2.1 外测度

2.1.1 外测度的定义

为了建立一种新的积分理论, 我们就必须对直线上比区间更一般的集合给出一种类似于区间长度那样的度量, 对于二维或三维空间, 必须给出类似于面积或体积的度量, 接下来, 我们就在 $\mathbb{R}^n$ 上建立这种度量.

定义. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\{I_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有限或可列个方体, 使得

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{k_0} I_k$$

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

则称 $\{I_k\}$ 是 A 的一个开方体覆盖.

由于有限并可以写成可列并 (令 $I_k = \emptyset, \forall k > k_0$), 因此不妨只考虑 $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ 的情形.

定义. 对于每个 $A \subset \mathbb{R}^n$, 令

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| | |I_k| \text{ 是 } A \text{ 的开方体覆盖}\}$$

称 $m^*(A)$ 是 A 的 Lebesgue 外测度, 简称外测度.

由定义可知, $m^*(A) \geq 0$, 若对 A 的任意开方体覆盖 $\{I_k\}$, 总有 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| = \infty$, 则 $m^*(A) = \infty$, 因此, $0 \leq m^*(A) \leq \infty$.

显然:

(1) 对 $A \subset \mathbb{R}^n$ 的任意一个开方体覆盖 $\{I_k\}$, 有

$$m^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$$

(2) 若 $m^*(A) < \infty$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在 A 的一个开方体覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(A) + \epsilon$$

2.1.2 外测度的性质

定理2.1.1. 外测度具有如下的性质:

(1) $m^*(\emptyset)=0$

(2) 单调性: 若 $A\subseteq B$, 则 $m^*(A)\le m^*(B)$

(3) 次可列可加性: 对 $\mathbb{R}^n$ 中的任一可列集 $\{A_k\}$, 有

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}m^*(A_k)$$

证明:

(1) 由于 $\emptyset$ 也是方体, 并且 $|\emptyset|=0$, 因此 $\{\emptyset\}$ 是空集 $\emptyset$ 的一个开方体覆盖, 并且 $m^*(\emptyset)\le|\emptyset|=0$, 从而$m^*(\emptyset)=0$.

(2) 设 $m^*(B)<\infty$, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 B 的一个开方体覆盖 $\{I_k\}$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(B)+\epsilon$, 因为 $A\subseteq B$, $\{I_k\}$ 也是 A 的一个开方体覆盖, 因此

$$m^*(A)\le\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(B)+\epsilon$$

由 ϵ 的任意性知 $m^*(A)\le m^*(B)$.

(3) 不妨设 $m^*(A_k)<\infty,\forall k\in\mathbb{N}^+$, 对 $\forall\epsilon>0$ 和每个 $k\ge1$, 存在 A_K 的一个开方体覆盖 $\{I_{k,i}\}$, 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_{k,i}|\le m^*(A_k)+\frac{\epsilon}{2^k}$$

由于 $\{I_{k,i}|\forall k,i\in\mathbb{N}^*\}$, 也是 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 的一个开方体覆盖, 因此

$$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)\le\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|I_{k,i}|\le\sum_{k=1}^{\infty}\left(m^*(A_k)+\frac{\epsilon}{2^k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(A_k)+\epsilon$$

由 ϵ 的任意性知 $m^*(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k)\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}m^*(A_k)$.

定理2.1.2. 可数集的外测度是 0.

证明: 以 $\mathbb{R}^1$ 为例, 因为有限集含于可列集, 因此不妨只证可列集的情形, 设 $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 A 的一个开方体覆盖 $\{I_k\}$, 使得

$$I_k=\left(a_k-\frac{\epsilon}{2^{k+1}},a_k+\frac{\epsilon}{2^{k+1}}\right),\ \forall k\in\mathbb{N}^+$$

因此

$$m^*(A)\le\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^k}=\epsilon$$

由 ϵ 的任意性知 $m^*(A)=0$.

定理2.1.3. 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任一方体 I, $m^*(I)=|I|$

证明: 以 $\mathbb{R}^1$ 为例, 设 $[a,b]$ 为一有界闭区间, 对任意 $\epsilon>0$, 开区间 $(a-\epsilon,b+\epsilon)$ 是 I 的一个开区间覆盖, 因此

$$m^*(I)\le|(a-\epsilon,b+\epsilon)|=b-a+2\epsilon$$

由 ϵ 的任意性得到 $m^*(I)\le b-a=|I|$, 现在证明反向不等式, 对任意 $\epsilon>0$, 存在 I 的一个开区间覆盖 $\{I_k\}$ 使得, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|\le m^*(I)+\epsilon$, 根据有限覆盖定理, 存在 $\{I_k\}$ 的一个有限子列覆盖 I, 不妨设为 $\{I_1,\dots I_{k_0}\}$, $I\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{k_0}I_k$, 因此有

$$|I|\le\sum_{k=1}^{k_0}|I_k|\le\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|<m^*(I)+\epsilon$$

由 ϵ 的任意性得到 $|I|\le m^*(I)$, 综上 $m^*(I)=|I|$. 现在设 I 为任一有界区间, 则存在有界闭区间 I_1 和 I_2, 使得 $I_1\subset I\subset I_2$, 且 $|I|-|I_1|<\epsilon$,$|I_2|-|I|<\epsilon$, 由外测度的单调性和对有界闭区间证明的结果得到:

$$m^*(I_1)\le m^*(I)\le m^*(I_2)$$

我们已经证明闭区间的外测度等于区间长度, $m^*(I_1)=|I_1|>|I|+\epsilon$,
$m^*(I_2)=|I_2|<|I|+\epsilon$, 因此

$$|I|-\epsilon\le m^*(I)\le|I|+\epsilon$$

由 ϵ 的任意性得到 $m^*(I)=|I|$.

若 I 是一无界区间 $[a,\infty)$, 由于对任意 $k>0$, $[a,a+k]\subset[a,\infty)$, 因此
$k=m^*([a,a+k])=m^*([a,\infty))$, 由 k 的任意性可知, $m^*([a,\infty))=\infty$ (同理可证(a,∞), $(-\infty,a)$, $(-\infty,a]$).

定理2.1.4. (平移不变性) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则对任意 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 有

$$m^*(x_0+E)=m^*(E)$$

其中 $x_0+E=\{x_0+x|x\in E\}$.

证明: 设 $\{I_k\}$ 是 E 的开方体覆盖, 则 $\{x_0+I_k\}$ 是 x_0+E 的开方体覆盖. 由于方体的体积是平移不变的, 因此

$$m^*(x_0+E)\le\sum_{k=1}^{\infty}|x_0+I_k|=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|$$

因此取下确界, $m^*(x_0+E)\le m^*(E)$, 反过来, E 可以看作是 x_0+E 平移 $-x_0$ 得到的,因此又有 $m^*(E)\le m^*(x_0+E)$.

定理2.1.5. (缩放性) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则对任意实数 λ 有

$$m^*(\lambda E)=|\lambda|^n m^*(E)$$

其中 $\lambda E=\{\lambda x|x\in E\}$.

证明: 当 $\lambda=0$ 时显然成立, 若 $\lambda\ne0$, 若 I 是 $\mathbb{R}^n$ 中的方体, 则 $|\lambda I|=|\lambda^n||I|$, 设 $\{I_k\}$是 E 的开方体覆盖, 则 $\{\lambda I_k\}$ 是 λE 的开方体覆盖, 因此

$$m^*(\lambda E) \le \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda I_k| = |\lambda|^n \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|$$

因此取下确界, $m^*(\lambda E) \le |\lambda|^n m^*(E)$, 反过来, E 可以看作是 λE 缩放 λ^{-1} 得到的,因此又有 $|\lambda|^n m^*(E) \le m^*(\lambda E)$.

定理2.1.6. (外测度有限的集合的逼近性质) 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的集合, $m^*(A) < \infty$, 则对任意 $\epsilon > 0$, 存在开集 $G \supset E$, 使得 $m^*(G) \le m^*(E) + \epsilon$

证明: 先设 $m^*(E) < \infty$, 由外测度的定义可知, 对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在一列开方体 $\{I_k\}$ 使得 $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, 并且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(E) + \epsilon$. 令 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, 则 G 为开集, 并且 $E \subset G$, 此外

$$m^*(G) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m^*(E) + \epsilon$$

2.2 测度

在2.1节引入的外测度虽然具有和长度, 面积, 体积相似的性质, 但是不具有有限可加性: 若 $A, B \subset \mathbb{R}^n$, $A \cap B = \emptyset$, 则

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B)$$

出现这种现象的原因是有一些不好的集合破坏了外测度的可加性, 我们希望将满足有限可加性的集类挑选出来 (下文记为 $\mathscr{M}$), 将外测度限制在这样的集合上.

2.2.1 测度的定义

若 $E \in \mathscr{M}$, 显然方体是属于 $\mathscr{M}$ 的, 显然对任意方体 $I, I \cap E, I \cap E^C$ 互不相交且并集是 E, 因此必然有

$$m^*(I) = m^*(I \cap E) + m^*(I \cap E^C)$$

以上分析表明: $E \in \mathscr{M}$ 的必要条件是对任意方体上式成立.

接下来我们证明: 上式等价于: 对于任意 $A \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$$

证明: 充分性显然, 下面证明必要性.

根据外测度的次可列可加性, 显然有

$$m^*(A) \le m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$$

因此只需证明不等号反向也成立, 根据外测度的定义, 对于任意 $\epsilon > 0$, 存在 A 的一个开方体覆盖 $\{I_k\}$, 使得 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| \le m^*(A) + \epsilon$,

$$m^*(A \cap E) \le m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \cap E) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k \cap E)$$

$$m^*(A\cap E^C)\le m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k\cap E^C)\le\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k\cap E^C)$$

进而

$$\begin{aligned}m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)&\le\sum_{k=1}^{\infty}\big(m^*(I_k\cap E)+m^*(I_k\cap E^C)\big)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(I_k)=\sum_{k=1}^{\infty}|I_k|\le m^*(A)+\epsilon\end{aligned}$$

由 ϵ 的任意性可知, $m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)\le m^*(A)$

上述条件被称为卡氏条件 (Caratheodory 条件), 接下来我们证明卡氏条件充分性.

(1) 若 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 是互不相交的可测集, 则

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)=\sum_{i=1}^{k}m^*(A_i)$$

(2) 若 $\{A_k\}$ 是一列互不相交的可测集, 则

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(A_i)$$

证明: (1) 证明当 $k=2$ 时结论成立, 对任意 $A\subset\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}m^*(A\cap(A_1\cup A_2))+m^*(A\cap(A_1\cup A_2)^C)&=m^*((A\cap A_1)\cup(A\cap A_2))+m^*((A\cap A_1^C\cap A_2^C)\\&\le m^*(A\cap A_1)+m^*(A\cap A_2)+m^*((A\cap A_1^C\cap A_2^C)\\&=m^*(A\cap A_1)+m^*(A\cap A_1^C\cap A_2)+m^*((A\cap A_1^C\cap A_2^C)\\&=m^*(A\cap A_1)+m^*(A\cap A_1^C)=m^*(A)\end{aligned}$$

对于 $k=3,\ldots$ 的情况可反复利用 $k=2$ 的结论证明.

(2) 由 (1) 中的结论, 有

$$\sum_{i=1}^{k}m^*(A_i)=m^*(\bigcup_{i=1}^{k}A_i)\le m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)$$

令 $k\to\infty$, 得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}m^*(A_i)\le m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)$$

由外测度的次可列可加性, 有

$$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)\le\sum_{i=1}^{\infty}m^*(A_i)$$

证毕.

定义. 对于 $E\subset\mathbb{R}^n$, 若卡氏条件成立, 则称 E 是 Lebesgue 可测集, 称 $m^*(E)$ 为 E 的测度, 简写为 $m(E)$. $\mathbb{R}^n$ 中可测集的全体记为 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

定理2.1.1. (1) 外测度为 0 的集合和其子集都是可测集.

(2) 可数集是可测集, 测度为 0.

证明: (1) 设 $m^*(E)=0$, $(A\cap E)\cup(A\cap E^C)=A\cup E$, 所以对任意 $A\subset\mathbb{R}^n$, 有

$$m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)\le m^*(E)+m^*(A)\le m^*(A)$$

所以 E 是可测集, 至此我们证明了外测度为 0 的集合是可测集 .

设 E_1 是 E 的子集, 则 $0\le m(E_1)\le m(E)$, 进而 $m(E_1)=0$, 所以 E_1是可测集.

(2) 由定理2.1.2, 可数集的外测度为 0, 因此是可测集, 相应地测度为 0.

定理 2.1.2. (1) 可测集的全体 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 是一个 σ-代数.

(2) 每个 Borel 集是可测集, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\subset\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$.

证明: (1) 由定义可知, 若 E 是可测的, 则 E^C 是可测的, 因此可测集对余运算封闭, 接下来我们证明对于有限并运算封闭.

设 E_1,E_2 是可测集, 证明 $E_1\cup E_2$ 是可测集: 对于 $\forall E\subset\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}m^*(A\cap(E_1\cup E_2))+m^*(A\cap(E_1\cup E_2)^C)&\le[m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^C\cap E_2)]+m^*(A\cap E_1^C\cap E_2^C)\\&=m^*(A\cap E_1)+m^*(A\cap E_1^C)\\&=m^*(A)\end{aligned}$$

所以 E_1,E_2 是可测集, 重复运用此结论可以证明有限个可测集的并仍是可测集. 综上, $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 是一个代数.

根据定理 1.4.5, 只需证明 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 对于不相交的可列并封闭. 设 $\{E_k\}$ 是一个互不相交的集列, 令 $E=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$, 我们证明 $E\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 对任意 $A\subset\mathbb{R}^n$, $A\cap E_k\subset E_k,\forall k\in\mathbb{N}^+$, 进而

$$m^*(A\cap E)=m^*\big(A\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\big)=m^*\big(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A\cap E_k)\big)=\sum_{k=1}^{\infty}m^*(A\cap E_k)$$

我们已经证明了 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 对有限并运算封闭, 因此 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $\forall n\in\mathbb{N}^+$, 进而满足卡氏条件

$$\begin{aligned}m^*(A)&=m^*\big(A\cap\bigcup_{k=1}^{n}E_k\big)+m^*\big(A\cap(\bigcup_{k=1}^{n}E_k)^C\big)\\&=m^*\big(\bigcup_{k=1}^{n}(A\cap E_k)\big)+m^*\big(A\cap\bigcap_{k=1}^{n}E_k^C\big)\\&\ge\sum_{k=1}^{n}m^*(A\cap E_k)+m^*\big(A\cap\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k^C\big)\\&=\sum_{k=1}^{n}m^*(A\cap E_k)+m^*\big(A\cap E\big)\end{aligned}$$

令 $k\to\infty$, 并利用外测度的次可列可加性, 可得:

$$m^*(A)\ge\sum_{k=1}^{\infty}m^*(A\cap E_k)+m^*\big(A\cap E\big)\ge m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)$$

这表明 E 满足卡氏条件, 进而可测. 证毕.

(2) 设 G 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 根据定理1.1.14, G 可以表示成一列半开方体 (记为 $\{I_k\}$) 的并, $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, 因为方体是可测的, 因为 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 对可列并封闭, 所以 G 是可测集. 设 $\mathbb{R}^n$ 中开集的全体是 $\mathscr{C}$, 则 $\mathscr{C}\subset\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 且 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 是 σ-代数, $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 因此 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\subseteq\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 接下来证明: 存在不是 Borel 集的可测集. 在此之前, 我们先证明第 1 章中遗留的一个结论:

Cantor 集是可测集, 测度为 0.

证明: 记 Cantor 集在构造过程中每次去掉的开区间依次为

$$I_n^k,(\forall k=1,2,\ldots,2^{n-1},n\in\mathbb{N}^+)$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(|I_n^k|\cdot 2^{n-1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3^n}\cdot 2^{n-1})=1$, 即这些区间的长度和为 1. 所以 $m^*(K)=m^*\big([0,1]-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k\big)=0$, 因此由定理2.1.1, Cantor 集是可测集, 测度为 0.

设 K 和 $K(x)$ 分别是 Cantor 集和 Cantor 函数, $K(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的单调增加的连续函数, 并且 $K([0,1])=[0,1]$, 令

$$\psi(x)=\frac{1}{2}(x+K(x))$$

易证 $\psi(x)$ 是 $[0,1]$ 上的严格单调递增的连续函数, 并且 $\psi([0,1])=[0,1]$. 因此 $\psi(x)$ 存在反函数 $\phi(x)=\psi^{-1}(x)$, $\phi(x)$ 也是 $[0,1]$ 上严格单调递增的连续函数. 记 Cantor 集在构造过程中每次去掉的开区间依次为

$$I_n^k,(\forall k=1,2,\ldots,2^{n-1},n\in\mathbb{N}^+)$$

这些区间的长度和为 1, 由于 $K(x)$ 在每个 $I_n^{(k)}$ 上为常数, 因此 $\psi(I_n^k)$ 是长度为 $\frac{1}{2}|I_n^k|$, 于是

$$m([0,1]-K)=m(\psi(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_n^k))=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}|I_n^k|=\frac{1}{2}$$

因此 $m(\psi(K))=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, 仿照2.3节中例子, 可以证明在 $\psi(K)$ 中存在不可测的子集, 设为 E, 记 $\phi(E)=A$, 则 $A\subset K$, 由于 K 是零测度集, 因此 A 是可测集, 但是 A 不是 Borel 集, 否则由于 $\phi(x)$ 在 $[0,1]$ 上是连续的, $E=\psi(A)$ 是 Borel 集, 这与 E 是不可测集矛盾.

2.2.2 测度的性质

定理2.2.1.

(1) 可减性: 若 A,B 是可测集, $A\subset B$ 并且 $m(A)<\infty$, 则

$$m(B-A)=m(B)-m(A)$$

(2) 下连续性: 若 $\{A_i\}$ 是一列单调递增的可测集, 则

$$m(\lim_{i\to\infty}A_i)=m(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\lim_{i\to\infty}m(A_i)$$

(3) 上连续性. 若 $\{A_i\}$ 是一列单调递减的可测集, 并且 $m(A_1)<\infty$, 则

$$m(\lim_{i\to\infty}A_i)=m(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=\lim_{i\to\infty}m(A_i)$$

证明: (1) $(B-A)\cup A=B$, $(B-A)\cap A=\emptyset$, 因此

$$m(B-A)+m(A)=m(B)$$

证毕.

> *当 $m(A)=\infty$ 时, 可减性不一定成立, 例如 $A=[0,\infty)$, $B=[1,\infty)$, $m(A-B)=m([0,1))=1$, 而 $m(B)-m(A)$ 是两个 ∞ 相减, 没有意义.*

(2) 令 $B_1=A_1, B_k=A_k-A_{k-1}$, $k=2,3,\ldots$, 显然有

$$B_i\cap B_j=\emptyset,\ \forall i,j\in\mathbb{N}^+, i\neq j$$

$$A_k=\bigcup_{i=1}^{k}B_i,\ \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i$$

由测度的可列可加性, 得到

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Big)=m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}m(B_i)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}m(B_i)=\lim_{k\to\infty}m(A_k)$$

(3) 令 $B_1=\emptyset, B_i=A_1-A_{i-1}$, $i=2,3,\ldots$, 显然 $\{B_i\}$ 是单调递增的, 有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_1-A_i)=A_1-\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$$

因为 $m(A)<\infty$, 因此可利用测度的可减性和下连续性, 得到

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}m(B_i)=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}m(B_i)=\lim_{k\to\infty}(m(A_1)-m(A_k))=m(A_1)-\lim_{k\to\infty}m(A_k)$$

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\Big)=m(A_1)-m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\Big)$$

二者联立可得 $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k)=\lim\limits_{k\to\infty}m(A_k)$.

> *注意: 测度的上连续性的成立条件包括 $m(A_1)<\infty$, 当这个条件不满足时, 上连续性不一定成立. 例如集列 $A_k=[k,\infty)$ 是一列单调递减的可测集, 但不满足 $m(A_1)<\infty$, 则 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k=\emptyset$, $m(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k)=0$, 而 $\lim\limits_{k\to\infty}m(A_k)=\infty$, 二者并不相等.*

定理2.2.2. (可测集的逼近性质) 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, 则

(1) 对任意 $\epsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$, 使得 $m(G-E)<\epsilon$

(2) 对任意 $\epsilon>0$, 存在闭集 $F\subset E$, 使得 $m(E-F)<\epsilon$

(3) 存在 G_σ 型集 $E\subseteq G$, 使得 $m(G-E)=0$

(4) 存在 F_σ 型集 $F\subseteq E$, 使得 $m(E-F)=0$

证明: (1) 先设 $m(E)<\infty$, 由测度的定义可知, 对于 $\forall\epsilon>0$, 存在一列开方体 $\{I_k\}$ 使得 $E\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$, 并且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|I_k|<m(E)+\epsilon$. 令 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$, 则 G 为开集, 并且 $E\subset G$, 此外

$$m(G) \le \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < m(E) + \epsilon$$

因为 $m(E) < \infty$, 所以由测度的可减性得到:

$$m(G - E) = m(G) - m(E) < \epsilon$$

设 $m(E) = \infty$, 设 $\{A_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一列互不相交的可测集, $m(A_k) < \infty, \mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, (例如 $\mathbb{R}^2$ 可以表示为一列互不相交的边长为 1 的半开方体的并). 令 $E_k = E \cap A_k$, 则 $m(E_k) < \infty$, 并且 $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. 由上面证明的结论, 对每个 k, 存在开集 $G_k \supset E_k$, 使得 $m(G_k - E_k) < \frac{\epsilon}{2^k}$, 令 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 G 是开集且 $G \supset E$,

$$G - E = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k - \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k - E_k)$$

$$m(G - E) < \sum_{k=1}^{\infty} m(G_k - E_k) < \epsilon$$

证毕.

(2) 由于可测集对余运算封闭, 因此 E^C 也是可测集, 此外, 它还是开集. 根据 (1) 中的结果, 存在开集 $G \supset E^C$, 使得 $m(G - E^C) < \epsilon$. 令 $F = G^C$, 则 F 是闭集且 $F \subset E$,

$$E - F = E - G^C = E \cap G = G - E^C$$

因此 $m(E - F) = m(G) - m(E^C) < \epsilon$.

(3) 由 (1) 的结论, 对每个正整数 k, 存在开集 $G_k \supset E, m(G_k - E) \le \frac{1}{k}$. 令 $G = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} G_k$, 则 G 为型 G_σ 集, 且

$$m(G - E) \le m(G_k - E) < \frac{1}{k}$$

令 $k \to \infty$, 即得 $m(G - E) = 0$.

(4) 由 (3) 的结论, 对每个正整数 k, 存在闭集 $F_k \subset E, m(E - F_k) \le \frac{1}{k}$. 令 $F = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, 则 F 为型 F_δ 集, 且

$$m(E - F) \le m(E - F_k) < \frac{1}{k}$$

令 $k \to \infty$, 即得 $m(E - F) = 0$.

推论. 若 $A \subset \mathbb{R}^n$ 且是可测集, 则

$$m(E) = \inf\{m(G) | G \text{ 是开集且 } G \supset E\}$$

$$m(E) = \sup\{m(F) | F \text{ 是闭集且 } E \supset F\}$$

定理2.2.3. (平移不变性) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 则对任意 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 有

$$m(x_0 + E) = m(E)$$

其中 $x_0+E=\{x_0+x|x\in E\}$.

证明: 先证明 x_0+E 是可测的, 进而由外测度的平移不变性, 可知该结论成立.

由于 E 是可测集, 因此 $\forall A\subset\mathbb{R}^n$,

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)$$

由外测度的平移不变性,

$$m^*(A)=m^*(x_0+A)$$

$$\begin{aligned}m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)&=m^*(x_0+A\cap E)+m^*(x_0+A\cap E^C)\\&=m^*((x_0+A)\cap(x_0+E))+m^*((x_0+A)\cap(x_0+E^C))\\&=m^*((x_0+A)\cap(x_0+E))+m^*((x_0+A)\cap(x_0+E)^C)\end{aligned}$$

所以 $m^*(x_0+A)=m^*((x_0+A)\cap(x_0+E))+m^*((x_0+A)\cap(x_0+E)^C)$, 把 x_0+A 换成 A, 可得

$$m^*(A)=m^*(A\cap(x_0+E))+m^*(A\cap(x_0+E)^C)$$

因此 x_0+E 是可测集.

定理2.2.4. (缩放性) 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, 则对任意实数 λ 有

$$m(\lambda E)=|\lambda|^n m(E)$$

其中 $\lambda E=\{\lambda x|x\in E\}$.

证明: 显然 $\lambda=0$ 时成立, 下面证明 $\lambda\neq 0$ 时的情形, 先证明 λE 是可测的, 进而由外测度的缩放性, 可知该结论成立.

由于 E 是可测集, 因此 $\forall A\subset\mathbb{R}^n$,

$$m^*(A)=m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)$$

由外测度的伸缩性,

$$m^*(\lambda A)=|\lambda|^n m^*(A)$$

$$\begin{aligned}m^*(A\cap E)+m^*(A\cap E^C)&=|\lambda|^{-n}m^*(\lambda(A\cap E))+|\lambda|^{-n}m^*(\lambda(A\cap E^C))\\&=|\lambda|^{-n}m^*((\lambda A)\cap(\lambda E))+|\lambda|^{-n}m^*((\lambda A)\cap(\lambda E^C))\\&=|\lambda|^{-n}m^*((\lambda A)\cap(\lambda E))+|\lambda|^{-n}m^*((\lambda A)\cap(\lambda E)^C))\end{aligned}$$

进而有

$$m^*(\lambda A)=m^*((\lambda A)\cap(\lambda E))+m^*((\lambda A)\cap(\lambda E)^C))$$

把 λA 换成 A, 可知

$$m^*(A)=m^*(A\cap(\lambda E))+m^*(A\cap(\lambda E)^C))$$

因此 λE 是可测集.

定理2.2.5. 设 $\{A_n\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列可测集, 有

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ (如果存在) 都是可测集.

(2) $m\big(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\big) \le \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, m(A_n)$

(3) 若 $m\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big) < \infty$, 则 $m\big(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\big) \ge \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, m(A_n)$

(4) 若 $m\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big) < \infty$, 并且极限 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$ 存在, 并且 $m(\lim\limits_{n\to\infty} A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$

证明: (1) 由定理1.1.20可知, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, 由于 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集全体 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 是 σ-代数, 因此对可列并, 可列交封闭, 可知 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$ 也是可测集, 进而 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ (如果存在) 是可测集.

(2) 由定理1.1.20, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

$$m\big(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n\big) = m\big(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\big)$$

显然 $\{\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\}$ 是一个单调递减的集列, 所以

$$m\big(\lim_{n\to\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \lim_{n\to\infty} m\big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\big)$$

$m\big(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \inf\{m(A_k)|k\ge n\}$, 因此有 $\lim\limits_{n\to\infty} m\big(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \lim\limits_{n\to\infty}\inf\{m(A_k)|k\ge n\}$.

(3) 由定理1.1.20, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

$$m\big(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n\big) = m\big(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big)$$

显然 $\{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\}$ 是一个单调递增的集列, 所以

$$m\big(\lim_{n\to\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \lim_{n\to\infty} m\big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\big)$$

$m\big(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \sup\{m(A_k)|k\ge n\}$, 因此有 $\lim\limits_{n\to\infty} m\big(\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k\big) = \lim\limits_{n\to\infty}\sup\{m(A_k)|k\ge n\}$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 由 (1) 和 (2) 中的结论:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, m(A_n) \le m(\lim_{n\to\infty} A_n) \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\, m(A_n)$$

而由上极限和下极限的定义, 有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, m(A_n) \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\, m(A_n)$$

因此

$$m(\lim_{n\to\infty} A_n) = \overline{\lim_{n\to\infty}} m(A_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}} m(A_n)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} m(A_n)$ 存在, 并且

$$m(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} m(A_n)$$

定理 2.2.6. 非空开集的测度大于 0.

证明: 设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 对任意 $x \in A$, 存在 $\big(U(x,\epsilon) - \{x\}\big) \subset A$, $\epsilon > 0$, 进而有 $2|\epsilon| \leq m\big(U(x,\epsilon)\big) \leq m(A)$, 因此 $m(A) \neq 0$.

定理2.2.7. (介值定理) 设 A 是一可测集, 对于任意 $0 \leq a < m(A)$, 存在测度为 a 的 A 的子集.

证明: 测度为 0 的子集一定存在, 单点集即满足要求(对于 $\emptyset$ 而言是本身). 不妨设 $m(A) > 0$, 证明对于 $0 < a < m(A)$, 存在测度为 a 的 A 的子集. 对于 $U(0,r), r \geq 0, U(0,r) \cap A$ 是可测集, 并且当 $r \to \infty$ 时, $U(0,r) \cap A$ 的测度从 0 变化到 $m(A)$. 定义函数 $f(r) = m\big(U(0,r) \cap A\big)$, 我们接下来证明 $f(r), \forall r > 0$ 的连续性. 对于任意 $r_0 > 0$, 任意 $\epsilon > 0$, 显然存在 δ, 使得当 $|r - r_0| \leq \delta$ 时, $U(0,r) - U(0,r_0)$ (或 $U(0,r_0) - U(0,r)$) 是可测集且测度小于等于 ϵ, 进而 $f(r) - f(r_0) = m\big((U(0,r) - U(0,r_0)) \cap A\big) \leq m\big(U(0,r) - U(0,r_0)\big) \leq \epsilon$ (或 $f(r_0) - f(r) = m\big((U(0,r_0) - U(0,r)) \cap A\big) \leq m\big(U(0,r_0) - U(0,r)\big) \leq \epsilon$), 所以 $|f(r) - f(r_0)| \leq \epsilon$, 至此已证明 $f(r), r > 0$ 满足连续性. 因此由介值定理, 对于任意选定的 $0 < a < m(A)$, 一定存在 $f(r_0) = a$, 即 $m\big(U(0,r_0) \cap A\big) = a$, 而 $U(0,r_0) \cap A$ 必然是 A 的子集, 证毕.

2.3 不可测的集合

Zermelo 选取公理. 若 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一族互不相交的非空的集, 则存在一个集 $E \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$, 使得对每个 $\alpha \in I$, $E \cap A_\alpha$ 是单点集, 换言之, 存在一个集 E, 使得 E 是由每个 A_α 中选取一个元构成的.

定义. 若 $x, y \in [0,1]$, 且 $x - y \in \mathbb{Q}$, 则称 x 与 y 等价 记为 $x \sim y$, 显然, $\sim$ 关系具有自反, 对称, 传递性, 对任意 $x \in [0,1]$, 令

$$\tilde{x} = \{y \in [0,1] | y \sim x\}$$

$\tilde{x}$ 是 $[0,1]$ 的一个子集, 称之为由 x 确定的等价类. 容易证明:

(1) 若 $x_1 \sim x_2$,则 $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2$.

(2) 若 $x_1 \nsim x_2$, 则 $\tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2 = \emptyset$.

按照以上定义把区间 $[0,1]$ 分割成互不相交的等价类, 根据 Zermelo 选取公理, 存在 $[0,1]$ 的一个子集 E, 使得 E 是由每个等价类中选取一个元构成的. 我们接下来证明 E 不可测.

设 $\{r_n\}$ 是 $[-1,1]$ 中有理数的全体 (易证 $[-1,1]$ 中的有理数集是可列集), 对每个自然数 n, 令 $E_n = r_n + E$, 则集列 $\{E_n\}$ 具有如下的性质:

(1) 当 $m \neq n$ 时, $E_m \cap E_n = \emptyset$.

若不然, 设 $x \in E_m \cap E_n$, 则 $(x - r_m) \in E$, 由于 $(x - r_n) \in E$,
$(x - r_m) - (x - r_n) = r_n - r_m \in \mathbb{Q}$, 因此 $(x - r_m) \sim (x - r_n)$, 因此 $x - r_m$ 和 $x - r_n$ 属于同一个等价类, 但 $x - r_m \neq x - r_n$, 这样 E 就包含了某一个等价类中两个不同的元, 这与 E 的定义矛盾.

(2) 成立如下包含关系

$$[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1,2]$$

证明 $[0,1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$: 设 $x \in [0,1]$, 由 E 的性质, E 应该包含 $\tilde{x}$ 中的某一个元, 设为 x',
$(x' - x) \in \mathbb{Q}$, 记 $r = (x' - x)$, 显然 $r \in [-1,1]$.设 $-r$ 在 $\{r_n\}$ 中的序号是 n_0,
$E_{n_0} = r_{n_0} + E = -r + E$, 必然包含元素 $x' - r$, 即 x.

证明 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1,2]$: $E_n = r_n + E$, E 中的元素在 $[0,1]$ 中, r_n 中的元素在 $[-1,1]$ 中, 显然有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \subset [-1,2]$.

反证法, 假设 E 是可测的, 根据测度的平移不变性, 每个 E_n 是可测的其测度等于 $m(E)$, 又由测度的可列可加性,

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq m([-1,2]) = 3$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m(E) \leq 3$, 显然有 $m(E) = 0$, 进而 $m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$. 但是另一方面, 由 $[0,1] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 得:

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \geq m([0,1]) = 1$$

导致矛盾, 因此 E 是不可测的.