4.1 Lebesgue 积分的定义

4.1.1 简单函数的 Lebesgue 积分

定义. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n\chi_{E_n}(x)$, 是$E$ 上的简单函数, 则定义 $f(x)$ 在 E 上的 Lebesgue 积分定义为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{N}a_n m(E_n)$$

定理4.1.1. f 和 g 是可测集 E 上的简单函数, 则

(1) 若 $f\le g$, $\int_E f(x)\mathrm{d}x\le\int_E g(x)\mathrm{d}x$

(2) 对于任意 $c\in\mathbb{R}^1$, $\int_E cf(x)\mathrm{d}x=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$

(3) $\int_E(f(x)+g(x))\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x$

证明: (1) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\chi_{A_i}(x), g(x)=\sum\limits_{j=1}^{q}b_j\chi_{B_j}(x)$, 可以得到 E 的可测分割 $\{C_n\}=\{A_i\cap B_j|1\le i\le p,1\le j\le q\}$, 则在每一个 C_n 上都有 $f(x)\le g(x)$, 根据简单函数 Lebesgue 积分的定义可知结论成立.

(2) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}a_n\chi_{E_n}(x), cf(x)=\sum\limits_{n=1}^{N}ca_n\chi_{E_n}(x)$,
$\int_E cf(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{N}ca_n m\big(\chi_{E_n}(x)\big)=c\sum\limits_{n=1}^{N}a_n m\big(\chi_{E_n}(x)\big)=c\int_E f(x)\mathrm{d}x$

(3) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{p}a_i\chi_{A_i}(x), g(x)=\sum\limits_{j=1}^{q}b_j\chi_{B_j}(x)$, 可以得到 E 的可测分割 $\{C_n\}=\{A_i\cap B_j|1\le i\le p,1\le j\le q\}$, 进而有

$$\begin{aligned}\int_E f(x)+g(x)\mathrm{d}x&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(a_i+b_j)m(A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_i\sum_{j=1}^{q}m(A_i\cap B_j)+\sum_{j=1}^{q}b_j\sum_{i=1}^{p}m(A_i\cap B_j)\\&=\sum_{i=1}^{p}a_i m(A_i)+\sum_{j=1}^{q}b_j m(B_j)\\&=\int_E f(x)\mathrm{d}x+\int_E g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

4.1.2 一般可测函数的 Lebesgue 积分

定理4.1.2. 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列单调递增的非负简单函数列, 且一致收敛于 $f(x)$ (即 $f_n \uparrow f$), 则:

(1) 对于 E 上的任意简单函数 g, 若 $f(x) \geq g(x), \forall x \in E$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geq \int_E g(x)\mathrm{d}x$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \sup\{\int_E g(x)\mathrm{d}x | g(x)$ 是简单函数且 $g(x) \leq f(x), \forall x \in E\}$

证明: (1) 对任意正整数 n 定义 $E_n = \{x \in E | f_n(x) \geq \epsilon g(x)\}, 0 < \epsilon < 1$, 易证 $\{E_n\}$ 是单调递增的集列, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ (否则, 若 $x \in E - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则 $f_n(x) < \epsilon f(x), \forall n \in \mathbb{N}^+$, 进而有 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) < \epsilon f(x)$, 与 $f(x) \geq g(x), \forall x \in E$ 矛盾.),

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x \geq \int_E f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x \geq \int_E \epsilon g(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x = \epsilon \int_E g(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x$$

设 $g(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}(x)$, $\{A_i\}$ 是 E 的一个可测分割, 则

$$g(x)\chi_{E_n}(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i \cap E_n}(x)$$

$$\int_E g(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i \cap E_n)$$

因为 $\{E_n\}$ 是单调递增的集列, 所以 $\{A_i \cap E_n\}$ 也是一个单调递增的集列, 易证 $A_i = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_i \cap E_n)$ ($\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(A_i \cap E_n) = A_i \cap \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = A_i \cap E = A_i$). 因此

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{k} a_i \lim_{n\to\infty} m(A_i \cap E_n) = \sum_{i=1}^{k} a_i m(A_i) = \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

结合简单函数 Lebesgue 积分的单调性, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f(x)\mathrm{d}x \geq \epsilon \lim_{n\to\infty} \int_E g(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x = \epsilon \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

由 ϵ 的任意性可知

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f(x)\mathrm{d}x \geq \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

(2) 证明 $\leq$ 的关系成立:

$f_n(x) \leq f(x), \forall x \in E$, 因此 $f_n(x) \in \{g(x) | g(x)$ 是简单函数且 $g(x) \leq f(x), \forall x \in E\}$, 因此 $\leq$ 关系成立.

证明 $\geq$ 关系成立:

对于任意 $g(x) \in \{g(x) | g(x)$ 是简单函数且 $g(x) \leq f(x), \forall x \in E\}$, 由(1)中的结论有 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geq \int_E g(x)\mathrm{d}x$, 因此 $\geq$ 关系成立.

定义. 对于可测集 E 上的非负可测函数 f, 定义其 Lebesgue 积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sup\{\int_E g(x)\mathrm{d}x | g(x) \text{ 是简单函数且 } g(x) \le f(x), \forall x \in E\}$$

由定理4.1.2可知, 对于任意一致收敛到 f 的单调递增非负简单函数列 $\{f_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$, 即 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 可以表示成 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x$, $f_n \to f$. 若 $\int_E f\mathrm{d}x < \infty$, 则称 f 在 E 上是可积的.

定义. 对于可测集 E 上一般的可测函数 f, 认为当 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 至少有一个是有限值时, 其 Lebesgue 积分存在, 定义其 Lebesgue 积分为

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x$$

若 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x$ 都是有限值, 即 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$ 是有限值时, 称 f 在 E 上是可积的.

可测集 E上的 Lebesgue 可积函数全体构成的集合记为 $L(E)$.

> *积分存在和可积分的区别: 当 f 的积分存在时, 其积分值可能是有限的, 也可能是 ±∞, 只有当 f 可积的时候, 其积分值才必然是有限的. 非负可测函数的积分总是存在的, 但积分值可能是 ±∞, 之所以允许积分值为 ±∞, 是因为这样会便于叙述.*

4.2 Lebesgue 积分的运算性质与可积性的讨论

定理4.2.1. 设 f 和 g 是可测集 E 上的非负可测函数, 则

(1) 对任意 $c \ge 0$, $\int_E cf(x)\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x$

(2) $\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$

(3) 若在 E 上 $f \le g$, a.e., 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \le \int_E g(x)\mathrm{d}x$

证明: (1) 由定理3.3.2可知, 存在 E 上单调递增的非负简单函数列 $f_n \uparrow f$, 进而 $cf_n \uparrow cf$, 因此

$$\int_E cf(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E cf_n(x)\mathrm{d}x = c\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

(2) 由定理3.3.2可知,存在 E 上单调递增的非负简单函数列 $f_n \uparrow f$, $g_n \uparrow g$, 进而 $f_n + g_n \uparrow f + g$,

$$\begin{aligned}\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty}\int_E (f_n(x)+g_n(x))\mathrm{d}x \\ &= \lim_{n\to\infty}[\int_E f_n(x)\mathrm{d}x + \int_E g_n(x)\mathrm{d}x] \\ &= \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

(3) 记 $F^+ = \{p(x)|p(x) \text{ 是简单函数且 } p(x) \le f(x), \forall x \in E\}$, $G^+ = \{p(x)|p(x) \text{ 是简单函数且 } p(x) \le g(x), \forall x \in E\}$, 对任意 $p(x) \in F^+, p(x) \in G^+$, 因此 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sup\{\int_E p(x)\mathrm{d}x | p(x) \in F^+\} \le \sup\{\int_E p(x)\mathrm{d}x | p(x) \in F^+\} = \int_E g(x)\mathrm{d}x$

引理4.2.1 设 f 和 g 是可测集 E 上的可测函数.

(1) 若 $g \in L(E)$, 并且在 E 上 $f \leq g$ a.e. 或 $f \geq g$ a.e., 则 f 在 E 上的积分存在.

(2) 若 $g \in L(E)$, 并且在 E 上 $|f| \leq g$ a.e., 则 $f \in L(E)$.

(3) $f \in L(E)$ 当且仅当 $|f| \in L(E)$.

(4) 若 $m(E) < \infty$, f 是 E 上的有界可测函数, 则 $f \in L(E)$.

证明:

(1) 若 $f \leq g$ a.e. 于 E, 则 $f^+ \leq g^+$ a.e., 由于 $g \in L(E)$, $\int_E g^+(x)\mathrm{d}x < \infty$

由定理4.2.1可知, $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x < \infty$, f 在 E 上的积分存在.

若 $f \geq g$ a.e. 于 E, 则 $f^- \leq g^-$ a.e., 由于 $g \in L(E)$, $\int_E g^-(x)\mathrm{d}x < \infty$

由定理4.2.1可知, $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x < \infty$, f 在 E 上的积分存在.

(2) 由 (1) 的结论可知, $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x < \infty$, $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x < \infty$, 即 $f \in L(E)$.

(3) 充分性: $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x < \infty$, 则 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x < \infty$, $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x < \infty$

必要性: 若 $f \in L(E)$, 则 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x < \infty$, $\int_E f^-(x)\mathrm{d}x < \infty$, 从而 $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x < \infty$, 即 $|f| \in L(E)$.

(4) 由于 f 是 E 上的有界函数, 因此存在 $M \geq 0$, $|f(x)| \leq M$ 在 E 上满足, 即 $f^+ \leq M$, $f^- \leq M$, 定义 $g(x) \equiv M$, 则

$$
\begin{aligned}
\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \\
&\leq \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \\
&\leq 2\int_E M\mathrm{d}x = 2Mm(E) < \infty
\end{aligned}
$$

因此 $f \in L(E)$.

定理4.2.2. 设 f 在可测集 E 上的积分存在, A 是 E 的可测子集, 则 f 在 A 上的积分存在, 且

$$
\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x
$$

证明: 当 f 是非负简单函数时, 设 $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}(x)$, 则 $\int_A f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n a_i m(A \cap E_i)$, 显然 $f(x)\chi_A(x)$ 也是简单函数, $f(x)\chi_A(x) = \sum_{i=1}^n a_i\chi_{A\cap E_i}(x)$, 则 $\int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n a_i m(A \cap E_i)$.

当 f 是非负可测函数时, 根据定理3.3.2, 存在单调递增的非负简单函数列 $f_n \uparrow f$, 显然有 $f_n\chi_A \uparrow f\chi_A$, 则

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x$$

当 f 是一般可测函数时, 若 f 的积分存在, 不妨设 $\int_E f^+(x)\mathrm{d}x < \infty$,

$$\int_A f^+(x)\mathrm{d}x = \int_E f^+(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x \le \int_E f^+(x) < \infty$$

因此 f 在 A 上的积分存在, 且

$$\begin{aligned}\int_A f(x)\mathrm{d}x &= \int_A f^+(x)\mathrm{d}x - \int_A f^-(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E f^+(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

证毕.

定理4.2.3. (线性性) 若 $f, g \in L(E)$, c 是常数, 则 cf, $f+g \in L(E)$, 并且

$$\int_E cf(x)\mathrm{d}x = c\int_E f(x)\mathrm{d}x$$

$$\int_E (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x$$

证明: 由引理4.2.1, $f \in L(E)$, 因此 $|f| \in L(E)$,

$$\int_E |cf(x)|\mathrm{d}x = \int_E |c||f(x)|\mathrm{d}x = |c|\int_E |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$$

因此 $|cf| \in L(E)$, $cf \in L(E)$.

由 $f, g \in L(E)$, $|f| \in L(E)$, $|g| \in L(E)$,

$$\int_E |f(x)+g(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)| + |g(x)|\mathrm{d}x = \int_E |f(x)|\mathrm{d}x + \int_E |g(x)|\mathrm{d}x < \infty$$

因此 $|f+g| \in L(E)$, $f+g \in L(E)$.

(1) 当 $c \ge 0$ 时, $(cf)^+ = cf^+$ 和 $(cf)^- = cf^-$ 都是非负可测函数, 进而有

$$\begin{aligned}\int_E cf(x)\mathrm{d}x &= \int_E (cf)^+(x)\mathrm{d}x - \int_E (cf)^-(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_E cf^+(x)\mathrm{d}x - \int_E cf^-(x)\mathrm{d}x \\ &= c\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - c\int_E f^-(x)\mathrm{d}x \\ &= c\int_E f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当 $c < 0$ 时, $(cf)^+ = -cf^-$ 和 $(cf)^- = cf^+$ 都是非负可测函数, 进而有

$$
\begin{aligned}
\int_E cf(x)\mathrm{d}x &= \int_E (cf)^+(x)\mathrm{d}x - \int_E (cf)^-(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_E -cf^-(x)\mathrm{d}x - \int_E -cf^+(x)\mathrm{d}x \\
&= -c\int_E f^+(x)\mathrm{d}x - (-c)\int_E f^-(x)\mathrm{d}x \\
&= c\int_E f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

(2) $f+g=(f+g)^+-(f+g)^-=(f^+-f^-)-(g^+-g^-)$, 进而
$(f+g)^++f^-+g^+=(f+g)^-+f^++g^-$

因此

$$
\int_E (f+g)^+(x)+f^-(x)+g^+(x)\mathrm{d}x = \int_E (f+g)^+(x)\mathrm{d}x + \int_E f^-(x)\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\mathrm{d}x
$$

$$
\int_E (f+g)^-(x)+f^+(x)+g^-(x)\mathrm{d}x = \int_E (f+g)^-(x)\mathrm{d}x + \int_E f^+(x)\mathrm{d}x + \int_E g^-(x)\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
\int_E (f+g)^+(x)\mathrm{d}x - \int_E (f+g)^-(x)\mathrm{d}x &= \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x + \int_E g^+(x)\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$
\int_E f(x)+g(x)\mathrm{d}x = \int_E (f+g)^+(x)\mathrm{d}x \int_E -(f+g)^-(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_E g(x)\mathrm{d}x
$$

定理4.2.4.(单调性). 设 f, g 在可测集 E 上的积分存在, 则

(1) 若 $f \le g$ a.e. 于 E, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x \le \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 若 $f = g$ a.e. 于 E, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

(3) 若 $f \ge 0$ a.e. 于 E, A 和 B 是 E 的可测子集, 并且 $A \subseteq B$, 则 $\int_A f(x)\mathrm{d}x \le \int_B f(x)\mathrm{d}x$.

(4) 若 $f=0$ a.e. 于 E, 则 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

(5) 若 $m(E)=0$, 则对 E 上的任意可测函数 f, 有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

证明: (1) 显然 $f^+ \le g^+$ a.e., $f^- \ge g^-$ a.e., 因此

$$
\int_E f^+(x)\mathrm{d}x \le \int_E g^+(x)\mathrm{d}x
$$

$$
\int_E f^-(x)\mathrm{d}x \ge \int_E g^-(x)\mathrm{d}x
$$

$$
\begin{aligned}
\int_E f(x)\mathrm{d}x &= \int_E f^+(x)\mathrm{d}x - \int_E f^-(x)\mathrm{d}x \\
&\le \int_E g^+(x)\mathrm{d}x - \int_E g^-(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_E g(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

(2) $f \le g$ a.e. 于 $E \to \int_E f(x)\mathrm{d}x \le \int_E g(x)\mathrm{d}x$

$f \ge g$ a.e. 于 $E \to \int_E f(x)\mathrm{d}x \ge \int_E g(x)\mathrm{d}x$

因此 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

(3)

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x \le \int_E g(x)\chi_A(x)\mathrm{d}x \le \int_B g(x)\mathrm{d}x$$

(4) 由 (2) 的结论, $\int_E f(x)\mathrm{d}x = \int_E 0\mathrm{d}x = 0$.

(5) 若 $m(E) = 0$, 则对 E 上的任意可测函数 f, 它在 E 除去一个零测集 E 上 (即 $\emptyset$ 上) 等于 0 , 即 $f = 0$, a.e. 于 E, 由(4)的结论可知 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$.

定理4.2.5. 若 $f \in L(E)$, 则

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$$

证明: $-|f| \le f \le |f|$,

$$-\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \le \int_E f(x)\mathrm{d}x \le \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$$

$$\left|\int_E f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_E |f(x)|\mathrm{d}x$$

由(2)可进一步得到: 若 $f = g$ a.e. 于 E, $f \in L(E)$, 则 $g \in L(E)$.

引理4.2.2. (Chebyshev 不等式) f 是可测集 E 上的可测函数, 则对任意 $\lambda > 0$ 有

$$m\big(E(|f(x)| \ge \lambda)\big) \le \frac{1}{\lambda}\int_E |f(x)|\mathrm{d}x$$

证明:

$$\begin{aligned} m\big(E(|f(x)| \ge \lambda)\big) &= m\big(E(\frac{1}{\lambda}|f(x)| \ge 1)\big) \\ &= \int_{E(\frac{1}{\lambda}|f| \ge 1)} 1\mathrm{d}x \\ &\le \int_{E(\frac{1}{\lambda}|f(x)| \ge 1)} \frac{1}{\lambda}|f|\mathrm{d}x \\ &\le \frac{1}{\lambda}\int_E |f(x)|\mathrm{d}x \end{aligned}$$

证毕.

定理4.2.6. 若 $f \in L(E)$, 则 f 在 E 上几乎处处有限.

证明: 即证 $E(f = \infty)$ 的测度为 0. 由引理4.4.1, $|f| \in L(E)$, 设 $A = E(f = \infty)$, $A_k = E(|f| \ge k), \forall k \in \mathbb{N}^+$, 则 $A \subseteq A_k, \forall k \in \mathbb{N}^+$, 由 Chebyshev 不等式得,

$$0 \le m(A) \le m(A_k) \le \frac{1}{k}\int_E |f(x)|\mathrm{d}x$$

由于 $|f| \in L(E)$, $\int_E |f(x)|\mathrm{d}x < \infty$, 令 $k \to \infty$, $0 \le m(A) \le 0$, 即 $m(A) = 0$, 证毕.

定理4.2.7. 若 $f \ge 0$ a.e. 于 E, 且 $\int_E f(x)\mathrm{d}x = 0$, 则 $f = 0$ a.e. 于 E.

证明: 即证 $E(f>0)$ 的测度为 0, 设 $A=E(f>0)$, $A_k=E(f\geq\frac{1}{k})$, $\forall k\in\mathbb{N}^+$, 易证 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_k$, 由 Chebyshev 不等式得,

$$0\leq m(A)\leq m(A_k)\leq k\int_E f(x)\mathrm{d}x=0$$

$0\leq m(A)\leq 0$, 即 $m(A)=0$, 证毕.

> *该定理给我们的启示: 若要证明可测集 E 上的可测函数 f 和 g 满足 $f=g$ a.e. 于 E, 只需证明 $\int_E|f-g|\mathrm{d}x=0$, 再由该定理即可得到 $f=g$ a.e. 于 E.*

定理4.2.8. 设 $f\in L(E)$, 则对任意 $\epsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使得当 $A\subset E$ 并且 $m(A)<\delta$ 时,

$$\int_A|f(x)|\mathrm{d}x<\epsilon$$

证明: 当 f 是简单函数时, 设 $|f|\leq M, x\in E$, 取任意可测集 $A\subset E, m(A)\leq\epsilon/M$, 有

$$\int_A|f(x)|\mathrm{d}x<\int_A M\mathrm{d}x=Mm(A)=\epsilon$$

当 f 不是简单函数时, 由第三章知识可知 $|f|$ 也是可测函数, 且存在 E 上的非负简单函数列 $f_n\uparrow f$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x$$

因此对于 $\epsilon/2$, 存在 N, 使得当 $n\geq N$ 时

$$|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x-\int_E|f(x)|\mathrm{d}x|=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x-\int_E f_n(x)\mathrm{d}x<\epsilon/2$$

对于 f_N, 其是非负简单函数, 因此由刚刚证明的结论, 对于 $\epsilon/2$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $A\subset E$ 并且 $m(A)<\delta$ 时 $\int_A f_N(x)\mathrm{d}x<\epsilon/2$. 进而在 A 上, 有 $\int_E|f(x)|\mathrm{d}x<\int_E f_n(x)\mathrm{d}x+\epsilon/2<\epsilon$.

定理4.2.9. (积分的平移不变性) 设 $f\in L(\mathbb{R}^n)$, 对于 $\forall h\in\mathbb{R}^n$, $f(x+h)\in L(\mathbb{R}^n)$, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x+h)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x$$

证明: 第1章已证明, $\{x\in\mathbb{R}^n|f(x+h)>a\}=\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)>a\}-h$, 第3章已证明, 可测函数经过平移仍是可测函数, 因此 $f(x+h)$ 是可测的. 设 f 是简单函数, $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}(x)$,

$$f(x+h)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i}(x+h)=\sum_{i=1}^{n}a_i\chi_{E_i-h}(x)$$

由测度的平移不变性可知

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x+h)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}a_i m(E_i-h)=\sum_{i=1}^{n}a_i m(E_i)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x$$

当 f 是非负可测函数时, 存在单调递增的非负简单函数列 $f_n\uparrow f$, 此时 $f_n(x)\uparrow f(x)$, $f_n(x+h)\uparrow f(x+h)$此时

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x+h)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_n(x+h)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\mathrm{d}x$$

当 f 是一般可测函数时,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+h)\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x+h)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} f^-(x+h)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} f^+(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

证毕.

4.3 函数列 Lebesgue 积分的收敛性

我们首先将定理4.1.2中的定理中的单调递增的非负简单函数列 $\{f_n\}$ 推广到一般的单调递增非负可测函数列.

引理4.3.1. (Levi 单调收敛定理) 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列单调递增的非负可测函数列,且一致收敛于 $f(x)$ (即 $f_n \uparrow f$), 则:

(1) 对于 E 上的任意简单函数 g, 若 $f(x) \geq g(x), x \in E$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geq \int_E g(x)\mathrm{d}x$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}(x)$.

证明: (1) 同定理4.1.2中的证明可证明(1)成立.

(2) 由积分的单调性, 有

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_E f_{n+1}(x)\mathrm{d}x \leq \int_E f(x)\mathrm{d}x, \forall n \in \mathbb{N}^+$$

因此 $\{\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\}$ 单调有界, 必然收敛, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \leq \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

由可测函数的简单函数逼近性, 必然存在非负简单函数列 $g_n \uparrow f$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \geq g_k(x), \forall k \in \mathbb{N}^+$ 由(1)中的结论, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geq \int_E g_k(x)\mathrm{d}x$$

令 $k \to \infty$, 有

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \geq \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

证毕.

定理4.3.2. (逐项积分定理) 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列, 且函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 收敛, 则

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x$$

证明: (1) 先假设 $\{f_n\}$ 是非负可测函数列, 部分和函数记为 $F_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{k} f_n(x)$, 显然 $\{F_k\}$ 是单调递增的, 且 $\lim\limits_{k\to\infty} F_k(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$$
\begin{aligned}
\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x &= \lim_{k\to\infty}\int_E F_k(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty}\int_E \sum_{n=1}^{k} f_n(x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

(2) 对于一般情况, 由数学分析的知识可知, 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 一致收敛, 则其正部和负部构成的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^+(x)$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n^-(x)$ 也一致收敛.

$$
\begin{aligned}
\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x &= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n^+(x)\mathrm{d}x - \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n^-(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n^+(x)\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n^-(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

定理4.3.3. (积分域的可列可加性) 设 f 在 E 上积分存在, $\{E_n\}$ 是 E 的一系列互不相交的子集, $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, 则

$$
\int_{\bigcup\limits_n E_n} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x
$$

证明:

$$
\begin{aligned}
\int_{\bigcup\limits_n E_n} f(x)\mathrm{d}x &= \int_{\bigcup\limits_n E_n} \sum_{n=1}^{\infty} f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\bigcup\limits_n E_n} f(x)\chi_{E_n}(x)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

> *有限个积分域可以看作是可列个积分域的特殊情形 (取后面的 E_n 为 $\emptyset$).*

推论. 若可测集 E 和 F 相差一个零测度集 (即 $E-F$ 和 $F-E$ 都是零测度集), 则对于 E, F 上的可测函数 f, 有 $\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_F f(x)\mathrm{d}x$.

证明: 可知 E, F 和 $E\cup F$ 都只差一个零测度集. 则由积分域的可加性

$$
\int_{E\cup F} f(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x + \int_{F-E} f(x)\mathrm{d}x
$$

因为 $F-E$ 是零测度集, 由定理4.2.4可知, $\int_{F-E} f(x)\mathrm{d}x=0$, 所以 $\int_{E\cup F} f(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x$. 同理可证 $\int_{E\cup F} f(x)\mathrm{d}x=\int_F f(x)\mathrm{d}x$, 证毕.

定理4.3.4. (Fatou) 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的非负可测函数列, 则

$$
\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x
$$

证明: 对于任意 n, 定义 $g_n(x)=\inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$, 易证 g_n 是单调递增的, $0\leq g_n(x)\leq f_n(x)$, $\forall x\in E$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} g_n=\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, 进而有

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E \lim_{n\to\infty} g_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x$$

因为 g_n 是单调递增的, 所以 $g_n=\inf\limits_{k\geq n} g_n$, 由积分的单调性, $\int_E g_n(x)\mathrm{d}x=\inf\limits_{k\geq n}\int_E g_k(x)\mathrm{d}x$, 进一步得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x&=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\int_E g_n(x)\mathrm{d}x\\&\leq\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\int_E f_k(x)\mathrm{d}x\\&=\varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

> *Fatou定理中不等号是可能成立的, 例如: 定义 $\mathbb{R}^1$ 上的函数列 $\{f_n\}$, $f_n=n\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$, 易证 $\{f_n\}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的函数列, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}^1$, 此时有*
>
> $$\int_{\mathbb{R}^1}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=0<1=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^1} f_n(x)\mathrm{d}x$$

定理4.3.5. (控制收敛定理)若 f,g 是可测集 E 上的可测函数, 且 $g\in L(E)$, $\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列, $|f_n|\leq g$, a.e., $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 且 $f_n\to f$ a.e. (或 $f_n\xrightarrow{\mathrm{m}} f$), 则 $\{f_n\}, f\in L(E)$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

证明: 由于在 E 上 $f_n\leq g$, a.e., $\forall n\in\mathbb{N}^+$, 易证 $|f|\leq g$, a.e., 又因为 $g\in L(E)$, 所以 $\{f_n\}, f\in L(E)$. 对于剩余部分, 先证明 $f_n\to f$ a.e. 于 E 的情形: $|f_n-f|\leq|f_n|+|f|\leq 2g$, 构造函数列 $h_n=2g-|f_n-f|$, 则易证 $h_n\geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n=2g$ a.e. 于 E , 由定理4.2.4, 有

$$\int_E \lim_{n\to\infty} h_n(x)\mathrm{d}x=\int_E 2g(x)\mathrm{d}x$$

另外, 利用Fatou定理, 得到

$$\begin{aligned}\int_E \lim_{n\to\infty} h_n(x)\mathrm{d}x&=\int_E \lim_{n\to\infty}(2g(x)-|f_n(x)-f(x)|)\mathrm{d}x\\&\leq\varliminf_{n\to\infty}\int_E(2g(x)-|f_n(x)-f(x)|)\mathrm{d}x\\&=\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\int_E(2g(x)-|f_k(x)-f(x)|)\mathrm{d}x\\&=\int_E 2g(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to\infty}\inf_{k\geq n}\{-\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x\}\\&=\int_E 2g(x)\mathrm{d}x-\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geq n}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x\\&=\int_E 2g(x)\mathrm{d}x-\varlimsup_{n\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x\end{aligned}$$

二者联立, 可得

$$\varlimsup_{n\to\infty}\int_E|f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

进而 $0 \leq \varliminf\limits_{n\to\infty} \int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0$,
$\varliminf\limits_{n\to\infty} \int_E |f_k(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0$, 所以 $\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$ 在 $n\to\infty$ 时极限存在, 且
$\lim\limits_{n\to\infty} \int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0$.

当 $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$ 时, 若该命题不成立, 则存在 $\epsilon > 0$, 使得对任意 $k \in \mathbb{N}^+$, 存在 n_k, 使得当 $n \geq n_k$ 时, $\int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x \geq \epsilon$, 取 f_{N_k} 得到一个新的函数列 $\{f_{n_k}\}$, 由 Riesz 定理, 其存在一子列 $\{f_{n_{k'}}\}$ 使得 $f_{n_{k'}} \to f$ a.e. 于 E , 由上面所证的结论可知

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_{n_{k'}}(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0$$

产生矛盾, 因此命题成立.

推论. (1)

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)\mathrm{d}x$$

(2) f 是可测集 E 上的可测函数, $\{f_n\}$ 是 E 上几乎处处有界的可测函数列(即存在 M 使得 $|f_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^+$), 且 $f_n \to f$ a.e. (或 $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$) 于 E , 则 $\{f_n\}, f \in L(E)$, 且

$$\lim_{n\to\infty} \int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x = 0$$

证明: (1)

$$\left|\int_E f_n(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_E f_n(x) - f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_E |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

令 $n\to\infty$, 得

$$\left|\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\mathrm{d}x - \int_E f(x)\mathrm{d}x\right| = 0$$

证毕.

(2) 令控制收敛定理中的 $g(x) \equiv M$ 即可得出此结论.

4.4 Riemann 积分和 Lebesgue 积分

4.4.1 Riemann 积分的可积性

定义. 若闭区间 $[a,b]$ 有 $n-1$ 个点:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

把区间分成 n 份, 记 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$, 则称这些分点和子区间构成 $[a,b]$ 的一个分割, 记为 $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ 或 $T = \{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\}$. 记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, \ldots, n$, 定义

$$\|T\| = \max_i \Delta x_i$$

为分割 T 的细度.

定义. $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的函数, 对于 $[a,b]$ 上的任一分割 $T=\{\Delta_1,\ldots,\Delta_n\}$, 和任意点列 $\{\xi_i\}, \xi_i\in\Delta_i, i=1,\ldots,n$, 定义和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个黎曼和. 如果当 $\|T\|\to 0$ 时, 黎曼和的极限存在, 则称其为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼定积分, 记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

> *黎曼定积分的等价定义: 若存在实数 J, 使得对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对任意 $T=\{\Delta_1,\ldots,\Delta_n\}$, $\|T\|\le\delta$, 和任意点列 $\{\xi_i\}$, $\xi_i\in\Delta_i$, $i=1,\ldots,n$, 有*
>
> $$|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J|\le\epsilon$$
>
> *则称 J 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的黎曼定积分.*

设 $m_i=\min\limits_{x\in\Delta_i} f(x), M_i=\max\limits_{x\in\Delta_i} f(x), i=1,\ldots,n$, 定义和式

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i,\quad \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$$

为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于分割 T 的达布下和和达布上和, 分别记为 $s(T)$ 和 $S(T)$.

显然, 对于任意的分割 T, $s(T)\le\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\le S(T), \forall\{\xi_i\}, \xi_i\in\Delta_i, i=1,\ldots,n$, 且 $s(T)$ 在 $\xi_i=\operatorname*{argmin}\limits_{x\in\Delta_i} f(x), 1\le i\le n$ 时取到, $S(T)$ 在 $\xi_i=\operatorname*{argmax}\limits_{x\in\Delta_i} f(x), 1\le i\le n$ 时取到.

定理4.4.1. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 则 $f(x)$ 必然有界.

证明: 我们接下来证明: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 则对任意 $M>0$, 存在满足 $\|T\|\le\delta$ 的分割 $T=\{\Delta_1,\ldots,\Delta_n\}$, 和 T 上的点列 $\{\xi_i\}, \xi_i\in\Delta_i, i=1,\ldots,n$, 使得黎曼和满足 $|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i|\ge M$.

任取满足 $\|T\|\le\delta$ 的分割 $T=\{\Delta_1,\ldots,\Delta_n\}$, 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 因此它必然在至少一个子区间 (记为 Δ_k) 上无界. 在除 Δ_k 外的各个子区间上分别任取一点, 得到 $\{\xi_i\}$, $\xi_i\in\Delta_i$, $1\le i\le n, i\ne k$, 记 $|\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i|=G$. 由于 $f(x)$ 在 Δ_k 上无界, 因此对于任意 $N>0$, 存在 $\xi\in\Delta_k, |f(\xi)|\ge N$, 此时 $|\sum\limits_{\substack{i=1\\ a\ne k}}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + f(\xi_i)\Delta x_i|\ge|f(\xi)\Delta_k|-|\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne k}}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i|=N\Delta x_k-G$, 对于 $N=\frac{M+G}{\Delta x_k}$, 此时 $|\sum\limits_{\substack{i=1\\ a\ne k}}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i+f(\xi_i)\Delta x_i|\ge M$, 取 $\xi_k=\xi$, 得到点列 $\{\xi_i\}$, 黎曼和 $|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i|\ge M$.

定理4.4.2. 若分割 T' 是在分割 T 的基础上增加 p 个分点得到的, 则

$$s(T)+(M-m)p\parallel T\parallel\ge s(T')\ge s(T)$$

$$S(T)-(M-m)p\parallel T\parallel\le S(T')\le S(T)$$

证明: 我们证明 $S(T)-(M-m)p\parallel T\parallel\le S(T')\le S(T)$, 关于 $s(T)$ 的结论可类似证明.

当 $p=1$ 时, 设新增的分点在第 k 个子区间, 达布上和中这一区间对应的项变为

$$M_i\Delta x_i \to M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i''$$

这里 M_i' 和 M_i'' 分别是插入分点左侧和右侧的区间上的最大值, $\Delta x_i'$ 和 $\Delta x_i''$ 分别是插入分点左侧和右侧的区间长度. 显然 M_i' 和 M_i'' 都不超过 M, 两项做差

$$M_i\Delta x_i - M_i'\Delta x_i' + M_i''\Delta x_i'' = (M_i - M_i')\Delta x_i' + (M_i - M_i'')\Delta x_i'' \leq 0$$

由于 $M_i - M_i' \geq M_i - m_i$, $M_i - M_i'' \geq M_i - m_i$, $\Delta x_i' \leq \| T\|$, $\Delta x_i'' \leq \| T\|$

因此 $S(T) - (M-m) \parallel T \parallel \leq S(T') \leq S(T)$

若 $p=n-1$ 时成立, 求证 $p=n$ 时成立: 设插入 $n-1$ 个分点后得到 T^{n-1}

$$S(T) - (M-m)(n-1) \parallel T \parallel \leq S(T^{n-1}) \leq S(T)$$

此时再插入一点, 得到 T^n, 由 $p=1$ 的结论, 有

$$S(T^{n-1}) - (M-m) \parallel T^{n-1} \parallel \leq S(T^n) \leq S(T^{n-1})$$

由于 $\|T^{n-1} \| \leq \| T\|$, 再结合 $p=n-1$ 时的结论, 有

$$S(T) - (M-m)n \parallel T \parallel \leq S(T^n) \leq S(T)$$

证毕.

定理4.4.3. 对于任意分割 T 和 T', T' 的达布上和不会低于 T 的达布下和, 达布下和不会高于 T 的达布上和, 即

$$s(T') \leq S(T)$$

$$S(T') \geq s(T)$$

证明:

设 T 和 T' 的分点合并后得到 $T+T'$, 根据定理4.4.2, 有

$$s(T') \leq s(T+T') \leq S(T+T') \leq S(T)$$

$$s(T) \leq s(T+T') \leq S(T+T') \leq S(T')$$

证毕.

对任意的分割 T, 以及任意点列 $\{\xi_i\}$, $\xi_i \in \Delta_i$, $i=1,\ldots,n$, 有
$m(b-a) \leq s(T) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq S(T) \leq M(b-a)$, 因此 $s(T)$ 有上界, $S(T)$ 有下界, 进而 $s(T)$ 有上确界, $S(T)$ 有下确界.

定义. 分别称 $s = \sup\limits_{T} s(T)$, $S = \sup\limits_{T} S(T)$ 为下积分和上积分.

定理4.4.4. $s = \lim\limits_{\|T\|\to 0} s(T)$, $S = \lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T)$

证明: 证明 $S = \lim\limits_{\|T\|\to 0} S(T)$, 关于 $s(T)$ 的结论可类似证明.

即证: 对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对于任意的分割 T, $\|T\|\le\delta$, 必有

$$S(T)-S\le\epsilon$$

由下确界的定义, 对于任意 $\epsilon'>0$, 必然存在分割 T, 使得 $S\le S(T)\le S+\epsilon'$,

对于任意分割 T', 设 T 和 T' 合并后的分割为 $T+T'$, 由定理4.4.2, 有

$$S(T')-(M-m)p_{T'}\ \|T'\|\le S(T+T')\le S(T')$$

$$S(T)-(M-m)p_{T}\ \|T\|\le S(T+T')\le S(T)$$

因此 $S(T')\le S(T+T')+(M-m)p_{T'}\ \|T'\|\le S(T)+(M-m)p_{T'}\ \|T'\|$

对于任意 $\|T\|\le\frac{\epsilon}{(M-m)p_{T'}}$, 有

$$S(T')\le S(T)+\epsilon'\le S+2\epsilon'$$

特别地, 对于 $\epsilon'=\frac{\epsilon}{2}$, 此时

$$S(T)-S\le\epsilon$$

证毕.

定理4.4.5. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是: (1) $s=S$; (2) 对于任意 $\epsilon>0$, 存在分割 T 使得 $S(T)-s(T)\le\epsilon$.

证明: (1) 充分性: 记 $s=S=J$. 对于 $\forall\epsilon>0$, 由上确界和下确界的定义, 必然存在 $\delta>0$, 对于任意分割 $T=\{\Delta_1,\dots,\Delta_n\}$, $\|T\|\le\delta$, 有

$$J-\epsilon\le s(T)\le s\le S\le S(T)\le J+\epsilon$$

此时对于任意点列 $\{\xi_i\}$, $\xi_i\in\Delta_i$, $i=1,\dots,n$, 有

$$J-\epsilon\le s(T)\le\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\le S(T)\le J+\epsilon$$

即 $|\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J|\le\epsilon$, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 证毕.

必要性: 存在实数 J, 使得对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于任意分割 $T=\{\Delta_1,\dots,\Delta_n\}$, $\|T\|\le\delta$, 和任意点列 $\{\xi_i\}$, $\xi_i\in\Delta_i$, $i=1,\dots,n$, 有

$$|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J|\le\epsilon$$

$s(T)$ 和 $S(T)$ 也是 T 的黎曼和, 因此有 $|s(T)-J|\le\epsilon$, $|S(T)-J|\le\epsilon$. 所以 $\lim\limits_{\|T\|\to0}s(T)=\lim\limits_{\|T\|\to0}S(T)=J$, 即 $s=S=J$, 证毕.

(2) 充分性: 对于任意 $\epsilon>0$, 存在分割 T 使得 $|S-s|\le|S(T)-s(T)|\le\epsilon$. 由 ϵ 的任意性, $S=s$, 由(1)的结论, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积.

必要性: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 则由(1)的结论, $s=S$, 即 $\lim\limits_{\|T\|\to0}s(T)=\lim\limits_{\|T\|\to0}S(T)$, 所以 $\lim\limits_{\|T\|\to0}S(T)-s(T)=0$. 对于任意 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得对于任意的分割 T, $\|T\|\le\delta$, 有 $S(T)-s(T)\le\epsilon$.

推论. 由(1)的证明过程可以得到: 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积时, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = S = s$.

4.4.2 借助 Lebesgue 积分讨论 Riemann 积分的可积性

定义. 由于可积的必要条件是有界, 因此我们把研究的范围限定在有界实值函数上, 此外, 为了方便分析, 我们再补充一些定义. 在分割 T 的达布上和和下和的基础上定义简单函数

$$u_T(a) = a,\ u_T(x) = m_i,\ x \in (x_{i-1}, x_i]$$

$$U_T(a) = a,\ U_T(x) = M_i,\ x \in (x_{i-1}, x_i]$$

显然有

$$(L)\int_a^b u_T(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i = s(T), \quad (L)\int_a^b U_T(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = S(T)$$

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \le u_T(x) \le f(x) \le U_T(x) \le \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

易证, 对于一列逐渐加细 ($\|T\| \to 0$) 的分割 $\{T_n\}$, $\{u_{T_n}\}$ (下文简写为 u_n) 是单调递增简单函数列, $\{U_{T_n}\}$ (下文简写为 U_n) 是单调递减简单函数列, 因此它们的极限函数可测, 分别记为 $u(x), U(x)$. 因为 $u_n(x) \le f(x) \le U_n(x), \forall x \in [a,b]$ 所以 $u(x) \le f(x) \le U(x), \forall x \in [a,b]$. 此外, 由于 $f(x)$ 有界, 可知 $\{u_n\}, \{U_n\}$ 是有界函数列, 进而可知它们的极限 $u(x)$ 和 $U(x)$ 都是有界函数. 在此基础上, 我们还可以得出如下结论:

定理4.4.6. 对于有界实值函数 $f(x)$, $u(x_0) = U(x_0) = f(x_0)$ 的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 点处连续.

证明: 充分性: 由 $f(x)$ 的连续性可知, 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| \le \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$.

由于分割逐渐加细, 所以必然存在正整数 N, 使得对于任意 $n \ge N$, T_n 存在一个子区间 $[x_{i-1}^n, x_i^n]$, 使得 $(x_{i-1}^n, x_i^n) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 此时 $|u_n(x_0) - f(x_0)| \le \epsilon$. 同理可证存在 N', 使得对于任意 $n \ge N'$, $|U_n(x_0) - f(x_0)| \le \epsilon$. 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x_0) = f(x_0)$, 即 $u(x_0) = U(x_0) = f(x_0)$.

必要性: 即证: 对于 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| \le \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$.. $u(x_0) = U(x_0) = f(x_0)$ 即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} U_n(x_0) = f(x_0)$.,由此可知对于 $\epsilon, \exists N$, 对于任意 $n \ge N$, $|u_n(x_0) - U_n(x_0)| \le \epsilon$, 设 x_0 在 T_N 的子区间 $[x_{i-1}^N, x_i^N]$ 中, 所以对于 $x \in [x_{i-1}^N, x_i^N]$, $|f(x) - f(x_0)| \le |u_N(x_0) - U_N(x_0)| \le \epsilon$, 令 $\delta = \min\{|x_{i-1}^N - x_0|, |x_i^N - x_0|\}$, 当 $|x - x_0| \le \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \le \epsilon$.

定理4.4.7. 有界实值函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充要条件是 (1) $U(x) = u(x)$, a.e. 于 $[a,b]$, (2) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

证明: $\{u_n(x)\} \uparrow u(x)$, $\{U_n(x)\} \downarrow U(x)$, 由于 $f(x)$ 有界, 因此存在 m 和 M 使得 $m \le f(x) \le M$, 显然对每个 $u_n(x)$ 和 $U_n(x)$, 它们也在这个区间内, 进而 $u(x)$ 和 $U(x)$ 也在这个区间内, 因此由有界收敛定理, 有

$$(L)\int_a^b U(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b U_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(T_n) = \lim_{\|T\|\to 0} S(T_n) = S$$

$$(L)\int_a^b u(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s(T_n) = \lim_{\|T\|\to 0} s(T_n) = s$$

Riemann可积 $\iff S=s \iff (L)\int_a^b U(x)\mathrm{d}x=(L)\int_a^b u(x)\mathrm{d}x \iff$
$(L)\int_a^b U(x)-u(x)\mathrm{d}x=0 \iff U(x)=u(x)$ a.e. 于 $[a,b] \iff f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

4.4.3 Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广

定理4.4.8. 若 f 在 $[a,b]$ 上是黎曼可积的, 则 $f\in L([a,b])$, 且

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

证明: 由定理4.4.7, $U(x)=u(x)$ a.e. 于 $[a,b]$, 结合 $u(x)\le f(x)\le U(x), \forall x\in[a,b]$, 可推出 $f=u=U$ a.e.于 $[a,b]$, 由 u 和 U 可测可知 f 可测, 黎曼可积函数又必然有界, 因此 $f\in L([a,b])$. 因为 f 有界, 所以 $\{u_n\}$ 和 $\{U_n\}$ 都是有界函数, 所以由有界收敛定理可知

$$\begin{aligned}(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_a^b u(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}(L)\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x\\ =\lim_{\|T\|\to 0}s(T_n)=s=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

4.5 Lebesgue 积分的逼近性

定理4.5.1. E 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测集, $f\in L(E)$, 则对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 E 上的简单函数 g, $|g|\le|f|$ 且 $g\in L(E)$, 使得

$$\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\le\epsilon$$

证明: 根据定理3.3.2, 存在简单函数列 $\{f_n\}$, $f_n\to f$, 且 $|f_n|\le|f|$, 进而有
$|f_n-f|\le|f_n|+|f|\le 2|f|$, 因为 $f\in L(E)$, 所以 $|f|\in L(E)$, 由控制收敛定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=\int_E\lim_{n\to\infty}|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0$$

对于 $\forall\epsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}^+$, 使得当 $n\ge N$ 时, 有

$$\int_E|f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x\le\epsilon$$

取 $g=f_n, n\ge N$ 即可.

定理4.5.2. E 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测集, g 是 E 上的几乎处处有限的可测函数, 则对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连续函数 ϕ, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|\phi(x)|\le\sup\limits_{x\in E}|g(x)|$ 且 $\phi\in L(E)$, 使得

$$\int_E|g(x)-\phi(x)|\mathrm{d}x\le\epsilon$$

证明: 由 Lusin 定理, 对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 ϕ, 使得 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|\phi(x)|\le\sup\limits_{x\in E}|g(x)|$, 使得

$$m\big(E(\phi\neq g)\big)\le\delta$$

进而有

$$\int_E |\phi(x)-g(x)|\mathrm{d}x = \int_{E(\phi\neq g)} |\phi(x)-g(x)|\mathrm{d}x \le 2\sup_{x\in E}|g(x)|\delta$$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{2\sup_{x\in E}|g|}$, 此时 $\int_E |\phi(x)-g(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon$, $|\phi-g| \le |\phi|+|g| \le 2|g| \le 2\sup_{x\in E}|g|$, 由有界收敛定理, 可知 $|\phi-g|\in L(E)$, 进而 $(\phi-g)\in L(E)$, $\phi = [(\phi-g)+g]\in L(E)$.

定理4.5.3. ϕ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连续函数, 则对于 $\forall\epsilon>0$, 存在在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的有界连续函数 h, $|h|\le|\phi|$ 且 $h\in L(E)$, 使得

$$\int_E |\phi(x)-h(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon$$

证明: 定义

$$\lambda_k(x) = \begin{cases} 1 & x\in\overline{U(0,k)} \\ 0 & x\notin\overline{U(0,k)} \end{cases}$$

构造函数列 $\{h_k\}$, $h_k=\phi_k\lambda_k$, 显然 h_k 具有紧支集, $h_k\to\phi$, 且 $|h_k|\le|\phi|$, 所以由控制收敛定理, $h_k\in L(E)$, $\forall k$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |h_k(x)-\phi(x)|\mathrm{d}x = \int_E \lim_{n\to\infty}|h_k(x)-\phi(x)|\mathrm{d}x = 0$$

所以对于 ϵ, 存在 $K\in\mathbb{N}^+$, 当 $k\ge K$ 时,

$$\int_E |h_k(x)-\phi(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon$$

易验证取 $h=h_{h_k}$, $k\ge K$ 均满足要求, 证毕.

结合前面三个定理, 可以得到如下结论:

定理4.5.4. (推论) E 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测集, $f\in L(E)$, 则对于 $\forall\epsilon>0$, 存在在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的有界连续函数 h, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|h(x)| \le \sup\limits_{x\in E}|f(x)|$ 且 $h\in L(E)$, 使得

$$\int_E |f(x)-h(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon$$

证明: 对于 $\forall\epsilon_1>0$, 存在 E 上的简单函数 g, $|g|\le|f|$ 且 $g\in L(E)$, 使得

$$\int_E |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon_1$$

对于 $\forall\epsilon_2>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的有界连续函数 ϕ, $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|\phi(x)| \le \sup\limits_{x\in E}|g(x)|$ 且 $\phi\in L(E)$, 使得

$$\int_E |g(x)-\phi(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon_2$$

对于 $\forall\epsilon_3>0$, 存在在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的有界连续函数 h, $|h|\le|\phi|$ 且 $h\in L(E)$, 使得

$$\int_E |\phi(x)-h(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon_3$$

特别地, 对于 $\epsilon_1=\epsilon_2=\epsilon_3=\frac{1}{3}\epsilon$, 此时有

$$\int_E |f(x)-h(x)|\mathrm{d}x \le \int_E |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x + \int_E |g(x)-\phi(x)|\mathrm{d}x + \int_E |\phi(x)-h(x)|\mathrm{d}x \le \epsilon$$

同时 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|h(x)|\le\sup\limits_{x\in E}|f(x)|$, 因此函数 h 即满足要求, 证毕.

定理4.5.5. f 是在 $E\subset\mathbb{R}^1$ 上具有紧支集的连续函数, 则存在在 $\mathbb{R}^1$ 上具有紧支集的阶梯函数 g, 使得对于任意的 $\epsilon>0$, 有

$$\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\le\epsilon$$

证明: 连续必然一致连续, 因此对于任意 $\epsilon'>0, \exists\delta>0$, 对于任意 $x',x''\in E$, 当 $d(x',x'')\le\delta$ 时, $|f(x')-f(x'')|\le\epsilon'$. 由于 f 具有紧支集, 因此存在 $[a,b]$, 使得 $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]^C$. 取 $[a,b]$ 的一个分割 $a=x_0\le\cdots\le x_n=b$, $\max\limits_{1\le i\le n}|x_{i-1}-x_i|\le\delta$, 定义 $g(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\chi_{(x_{i-1},x_i]}(x)$, 则 g 是在 $\mathbb{R}^1$ 上具有紧支集的阶梯函数, $|g-f|\le\epsilon'$, 且

$$\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\le\epsilon'(b-a)$$

特别地, 对于 $\epsilon'=\frac{\epsilon}{b-a}$, 此时 $\int_E|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x\le\epsilon$, 则 g 即满足要求, 证毕.

4.6 Lebesgue 积分的重积分与累次积分

定义. 设 p,q 为正整数, $f(x,y)$ 为定义在 $\mathbb{R}^{p+q}=\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^Q$ 上的函数, 其中 $x\in\mathbb{R}^p$, $y\in\mathbb{R}^Q$, 对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^p$, 将 x 视为固定值, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbb{R}^q$ 上的积分存在, 记 $g(x)=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$, 可能对于一个零测度集上的 x 积分不存在, 此时定义 $g(x)=0$. 若 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上可测且积分存在, 则称 $\int_{\mathbb{R}^p}g(x)\mathrm{d}x$ 为 f 的累次积分, 记为

$$\int_{\mathbb{R}^p}(\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y)\mathrm{d}x$$

或

$$\int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$$

类似地定义累次积分 $\int_{\mathbb{R}^q}\mathrm{d}y\int_{\mathbb{R}^p}f(x,y)\mathrm{d}x$.

定义. 称 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^{p+q}$ 上的积分 $\int_{\mathbb{R}^{p+q}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为重积分.

定义. 设 $A\subseteq\mathbb{R}^p$, $B\subseteq\mathbb{R}^q$, 称 $A\times B$ (补充定义 A 或 B 为 $\emptyset$ 时, $A\times B=\emptyset$)为 $\mathbb{R}^{p+q}$ 中的矩形. 若 A,B 都是可测集, 则称 $A\times B$ 为可测矩形.

定义. 设 $E\subseteq\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, 对于 $\forall x\in\mathbb{R}^p$, 称集合 $E_x=\{y\in\mathbb{R}^q|(x,y)\in E\}$ 为 E 在 x 处的截口, 对于 $\forall y\in\mathbb{R}^q$, 称集合 $E_y=\{x\in\mathbb{R}^p|(x,y)\in E\}$ 为 E 在 y 处的截口.

对于截口, 显然有如下的性质成立:

若 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$, 则 $E_x=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n)_x, E_y=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n)_y, (A-B)_x=A_x-B_x$

定理4.6.1. 设 E 是 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 中的有界可测集 (p,q 为整数), 则

(1) 对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^p$, E_x 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可测集.

(2) 若把 $m(E_x)$ 视为一个关于 x 的函数, 则 $m(E_x)$ 是可测的, 且

$$m(E)=\int_{\mathbb{R}^p} m(E_x)\mathrm{d}x$$

证明: (1) 证明满足条件 (1), (2) 的集类 (记为 $\mathscr{E}$) 对互不相交的可列并运算封闭.

设 $E_1,\ldots,E_n,\ldots\in\mathscr{E}$, 且互不相交, 证明 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{E}$

显然, $E_x=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n)_x$, 而每个 $(E_n)_x$ 在 $\mathbb{R}^q$ 上是可测的, 因此 E_x 在 $\mathbb{R}^q$ 上可测. 由测度的可列可加性, $m(E_x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}m(E_n)_x$, 由于每个 $m\big((E_n)_x\big)$ 可以视作一个关于 x 的可测函数, 因此 $m(E_x)$ 也可以. 集列 $\{\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\}$ 是单调递增的集列且 $E=\lim\limits_{n\to\infty}\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$, 所以由测度的上连续性可知,

$$m(E)=\lim_{n\to\infty}m(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}m(E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^p}m\big((E_i)_x\big)\mathrm{d}x$$

再由逐项积分定理, 可知

$$\sum_{i=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^p}m\big((E_i)_x\big)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p}\sum_{i=1}^{\infty}m\big((E_i)_x\big)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x$$

(2) 证明方体属于 $\mathscr{E}$.

设方体 $I=I_1\times I_2$, I_1 是 $\mathbb{R}^p$ 中的方体, I_2 是 $\mathbb{R}^q$ 中的方体, 则对每个 $x\in\mathbb{R}^p$,

$$E_x=\begin{cases} I_1 & x\in I_1\\ \emptyset & x\notin I_1\end{cases}$$

$$m(E_x)=\begin{cases} |I_1| & x\in I_1\\ 0 & x\notin I_1\end{cases}$$

因此 E_x 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可测集, 函数 $m(E_x)$ 是可测的, 并且

$$m(I)=|I_1\times I_2|=|I_1|\cdot|I_2|=\int_{I_1}|I_2|\mathrm{d}x=\int_{I_1}m(E_x)\mathrm{d}x$$

(3) 证明开集属于 $\mathscr{E}$.

根据定理1.1.14, 任意开集都可以表示为一列互不相交的半开方体的并, 由(1) 中的结论, 它属于 $\mathscr{E}$.

(4) 证明有界 G_σ 型集属于 $\mathscr{E}$.

设 G 是有界 G_σ 型集, 则 G 可以表示为 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n$, 其中 $\{G_n\}$ 是一列单调递减的开集. 由于 G 有界, 则必然存在某个 G_n 是有限集, 不妨设这个 G_n 为 G_1, 如若不然, 则可以把 G_n 之前的项移除, 并重新记 G_n 为 G_1, 此时 $m(G_1)<\infty$. 因为 G_n 是开集, 由 (3) 的结论, $(G_n)_x$ 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可测集. 显然 $G_x=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(G_n)_x$, 结合 (3) 结论可知每个 $(G_n)_x$ 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可测集, 可知 $\{(G_n)_x\}$ 是一列递减的可测集, G_x 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可测集, 此时 $m\big((G_1)_x\big)\le m(G_1)<\infty$.

由测度的上连续性, 有

$$m(E_x)=\lim_{n\to\infty}m\big((G_n)_x\big)$$

$$m(E)=\lim_{n\to\infty}m(G_n)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p}m\big((G_n)_x\big)\mathrm{d}x$$

由(3)的结论, 每个于 $m\big((G_n)_x\big)$ 是可测函数, 因此 $m(E_x)$ 是可测函数. 由 $\{(G_n)_x\}$ 的递减性可知 $m\big((G_n)_x\big)\le m\big((G_1)_x\big)<\infty$, 所以由有界收敛定理, 有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p}m\big((G_n)_x\big)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p}\lim_{n\to\infty}m\big((G_n)_x\big)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x$$

(5) 证明有界零测度集属于 $\mathscr{E}$.

设 E 是有界零测度集, 根据定理2.2.2, 存在有界的 G_σ 型集 G 包含它, 且 $m(G-E)=0$, 于是 $m(G)=0$, 显然 $E_x\subseteq G_x\subseteq G$, 所以 E_x 是零测度集, $m(E_x)=0$ 是 $\mathbb{R}^p$ 上的可测函数, 易验证

$$m(E)=\int_{\mathbb{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x=0$$

(6) 证明一般的有界可测集属于 $\mathscr{E}$.

设 E 是一般的有界可测集, 根据定理2.2.2, 存在有界的 G_σ 型集 G 包含它, 且 $m(G-E)=0$, 令 $\Delta=G-E$, 则 Δ 是零测度集, 根据(5)的结论, $\Delta\in\mathscr{E}$, 则 Δ_x 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可测集 , 由 $E_x=G_x-\Delta_x$ 可知 E_x 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可测集. $m(E_x)=m(G_x)-m(\Delta_x)=m(G_x)$, 根据(4)的结论, $m(G_x)$ 是可测函数, 且

$$m(E)=m(G)=\int_{\mathbb{R}^p}m(G_x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x$$

证毕.

定理4.6.2. (Fubini) (1) 若 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$上的非负可测函数, 则对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbb{R}^q$上可测, $g(x)=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上可测, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) 若 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$上的可积函数, 则对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbb{R}^q$ 上可积, $g(x)=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上可积, 并且

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y$$

证明: (1) 设 $f(x,y)=\chi_E f(x,y)$, 其中 $E\subseteq\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$ 是可测集. 显然

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=m(E)$$

对于固定的$x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)=\chi_{E_x}(y)$, 根据定理4.6.1中的结论, E_x 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可测集, 因此 $\chi_{E_x}(y)$ 是 $\mathbb{R}^q$ 上的可测函数, 所以 $f(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbb{R}^q$上可测. 根据简单函数积分的定义, 有

$$m(E_x)=\int_{\mathbb{R}^q}\chi_{E_x}(y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^q}f(x,y)\mathrm{d}y=g(x)$$

根据定理4.6.1中的结论, 若把 $m(E_x)$ 视为一个关于 x 的函数, 则 $m(E_x)$ 是可测的, 且

$$m(E)=\int_{\mathbb{R}^p}m(E_x)\mathrm{d}x$$

因此 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上可测, $\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^p} g(x)\mathrm{d}x$.

对于非负可测的函数 $f(x,y)$, 存在单调递增的简单函数列 $\{f_n(x,y)\}$, $f_n\uparrow f$. 显然对于固定的 $x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数满足 $f_n(x,y)\uparrow f(x,y)$. 定义 $g_n(x)=\int_{\mathbb{R}^q} f_n(x,y)\mathrm{d}y$, 根据简单函数情形下的结论, 有: $f_n(x,y)$ 作为 y 的函数在 $\mathbb{R}^q$上可测, $g_n(x)$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上可测, 因此作为 $\{f_n(x,y)\}$ 的极限函数, 对于固定的 $x\in\mathbb{R}^p$, $f(x,y)$ 作为 y 的函数时在 $\mathbb{R}^p$ 上是可测的, $\{g_n(x)\}$ 是单调递增的非负可测函数列, 由 Levi 单调收敛定理, 可知

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^q} f_n(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^q}\lim_{n\to\infty} f_n(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y=g(x)$$

所以作为 $\{g_n(x)\}$ 的极限函数 $g(x)$ 在 $\mathbb{R}^p$ 上是可测的. 由 Levi 单调收敛定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p} g_n(x)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p} g(x)\mathrm{d}x$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f_n(x,y)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x$$

而根据简单函数下的结论,

$$\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^p} g_n(x)\mathrm{d}x$$

进而可知 $\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^p} g(x)\mathrm{d}x$.

(2) $f\in L(\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q)$, 对 f^+ 和 f^- 分别应用(1)中的结论, 得到

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于可积, 所以 $\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$, $\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$, 所以被积函数 $\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y<\infty$ a.e., $\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y<\infty$ a.e., 这表明对几乎处处的 $x\in\mathbb{R}^p$, $f^+(x,y), f^-(x,y)\in L(\mathbb{R}^q)$, 从而 $f(x,y)\in L(\mathbb{R}^p)$.

$$g(x)=\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y<\infty$$

所以 $g(x)\in L(\mathbb{R}^p)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)\mathrm{d}y\right)-\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^-(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^p}\left(\int_{\mathbb{R}^q} f^+(x,y)-f^-(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mathbb{R}^p}\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^q} f(x,y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

证毕.