 若 $\frac{D}{2^k} \leq r(B) \leq \frac{D}{2^{k-1}}$, 则 $B$ 必然与 $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ 中的至少一个闭球有交集, 否则 $\mathcal{B}_k$ 不满足(3). 假设和闭球 $B'$ 有交集, 则对于 $B$ 上的任意一点 $x$,易证 $x$ 到 $B'$ 的中心 $c_{B'}$ 的距离满足

$$d(x, c_{B'}) \leq 2r(B) + r(B')$$

由于 $r(B') \geq \frac{D}{2^k}$, 所以

$$\frac{r(B)}{r(B')} \leq \frac{r(B)}{\frac{D}{2^k}} \leq \frac{\frac{D}{2^k}}{\frac{D}{2^k}} = 2$$

因此 $d(x, c_{B'}) \leq 5r(B')$, 即把 $B'$ 的半径扩张 5 倍, 能够包括 $B$.

参考: https://zhuanlan.zhihu.com/p/26821322

**定理5.1.1.** (Vitali) 设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 其外测度 $m^*(E) < \infty$, $\mathcal{B}$ 是 $E$ 的 Vitali 覆盖, 且其中的球体全部为闭球, 则对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在有限个 $\mathcal{B}$ 中的闭球 $I_1, \ldots I_n \in \mathcal{B}$, 使得

$$m^*(E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \epsilon$$

证明: 易证存在开集 $G \supset E$, 使得 $m(G) < \infty$. 对于 $\forall x \in E$, 显然 $x \in G$, 进而存在 $\delta > 0$, 使得 $U(x, \delta) \subset G$, 由 Vitali 覆盖的定义可知, 对于 $\forall \delta' \in (0, \frac{\delta}{3})$, 存在 $I \in \mathcal{B}, r(I) \leq \delta'$, 使得 $x \in I$, 此时 $I \subset G$. 由此易证若去除掉 $\mathcal{B}$ 中没有包含于 $G$ 的闭球, 得到的闭球集仍构成 $E$ 的 Vitali 覆盖, 记为 $\mathcal{B}_G$, 显然 $\mathcal{B}_G$ 中所有闭球的半径有界, 记 $D = \sup\limits_{B\in\mathcal{B}_G} r(B)$. 可以按照引言中的方法, 可以构造一个 $\hat{\mathcal{B}}$, 记 $\hat{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots\}$, 则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m(\mathcal{B}_i) < m(G) < \infty$, 因此对于 $\forall \epsilon' > 0$, 必然存在 $n$ 使得

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} m(\mathcal{B}_i) < \epsilon'$$

此时, 对于 $\forall x \in \big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\big)$, 可知 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$ 是闭集, 进而 $\big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\big)$ 是开集, 所以存在 $\delta'' > 0$, 使得 $U(x, \delta'') \subset \big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\big)$, 由 Vitali 覆盖的定义可知, 存在 $\mathcal{B}_G$ 中的闭球 $I'$, $r(I') < \min(\frac{D}{2^n}, \frac{\delta''}{3})$, 使得 $x \in I'$, 此时 $I' \subset U(x, \delta'') \subset \big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\big)$. 设 $\frac{D}{2^k} \le r(I') \le \frac{D}{2^{k-1}}$, $k > n$, 则根据引言中的分析, 存在 $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_k$ 中的一个闭球 $J$ 与 $I'$ 相交, 且 $J$ 扩张 5 倍可包括 $I'$, 显然 $I'$ 与 $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ 全部无交集, 所以 $J \in \bigcup\limits_{i=n+1}^{k} \mathcal{B}_i$. 因此 $x \in I' \subset \bigcup\limits_{i=n+1}^{k} \mathcal{B}_{n+1}^{5r} \subseteq \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{B}_{n+1}^{5r}$, (其中 $\mathcal{B}_i^{5r}$ 表示把 $\mathcal{B}_i$ 中的每个闭球扩张成5倍), 进而有 $\big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\big) \subset \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{B}_{n+1}^{5r}$, $m\big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\big) \le 5^d \epsilon'$.

特别地, 对于满足 $\epsilon' \le \frac{\epsilon}{5^d}$, 此时

$$m\big(G - \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\big) \le \epsilon$$

此时得到的闭球列 $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n$ 即满足要求.

**推论**. 设 $E \subset \mathbb{R}^d$, 其外测度 $m^*(E) < \infty$, $\mathcal{B}$ 是 $E$ 的 Vitali 覆盖, 则对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在有限个 $\mathcal{B}$ 中的球 $I_1, \ldots I_n \in \mathcal{B}$, 使得

$$m^*(E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i) < \epsilon$$

证明: 对于开球和半开的球, 它们和它们的闭包具有相同的测度, 因此考虑它们的闭包所构成的 Vitali 覆盖, 不难得出此结论.

Vitali 有限覆盖定理还有另一种证法:

若 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族闭球, 且含于开集 $G$, $m^*(G) < \infty$. 显然闭球的半径是有界的, 即 $\sup\limits_{B \in \mathcal{B}} r(B) < \infty$. 从 $\mathcal{B}$ 中任取一个闭球记为 $B_0$. 在剩余的闭球中, 选取 $B_1$ 满足: $r(B_1) \ge \frac{1}{2}\lambda_1$, 其中 $\lambda_1 = \sup\{r(B) | B \cap B_0 = \emptyset, B \in \mathcal{B}\}$, ..., 选取 $B_k$ 满足: $r(B_k) \ge \frac{1}{2}\lambda_k$, 其中 $\lambda_k = \sup\{r(B) | B \cap B_i = \emptyset, i = 0, \ldots, k-1, B \in \mathcal{B}\}$ (如果找不到可以记为空集), 继续这个过程, 得到一列闭球 $\hat{\mathcal{B}} = \{B_0, B_1, \ldots\}$ (可能是有限个或可列个). 由 $G$ 是测度有限的开集可知, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} m(B_i) \le m(G) < \infty$, 因此当 $n \to \infty$ 时闭球的半径趋于 0, 因为 $r(B_k) \ge \frac{1}{2}\lambda_k$, 所以 $\lim\limits_{k \to \infty} \lambda_k = 0$ . 对于$\mathcal{B}$ 中剩余的闭球 $B$, 它必然与 $\hat{\mathcal{B}}$ 中至少一个闭球相交, 否则, $r(B) < \lambda_k$, $\forall k \in \mathbb{N}^+$, 所以 $r(B) \le \inf\limits_{k \in \mathbb{N}^+} \lambda_k = 0$, $r(B) = 0$, 矛盾. 设 $B$ 与 $B_1, \ldots, B_{k-1}$ 不相交, 与 $B_k$ 相交, $k \ge n+1$, 则对于 $B$ 上的任意一点 $x$,易证 $x$ 到 $B_k$ 的中心 $c_{B_k}$ 的距离满足

$$d(x, c_{B_k}) \le 2r(B) + r(B_k)$$

易证 $r(B) \le \lambda_k \le 2r(B_k)$, 所以

$$\frac{r(B)}{r(B_k)} \le \frac{\lambda_k}{r(B_k)} \le 2$$

因此 $d(x, c_{B_k}) \le 5r(B_k)$, 即把 $B_k$ 的半径扩张 5 倍, 能够包括 $B$.

证明: 易证存在开集 $G \supset E$, 使得 $m(G) < \infty$. 对于 $\forall x \in E$, 显然 $x \in G$, 进而存在 $\delta > 0$, 使得 $U(x, \delta) \subset G$, 由 Vitali 覆盖的定义可知, 对于 $\forall \delta' \in (0, \frac{\delta}{3})$, 存在 $I \in \mathcal{B}, r(I) \leq \delta'$, 使得 $x \in I$, 此时 $I \subset G$. 由此易证若去除掉 $\mathcal{B}$ 中没有包含于 $G$ 的闭球, 得到的闭球集仍构成 $E$ 的 Vitali 覆盖, 记为 $\mathcal{B}_G$, 显然 $\mathcal{B}_G$ 中所有闭球的半径有界. 可以按照引言中的方法, 可以构造一个 $\hat{\mathcal{B}} = \{B_0, B_1, \ldots\}$, 由 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} m(B_i) \leq m(G) < \infty$ 可知, 对于 $\forall \epsilon' > 0$, 必然存在 $n$ 使得

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} m(B_i) < \epsilon'$$

此时, 对于 $\forall x \in \big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\big)$, 可知 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ 是闭集, 进而 $\big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\big)$ 是开集, 所以存在 $\delta'' > 0$, 使得 $U(x, \delta'') \subset \big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\big)$, 由 Vitali 覆盖的定义可知, 存在 $\mathcal{B}_G$ 中的闭球 $I'$, $r(I') < \frac{\delta''}{3}$, 使得 $x \in I'$, 此时 $I' \subset U(x, \delta'') \subset \big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\big)$. 根据引言中的分析, $I'$ 必然与 $\hat{\mathcal{B}}$ 中至少一个闭球相交, 而显然 $I'$ 又不与 $B_0, \ldots, B_n$ 相交, 所以 $I'$ 必然与 $B_{n+1}, \ldots$ 中至少一个闭球相交, 设 $B$ 与 $B_1, \ldots, B_{k-1}$ 不相交, 与 $B_k$ 相交, $k \geq n+1$, 此时把 $B_k$ 扩张 5 倍可包括 $I'$. 因此 $x \in I' \subset B_k^{5r} \subseteq \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} B_i^{5r}$, 进而有 $\big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\big) \subset \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} B_{n+1}^{5r}$, $m\big(G - \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\big) \leq 5^d \epsilon'$.

特别地, 对于满足 $\epsilon' \leq \frac{\epsilon}{5^d}$, 此时

$$m\big(G - \bigcup_{i=1}^{n} B_i\big) \leq \epsilon$$

此时得到的闭球列 $B_1, \ldots, B_n$ 即满足要求.

**定义**. 设 $f(x)$ 是在 $x_0 \in \mathbb{R}^1$ 的某一邻域内有定义的实值函数. 定义

$$D^+ f(x_0) = \varlimsup_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$D^- f(x_0) = \varlimsup_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$D_+ f(x_0) = \varliminf_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$D_- f(x_0) = \varliminf_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

分别称之为 $f(x)$ 在 $x_0$ 点的右上导数, 左上导数, 右下导数, 左下导数.

显然 $D^+ f(x_0) \geq D_+ f(x_0)$, $D^- f(x_0) \geq D_- f(x_0)$. $f(x)$ 在 $x_0$ 可导等价于
$D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0) = D^- f(x_0) = D_- f(x_0) \neq \pm\infty$, 导数值
$f'(x) = D^+ f(x_0) = D_+ f(x_0) = D^- f(x_0) = D_- f(x_0)$

**定理5.1.2.** (Lebesgue) 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的单调递增的实值函数, 则 $f(x)$ 在 $(a, b)$ 上几乎处处可导, 且导函数 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且

$$\int_a^b f'(x) \mathrm{d}x \leq f(b) - f(a)$$

证明: 先证明 $(a, b)$ 上几乎处处有

$$D^+f(x_0) = D_+f(x_0) = D^-f(x_0) = D_-f(x_0)$$

定义 $E = \{x \in (a,b) | D^+f(x) > D_-f(x)\}$, 易证
$E = \bigcup\limits_{(r,s)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}} \{x \in (a,b) | D^+f(x) > r > s > D_-f(x)\}$ (可能对于某些 $(r,s)$ 为空集, 例如 $r \le s$ 的 $(r,s)$). 可知 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 是可列集, $E$ 和 $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ 对等, 所以 $E$ 是可列集. 下面证明对于任意一对 $(r,s)$, $r > s$, 成立

$$m^*(\{x \in (a,b) | D^+f(x) > r > s > D_-f(x)\}) = 0$$

记 $A = \{x \in (a,b) | D^+f(x) > r > s > D_-f(x)\}$, 可知对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使得 $m(G) - m^*(A) < \epsilon$. 对于 $\forall x \in A$, 显然 $x \in G$, 进而存在 $\delta > 0$, 使得 $U(x,\delta) \subset G$. 由于 $D_-f(x) < s$, 因此存在 $\delta' > 0$, 使得当 $h \le \delta'$ 时 $f(x) - f(x-h) < sh$, 由此可构造区间族 $\mathcal{U}_x = \{[x-h, x] | 0 \le h \le \min(\delta,\delta')\}$, 进而得到 $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{x\in(a,b)} \mathcal{U}_x$, 显然 $\mathcal{U}$ 是 $(a,b)$ 的 Vitali 覆盖, 且其中每个区间都含于 $G$. 由 Vitali 覆盖定理可知, 对于 $\epsilon$, 存在有限个闭区间 $I_1, \dots, I_n$, 其中 $I_i = [x_i - h_i, x_i]$, 使得 $m^*\big(A - \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i\big) < \epsilon$. 此时, 由 $\mathcal{U}$ 的定义, 可知

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_i - h_i)) < s\sum_{i=1}^{n} h_i < sm(G) < s(m^*(A) + \epsilon)$$

令 $B = A \cap \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i^\circ$, 则 $A = B \cup \big(A - \bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i^\circ\big)$, 进而有

$$m^*(A) \le m^*(B) + \epsilon$$

对于 $\forall x \in B$, 显然 $x$ 在某个 $I_i$ 中, 因此存在 $\sigma > 0$, 使得 $U(x,\sigma) \subset I_i$. 由于 $D^+f(x) > r$, 因此存在 $\sigma' > 0$, 使得当 $y \le \sigma'$ 时 $f(x+y) - f(x) > ry$, 由此可构造区间族
$\mathcal{V}_x = \{[x, x+y] | 0 \le y \le \min(\sigma,\sigma')\}$, 进而得到 $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{x\in(a,b)} \mathcal{V}_x$, 显然 $\mathcal{V}$ 是 $B$ 的 Vitali 覆盖, 且其中每个区间都含于 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_i^\circ$. 由 Vitali 覆盖定理可知, 对于 $\epsilon$, 存在有限个闭区间 $J_1, \dots, J_k$, 其中 $J_i = [x_i', x_i' + y_i]$, 使得 $m^*\big(B - \bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i\big) < \epsilon$. 此时 $B = \big(B - \bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i\big) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} J_i$, 因此 $m^*(B) \le \sum\limits_{i=1}^{k} y_i + \epsilon$.

由 $\mathcal{V}$ 的定义, 可知

$$\sum_{i=1}^{k}(f(x_i' + y_i) - f(x_i')) > r\sum_{i=1}^{k} y_i \ge r(m^*(B) - \epsilon) \ge r(m^*(A) - 2\epsilon)$$

由于 $f(x)$ 是单调递增的, 且每个 $J_i$ 都包含在某个 $I_j$ 中, 因此

$$\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_i - h_i)) \ge \sum_{i=1}^{k}(f(x_i' + y_i) - f(x_i'))$$

所以 $s(m^*(A) + \epsilon) \ge r(m^*(A) - 2\epsilon)$, 由 $\epsilon$ 的任意性可知

$$sm^*(A) \ge rm^*(A)$$

若 $m^*(A) > 0$, 则可以推出 $s \ge r$, 矛盾. 因此 $m^*(A) = 0$.

进而可推出 $m^*(E) = 0$, 即在 $(a,b)$ 上几乎处处成立 $D^+f(x) \le D_-f(x)$. 定义
$F = \{x \in (a,b) | D^-f(x) > D_+f(x)\}$, 同理可证明 $m^*(F) = 0$, 即在 $(a,b)$ 上几乎处处成立 $D^-f(x) \le D_+f(x)$. 进而在 $(a,b)$ 上几乎处处成立

$$D_+f(x)\le D^+f(x)\le D_-f(x)\le D^-f(x)\le D_+f(x)$$

即

$$D^+f(x_0)=D_+f(x_0)=D^-f(x_0)=D_-f(x_0)$$

接下来证明在 $(a,b)$ 上几乎处处成立

$$D^+f(x_0)=D_+f(x_0)=D^-f(x_0)=D_-f(x_0)<\infty$$

可知存在一个零测集 $E_0$, 使得在 $(a,b)-E_0$ 有
$D^+f(x_0)=D_+f(x_0)=D^-f(x_0)=D_-f(x_0)$. 对 $f(x)$ 进行延拓, 使得 $f(x)=f(a), x<a$, $f(x)=f(b), x>b$. 定义 $(a,b)$ 上的函数:

$$g(x)=\begin{cases} D^+f(x) & \text{if } x\in(a,b)-E_0 \\ 0 & \text{if } x\in E_0 \end{cases}$$

$$g_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)],\ \forall n\in\mathbb{N}^+$$

则在 $(a,b)-E_0$ 上有 $g_n\to g$ ( $g_n\to g$ a.e. 于 $(a,b)$), 因为 $f(x)$ 是单调递增的, 所以 $g_n\ge 0$.

$$\begin{aligned}
\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x &= n\int_a^b f(x+\frac{1}{n})-f(x)\mathrm{d}x \\
&= n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= n\left(\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\mathrm{d}x+\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\int_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= n\left(\int_b^{b+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= n\left(f(b)\cdot\frac{1}{n}-\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right) \\
&= f(b)-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

所以由 Fatou 定理可知,

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varliminf_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x &\le \varliminf_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \varliminf_{n\to\infty}\left(f(b)-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)\mathrm{d}x\right) \\
&\le \varliminf_{n\to\infty}\left(f(b)-n\int_a^{a+\frac{1}{n}} a\mathrm{d}x\right) \\
&= f(b)-f(a)<\infty
\end{aligned}$$

所以 $g$ 在 $(a,b)$ 上是可积的, 因此是几乎处处有限的. 可知存在一个零测集 $E_1$, 使得在
$(a,b)-E_1$ 有 $g(x)<\infty$, 易证在 $(a,b)-E_0-E_1$ 上有
$g(x)=D^+f(x)=D_+f(x)=D^-f(x)=D_-f(x)<\infty$, 即 $f(x)$ 可导且 $f'(x)=g(x)$. 易证 $E_0\cup E_1$ 是零测度集, 所以 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 且 $f'(x)=g(x)$ a.e. 于 $(a,b)$. 因此

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le f(b)-f(a)$$

证毕.

**定理5.1.3.** (Fubini) 设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上一列单调递增的函数, 并且函数项级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 $f(x)$, 则 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 且

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(x), \text{ a.e.}$$

证明: 定义 $r_n(x)=f(x)-\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x)$, 即证 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n'(x)=0$, a.e. 于 $(a,b)$.

由定理3.1.2, $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数列, 由定理3.2.3, $f$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数, 进而 $r_n$ 也是 $[a,b]$ 上的可测函数. 设函数项级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ 在 $[a,b]$ 除去零测度集 $E_0$ 上收敛于 $f(x)$, 即 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(x)$. 在 $[a,b]-E_0$ 上, 显然有 $r_n(x)=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)$, 且每个 $f_i(x)$ 是单调递增函数, 所以 $r_n(x)$ 是单调递增函数, 由 Lebesgue 定理可知, $r_n(x)$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 设在 $(a,b)-E_0$ 除去零测度集 $E_{r_n}$ 上可导. 因为 $f_n$ 单调递增, 由 Lebesgue 定理可知, $f_n$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 设在 $(a,b)$ 除去零测度集 $E_n$ 上可导. 因为$f_n$ 单调递增, 由 Lebesgue 定理可知, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f_n$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 设在 $(a,b)$ 除去零测度集 $E_f$ 上可导.记 $E=(a,b)-\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} E_n-\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_{r_n}-E_f$, 易证 $\big(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} E_n\big)\bigcup\big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_{r_n}\big)\bigcup E_f$ 是零测度集. 在 $E$ 上有

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i'(x)+r_n'(x)$$

$$r_n'(x)=f_n(x)+r_{n+1}'(x)\geq r_{n+1}'(x),\ \forall n\in\mathbb{N}^+$$

则 $\{r_n'\}$ 在 $E$ 上是非负的单调递减函数列, $r_n'\leq r_1'$. 由单调有界可知, 存在极限函数 $r'=\lim\limits_{n\to\infty} r_n'$. 由控制有界定理可知

$$\int_E r'(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E r_n'(x)\mathrm{d}x$$

可知 $r_n(x)$ 在 $E$ 上单调递增, 由 Lebesgue 定理有

$$\int_E r_n'(x)\mathrm{d}x\leq r_n(b)-r_n(a)$$

因此

$$\int_E r'(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E r_n'(x)\mathrm{d}x\leq\lim_{n\to\infty}(r_n(b)-r_n(a))=0$$

由定理4.2.7可知, $r'(x)=0$ a.e. 于 $E$, 显然也 a.e. 于 $(a,b)$, 证毕.

## 5.2 有界变差函数 (Functions of Bounded Variation)

**定义.** 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的实值函数, 若存在 $M\geq 0$, 使得对 $[a,b]$ 上的任一分割 $T$: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 总有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leq M$$

则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数, $[a,b]$ 上的有界变差函数全体构成的集合记为 $BV[a,b]$. 称 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ 为分割 $T$ 对应的全变差. 记所有分割对应的全变差的上确界为

$$\mathop{\mathbf{V}}_{a}^{b}(f)=\sup_{T}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

由定义可知, $f\in BV[a,b]$ 等价于 $\mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{b}(f)<\infty$.

**定理5.2.1**. (1) 区间 $[a,b]$ 上的单调函数是有界变差函数.

(2) $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的单调函数, 且满足 Lipschitz 条件

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le M|x_1-x_2|,\forall x_1,x_2\in[a,b]$$

则 $f(x)$ 是有界变差函数.

证明: (1) 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上是单调递增的函数, 则对于 $[a,b]$ 上的任一分割 $T$:
$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 总有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)-f(x_{i-1})=f(b)-f(a)$$

因此 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上是单调递减的函数的情况可以类似证明.

(2) 对于 $[a,b]$ 上的任一分割 $T$: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 总有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\le M\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|=M(b-a)$$

所以 $f(x)$ 是有界变差函数.

> *连续函数不一定是有界变差函数, 是连续函数但不是有界变差函数的例子: 设 $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$, $0<x\le 1$, $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 但 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是有界变差函数. 对于任意 $n\in\mathbb{N}^+$, 作 $[0,1]$ 的分割 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$:*
>
> $$0=0<\frac{2}{2n-1}<\frac{2}{2n-3}<\cdots<\frac{2}{5}<\frac{2}{3}<1=1$$
>
> *此时*
> $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\frac{2}{2n-1}+(\frac{2}{2n-1}+\frac{2}{2n-3})+\cdots+(\frac{2}{5}+\frac{2}{3})+\frac{2}{3}=2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{2}{2i-1}\ge 2\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}$
> *, 由数学分析的知识可以证明, 级数 $\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}$ 不收敛, 因此当 $n$ 趋于 $\infty$ 时,*
> $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$ *趋于 $\infty$, 因此 $f\notin BV[0,1]$.*
>
> *有界变差函数不一定是连续函数, 例如: $f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-1,0]\\ 1 & x\in(0,1]\end{cases}$, 它是单调递增的函数, 因此是有界变差函数, 但它不是连续函数.*

**定理5.2.2**. 下面给出有界变差函数的若干性质:

(1) 有界变差函数是有界函数.

(2) 若 $f \in BV[a,b], \alpha \in \mathbb{R}^1$, 则 $\alpha f \in BV[a,b]$, 并且

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(\alpha f) = |\alpha| \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f)$$

(3) 若 $f, g \in BV[a,b]$, 则 $f+g \in BV[a,b]$, 并且

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f+g) \le \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) + \mathop{\mathbf{V}}_a^b(g)$$

(4) 若 $f, g \in BV[a,b]$, 则 $fg \in BV[a,b]$.

(5) 若 $f \in BV[a,b]$, 对于 $\forall c \in [a,b]$, $f \in BV[a,c]$, $f \in BV[c,b]$, 且

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) = \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f) + \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f)$$

(6) 若 $f \in BV[a,b]$, 对于 $\forall c, \forall d \in [a,b]$, $c < d$, $f \in BV[c,d]$.

证明: (1) 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对于 $\forall M \ge 0$, 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 $|f(\xi)| \ge M$ , 存在分割 $T: 0 \le \xi \le 1$,
$|f(\xi) - f(a)| + |f(b) - f(\xi)| \ge 2|f(\xi)| - |f(a)| - |f(b)| \ge M - |f(a)| - |f(b)|$, 显然 $f(x)$ 不可能是有界变差函数.

(2) 可知存在 $M \ge 0$, 使得对 $[a,b]$ 上的任一分割 $T$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 总有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le M$$

则

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha f(x_i) - \alpha f(x_{i-1})| = |\alpha| \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \le |\alpha| M$$

显然 $\alpha f \in BV[a,b]$, 并且

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(\alpha f) = \sup_T \sum_{i=1}^{n} |\alpha f(x_i) - \alpha f(x_{i-1})| = |\alpha| \sup_T \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |\alpha| \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f)$$

因此

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(\alpha f) = |\alpha| \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f)$$

(3) 对于 $[a,b]$ 上的任一分割 $T$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) + g(x_i) - f(x_{i-1}) - g(x_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \le \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) + \mathop{\mathbf{V}}_a^b(g)$$

因此 $f+g \in BV[a,b]$, 并且

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f+g) \le \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f) + \mathop{\mathbf{V}}_a^b(g)$$

(4) 由(1)中的结论, $f, g$ 都是有界函数, 因此存在 $M \ge 0$ 使得 $|f| \le M$, $|g| \le M$. 对于 $[a,b]$ 上的任一分割 $T$: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 有

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})| &= \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i)-f(x_i)g(x_{i-1})+f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i)-f(x_i)g(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_{i-1})| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)||g(x_i)-g(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|g(x_{i-1})||f(x_i)-f(x_{i-1})| \\
&\le M\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_i)|+M\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_i)| \\
&\le M(\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f+g)+\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f+g))
\end{aligned}
$$

因此有 $fg\in BV[a,b]$.

(5) 对于 $[a,c]$ 的任一分割 $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, 和 $[c,b]$ 的任一分割 $\{x_i'\}_{i=1}^{m}$, 把它们合并后得到 $a=x_0<\cdots<x_n=c=x_0'<\cdots<x_m'=b$, 此时有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{m}|f(x_i')-f(x_{i-1}')|\le \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f)$$

因此 $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f)$, $\sum\limits_{i=1}^{m}|f(x_i')-f(x_{i-1}')|\le \mathop{\mathbf{V}}_c^b(f)$, 进而有 $f\in BV[a,c]$, $f\in BV[c,b]$

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^c(f)+\mathop{\mathbf{V}}_c^b(f)\le \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f)$$

接下来证明 $\mathop{\mathbf{V}}_a^c(f)+\mathop{\mathbf{V}}_c^b(f)\ge \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f)$: 对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 [a,b] 的一个分割 $T$: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\ge \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f)-\epsilon$$

在 $T$ 中插入分点 $c$ (如果之前没有的话), 则分别得到区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 的两个分割 $a=x_0<\cdots<x_k\le c$ 和 $c<x_{k+1}<\cdots<x_n=c$, 进而有

$$
\begin{aligned}
\mathop{\mathbf{V}}_a^b(f)-\epsilon &\le \sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\
&\le \sum_{i=1}^{k}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+|f(c)-f(x_k)|+|f(x_{k+1}-f(x_k))|+\sum_{i=k+1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \\
&\le \mathop{\mathbf{V}}_a^c(f)+\mathop{\mathbf{V}}_c^b(f)
\end{aligned}
$$

由 $\epsilon$ 的任意性可知 $\mathop{\mathbf{V}}_a^c(f)+\mathop{\mathbf{V}}_c^b(f)\ge \mathop{\mathbf{V}}_a^b(f)$.

(6) 由(5)可知 $f\in BV[c,b]$, 对于 $[c,b]$ 再次应用(5), 可知 $f\in BV[c,d]$.

定义. 由(5)的结论可知, $\mathop{\mathbf{V}}_a^c(f)$ 可以看作关于 $c$ 的函数, 称为 $f(x)$ 的变差函数, 可以记为 $\mathop{\mathbf{V}}_a^x(f)$ , $\forall x\in[a,b]$. 显然 $\mathop{\mathbf{V}}_a^x(f)$ 是单调递增的函数, 因为对于任意 $x_1,x_2\in[a,b]$, $x_1<x_2$, 有

$$\mathop{\mathbf{V}}_a^{x_2}(f)=\mathop{\mathbf{V}}_a^{x_1}(f)+\mathop{\mathbf{V}}_{x_1}^{x_2}(f)\ge \mathop{\mathbf{V}}_a^{x_1}(f)$$

> *定理的(2), (3)结论表明有界变差函数的线性组合仍是有界变差函数.*

**定理5.2.3.** (Jordan 分解定理) $f \in [a,b]$ 的充要条件是 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调递增的实值函数.

证明: 充分性: 由定理5.2.1, $g(x), h(x) \in BV[a,b]$, 由定理5.2.2可知, $f(x)$ 是有界变差函数.

必要性: 定义

$$g(x) = \frac{1}{2}(\overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + f(x))$$

$$h(x) = \frac{1}{2}(\overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - f(x))$$

显然 $f(x) = g(x) + h(x)$, 接下来证明 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是单调递增函数, 对于任意
$x_1, x_2 \in [a,b], x_1 < x_2$, 有 $f(x) \in BV[x_1, x_2]$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \overset{x_2}{\underset{x_1}{\mathbf{V}}}(f) = \overset{x_2}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - \overset{x_1}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f)$$

因此

$$\overset{x_2}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - \overset{x_1}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) \geq f(x_1) - f(x_2)$$

$$\overset{x_2}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - \overset{x_1}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) \geq f(x_2) - f(x_1)$$

整理得到

$$\overset{x_2}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + f(x_2) \geq \overset{x_1}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) + f(x_1)$$

$$\overset{x_2}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - f(x_2) \geq \overset{x_1}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - f(x_1)$$

所以 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是单调递增函数.

**推论.** 若 $f(x) \in BV[a,b]$, 则

(1) $f(x)$ 的间断点的全体是可数集.

(2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的.

(3) $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导且 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可积的.

证明: 结合4.4节的知识可以得证.

**定理5.2.4.** 设 $f \in BV[a,b]$, 则 $\overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f)$ 在 $[a,b)$ 上右连续的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上是右连续的.

证明: 充分性: 即证明对于 $\forall x_0 \in [a,b)$ 满足: 对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当
$x \in [x_0, x_0 + \delta]$ 时, 有 $|\overset{x}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f) - \overset{x_0}{\underset{a}{\mathbf{V}}}(f)| \leq \epsilon$.

若 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上是右连续的, 则对于 $\forall x_0 \in [a,b)$ 满足: 对于 $\forall \epsilon' > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使得当 $x \in [x_0, x_0+\delta']$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon'$. 由定义可知, 存在 $[x_0, x_0+\delta]$ 上的分割 $x_0 = t_0 < \cdots < t_n = x_0 + \delta$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| > \mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_0}^{x_0+\delta}(f) - \epsilon'$. 显然 $\sum\limits_{i=2}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| \le \mathop{\mathbf{V}}\limits_{t_1}^{x_0+\delta}(f)$. 进而有

$$\mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_0}^{x_0+\delta}(f) - \epsilon' - \mathop{\mathbf{V}}\limits_{t_1}^{x_0+\delta}(f) \le \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| - \sum_{i=2}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = |f(t_1) - f(t_0)|$$

因为 $|t_1 - x_0| \le \delta$, 因此有

$$\mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_0}^{t_1}(f) \le |f(t_1) - f(t_0)| + \epsilon' \le 2\epsilon'$$

由变差函数的单调性, 可知对于 $\forall t \in [x_0, t_1]$,

$$\mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{t}(f) - \mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{x_0}(f) = \mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_0}^{t}(f) \le \mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_0}^{t_1}(f) \le 2\epsilon'$$

取 $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$, 此时有

$$\mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{t}(f) - \mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{x_0} \le \epsilon$$

必要性: 若 $\mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{x}(f)$ 在 $[a,b)$ 上右连续, 则对于 $\forall x_0 \in [a,b)$ 满足: 对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in [x_0, x_0+\delta]$ 时, 有 $\mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{x}(f) - \mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{x_0}(f) \le \epsilon$. 此时

$$|f(x) - f(x_0)| \le \mathop{\mathbf{V}}\limits_{x}^{x_0}(f) = \mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{x}(f) - \mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{x_0}(f) \le \epsilon$$

**推论**. (1) 设 $f \in BV[a,b]$, 则 $\mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{x}(f)$ 在 $(a,b]$ 上左连续的充要条件是 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上是左连续的.

(2) 设 $f \in BV[a,b]$, 则 $\mathop{\mathbf{V}}\limits_{a}^{x}(f)$ 在 $(a,b)$ 上连续的充要条件是 $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上是连续的.

## 5.3 绝对连续函数 (Absolutely Continuous Functions) 与不定积分

### 5.3.1 绝对连续函数

**定义**. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的实值函数, 若对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^{n}$, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \le \delta$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \le \epsilon$$

则称 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数. $[a,b]$ 上的绝对连续函数的全体记为 $AC[a,b]$.

**定理5.3.1**. (1) 绝对连续函数是连续函数.

(2) 若 $f, g \in AC[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, 则 $\alpha f, f+g \in AC[a,b]$.

(3) 绝对连续函数是有界变差函数.

(4) 若 $f, g \in AC[a,b], \alpha \in \mathbb{R}^1$, 则 $fg \in AC[a,b]$.

证明: (1) 设 $f(x) \in AC[a,b]$, 等价于证明: 对于 $\forall x \in [a,b], \forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x'-x| \leq \delta$ 时, $|f(x') - f(x)| \leq \epsilon$. 由于 $f(x) \in AC[a,b]$, 所以对于 $\epsilon$, 存在 $\delta' > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$, 满足$\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \delta'$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \epsilon$$

所以当 $|x'-x| \leq \delta'$ 时, $|f(x') - f(x)| \leq \epsilon$. 所以 $\delta'$ 即满足要求, 证毕.

(2) 证明 $\alpha f \in AC[a,b]$: 当 $\alpha = 0$ 时显然成立, 下面证明 $\alpha \neq 0$ 的情形, 等价于证明对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \delta$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \frac{\epsilon}{|\alpha|}$$

由 $f \in AC[a,b]$ 可知, 对于正实数 $\frac{\epsilon}{|\alpha|}$, 存在 $\delta' > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \delta'$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \frac{\epsilon}{|\alpha|}$$

显然 $\delta'$ 即满足要求.

证明 $f + g \in AC[a,b]$: 等价于证明对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$, 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \delta$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) + g(b_i) - f(a_i) - g(a_i)| \leq \epsilon$$

易证对于 $\forall \epsilon' > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \leq \delta$, 有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| \leq \epsilon'$$

$$\sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)| \leq \epsilon'$$

此时

$$\sum_{i=1}^{n} |f(b_i) + g(b_i) - f(a_i) - g(a_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(b_i) - f(a_i)| + \sum_{i=1}^{n} |g(b_i) - g(a_i)| \leq 2\epsilon'$$

特别地, 对于 $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$, 此时

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)+g(b_i)-f(a_i)-g(a_i)|\leq\epsilon$$

(3) 设 $f(x)\in AC[a,b]$, 接下来证明 $f(x)\in BV[a,b]$. 任取正实数 $\epsilon$, 因为 $f(x)\in AC[a,b]$, 所以存在 $\delta>0$, 使得对于 $[a,b]$ 上的任意一族互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n}$, $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\leq\delta$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\leq\epsilon$$

取正整数 $k$ 满足 $(b-a)/k\leq\delta$, 把 $[a,b]$ $k$ 等分, 得到分割 $a=x_0<\cdots<x_k=b$, 此时每个子区间 $[x_{i-1},x_i], i=1,\ldots,k$, 的长度 $x_{i-1}-x_i\leq\delta$. 对于任意一个子区间 $[x_{i-1},x_i]$, 我们接下来证明: $f(x)\in BV[x_{i-1},x_i]$, 且 $\mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leq\epsilon$. 设 $x_{i-1}=y_0<\cdots<y_m=x_i$ 是 $[x_{i-1},x_i]$ 上的任一分割, 由于 $\{[y_{i-1},y_i]\}_{i=1}^{m}$ 是 $[a,b]$ 上的任意一族互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n}$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\leq\delta$, 所以

$$\sum_{i=1}^{m}|f(y_i)-f(y_{i-1})|\leq\epsilon$$

因此 $f(x)\in BV[x_{i-1},x_i]$, 且 $\mathop{\mathbf{V}}\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leq\epsilon$. 进而有

$$\mathop{\mathbf{V}}_{a}^{b}(f)=\sum_{i=1}^{k}\mathop{\mathbf{V}}_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leq k\epsilon$$

因此 $f(x)\in BV[a,b]$.

(4) 等价于证明:对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{n}$, 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\leq\delta$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)|\leq\epsilon$$

由(3)和定理5.2.2, 可知 $f,g$ 都是有界函数, 进而存在 $M\geq0$, 使得 $|f|\leq|M|$, $|g|\leq M$, 由 $f,g\in AC[a,b]$, 可知对于 $\forall\epsilon'>0$, 存在 $\delta>0$, 使得

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)-f(a_i)|\leq\epsilon'$$

$$\sum_{i=1}^{n}|g(b_i)-g(a_i)|\leq\epsilon'$$

此时, 同定理5.2.2(4)的证明, 可知

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)|\leq2M\epsilon'$$

特别地, 对于 $\epsilon'=\epsilon/2M$, 有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(b_i)g(b_i)-f(a_i)g(a_i)|\leq\epsilon$$

证毕.

**定理5.3.2.** $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件, 则 $f \in AC[a,b]$.

证明: 可知对于 $\forall \delta > 0$, 有: 对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$, 满足 $\sum\limits_{i=1}^n (b_i - a_i) \le \delta$, 有

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \le M\delta$$

所以对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在正实数 $\epsilon/M$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$, 满足 $\sum\limits_{i=1}^n (b_i - a_i) \le \delta$, 有

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \le \epsilon$$

证毕.

## 5.3.2 可积函数的变上限积分

**定理5.3.3.** 设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 则 $f$ 的变上限积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

是 $[a,b]$ 上的绝对连续函数.

证明: 即证明对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$, 满足 $\sum\limits_{i=1}^n (b_i - a_i) \le \delta$, 有

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| \le \epsilon$$

由积分的绝对连续性, 对于 $\epsilon$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于 $[a,b]$ 中的任意可测子集 $A$, $m(A) \le \delta$, 有 $\int_A |f(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon$. 此时, 对于 $[a,b]$ 上任意有限个互不相交的开区间 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$, 当 $\sum\limits_{i=1}^n (b_i - a_i) \le \delta$ 时, $m\big(\bigcup\limits_{i=1}^n [a_i,b_i]\big) \le \delta$, 因此

$$\int_{\bigcup\limits_{i=1}^n [a_i,b_i]} |f(x)|\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon$$

进而有,

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^n \Big|\int_{a_i}^{b_i} f(x)\mathrm{d}x\Big| \le \sum_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} |f(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon$$

证毕.

**引理5.3.1.** 设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 则 $f$ 的变上限积分

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 且满足: $\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

证明: 记 $F^+(x)=\int_a^x f^+(t)\mathrm{d}t$, $F^+(x)=\int_a^x f^-(t)\mathrm{d}t$, 显然, $F(x)=F^+(x)-F^-(x)$. 由于 $f^+$ 和 $f^-$ 非负, 对于 $\forall x_1\le x_2$, 由定理4.2.4可知, $F^+(x_1)\le F^+(x_2)$, $F^-(x_1)\le F^-(x_2)$, 所以 $F^+(x)$ 和 $F^-(x)$ 是单调递增函数. 由 Lebesgue 定理可知, $F^+(x)$ 和 $F^-(x)$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 且

$$\int_a^b (F^+(x))'\mathrm{d}x \le F^+(b)-F^+(a)=F^+(b)$$

$$\int_a^b (F^-(x))'\mathrm{d}x \le F^-(b)-F^-(a)=F^-(b)$$

进而有 $F(x)$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 且

$$\begin{aligned}\int_a^b |F'(x)|\mathrm{d}x &\le \int_a^b |(F^+(x))'|\mathrm{d}x+\int_a^b |(F^-(x))'|\mathrm{d}x\\ &=\int_a^b (F^+(x))'\mathrm{d}x+\int_a^b (F^-(x))'\mathrm{d}x\\ &\le F^+(b)+F^-(b)\\ &=\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

**定理5.3.4.** 设 $f$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 则 $f$ 的变上限积分

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 且 $F'(x)=f(x)$ a.e.

证明: 由引理5.3.1可知 $F(x)$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 接下来证明 $F'(x)=f(x)$ a.e. 若可证明 $\int_a^b|F'(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$, 则由定理4.2.7, 可知 $F'(x)=f(x)$ a.e.

假设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数, 则由数学分析的知识, 可知 $F(x)$ 在 $(a,b)$ 上可导, 且 $F'(x)=f(x)$. 若 $f(x)$ 不是 $[a,b]$ 上的连续函数, 由定理4.5.4可知, 对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^1$ 上具有紧支集的连续可积函数 $g(x)$, 使得

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\le\epsilon$$

记 $G(x)$ 是 $g(x)$ 的变上限积分, 则 $G(x)$ 在 $(a,b)$ 上可导, 且 $G'(x)=g(x)$ a.e., 此时,

$$\begin{aligned}\int_a^b |F'(x)-f(x)|\mathrm{d}x &= \int_a^b |F'(x)-f(x)-(G'(x)-g(x))|\mathrm{d}x\\ &\le \int_a^b |F'(x)-G'(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\\ &\le \int_a^b |(\int_a^b f(t)-g(t)\mathrm{d}t)'|\mathrm{d}x+\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

因为 $f,g$ 都是 $[a,b]$ 上的可积函数, 所以 $f-g$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数, 由引理5.3.1可知,

$$\int_a^b |(\int_a^b f(t)-g(t)\mathrm{d}t)'|\mathrm{d}x\le\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$$

进而有

$$\int_a^b |F'(x)-f(x)|\mathrm{d}x \le 2\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \le 2\epsilon$$

由 $\epsilon$ 的任意性可知, $F'(x)=f(x)$ a.e.

### 5.3.3 Newton-Leibniz 公式

**定理5.3.5**. 设 $f\in AC[a,b]$, 并且在 $(a,b)$ 上 $f'(x)=0$ a.e., 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数.

证明: 由于 $f\in AC[a,b]$, 所以对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于 $[a,b]$ 上任意互不相交的区间族 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^k$, $\sum\limits_{i=1}^k(b_i-a_i)\le\delta$, 满足 $\sum\limits_{i=1}^k|f(x_i)-f(x_{i-1})|\le\epsilon$. 存在一个零测度集 $E_0$, 使得在 $(a,b)-E_0$ 上 $f'(x)=0$. 进而对于 $\forall x\in(a,b)-E_0$, 和上文提到的 $\epsilon$, 存在 $\delta'>0$, 使得当 $|h|\le\delta'$ 时

$$|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}|\le\epsilon$$

由此可知当 $0<h\le\delta'$ 时,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\le\epsilon$$

可构造区间族 $\mathcal{U}_x=\{[x,h]|0<h\le\delta'\}$, 进而得到 $\mathcal{U}=\bigcup\limits_{x\in(a,b)}\mathcal{U}_x$. 易验证区间族 $\mathcal{U}$ 是 $(a,b)$ 的 Vitali 覆盖. 由 Vitali 有限覆盖定理, 对于上文中提到的 $\delta$, 存在 $\mathcal{U}$ 中有限个互不相交的闭区间 $[a_1,b_1],\cdots,[a_k,b_k]$, 使得 $m((a,b)-\bigcup\limits_{i=1}^k[a_i,b_i])\le\delta$. 对于分割
$a<a_1<b_1\cdots<a_k<b_k<b$, 显然有

$$|f(b)-f(a)|\le\sum_{i=1}^k|f(b_i)-f(a_i)|+\sum_{i=2}^k|f(a_i)-f(b_{i-1})|+|f(a_1)-f(a)|+|f(b)-f(b_k)|$$

其中由 $\mathcal{U}$ 的定义可知, $\sum\limits_{i=1}^k|f(b_i)-f(a_i)|\le\epsilon(b_i-a_i)\le(b-a)$. 此外, $(b_{i-1},a_i)$,
$i=2,\dots,k$, $(a,a_1)$, $(b_k,b)$ 的并集是 $((a,b)-\bigcup\limits_{i=1}^k[a_i,b_i])$, 测度不足 $\delta$, 因此有

$$\sum_{i=2}^k|f(a_i)-f(b_{i-1})|+|f(a_1)-f(a)|+|f(b)-f(b_k)|\le\epsilon$$

综上有 $|f(b)-f(a)|\le\epsilon+\epsilon(b-a)$. 由 $\epsilon$ 的任意性可知 $|f(b)-f(a)|=0$.

对于 $\forall c\in(a,b)$, $f\in AC[a,c]$, 并且在 $(a,c)$ 上 $f'(x)=0$ a.e., 根据以上结论可知,
$f(a)=f(c)$, 因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数.

**定理5.3.6**. (Newton-Leibniz) 设 $f\in AC[a,b]$, 则 $f$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导且 $f'$ 在 $[a,b]$ 上可积, 且

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$$

证明: 由定理5.3.1可知, $f(x)$ 是有界变差函数, 由定理5.2.3的推论, $f(x)$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导, 且 $f'$ 在 $[a,b]$ 上可积. $\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 是 $f'$ 的变上限积分, 由定理5.3.3可知,
$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\in AC[a,b]$. 由定理5.3.4可知, 在 $(a,b)$ 上 $\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 几乎处处可导且
$\left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)'=f'(x)$, a.e. 构造函数

$$\phi(x)=f(x)-f(a)-\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

由定理5.2.2可知, $\phi(x)\in AC[a,b]$. 此外有

$$\phi'(x)=f'(x)-\Big(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\Big)'=0\text{ a.e.}$$

由定理5.3.5可知, $\phi(x)$ 为常数. 代入 $x=a$, 得到 $\phi(a)=0$, 所以 $\phi(x)=0$, 证毕.

综合定理5.3.4和 Newton-Leibniz 公式可知, 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上可积的实值函数, 则 $f(x)$ 的变上限积分 $F(x)$ 在 $(a,b)$ 上几乎处处可导且 $F'(x)=f(x)$ a.e., 且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=F(x)-F(a)$$

**定理5.3.7.** (分部积分公式) 设 $f,g\in AC[a,b]$, 则成立

$$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证明: 由定理5.3.1, $fg\in AC[a,b]$, 由定理5.3.6, 有

$$f(b)g(b)-f(a)g(a)=\int_a^b (f(x)g(x))'\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

证毕.