3.1 可测函数的定义

定义. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, f 是定义在 E 上的实值函数, 若对 $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\{x \in E | f(x) > a\}$$

是可测集, 则称 f 是 E 上的 Lebesgue 可测函数, 或称 f 在 E 上可测.

> *注. (1) 以下若无特别说明, 所提到的集合 E 均指 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集.*
>
> *(2) 以下将 $\{x \in E | f(x) > a\}$ 简写成 $E(f > a)$.*

定义. 定义集合 A 的特征函数为

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

定理3.1.1. 设 f 是定义在 E 上的函数, 则以下 (1)~(5) 是等价的:

(1) f 是 E 上的可测函数;

(2) $\forall a \in \mathbb{R}^1$, $E(f \geq a)$ 是可测集;

(3) $\forall a \in \mathbb{R}^1$, $E(f < a)$ 是可测集;

(4) $\forall a \in \mathbb{R}^1$, $E(f \leq a)$ 是可测集;

(5) $\forall A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$, $f^{-1}(A)$ 是可测集, 并且 $E(f = +\infty)$ 是可测集.

证明:

(1) $\rightarrow$ (2):

$E(f \geq a) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E(f > a - \frac{1}{k})$

由于对任意 $k \in \mathbb{N}^+$, $E(f > a - \frac{1}{k})$ 是可测集, 且可列个可测集的并是可测集, 因此 $E(f \geq a)$ 可测.

(2) $\rightarrow$ (3):

$E(f < a)$ 是 $E(f \geq a)$ 的补集, 可测集的补集仍是可测集, 因此 $E(f < a)$ 可测.

(3) $\rightarrow$ (4):

$E(f \leq a) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E(f < a - \frac{1}{k})$

同 (1) $\rightarrow$ (2) 的证法, 可知 $E(f \leq a)$ 可测.

(4) $\rightarrow$ (1):

同 (2) $\to$ (3) 的证法, 可知 $E(f<a)$ 可测.

因此 (1) ~ (4) 等价.

(1) $\iff$ (5):

(1) $\to$ (5): 设集类 $\mathscr{F}=\{A\in\mathbb{R}^1|f^{-1}(A)\text{ 是可测集}\}$, 由原像的性质:

$$f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n)$$

$$f^{-1}(A^C)=(f^{-1}(A))^C$$

可知 $\mathscr{F}$ 是 σ-代数. 令 $\mathscr{C}$ 是直线上半开方体的全体, 可知对任意 $(a,b]\in\mathscr{C}$, 有

$$f^{-1}((a,b])=E(a<f\le b)=E(f>a)-E(f>b)$$

可测集的差仍为可测集, 因此 $f^{-1}((a,b])$ 是可测集, 因此 $\mathscr{C}\subset\mathscr{F}$. 所以 $\sigma(\mathscr{C})\subset\mathscr{F}$. 由定理 1.4.7 可知, $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$, 对任意 $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$, $f^{-1}(A)$ 是可测集, 由于

$$E(f=+\infty)=\bigcap_{k=1}^{\infty}E(f>k)$$

可知 $E(f=+\infty)$ 是可测集.

(5) $\to$ (1):

$E(f>a)=E(a<f\le\infty)=f^{-1}((a,\infty))\cup E(f=\infty)$

(a,∞) 是 Borel 集, 因此 $f^{-1}((a,\infty))$ 为可测集, 因为可测集的并集仍可测, 所以 $E(f>a)$ 可测.

定理3.1.2. (1) $f(x)\equiv c$ 是 E 上的常值函数, 则 f 在 E 上可测.

(2) 设 $A\subset\mathbb{R}^n$, χ_A 是 A 的特征函数, χ_A 是可测函数当且仅当 A 是可测集.

(3) 设 f 是 E 上的连续函数, 则 f 在 E 上可测.

(4) 设 f 是 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 f 在 $[a,b]$ 上可测.

(5) Dirichlet 函数:

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数}\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

是可测的.

(6) 设 f 在 E 上可测, E_1 是 E 的可测子集, 则 f 在 E_1 上可测.

(7) 设 f 在 E_1 和 E_2 上可测, f 在 $E_1\cup E_2$ 上可测.

证明: (1) 对任意实数 a, 有

$$E(f>a)=\begin{cases}E, & a<c\\ \emptyset, & a\ge c\end{cases}$$

因此对任意实数 a, $E(f > a)$ 是可测集.

(2)

$$E(\chi_A > a) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & a < 0 \\ A, & 0 \leq a < c \\ \emptyset, & a \geq 1 \end{cases}$$

因此对任意实数 a, $E(\chi_A > a)$ 是可测集当且仅当 A 是可测集.

(3) 根据定理 1.1.16 , 对于任意实数 a, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 G, 使得 $E(f > a) = E \cap G$, 而开集是可测集, 因此 f 是可测的.

(4) 由于 f 是单调的, 容易知道 $E(f > c)$ 是区间, 单点集或者空集. 总之, $E(f > c)$ 是可测集, 因此 f 是可测集.

(5) $D(x) = \chi_Q(x)$, 而 Q 是可测集, 根据 (2), $\chi_Q(x)$ 可测.

(6) $E_1(f > a) = E(f > a) \cap E_1$ 是可测集, 则 f 在 E_1 上可测.

(7) $E(f > a) = E_1(f > a) \cup E_2(f > a)$ 是可测集, 则 f 在 $E_1 \cup E_2$ 上可测.

3.2 可测函数的性质

引理3.2.1. 若 $a, b \in \mathbb{R}, a + b > c$ 的充分必要条件是存在有理数 q, 使得 $a > q$ 且 $b > c - q$.

证明: 充分性显然, 下面证明必要性: 设 $a + b = c + \epsilon$, $\epsilon > 0$. 由有理数的稠密性, 可知存在 $q \in \mathbb{Q}$, 使得 $a > q$, 且 $a - q \leq \frac{\epsilon}{2}$

$$b - (c - q) = c + \epsilon - a - (c - q) = \epsilon - (a - q) > \epsilon - \frac{\epsilon}{2} > 0$$

证毕.

定理3.2.1.设 f 和 g 在 E 上可测, 则函数 cf (c 是实数), $f + g$, fg 和 $|f|$ 都在 E 上可测.

证明: 当 $c \neq 0$ 时, 显然 cf 可测. 当 $c \neq 0$ 时,

$$E(cf > a) = \begin{cases} E(f > \frac{a}{c}), & c > 0 \\ E(f < \frac{a}{c}), & c < 0 \end{cases}$$

显然 $E(cf > a)$ 是可测集, 因此 $cf(x)$ 可测.

由引理3.2.1, 当 $f(x), g(x)$ 不取符号相反的 ∞ 时, 设有理数集合为 $\{r_n\}$, $f(x) + g(x) > a$ 等价于存在有理数 r_n, 使得 $f(x) > r_n$, $g(x) > a - r_n$, 因此

$$E(f + g > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(E(f > r_n) \cap E(g > a - r_n)\big)$$

由上式可知, $E(f + g > a)$ 是可测集, 因此 $f + g$ 可测. 考虑 $f(x), g(x)$ 取符号相反的 ∞ 时, 记

$$A = [E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty)] \cup [E(f = +\infty) \cap E(g = -\infty)]$$

因为 f, g 是可测函数, 所以 A 是可测集, 因为可测集对差运算封闭, 所以 $E-A$ 是可测集, 由定理3.1.2, f 和 g 在 A 和 $E-A$ 上可测, 此时

$$E(f+g>a)=\{x\in E-A|f(x)+g(x)>a\}\cup\{x\in A|f(x)+g(x)>a\}$$

当 $x\in A$ 时, $f(x)+g(x)=0$, 显然

$$\{x\in A|f(x)+g(x)>a\}=\begin{cases} A, & a<0 \\ \emptyset, & a\geq 0\end{cases}$$

因此 $\{x\in A|f(x)+g(x)>a\}$ 始终是可测集. 综上可知, $E(f+g>a)$ 是可测集.

先证明 $f^2(x)$ 可测: 由于

$$E(f^2>a)=\begin{cases} E, & a<0 \\ E(f>\sqrt{a})\cup E(f<-\sqrt{a}), & a\geq 0\end{cases}$$

因此 $E(f^2>a)$ 是可测集, 所以 $f^2(x)$ 可测. 由

$$fg=\frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2]$$

可得, fg 可测.

$$E(|f|>a)=\begin{cases} E, & a<0 \\ E(f>a)\cup E(f<-a), & a\geq 0\end{cases}$$

由此可知 $E(|f|>a)$ 是可测集, 因此 $|f|$ 可测.

> *定理3.2.1表明可测性对线性运算和乘法运算封闭.*

定义. f 是定义在 E 上的函数, 定义 $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$, $f^-(x)=\max\{-f(x),0\}$, 即

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x), & f(x)\geq 0 \\ 0, & f(x)<0\end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases} 0, & f(x)\geq 0 \\ -f(x), & f(x)<0\end{cases}$$

分别称 f^+ 和 f^- 为 f 的正部和负部. 易证 f^+和 f^- 都是非负值函数, 并且

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x),\ \forall x\in E$$

$$|f(x)|=f^+(x)+f^-(x),\ \forall x\in E$$

定理3.2.2. 若 f 在 E 上可测, 则 f^+ 和 f^- 都在 E 上可测.

证明: 对任意实数 a, 我们有

$$E(f^+>a)=\begin{cases} E(f>a), & a\geq 0 \\ E, & a<0\end{cases}$$

$$E(f^->a)=\begin{cases} E(f<-a), & a\geq 0 \\ 0, & a<0\end{cases}$$

由此可知 $E(f^+>a)$ 和 $E(f^->a)$ 都是可测集, 因此 f^+ 和 f^- 都是 E 上的可测函数.

定义. $\overline{\lim\limits_{n\geq 1}} f_n=\sup\{\inf\limits_{n\geq 1} f_n\}$, $\underline{\lim\limits_{n\geq 1}} f_n=\inf\{\sup\limits_{n\geq 1} f_n\}$

定理3.2.3. 设 $\{f_n\}$ 是 E 上的可测函数列, 则函数 $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$, $\overline{\lim\limits_{n\geq 1}} f_n$, $\underline{\lim\limits_{n\geq 1}} f_n$ 可测.

证明: 对任意 $x\in E$ 和实数 a, $\sup\limits_{n\geq 1} f_n(x) > a$ 当且仅当存在正整数 n, 使得 $f_n(x)>a$, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(x) < a$ 当且仅当存在正整数 n, 使得 $f_n < a$, 因此

$$E(\sup_{n\geq 1} f_n > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n > a)$$

$$E(\inf_{n\geq 1} f_n > a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E(f_n < a)$$

由于 $\{f_n\}$ 在 E 上可测, 对任意 $n\in\mathbb{N}^+$, $E(f_n>a)$ 和 $E(f_n<a)$ 是可测集, 进而 $E(\sup\limits_{n\geq 1} f_n > a)$ 和 $E(\inf\limits_{n\geq 1} f_n > a)$ 是可测集, $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$ 是可测函数. 由于

$$\overline{\lim_{n\geq\infty}} f_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} f_n$$

$$\underline{\lim_{n\geq\infty}} f_n = \inf_{n\geq 1}\sup_{k\geq n} f_n$$

其中 $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$ 是可测函数, 根据刚刚证明的结论, $\overline{\lim\limits_{n\geq 1}} f_n$, $\underline{\lim\limits_{n\geq 1}} f_n$ 是可测函数.

> *定理3.2.3表明可测函数列的极限可测.*

定理3.2.4. 若 f,g 都在 E 上可测, 且 $g(x)$ 处处不等于 0, 则 $\frac{f}{g}$ 在 E 上可测.

证明: 由于可测函数的乘积可测, 因此只需证明 $\frac{1}{g}$ 可测.

$$E(\frac{1}{g} > a) = \begin{cases} E(g < \frac{1}{a}), & a > 0 \\ E(g > \frac{1}{a}), & a < 0 \\ E(g > 0), & a = 0 \end{cases}$$

显然无论哪种情况 $E(\frac{1}{g} > a)$ 都是可测集, 因此 $\frac{1}{g}$ 可测.

> *定理3.2.4表明可测性对除法运算封闭.*

定理3.2.5. (1) 若 $f(x)$ 是 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 对任意 $h\in\mathbb{R}^n$, 函数 $f(x+h)$ 是 E 上的可测函数. (2) 若 $f(x)$ 是 $E\subseteq\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 对任意 $a\in\mathbb{R}^1$, 函数 $f(ax)$ 是 E 上的可测函数.

证明: (1) 证明对任意实数 a, 有 $\{x\in\mathbb{R}^n|f(x+h)>a\} = \{x\in\mathbb{R}^n|f(x)>a\} - h$:

若 $x\in\{x\in\mathbb{R}^n|f(x+h)>a\}$, 则 $y=(x+h)\in\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)>a\}$, $x=y-h$, 因此 $\{x\in\mathbb{R}^n|f(x+h)>a\}\subseteq\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)>a\}-h$.

若 $x\in\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)>a\}$, 则 $y=(x-h)\in\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)>a\}$, $x=y+h$, 因此 $\{x\in\mathbb{R}^n|f(x+h)>a\}\supseteq\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)>a\}-h$.

由于可测集的平移后仍是可测集, $f(x+h)$ 是 E 上的可测函数.

(2) 易证, 当 $a\neq 0$ 时, $\{x\in\mathbb{R}^n|f(ax)>c\} = a^{-1}\{x\in\mathbb{R}^n|f(x)>c\}$, 由于可测集的伸缩后仍是可测集, 因此 $f(ax)$ 是 E 上的可测函数.

定理3.2.6. 若 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可导函数, 则 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

证明: 对 $f(x)$ 进行研拓: 当 $x>b$ 时, $f(x)=f(b)$. 考虑函数列 $\{f_n\}$

$$f_n(x)=n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)],\ \forall x\in[a,b]$$

易证 $\{f_n\}$ 是可测函数列且一致收敛于 $f'(x)$, 进而 $f'(x)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数.

定理3.2.7. 若 f 是可测集 E 上的可测函数, 函数 $g=f$ a.e. 于 E, 则 g 在 E 上可测.

证明: 由 $g=f$ a.e. 于 E 可知, 存在一个零测度集 E_0, 在 $E-E_0$ 上, $f(x)=g(x)$, 因此, 对于任意的实数 a,

$$\begin{aligned}E(g>a)&=\{x\in E-E_0|g(x)>a\}\cup\{x\in E_0|g(x)>a\}\\&=\{x\in E-E_0|f(x)>a\}\cup\{x\in E_0|g(x)>a\}\end{aligned}$$

由于 E 和 E_0 都是可测集, 所以 $E-E_0$ 是 E 的可测子集, 进而 f 在 $E-E_0$ 上也是可测的, 因此 $\{x\in E-E_0|f(x)>a\}$ 是可测的; $\{x\in E_0|g(x)>a\}$ 是零测度集 E_0 的子集, 因此是可测的, 综上可知 $E(g>a)$ 是可测的.

3.3 可测函数的简单函数逼近

3.3.1 简单函数的定义

定义. 设 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集 E 上的函数. 若存在 E 的一个可测分割 $\{E_1,E_2,\ldots,E_k\}$ (即 $\bigcup\limits_{i=1}^{k}E_i=E$, 且 $E_i\cap E_j=\emptyset,\forall i,j,i\neq j$) 和实数 $a_1,a_2,\ldots,a_k$, 使得当 $x\in E_i$ 时, $f(x)=a_i$, 则称 f 为 E 上的简单函数, 此时 f 可以表示为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}a_i\chi_{E_i}(x)$$

由于可测集的特征函数是可测函数, 因此简单函数作为可测函数的线性加和是可测函数.

3.3.2 简单函数的性质

定理3.3.1. 设 f 和 g 都是简单函数, 则:

(1) cf (c 是实数), $f+g$ 是简单函数.

(2) 设 ϕ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的实值函数, 则复合函数 $\phi(f)$ 是简单函数.

证明: (1) 显然 cf 是简单函数, 设

$$f(x)=\sum_{i=1}^{p}a_i\chi_{A_i}(x)$$

$$g(x)=\sum_{i=1}^{q}b_i\chi_{B_i}(x)$$

其中 $\{A_1,\ldots,A_p\}$ 和 $\{B_1,\ldots,B_q\}$ 是 E 的可测分割, 易证 $\{A_i\cap B_j|1\le i\le p,1\le j\le q\}$ 也是 E 的一个可测分割, 并且当 $x\in A_i\cap B_j$ 时, $f(x)+g(x)=a_i+b_j$, 因此 $f(x)+g(x)$ 是简单函数.

(2) 设 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\chi_{A_i}(x)$, 则

$$\phi(f(x))=\sum_{i=1}^{k}\phi(a_i)\chi_{A_i}(x)$$

因此 $\phi(f(x))$ 是简单函数.

3.3.3 可测函数的简单函数逼近

定义. 设 $\{f_n\}$ 是一列定义在 E 上的函数. 若对每个 $x\in E$, 总有

$$f_1(x)\le f_2(x)\le\cdots\le f_n(x)\le f_{n+1}(x)$$

则称函数列 $\{f_n\}$ 是单调递增的, 记为 $f_n\uparrow$. 若 $\{f_n\}$ 是单调递增的函数列, 并且 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\forall x\in E$, 则记为 $f_n\uparrow f,(n\to\infty)$.

> *注意: 函数列是单调递增的并不意味着函数本身是单调递增的, 注意区分函数列单调递增和函数单调递增这两个不同的概念.*

定理3.3.2. (1)设 f 是 E 上的非负可测函数, 则存在 E 上单调递增的非负简单函数列 $\{f_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\quad\forall x\in E$$

(即 $f_n\uparrow f$), 若 f 在 E 上还是有界的, 则 $\{f_n\}$ 收敛于 f 是一致的.

(2) 设 f 是 E 上的可测函数, 则存在 E 上的简单函数列 $\{f_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ \forall x\in E$$

并且 $|f_n|\le|f|$. 若 f 在 E 上还是有界的, 则上述收敛是一致的.

(3) 设 f 是定义在 E 上的函数, 则 f 可测的充要条件是存在简单函数列 $\{f_n\}$ 处处收敛于 $f(x)$.

(4) 设 f 是定义在 E 上的实值可测函数, g 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数, 则复合函数 $g(f(x))$ 在 E 上可测.

证明: (1) 定义一种对函数进行离散化的方法: 把区间 $[0,n]$ 分割成 $n\cdot 2^n$ 个长度为 $\frac{1}{2^n}$ 的小区间, 令

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{i-1}{2^n}, & x\in E(\frac{i-1}{2^n}\le f<\frac{i}{2^n}),\ i=1,\ldots,n\cdot 2^n\\ n, & x\in E(f\ge n)\end{cases}$$

由于 f 是 E 上的可测函数, $E(\frac{i-1}{2^n}\le f<\frac{i}{2^n}), i=1,\ldots,n\cdot 2^n$ 和 $E(f\ge n)$ 是可测集, 因此 $f_n(x)$ 是非负简单函数, 显然 $f_n(x)$ 是单调递增的. 对于任意 $x\in E$, 若 $f(x)<\infty$, 则必然存在 $N>f(x)$, 对于 $f_n(x), n>N, |f_n(x)-f(x)|<\frac{1}{2^n}$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, 若 $f(x)=\infty, f_n(x)=n, n=1,\ldots,n$, 因此也有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\infty=f(x)$.

(2) 由于 $f(x)$ 可测, 由定理3.3.2, f^+ 和 f^- 都是可测函数, 由 (1) 中的结论, 存在单调递增的简单函数列 $\{f_n^+\}$ 和 $\{f_n^-\}$ 一致收敛于 f, 令 $f_n = f_n^+ - f_n^-$, 则 f_n 是简单函数列, 且一致收敛于 $f(x)$, 因为:

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n^+(x) - f_n^-(x) - (f^+(x) - f^-(x))| \leq |f_n^+(x) - f^+(x)| + |f_n^-(x) - f^-(x)|$$

$$|f_n(x)| = |f_n^+(x) - f_n^-(x)| \leq f_n^+(x) + f_n^-(x) = |f(x)|.$$

(3) 必要性由 (2) 可知, 对于充分性, 因为 $f_n(x)$ 是可测函数, 由定理2.2.5可知, $\{f_n\}$ 的极限函数是可测函数.

(4) 因为 f 是 E 上的可测函数, 所以存在简单函数列 $\{f_n\}$ 处处收敛于 f, 根据定理3.3.1, $\{g(f_n(x))\}$ 是简单函数列, 由于 g 在 $\mathbb{R}^1$ 上连续, 因此

$$\lim_{n\to\infty} g(f_n(x)) = g(f(x))$$

即 $g(f(x))$ 是一个简单函数列的极限, 由于简单函数是可测函数, 易知简单函数列的极限是可测函数, 所以 $g(f(x))$ 是 E 上的可测函数.

3.4 可测列函数的收敛性

3.4.1 几乎处处收敛, 依测度收敛, 几乎一致收敛

定义. 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的可测函数列, f 是 E 上的可测函数.

(1) 若存在 E 的一个零测度集 E_0, 使得当 $x \in E - E_0$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, 则称 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f, 记为 $f_n \to f$ a.e. 于 E.

(2) 若对于 $\forall \epsilon > 0$, 满足

$$\lim_{n\to\infty} m\big(E(|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon)\big) = 0$$

则称 $\{f_n\}$ 在 E 上依测度收敛于 f, 记为在 E 上 $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$.

$f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$ 等价于: 对于 $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0$, 存在 $N_{\epsilon,\delta}$, 使得当 $n \geq N_{\epsilon,\delta}$ 时, $m\big(E(|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon)\big) \leq \delta$.

(3) 若对于 $\forall \delta > 0$, 存在 E 的可测子集 $E_\delta, m(E_\delta) \leq \delta$, 使得在 $E - E_\delta$ 上一致收敛于 f, 则称记为 $f_n \to f$ a.un. (a.un. 是 almost uniformly 的缩写) 于 E.

> *注: $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x)$ 的点的集合为:*
> $\{x \in E | f_k(x) \nrightarrow f(x)\} = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geq \frac{1}{p})$
>
> *证明: $x \in \{x \in E | f_k(x) \nrightarrow f(x)\}$ 的充要条件是: 存在 $\epsilon > 0$, 使得对任意正整数 n, 存在 $k \geq n$, 使得 $|f_k(x) - f(x)| \geq \epsilon$. 若 $x \in \{x \in E | f_k(x) \nrightarrow f(x)\}$, 一定存在正整数 p, 使得 $\frac{1}{p} < \epsilon$, 此时对任意正整数 n, 存在 $k \geq n$, 使得 $|f_k(x) - f(x)| \geq \frac{1}{p}$, 进而 $x \in \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E(|f_k - f| \geq \frac{1}{p})$; 反向的包含关系显然成立, 证毕.*

3.4.2 几种收敛的关系

引理3.4.1. 若 $m(E)<\infty$, $f_n\to f$ a.e. 于 E, 则对于 $\forall\epsilon>0$, 满足

$$\lim_{n\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\Big)=0$$

证明: 对于任意 $x\in E$, 在 x 处 $f_n(x)$ 不收敛于等价于存在 $\epsilon>0$, 满足: 对任意 $n\geq 1$, 存在 $k\geq n$, 使得 $|f_k(x)-f(x)|\geq\epsilon$. 因此, 对任意 $\epsilon>0$, 若对任意 $n\geq 1$, 存在 $k\geq n$, 使得 $|f_k(x)-f(x)|\geq\epsilon$, 则说明 x 不是收敛点, 但反过来不一定成立.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\subseteq E\big(f_k(x)\nrightarrow f(x)\big)$$

由于 $f_n\to f$ a.e. 于 E, 因此 $E\big(f_k(x)\nrightarrow f(x)\big)$ 是零测度集. 因此

$$m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\Big)=0$$

由于 $m(E)<\infty$, 集列 $\Big\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\Big\}$ 是一列单调递减的可测集, 所以由测度的上连续性, 我们有

$$m\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\Big)=\lim_{n\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\Big)$$

进而有 $\lim\limits_{n\to\infty} m\Big(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\Big)=0$, 证毕.

定理3.4.1. (Ergoroff) 当 $m(E)<\infty$ 时, 若 $f_n\to f$ a.e. 于 E, 则 $f_n\to f$ a.un. 于 E.

证明: 即证对任意 $\delta>0$, 存在 E 的可测子集 $E_\delta, m(E_\delta)\leq\delta,\ \{f_n\}$ 在 $E-E_\delta$ 上一致收敛于 f.

因为 $m(E)<\infty$, 所以可应用引理3.4.1, 得到: $\lim\limits_{n\to\infty} m\Big(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\Big)=0, \forall\epsilon>0$. 这等价于对于 $\forall\epsilon'>0, \forall\delta'>0$, 存在 N, 使得当 $n\geq N$ 时, $m\Big(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon')\Big)\leq\delta'$. 特别地, 对于 $\epsilon'=\frac{1}{p}, \delta'=\frac{\delta}{2^p}, \forall p\in\mathbb{N}^+$, 存在 n_p, 使得当 $k\geq n_p$ 时, 有 $m\Big(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\frac{1}{p})\Big)\leq\frac{\delta}{2^p}$. 定义 $E_\delta=\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n_p}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\frac{1}{p})$, 易证 E_δ 是 E 的可测子集, $m(E_\delta)\leq\sum\limits_{p=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^p}=\delta, E-E_\delta=\bigcap\limits_{p=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n_p}^{\infty} E(|f_k-f|<\frac{1}{p})$, 即 $x\in E-E_\delta \iff$ 对于 $\forall p\in\mathbb{N}^+$, 存在 n_p, 使得当 $k\geq n_p$ 时, $|f_k-f|<\frac{1}{p}$. 所以在 $E-E_\delta$ 上 $f_n\to f$. 证毕.

定理3.4.2. 当 $m(E)<\infty$ 时, 若 $f_n\to f$ a.e. 于 E, 则 $f_n\xrightarrow{\mathrm{m}} f$ 于 E.

证明: 因为 $m(E)<\infty$, 所以可应用引理3.4.1, 得到: 对于 $\forall\epsilon>0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} m\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\Big)=0$$

$m\Big(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E(|f_k-f|\geq\epsilon)\Big)\geq m\big(E(|f_n-f|\geq\epsilon)\big)$, 进而有

$$\lim_{n\to\infty} m\big(E(|f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon)\big)=0$$

证毕.

> *注. 当* $m(E)<\infty$ *不成立时,* $f_n \to f$ *a.e. 于* E *并不能推出* $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$*, 例如,*
>
> $$f_n(x)=\begin{cases} 1, & x\in[0,n] \\ 0, & x\in(n,\infty) \end{cases}$$
>
> *显然* $\{f_n(x)\}$ *在* $[0,\infty)$ *上处处收敛于* $f(x)=1$*, 但是当* $n\to\infty$ *时,*
>
> $$m\big(E(|f_n-1|\geq \frac{1}{2})\big)=m\big((n,\infty)\big)=\infty$$
>
> *因此* $\{f_n(x)\}$ *在* $[0,\infty)$ *上并不依测度收敛于* $f(x)$*.*

定理3.4.3. (F. Riesz) 若 $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$ 于 E, 则存在 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得 $f_{n_k}\to f$ a.e. 于 E.

证明: 由 $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$ 的定义可知, 对任意 $\epsilon=\frac{1}{k}, \delta=\frac{1}{2^k}, k=1,2,\ldots$, 存在 n_k, 使得

$$m\big(E(|f_{n_k}-f|\geq \frac{1}{k})\big)\leq \frac{1}{2^k}$$

进而可以得到函数列 $\{f_{n_k}\}$. 接下来我们证明 $\{f_{n_k}\}\to f$, a.e. 于 E, 也就是除了一个零测度集之外, $\{f_{n_k}(x)\}$ 收敛于 f: 令

$$E_0=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_{n_k}-f|\geq \frac{1}{k})$$

$$m(E_0)=\lim_{n\to\infty}m\big(\bigcup_{k=n}^{\infty}E(|f_{n_k}-f|\geq\frac{1}{k})\big)\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}m\big(E(|f_{n_k}-f|\geq\frac{1}{k})\big)\leq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$$

$E-E_0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}E(|f_{n_k}-f|<\frac{1}{k})$, 显然 $x_0\in E-E_0$ 等价于: 存在正整数 n, 使得对任意 $k>n$, $|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|<\frac{1}{k}$. 对任意 $\epsilon>0$, 存在 n, $\frac{1}{n}<\epsilon$, 当 $k\geq n$ 时, $|f_{n_k}(x_0)-f(x_0)|<\frac{1}{k}<\frac{1}{n}<\epsilon$, 因此 $\{f_{n_k}(x)\}$ 在 x_0 处收敛于 $f(x)$, 证毕.

> *Reisz 定理的成立条件没有* $m(E)<\infty$*.*

> *依测度收敛不能推出几乎处处收敛, 例如, 对每个正整数* n*, 将区间* $[0,1]$ *等分为* n *个小区间, 记*
>
> $$A_n^i=[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}],\ i=1,\ldots,n$$
>
> *将* A_n^i *按照如下的顺序编排, 得到* $\{E_n\}$*:*
>
> $$A_1^1, A_2^1, A_2^2, A_3^1, A_3^2, A_3^3, \ldots$$
>
> *定义* $f_n(x)=\chi_{E_n}(x)$*,* $x\in[0,1]$*, 接下来证明* $\{f_n\}$ *依测度收敛于* $f(x)=0$*,* $x\in[0,1]$ *. 对任意* $0<\epsilon<1$*, 当* $n\to\infty$ *时,*
>
> $$m\big(E(|f_n|>\epsilon)\big)=m(E_n)\to 0$$
>
> *证毕. 而对于任意* $x_0\in[0,1]$*, 必然存在无限个* E_n *包含* x_0*, 也就是说有无限多个* $f_n(x)$ *使得* $f_n(x_0)=1$*, 因此对于任意* $0<\epsilon<1$*, 满足: 对任意* n*, 存在* $k>n$ *使得* $|f_k(x_0)-f(x_0)|>\epsilon$*, 所以* $\{f_n(x)\}$ *在* x_0 *处不收敛于* $f(x)$*.*

定理3.4.4. 当 $m(E)<\infty$ 时, $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$ 的充要条件是对于 $\{f_n\}$ 的任一子列 $\{f_{n_k}\}$, 都存在其子列 $\{f_{n_{k'}}\}$ 使得 $f_{n_{k'}} \to f$ a.e. 于 E.

证明: 必要性: 显然 $\{f_n\}$ 的任意子列都依测度收敛于 f, 根据 Riesz 定理, 对 $\{f_n\}$ 的任一子列 $\{f_{n_k}\}$, 都存在其子列 $\{f_{n_{k'}}\}$ 使得 $f_{n_{k'}} \to f$ a.e. 于 E.

充分性: 反证法. 若 $\{f_n\}$ 不依测度收敛于 f, 则存在 $\epsilon>0$, 使得 $m\big(E(|f_n-f|\geq\epsilon)\big)$ 不收敛于 0. 于是存在 $\delta>0$ 使得对任意 n, 存在 $k>n$ 使得 $m\big(E(|f_k-f|\geq\epsilon)\big)\geq\delta$. 由此可构造 $\{f_n\}$ 的一个子列 $\{f_{n_k}\}$, 使得

$$m\big(E(|f_{n_k}-f|\geq\epsilon)\big)\geq\delta,\ \forall k\in\mathbb{N}^+$$

显然, f_{n_k} 的任一子列都不可能依测度收敛于 f. 由已知条件, 必然存在 $\{f_{n_k}\}$ 的一个子列 $\{f_{n_{k'}}\}$, 使得 $f_{n_{k'}} \to f$ a.e. 于 E. 由定理3.4.2可知, $f_{n_{k'}} \xrightarrow{\mathrm{m}} f$, 产生矛盾.

> *因为必要性的证明只运用了 Riesz 定理, 所以成立条件没有 $m(E)<\infty$, 但充分性的证明运用到了定理3.4.2, 因此成立条件包括 $m(E)<\infty$.*

定理3.4.5. 当 $m(E)<\infty$ 时, f 和 f_n $(n\geq1)$ 是 E 上的实值可测函数, ψ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的连续函数, 若在 E 上有 $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$, 则在 E 上 $\psi(f_n) \xrightarrow{\mathrm{m}} \psi(f)$.

证明: 由定理3.4.4, 对 $\{f_n\}$ 的任一子列 $\{f_{n_k}\}$, 都存在其子列 $\{f_{n_{k'}}\}$ 使得 $f_{n_{k'}} \to f$ a.e. 于 E. 由于 ψ 是连续的, 因此有 $\psi(f_{n_{k'}})\to\psi(f)$, a.e., 这表明对 $\psi(f_n)$ 的任一子列, 都存在其子列 $\psi(f_{n_{k'}})$ 使得 $\psi(f_{n_{k'}})\to\psi(f)$ a.e. 再次应用定理3.4.4, 可知 $\psi(f_n) \xrightarrow{\mathrm{m}} \psi(f)$, 证毕.

定理3.4.6. (1) 若 $f_n\to f$ a.un. 于 E, 则 $f_n\to f$ a.e. 于 E.

(2) 若 $f_n\to f$ a.un. 于 E, 则 $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$. 于 E.

证明: (1) 设 $f_n \nrightarrow f$ 的点集为 $\hat{E}$, 根据几乎一致收敛的定义, 对于 $\forall\delta>0$, 存在 E 的可测子集 E_δ, $m(E_\delta)\leq\delta$, 使得在 $E-E_\delta$ 上一致收敛于 f, 则 $\hat{E}\subseteq E_\delta$, 进而有 $m(\hat{E})\leq\delta$, 由 δ 的任意性可知 $m(\hat{E})=0$, 证毕. (2) 对于 $\forall\epsilon>0, \forall\delta>0$, 根据几乎一致收敛的定义, 可知存在集合 E_δ, $m(E_\delta)\leq\delta$, 使得在 $E-E_\delta$ 上一致收敛于 f, 则必然存在 N, 当 $n\geq N$ 时, $|f_n-f|\leq\epsilon$, 即 $m\big(E(|f_n-f|>\epsilon)\big)=0\leq\delta$, 证毕.

3.4.3. 几种收敛极限的性质

定理3.4.7. 三种极限都具有唯一性.

证明: 先证明对几乎处处收敛成立: 若 $f_n\to f$ a.e. 于 E, $f_n\to g$ a.e. 于 E, 则有 $f=g$ a.e. 于 E.

存在零测度集 E_0 和 G_0, 在 $E-E_0$ 和 $F-F_0$ 上有 $f_n\to f$, $f_n\to g$, 则 $f=g$, $x\in E-(E_0\cup F_0)$, 而 $E_0\cup F_0$ 是零测度集, 因此 $f=g$ a.e. 于 E.

几乎一致收敛一定几乎处处收敛, 因此也满足唯一性. 下面证明依测度收敛满足唯一性: 若 $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$, $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} g$, 则 $f=g$ a.e. 于 E.

$|f-g|\leq|f-f_n|+|g-f_n|$, 对于 $\forall\epsilon>0$,

$$E(|f-f_n|+|f_n-g|\geq\epsilon)\subseteq E(|f-f_n|\geq\epsilon/2)\cup E(|g-f_n|\geq\epsilon/2)$$

由依测度收敛的定义易得, 对于 $\forall\delta$, 存在 N, 当 $n \geq N$ 时, $m\big(E(|f-f_n| \geq \epsilon/2)\big) \leq \delta/2$, $m\big(E(|g-f_n| \geq \epsilon/2)\big) \leq \delta/2$, 进而 $m\big(E(|f-f_n|+|f_n-g| \geq \epsilon)\big) \leq \delta$,
$m\big(E(|f-g| \geq \epsilon)\big) \leq \delta$, 由 ϵ 和 δ 的任意性可知 $f=g$ a.e. 于 E.

定理3.4.8.设 $f_n \to f$ a.e. 于 E, $g_n \to g$ a.e. 于 E, 则:

(1) $|f_n| \to |f|$ a.e. 于 E.

(2) $cf_n \to cf$ a.e. 于 E.

(3) $f_n+g_n \to f+g$ a.e. 于 E.

(4) $f_n g_n \to fg$ a.e. 于 E.

证明: 存在零测度集 E_0, 使得在 $E-E_0$ 上 $f_n \to f$, 进而 $|f_n| \to |f|$, $cf_n \to cf$, $f_n+g_n \to f+g$, 因此(1), (2), (3)得证. 存在零测度集 G_0, 使得在 $E-G_0$ 上 $g_n \to g$, 在 $E-E_0-G_0$ 上 $f_n g_n \to fg$, 而 $E_0 \cup G_0$ 是零测度集, 因此(4)得证.

因为几乎一致收敛一定几乎处处收敛, 因此也满足这些性质.

定理3.4.9. 设 $f_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f$ 于 E, $g_n \xrightarrow{\mathrm{m}} g$ 于 E, $m(E)<\infty$, 则:

(1) $|f_n| \xrightarrow{\mathrm{m}} |f|$.

(2) $cf_n \xrightarrow{\mathrm{m}} cf$.

(3) $f_n+g_n \xrightarrow{\mathrm{m}} f+g$.

(4) $f_n g_n \xrightarrow{\mathrm{m}} fg$.

证明: (1) 对于 $\{|f_n|\}$ 的任意子列 $\{|f_{n_k}|\}$, 由定理3.4.4可知, 相应地对于 $\{f_n\}$ 的子列 $\{f_{n_k}\}$, 存在其子列 $\{f_{n_{k'}}\}$ 使得 $f_{n_{k'}} \to f$ a.e. 于 E, 此时有 $|f_{n_{k'}}| \to |f|$ a.e. 于 E, 再次应用定理3.4.4, 可知 $|f_n| \xrightarrow{\mathrm{m}} |f|$. (2), (3), (4) 可用相同方法证明.

参考: https://wenku.baidu.com/view/544042fb3286bceb19e8b8f67c1cfad6195fe9e2.html

3.5 可测函数的连续性

引理3.5.1.设 $F_1, F_2, \ldots, F_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 个互不相交的闭集, $F=\bigcup\limits_{i=1}^{k} F_i$, 则简单函数 $f(x)=\sum\limits_{i=1}^{k} a_i \chi_{F_i}(x)$ 是 F 上的连续函数.

证明: 对于 $\forall x_0 \in F$, 存在 i_0 使得 $x_0 \in F_{i_0}$. 由于 $F_1, F_2, \ldots, F_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 k 个互不相交的闭集, 故 $x_0 \notin \bigcup\limits_{i \neq i_0} F_i$, 易证 $\bigcup\limits_{i \neq i_0} F_i$ 是闭集, $\big(\bigcup\limits_{i \neq i_0} F_i\big)^C$ 是开集, 因此存在 $\delta>0$, 使得 $U(x_0,\delta) \subset \big(\bigcup\limits_{i \neq i_0} F_i\big)^C$. 对于 $\forall\epsilon>0$, 当 $d(x,x_0) \leq \delta$, 并且 $x \in F$ 时, 必有 $x \in F_{i_0}$. 于是

$$|f(x)-f(x_0)| = |a_{i_0}-a_{i_0}| = 0 \leq \epsilon$$

故 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 证毕.

定理3.5.1. (Lusin) 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, f 是 E 上 a.e. 有界的可测函数, 则对 $\forall\delta>0$, 存在 E 的子集 E_δ, 满足 $m(E_\delta)\le\delta$, 且 $E-E_\delta$ 是闭集, 使得 f 在 $E-E_\delta$ 上是连续函数.

> *该定理可以换一种说法: 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, f 是 E 上 a.e. 有界的可测函数, 则对 $\forall\delta>0$, 存在 E 的闭子集 F, 满足 $m(E-F)\le\delta$, 使得 f 在 F 上是连续函数.*

证明: (1) 设 f 是简单函数, 则 $f(x)$ 可以表示为 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{K}a_k\chi_{E_k}(x)$, 其中 $E_1,\ldots,E_K$ 是 E 的一个可测分割. 由定理2.2.2可知, 对任意 E_k, 存在闭集 $F_k\subset E_k$, $m(E_k-F_k)\le\frac{\delta}{K}$. 定义 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{K}F_k$, 易证 F 是闭集, 且 $m(E-F)=m\big(\bigcup\limits_{k=1}^{K}(E-F_k)\big)\le\sum\limits_{k=1}^{K}m(E-F_k)\le\delta$, 将 f 限制在 F 上, 得到简单函数 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{K}a_k\chi_{F_k}(x)$, 由引理3.5.1可知, 它是 F 上的连续函数.

(2) 若 $f(x)<\infty,\forall x\in E,$ 由定理3.3.2, 存在 E 上的简单函数列 $\{f_n\}$, 使得

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),\ \forall x\in E$$

并且 $|f_n|\le|f|$. 由 (1) 中的结论可知, 对于任意 f_n, 存在闭集 F_n, 且 $m(E-F_n)<\frac{\delta}{2^n}$. 定义 $F=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}^+$, f_n 在 F 上是连续函数, 易证 f 在 F 上也是连续函数, 并且

$$\begin{aligned}
m(E-F)&=m(E-\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n)\\
&=m(E\cap(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^C))\\
&=m(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E\cap F_n^C))\\
&\le\sum_{n=1}^{\infty}m(E-F_n^C)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^n}=\delta
\end{aligned}$$

证毕.

(3) 若 $f(x)$ 可能取到 ∞, 由于 f 是 E 上 a.e. 有界的可测函数, 因此存在零测度集 E_0, 使得 $f(x)<\infty,\forall x\in E-E_\delta$, 根据 (2) 中的结论, 存在 $E-E_0$ 的子集 E_δ, 满足 $m(E_\delta)\le\delta$, 且 $E-E_0-E_\delta$ 是闭集, 使得 f 在 $E-E_0-E_\delta$ 上是连续函数. 易验证 $E_\delta\cup E_0$ 满足条件, 证毕.

引理3.5.2. 若 A 是闭集, 则对于任意一点 x, $d(x,A)=0$ 当且仅当 $x\in A$.

证明: 充分性显然, 下面证明必要性: 若 $x\notin A$, 则 $x\in A^C$, 由于 A 是闭集, 所以 A^C 是开集, 则存在邻域 $U(x,\epsilon)\subset A^C$, $\epsilon>0$, 此时 $d(x,A)\neq0$, 因此必然有 $d(x,A)=0$.

定理3.5.2. 设 $A,B\subset\mathbb{R}^n$ 是 2 个闭集, 并且 $A\bigcap B=\emptyset$. 又设 a 和 b 是实数, 并且 $a<b$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 上的一个连续函数 f, 使得 $f|_A=a$, $f|_B=b$, 并且 $a\le f(x)\le b,\forall x\in\mathbb{R}^n$.

证明: 定义 $f(x)$:

$$f(x)=\frac{ad(x,B)+bd(x,A)}{d(x,B)+d(x,A)}$$

显然 $d(x,A)$ 和 $d(x,b)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中连续. 由引理3.5.2, 因为 A,B 是闭集, 因此 $d(x,A)=0$ ($d(x,B)=0$) 当且仅当 $x\in A$ ($x\in B$). 因此 $f|_A=a$, $f|_B=b$. 当 $x\notin A\cup B$, $f(x)=a+(b-a)\frac{d(x,A)}{d(x,B)+d(x,A)}=b-(b-a)\frac{d(x,B)}{d(x,B)+d(x,A)}\in[a,b]$.

定理3.5.3. (Tietze) 设 F 是 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集, f 是定义在 F 上的连续函数, 则存在定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 g, 使得 $g(x)=f(x)\ \forall x\in F$, 并且

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|$$

证明: (1) 若 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上有界, 记 $\sup\limits_{x\in F}|f(x)|=M$, 定义

$$A_1=F(-M\leq f(x)\leq-\frac{M}{3})$$

$$B_1=F(\frac{M}{3}\leq f(x)\leq M)$$

根据定理3.5.2, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g_1(x)$, 满足 $g_1|_{A_1}=-\frac{M}{3}$, $g_1|_{B_1}=\frac{M}{3}$, $-\frac{M}{3}\leq g_1(x)\leq\frac{M}{3}$ ($x\in\mathbb{R}^n$), 容易验证 $|f(x)-g_1(x)|\leq\frac{2M}{3},\forall x\in F$. 对函数 $f(x)-g_1(x)$ 按照同样的方式定义和 A_2, B_2 和 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $g_2(x)$, 满足: $g_2|_{A_2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M$, $g_2|_{B_2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M$, $-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M\leq g_2(x)\leq\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}M$ ($x\in\mathbb{R}^n$), 容易验证 $|f(x)-g_1(x)-g_2(x)|\leq(\frac{2}{3})^2M,\forall x\in F$, 这样无限进行下去, 得到 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$ 和 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数列 $\{g_n(x)\}$, 对于任意的 g_n 满足 $g_n|_{A_n}=-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}M$, $g_n|_{B_n}=\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}M$,

$$-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}M\leq g_n(x)\leq\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{n-1}M,\ \forall x\in\mathbb{R}^n$$

$$|f(x)-\sum_{i=1}^{k}g_i(x)|\leq(\frac{2}{3})^kM,\ \forall x\in F$$

由此可知在 F 上 $\{\sum\limits_{i=1}^{n}g_i(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$, 记 $g(x)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i(x)$, 则 $g(x)=f(x),\forall x\in F$. 因为每个 $g_n(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 由数学分析的知识可知 $g(x)$ 是连续函数, 此外, $|g(x)|=|\sum\limits_{i=1}^{\infty}g_i(x)|\leq\frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^{i-1}M=M$, 因此已验证 $g(x)$ 满足条件, 证毕.

(2) 若 f 无界, 定义 $u(x)=\arctan\big(f(x)\big),\forall x\in F$, 则 $|u(x)|\leq\frac{\pi}{2}$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 $v(x)$, 使得当 $x\in F$ 时 $v(x)=u(x)$. 令 $g(x)=\tan\big(v(x)\big)$, 则 g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 且当 $x\in F$ 时

$$g(x)=\tan\big(v(x)\big)=\tan\big(u(x)\big)=f(x)$$

证毕.

结合 Lusin 定理和 Tietze 定理, 可以得到如下结论:

定理3.5.4. (Lusin) 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, f 是 E 上 a.e. 有界的可测函数, 则对于 $\forall\delta>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 g, 满足 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|$ 和 E 的闭子集 F, 满足 $m(E-F)\leq\delta$, 使得 $f(x)=g(x),\forall x\in F$.

推论. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, f 是 E 上 a.e. 有界的可测函数, 则对于 $\forall\delta>0$, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 g, 满足 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|$, 使得

$$m\big(E(f\neq g)\big)\leq\delta$$

证明: 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 g, 满足 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)| = \sup_{x\in F}|f(x)|$ 和 E 的闭子集 F, 满足 $m(E-F)\le\delta$, 使得 $f(x)=g(x), \forall x\in F$. 显然, $E\big(f\neq g\big)\subseteq E-F$, 由此可知 $m\big(E(f\neq g)\big)\le\delta$.

定义. f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的实值函数, 若存在一个有界集 A, 使得当 $x\in A^C$ 时, $f(x)=0$, 则称 f 具有紧支集.

若限定 E 是有界集, 还可以得到如下结论:

定理3.5.5. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界可测集, f 是 E 上 a.e. 有界的可测函数, 则对于 $\forall\delta>0$, 存在在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 g, 满足 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)| = \sup_{x\in F}|f(x)|$ 和 E 的闭子集 F, 满足 $m(E-F)\le\delta$, 使得 $f(x)=g(x), \forall x\in F$.

证明: 若 E 是有界可测集, 则存在闭球 $\overline{U(0,r_1)}$ 和开球 $U(0,r_2)$, 使得 $E\subset\overline{U(0,r_1)}\subset U(0,r_2)$. 由定理3.5.2可知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 ψ, 使得 $\psi|_{\overline{U(0,r_1)}}=1$, $\psi_{U(0,r_2)}=0$, 且 $0\le\psi(x)\le 1$. 同定理3.5.4的证明, 可知存在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数 g, 满足 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)| = \sup_{x\in F}|f(x)|$ 和 E 的闭子集 F, 满足 $m(E-F)\le\delta$, 使得 $f(x)=g(x)$, $\forall x\in F$. 定义 $g'=g\psi$, 易证 g' 是 $\mathbb{R}^1$ 上具有紧支集的连续函数, 且满足其他条件, 证毕.

推论. 设 E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界可测集, f 是 E 上 a.e. 有界的可测函数, 则对于 $\forall\delta>0$, 存在在 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数 g, 满足 $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n}|g(x)| = \sup_{x\in F}|f(x)|$, 使得

$$m\big(E(f\neq g)\big)\le\delta$$

证明: 同定理3.5.4的推论.