1.1 集合论

1.1.1 集合运算律

容易证明并与交运算有如下的性质:

(1) 交换律: $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(3) 分配律: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

推广:

$$A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} (A \cap B_\alpha)$$

$$A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$$

定义. $(A - B) \cup (B - A)$ 称为 A 与 B 的对称差集, 记作 $A \Delta B$.

容易证明差和余运算有如下的性质:

(1) $A - B = A \cap B^C$

(2) $(A^C)^C = A$

(3) $A \cup A^C = X$ (X 为全集), $A \cap A^C = \emptyset$

(4) $X^C = \emptyset, \emptyset^C = X$

(5) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C, (A \cap B) = A^C \cap B^C$

De Morgan 公式: 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一族集, 则

(1) $(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)^C = \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha^C$

(2) $(\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)^C = \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha^C$

证明: (1) 设 $x \in (\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)^C$, 则 $x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, 于是存在 $\alpha \in I, x \notin A_\alpha$, 即 $x \in A_\alpha^C$, 因此 $(\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)^C \subseteq \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha^C$.

设 $x \in \bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha^C$, 必然存在 $\alpha \in I, x \notin A_\alpha$, 即 $x \in A_\alpha^C$, 因此 $x \notin \bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha$, 则 $x \in (\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)^C$, 因此 $\bigcup\limits_{\alpha \in I} A_\alpha^C \subseteq (\bigcap\limits_{\alpha \in I} A_\alpha)^C$.

(2) 设 $x \in (\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha)^C$, 则 $x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$, 于是对于任意 $\alpha \in I, x \notin A_\alpha$, 即 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C$, 因此 $(\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha)^C \subseteq \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C$.

设 $x \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C$, 必然对于任意 $\alpha \in I, x \notin A_\alpha$, 即 $x \in A_\alpha^C$, 因此 $x \notin \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$, 则 $x \in (\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha)^C$, 因此 $\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha^C \subseteq (\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha)^C$.

定理1.1.1. 设 $\{f_n\}$ 是 $\mathbb{R}^1$ 上的一系列实值函数, 满足

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \quad (x \in \mathbb{R}^1)$$

并且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R}^1)$. 则对任意实数 a, 有

$$\{x : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\}$$

证明: 先证明 $\{x : f(x) > a\} \subseteq \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\}$: 若 $x \in \{x : f(x) > a\}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) > a$, 进而 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, $f_n(x) > a$, (否则, 若 $\forall N \in \mathbb{N}^+$) 这表明 $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\}$. 再证明 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\} \subseteq \{x : f(x) > a\}$: 因为 $f(x)$ 是单调递增函数列, 所以对于 $\forall n$ 有

$$\{x : f_n(x) > a\} \subseteq \{x : f(x) > a\}$$

所以 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x : f_n(x) > a\} \subseteq \{x : f(x) > a\}$

定理1.1.2. 设 $\{f_n\}$ 是定义在 $\mathbb{R}^1$ 上的一系列实值函数, 令 $A = \{x \in \mathbb{R}^1 : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0\}$. 则

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^1 : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \iff \forall k, \exists N(k)$, 使得对任意 $n > N(k)$, $x \in \{x \in \mathbb{R}^1 : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$
.

$\iff \forall k, \exists N(k)$, 使得 $x \in \bigcap\limits_{n=N_k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^1 : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$

$\iff \ \forall k,\ x \in \bigcup\limits_{N_k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N_k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^1 : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$

$\iff x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \bigcup\limits_{N_k=1}^{\infty} \bigcap\limits_{n=N_k}^{\infty} \{x \in \mathbb{R}^1 : |f_n(x)| < \frac{1}{k}\}$

将 N_k 换成 m, 证毕.

1.1.2 开集和闭集

定义. 设 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\epsilon > 0$, 称集

$$U(x_0, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) < \epsilon\}$$

为点 x_0 为 ϵ-邻域.

定义. 设 $I_1, \cdots, I_n$ 是直线上的 (有界或无界的) 区间, 称 $\mathbb{R}^n$ 的子集

$$I_1 \times \cdots \times I_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) : x \in I_1, x_2 \in I_2, \cdots, x \in I_n\}$$

为 $\mathbb{R}^n$ 中的方体. 若每个 I_i 都是开区间, 则称 $I_1 \times \cdots \times I_n$ 是开方体, 若每个 I_i 都是闭区间, 则称 $I_1 \times \cdots \times I_n$ 为闭方体.

定义.对于 $\mathbb{R}^n$, 设 $(a_1, b_1], (a_2, b_2], \ldots (a_n, b_n]$ 是 n 个左开右闭的区间, 称这 n 个区间的直积 $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2] \times \ldots (a_n, b_n]$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的半开方体.

定义. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$,

(1) 若 $x_0 \in A$, 并且存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0, \epsilon) \subset A$, 则称 x_0 为 A 的内点.

(2) 若 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 若对任意 $\epsilon > 0, U(x_0, \epsilon)$ 中包含有 A 中的无限多点, 则称 x_0 为 A 的聚点.

(3) A 的内点集记为 A°.

(4) 若 A 的聚点的全体所构成的集合称为 A 的导集, 记为 A'.

(5) 若 A 中的每个点都是 A 的内点, 则称 A 为开集.

(6) 若 $A' \subseteq A$, 则称 A 为闭集.

(7) $A \cup A'$ 称为 A 的闭包, 记为 $\overline{A}$.

(8) 若 $A = A'$, 则称 A 为完全集.

注: 内点集 A° 属于 A, 但是导集 A' 不一定属于 A.

定义. 若 A 可以表示为一列闭集的并, 则称 A 为 F_σ 型集, 若 A 可以表示为一列开集的交, 则称 A 为 G_δ 型集.

定理1.1.3. 开集具有如下的性质:

(1) 空集 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是开集.

(2) 任意个开集的并集是开集.

(3) 有限个开集的交集是开集.

证明: (1) 显然. (2) 设 $\{A_\alpha, \alpha\in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族开集, 若 $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 则存在 $\alpha\in I$ 使得 $x\in A_\alpha$. 因为 A_α 是开集, 存在 x 的一个邻域 $U(x,\epsilon)\in A_\alpha\subseteq\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$, 因此 x 是 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 的内点, 所以 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$ 是开集. (3) 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是开集, 若 $x\in\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$, 对每个 i, 存在 $\epsilon_i>0$ 使得 $U(x,\epsilon_i)\subset A_i$, 令 $\epsilon=\min\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_n\}$, 则 $\epsilon>0$ 并且 $U(x,\epsilon)\subseteq\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$, 因此 x 是 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 的内点, 所以 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 是开集.

定理1.1.4. A 是闭集的充要条件是 A^C 是开集, A 是开集的充要条件是 A^C 是闭集.

证明: 若 A 是闭集, 则对于任意 $x\in A^C$, x 不是 A 的聚点, 因此存在一个邻域 $U(x,\epsilon)$, 其中至多有有限个点属于 A, 设这些点为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 因为 $x\notin A$, 故 $x_i\neq x$, 令 $\epsilon'=\min\limits_{1\le i\le n}d(x_i,x)$, 则 $\epsilon'>0$ 且 $U(x,\epsilon')\cap A=\emptyset$, 即 $U(x,\epsilon')\subset A^C$, 因此 x 是 A^C 的内点, 进而可知 A 是开集.

将 A 置换为 A^C, 可知 A^C 是闭集的充要条件是 A 是开集, 换言之, A 是开集的充要条件是 A^C 是闭集.

推论. 通过证明过程可以得到如下结论: 若 A 是闭集, $x\notin A$, 则存在 x 的邻域 $U(x,\epsilon)$, 使得 $U(x,\epsilon)\subseteq A^C$.

定理1.1.5. 闭集具有如下的性质:

(1) 空间 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是闭集.

(2) 有限个闭集的并集是闭集.

(3) 任意个闭集的交集是闭集.

证明: (1) 显然. (2) 设 $A_1,\cdots,A_n$ 是闭集, $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i^C)^C$, 对任意 i, A_i^C 是开集, 因为有限个开集的交集仍是开集, 所以 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i^C$ 是开集, 进而可知 $(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i^C)^C$ 是并集. (3) 设 $\{A_\alpha,\alpha\in I\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一族闭集, $\bigcap\limits_{\alpha\in I}A_\alpha=(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^C)^C$, 对任意 α, A_α^C 是开集, 因为任意多个开集的并集仍是开集, 因此 $\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^C$ 是开集, 进而可知 $(\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha^C)^C$ 是闭集.

定理1.1.6. 以下陈述是等价的:

(1) $x\in A'$

(2) 对任意 $\epsilon>0$, x 的去心邻域 $U(x,\epsilon)-\{x\}$ 属于 A 的点.

(3) 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$, 使得每个 $x_k\neq x$ 并且 $x_k\to x$.

证明: (1) $\to$ (2): 根据导集的定义, 对于任意 $\epsilon>0$, 邻域 $U(x,\epsilon)$ 内存在无数个属于 A 的点, 显然去心邻域 $U(x,\epsilon)-\{x\}$ 也是. (2) $\to$ (3): 对于 $\forall k\in\mathbb{N}^+$, $U(x,\frac{1}{k})-\{x\}$ 内存在无数个属于 A 的点, 因此可以按照如下方式构造数列 $\{x_k\}$: 从 $(U(x,1)-\{x\})\cap A$ 中选取一点, 记为 x_1, 从 $(U(x,\frac{1}{2})-\{x\})\cap A$ 中选取还未选取过的一点, 记为 x_2, 因为 $(U(x,\frac{1}{2})-\{x\})\cap A$ 中有无数个点, 因此必然是可以找到这样的一个点的, 按照这种方式逐步进行下去, 即可得到一个数列 $\{x_k\}$, 且 $d(x_k,x)<\frac{1}{k}$. (3) $\to$ (1): 显然, 对于任意 $\epsilon>0$, 存在 K, 当 $k>K$ 时, $d(x_k,x)<\frac{1}{K}<\epsilon$, 因此有无数个 A 中的点 $(x_k,k=K+1,\dots)$ 属于 $U(x,\epsilon)$.

定理1.1.7. 以下陈述是等价的:

(1) $x \in \overline{A}$

(2) 对任意 $\epsilon > 0, x$ 的邻域 $U(x,\epsilon)$ 属于 A 中的点.

(3) 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$, 使得 $x_k \to x$.

证明: (1) $\to$ (2): 对于任意 $x \in \overline{A}$, 如果 $x \in A$, 显然成立; 若 $x \in A'$, 则对任意 $\epsilon > 0, x$ 的去心邻域 $U(x,\epsilon) - \{x\}$ 属于 A 的点, 显然成立. (2) $\to$ (3): 如果 $x \in A$, 显然成立 (取$x_k = x$); 若 $x \in A'$, 则存在 A 中的点列 $\{x_k\}$, 使得每个 $x_k \neq x$ 并且 $x_k \to x$, 显然成立. (3) $\to$ (1): 如果数列满足有无数个点不等于 x, 则去除等于 x 的点, 得到一个新数列, 同样满足极限为 x, 因此 $x \in A'$, 否则, 存在 K, 当 $k > K$ 时, $x_k = x$, 因此 $x = x_k \in A$, 综上, $x \in \overline{A}$.

定理1.1.8. 内点集 A° 一定是开集, 导集 A' 一定是闭集.

证明: 由定义可知, 对于任意 $x \in A^\circ$, 存在 $U(x,\epsilon) \in A$, 对于任意 $x' \in U(x, \frac{\epsilon}{2})$, 存在 $U(x', \frac{\epsilon}{2}) \in A$, 因此 x' 为内点, $U(x, \frac{\epsilon}{2}) \subset A^\circ$. A° 的每一个点都是 A° 内点, 因此 A° 一定是开集.

证明 A' 是闭集等价于证明 A' 的导集 (以下记为 A'') 包含于 A', 设存在 $x \in A''$, 则对任意 $\epsilon > 0, U(x,\epsilon)$ 中包含无数个 A' 中的点, 下面证明 $U(x,\epsilon)$ 中也包含无数个 A 中的点. 由聚点的定义, 对于 $\frac{\epsilon}{2}, U(x, \frac{\epsilon}{2})$ 中包含无数个 A' 中的点, 对于其中任意的 x', $U(x', \frac{\epsilon}{2}) \subset U(x,\epsilon)$ 中包含无数个A中的点, 因此 $U(x,\epsilon)$ 中包含无数个 A 中的点. 因此 x 也是 A 的聚点, 即 $x \in A'$
.

定理1.1.9. $\overline{A}$ 是包含 A 的最小的闭集.

证明: 根据定义, $\overline{A} = A \cup A' \supseteq A'$, 因此 $\overline{A}$ 是闭集. 若存在闭集 A_1 使得 $A \subseteq A^1 \subset \overline{A}$,

定理1.1.10. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则 A 是闭集的充要条件是 A 中任意收敛点列的极限属于 A.

证明: 必要性: 则由定理1.1.7 可知, 若存在 A 中的收敛点列 $\{x_k\}$, $x_k \to x$, 则 $x \in \overline{A}$.

充分性: 对于任意 $x \in A'$, 由定理1.1.6, 存在数列 $\{x_k\}$ 收敛于 x, 根据条件, $x \in A$, 因此 $A \subseteq A'$.

定理1.1.11. 设 $A \subset \mathbb{R}^n$, 则 A 是闭集的充要条件是 A 中任意收敛点列的极限属于 A.

证明: 必要性. 设 A 是闭集, 若 $\{x_k\}$ 是 A 中任一收敛点列, 极限为 x, 则由定理1.1.7, $x \in \overline{A} = A$.

充分性. 对于任意 $x \in A'$, 由定理1.1.6, A中存在收敛于 x 的点列 $\{x_k\}$, $x_k \neq x$, 由已知条件可知, $x \in A$, 进而 $A' \subseteq A$, 所以 A 是闭集.

定理1.1.12. 设 $f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则曲线 $y = f(x)$, 即

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y = f(x)\}$$

是 $\mathbb{R}^2$ 中的闭集.

证明: 证明 A 是闭集等价于证明: 曲线 A 上任意收敛点列的极限在 A 上. 设 $\{(x_k, y_k)\}$ 是 A 中的收敛点列, 并且极限为 $(x_k, y_k) \to (x,y)$, 在 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛等价于坐标的收敛, 因此 $x \to x_k, y \to y_k$. 对每个 k 有 $a \leq x_k \leq b$, 并且 $y_k = f(x_k)$, 由 $f(x)$ 的连续性可知,

$$y=\lim_{k\to\infty}y_k=f(\lim_{k\to\infty}x_k)=f(x)$$

因此 $(x,f(x))$ 在曲线 A 上.

1.1.3 开集的构造

定义. 设 G 是直线上的开集, (a,b) 是一个有界或无界的开区间, 若 $(a,b)\subset G$, 并且端点 a 和 b 不属于 G, 则称 (a,b) 为 G 的一个为构成区间.

定理1.1.13. 直线上的每个非空开集都可以表示为可数个构成区间的并.

证明: 对于直线上的任意非空开集 A, 首先证明, 对于任意 $x\in A$, 存在一个构成区间 (a,b) 包含 x. 令

$$a=\inf\{\alpha:(\alpha,x)\subseteq A\},\quad b=\sup\{\beta:(x,\beta)\subseteq A\}$$

任取 $x'\in(a,x)$, $x'\in A$, 否则 $\inf\{\alpha:(\alpha,x)\subseteq A\}$ 应为 x', 因此 $(a,x)\subseteq A$, 同理可证 $(x,b)\subseteq A$, 因此 $(a,b)\subseteq A$. 再证 $a,b\notin A$: 若 $a\in A$, 由于 A 是开集, 所以存在邻域 $U(a,\epsilon)\subseteq A$, 任取 $a+\epsilon<x'<a$, $(x',x)\subseteq A$, 与 a 的定义矛盾, 因此 $a\in A$, 同理可证 $b\in A$.

设每个 $x\in A$ 对应的构造区间为 U_x, 显然 $A\subseteq\bigcup\limits_x U_x$, 因为构造区间中的点都属于 A, 因此 $\bigcup\limits_x U_x\subseteq A$. 综上, $A=\bigcup\limits_x U_x$.

定理1.1.14. $\mathbb{R}^n$ 中的每个非空开集都可以表示为一列互不相交的半开方体的并.

证明: 以 $\mathbb{R}^2$ 为例. 我们首先定义一种分割平面的方式, 对于 $\forall k=1,2,\ldots$, 用两族直线 $x=\frac{p}{2^k}$ 和 $y=\frac{q}{2^k}$, 把平面分成如下的一族半开方体

$$\left(\frac{p-1}{2^k},\frac{p}{2^k}\right]\times\left(\frac{q-1}{2^k},\frac{q}{2^k}\right],\ \forall p,q\in\mathbb{Z}$$

显然, 对 $\forall k$, 所有半开方体的全体是可列的. 设 G 是 $\mathbb{R}^2$ 中的非空开集, 令 $k=1$, 按以上方式对平面进行分割, 将 G 中完整的半开方体取出, 记其全体为 I_1, 令 $k=2$, 按以上方式对平面进行分割, 将 $G-I_1$ 中完整的半开方体取出, 记其全体为 I_2, 这样不断进行下去..., 显然 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$ 是可列集, 因为对 $\forall k$, 所有半开方体的全体是可列的, 所以每个 I_k 是可列的.

显然 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k\subseteq G$, 接下来证明 $G\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$, 任取 $x\in G$, 所以存在 $U(x,\epsilon)\subseteq G$, 由于按照以上定义的分割方法, 当 $k\to\infty$ 时, 方体边长 $\frac{1}{2^k}\to 0$, 所以必然存在 k_0, 使得存在一个边长为 $\frac{1}{2^{k_0}}$ 的半开方体 I, $x\in I\subseteq U(x,\epsilon)\subseteq G$. 若 $I\subset\bigcup\limits_{k=1}^{k_0-1}I_k$, 则 $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$, 若 $I\subsetneq\bigcup\limits_{k=1}^{k_0-1}I_k$, x 必然属于 I_{k_0}, 依然有 $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}I_k$, 证毕.

1.1.4 稠密集和疏朗集

定义. (1) 设 $E\in\mathbb{R}^n$, 若 $E\subset\overline{A}$, 则称 A 在 E 中稠密. 若同时有 $A\subset E$, 也称 A 是 E 的稠密子集.

(2) 若 $(\overline{A})^\circ=\emptyset$, 则称 A 为疏朗集.

例如, 由于 $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}^1$, 因此有理数集在 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}^1$ 中是稠密的. 又 $[0,1]$ 中的有理数的全体在 $[0,1]$ 中是稠密的. 由于 $(\overline{\mathbb{Z}})^\circ=\emptyset$, 因此整数集 $\mathbb{Z}$ 是疏朗集.

定理1.1.15. 设 $A,E\subset\mathbb{R}^n$, 则以下陈述是等价的:

(1) A 在 E 中稠密.

(2) 对任意 $x\in E$ 和 $\epsilon>0, U(x,\epsilon)$ 包含 A 中的点.

(3) 对任意 $x\in E$, 存在 A 中的点列 $\{x_k\}$ 使得 $x_k\to x$.

证明: 由定义可知, $E\subseteq\overline{A}$, 由定理1.1.7 可知 (1), (2), (3) 等价.

1.1.4 $\mathbb{R}^n$ 中的连续函数

定义. 设 $E\in\mathbb{R}^n$, $f(x)$ 是定义在 E 上的实值函数, $x_0\in E$, 若对任意 $\epsilon>0$, 存在相应的 $\delta>0$, 使得当 $x\in E$ 并且 $d(x,x_0)<\delta$ 时, 有

$$|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续. 若 $f(x)$ 在 E 上的每一处都连续, 则称 $f(x)$ 在 E 上连续. E 上连续函数的全体记为 $C(E)$.

定理1.1.16. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $f(x)$ 是 E 上的连续函数, 则对任意实数 a, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 G, 使得

$$\{x\in E: f(x)>a\}=E\cap G$$

证明: 对于任意 a, 记 $E_a=\{x\in E: f(x)>a\}$, 对于任意 $x\in E_a$, $f(x)>a$, 由 $f(x)$ 的连续性, 必然存在 x 的一个邻域 $U(x,\epsilon_x)$, 使得任意 $x'\in U(x,\epsilon_x)$ 满足 $f(x')>a$, 所以 $E\cap U(x,\epsilon_x)\in E_a$. 令 $G=\bigcup\limits_{x\in E_a}U(x,\epsilon_x)$, 则 G 是一族开集的并, 因此是开集,

$$E\cap G=\bigcup_{x\in E_a}(E\cap U(x,\epsilon_x))\subset E_a$$

另一方面, 显然, $E_a\subset G$ (因为对于任意 $x\in E_a$, $x\in U(x,\epsilon_x)\in G$), $E_a\subset E$, 因此 $E_a\subset E\cap G$, 因此 $E_a=E\cap G$, 证毕.

推论. 设 $E\subset\mathbb{R}^n$, $f(x)$ 是 E 上的连续函数, 则对任意实数 a,

(1) 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 G, 使得 $\{x\in E: f(x)<a\}=E\cap G$.

(2) 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集 F, 使得 $\{x\in E: f(x)\geq a\}=E\cap F$.

(3) 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集 F, 使得 $\{x\in E: f(x)\leq a\}=E\cap F$.

对任意区间 $[a,b]$, 有

(4) 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 G, 使得 $\{x\in E: a<f(x)<b\}=E\cap G$.

(5) 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的闭集 F, 使得 $\{x\in E: a\leq f(x)\leq b\}=E\cap F$.

证明: (1) $f(x) < a \iff -f(x) > -a$, 显然 $-f(x)$ 也是连续函数, 因此由定理中的结论可知, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 G, 使得 $\{x \in E : -f(x) > -a\} = \{x \in E : f(x) < a\} = E \cap G$.命题得证.

(2) $\{x \in E : f(x) \geq a\} = \{x \in E : f(x) < a\}^C$, 由 (1) 中的结论, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 G, 使得 $\{x \in E : f(x) < a\} = E \cap G$, 进而有 $\{x \in E : f(x) \geq a\} = E \cap (E \cap G)^C = E \cap G^C$, G^C 是闭集, 命题得证, 同理可证(3).

(4) $\{x \in E : a < f(x) < b\} = \{x \in E : f(x) > a\} \cap \{x \in E : f(x) < b\}$, 根据刚刚证明的结论, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 G_1 , G_2, 使得 $\{x \in E : f(x) > a\} = E \cap G_1$,
$\{x \in E : f(x) < b\} = E \cap G_2$, 因此 $\{x \in E : a < f(x) < b\} = E \cap G_1 \cap G_2, G_1 \cap G_2$ 是开集, 命题得证, 同理可证(5).

定理1.1.17. $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 则对任意实数 a, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < a\}$ 都是开集.

推论. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 对任意实数 a, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq a\}$ 都是闭集.

证明: 由定理1.1.16, 对任意实数 a, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 G, 使得

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\} = \mathbb{R}^n \cap G = G$$

因此 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ 是开集, $f(x) < a \iff -f(x) > -a$, 由于 $-f(x)$ 也是连续函数, 因此同理可知, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x)$ 是开集. $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\}$ 是 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < a\}$ 的余集, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq a\}$ 是 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$ 的余集, 开集的余集是闭集, 因此 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq a\}$ 都是闭集.

推论. (1) $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 则对任意实数 a, $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq a\}$ 和 $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq a\}$ 都是闭集.

(2) $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的连续函数, 则对任意实数 a, $\{x \in \mathbb{R}^n : a \leq f(x) \leq b\}$是闭集, $\{x \in \mathbb{R}^n : a < f(x) < b\}$ 是开集.

证明: 略.

定理1.1.18. (Bolzano-Weierstrass) $\mathbb{R}^n$ 中的每个有界点列都存在收敛子列.

证明: 数列的每个维度而言, 该维度所构成的子数列也是有界的, 即 $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n})$ 中 $\{x_{k,n}\}$, $\forall k$ 都是有界的, 因此由一维情形下的 Bolzano-Weierstrass 定理可知, $\{x_{k,n}\}$, $\forall k$ 存在收敛子列. 设 $\{x_{k,1}\}$ 存在一个收敛子列, 取出该子列对应的 $\mathbf{x}_k$, 记为 $\mathbf{x}_k^{(1)}$, 显然 $\mathbf{x}_k^{(1)}$ 也是有界的, $\{x_{k,2}^{(1)}\}$ 也存在一个收敛子列, 这样进行下去, 最终得到数列 $\{\mathbf{x}_k^{(n)}\}$, 它的各个维度上的子数列都收敛, 因此可知 $\{\mathbf{x}_k^{(n)}\}$ 是 $\{\mathbf{x}_k\}$ 的收敛子列.

定理1.1.19. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界闭集, $f(x)$ 是 K 上的连续函数, 则

(1) $f(x)$ 在 K 上是有界的;

(2) $f(x)$ 在 K 上可以取得最大值和最小值;

(3) $f(x)$ 在 K 上一致连续的, 即对任意给定的 $\epsilon > 0$, 存在相应的 $\delta > 0$, 使得对任意 x', $x'' \in K$, 当 $d(x', x'') < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

证明: (1) 假设 $f(x)$ 是无界的, 则对 $\forall c>0$, 存在 $x\in K$, 使得 $f(x)>c$, 按照如下方式选取数列 $\{x_k\}$: 任取 $x_1>1$, 取 $x_2>x_1+1$ (根据上述结论, 这样的点一个存在), 这样进行下去, 得到数列 $\{x_k\}$, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=\infty$, 由于 K 是闭集, 所以 x_k 存在收敛子列 $\{y_k\}$, 设其极限为 y. 由连续性可知, $f(y)=\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k)=\infty$.

(2) 设 $f(x)$ 在 K 上的上确界和下确界分别为 M 和 m. 首先证明必然存在一点 $x\in K$ 使得 $f(x)=M$, 若不然, 函数 $g(x)=M-f(x)\neq 0,\ x\in K$, 且在 K 上连续, 因此必然有界. 而由于 M 是上确界, 因此必然存在点列 $\{x_k\}$ 使得 $f(x_k)\to M$ (选取方法: 对任意 $k\in\mathbb{N}^+$, 存在x, 使得$|f(x)-M|<\frac{1}{k}$, 选取其中一个满足条件的 x 作为x_k, 得到$\{x_k\}$), 因为 K 是闭集, 由 Bolzano-Weierstrass 定理, $\{x_k\}$ 存在收敛子列 $\{y_k\}$, 其极限记为 y,
$f(y)=\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k)=\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k)=M$, 进而 $g(y)=\infty$, 矛盾. 同理可证, 必然存在一点 $x\in K$ 使得 $f(x)=m$.

(3) 反证法, 假设 $f(x)$ 在 K 上不是一致连续的, 则存在 $\epsilon>0$, 对于任意 $\delta>0$, 总存在 $x',\ x''\in K$, 当 $d(x',x'')<\delta$ 时, 有 $|f(x')-f(x'')|\geq\epsilon$. 因此可以构造这样一个序列 $\{(P_n,Q_n)\}$: 对于 $\forall n\in\mathbb{N}^+$, 总存在 $P_n,Q_n\in K$, 当 $d(P_n,Q_n)<\frac{1}{n}$ 时, 有 $|f(P_n)-f(Q_n)|\geq\epsilon$. 因为 K 是有界闭集, 因此 $\{P_n,Q_n\}$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k},Q_{n_k}\}$, 因为

$$d(P_{n_k},Q_{n_k})<\frac{1}{n_k},\ \forall k$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} d(P_{n_k},Q_{n_k})=0$, $\lim\limits_{k\to\infty} P_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty} Q_{n_k}$, 因为 K 是闭集, 所以该极限必然属于 K, 记为 P_0, 因为 f 在 K 上连续, 所有

$$\lim_{k\to\infty}[f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})]=f(P_0)-f(P_0)=0$$

这与 $|f(P_{n_k})-f(Q_{n_k})|\geq\epsilon,\ \forall k$ 矛盾.

1.1.5 集列的极限

定义. 设 $\{A_n\}$ 是一个集列, 称集合

$$\{x: x\text{ 属于 }\{A_n\}\text{ 中的无限多个}\}$$

为集列 $\{A_n\}$ 的上极限, 记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 称集合

$$\{x: x\text{ 至多不属于 }\{A_n\}\text{ 中的有限多个}\}$$

为集列 $\{A_n\}$ 的下极限, 记为 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

显然 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n\subseteq\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 则称集列 $\{A_n\}$ 存在极限, 极限为 $A=\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$.

定理1.1.20. 设 $\{A_n\}$ 是一个集列, 则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

证明: x 属于 $\{A_n\}$ 中的无限多个

$\Longleftrightarrow$ 对任意 $n \geq 1$, 存在 $k \geq n, x \in A_k$

$\Longleftrightarrow$ 对任意 $n \geq 1$, $x \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

$\Longleftrightarrow x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

x 至多不属于 $\{A_n\}$ 中的有限多个

$\Longleftrightarrow$ 存在 $n \geq 1$, 对任意 $k \geq n, x \in A_k$

$\Longleftrightarrow$ 存在 $n \geq 1$, $x \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

$\Longleftrightarrow x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$

推论. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_n$

定义. 设 $\{A_n\}$ 是一个集列, 若对每个 $n \geq 1$, 均有 $A_n \subseteq A_{n+1}$, 则称 $\{A_n\}$ 是单调递增的, 记为 $A_n \uparrow$, 若对每个 $n \geq 1$, 均有 $A_n \supseteq A_{n+1}$, 则称 $\{A_n\}$ 是单调递减的, 记为 $A_n \downarrow$.

定理1.1.21. 单调集列必然存在极限, 并且

(1) 若 $\{A_n\}$ 是单调递增的, 则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

(2) 若 $\{A_n\}$ 是单调递减的, 则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

证明: (1)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

显然, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 存在, 且等于 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

定理1.1.22. F_δ 集可以表示为一列单调递增的集列的并 (也是其极限), G_σ 集可以表示为一列单调递增的集列的并 (也是其极限).

证明: 设 A 是 F_δ 集, 记 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, 其中 F_n 是闭集. 对于任意的 n, 定义 $\hat{F}_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_n$, 显然 $\{\hat{F}_n\}$ 是递增集列, 且 $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \hat{F}_n$. 设 A 是 F_σ 集, 记 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, 其中 G_n 是开集. 对于任意的 n, 定义 $\hat{G}_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_n$, 显然 $\{\hat{G}_n\}$ 是递减集列, 且 $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \hat{G}_n$.

1.2 可列集

1.2.1 可列集的定义

定义. 与自然数集 $\mathbb{N}$ 对等的集称为可列集.

定理1.2.1. 集 A 是可列集的充要条件是 A 的元素可以编号排序成一个无穷序列

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$$

1.2.2 可列集的性质

定理1.2.2. 若 A 是可列集, B 是有限集, 则 $A\cup B$ 是可列集.

证明: A 可以表示为 $A=\{a_1,\ldots,a_n,\ldots\}$, $B-A$ 显然也是一个有限集, 可以表示为 $B-A=\{b_1,\ldots,b_m\}$, 所以 $A\cup B=\{b_1,\ldots,b_m,a_1,\ldots,a_n,\ldots\}$, 因此 $A\cup B$ 是可列集.

定理1.2.3. 可列集的任何无限子集还是可列集.

证明: 设 A 是一个可列集, 则 A 的元素可以排序为一个无穷序列

$$a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$$

设 B 是 A 的一个无限子集, 则 B 可以表示为

$$a_{n_1},a_{n_2},\ldots,a_{n_k},\ldots$$

因此 B 是可列集.

定理1.2.4. 任何无限集都必然包含一个可列集.

证明: 设 A 为一无限集, 从 A 中任取一个元素, 记为 a_1, 在 $A-\{a_1\}$ 中再任取一个元素, 记为 a_2, 这样无限继续取下去, 可以得到一个无穷数列 (因为 A 是无限集, 因此取出任意有限多个元素, 其中还剩余无穷多个元素), 令 $A'=\{a_1,a_2,\ldots\}$, 显然 A' 是一个可列集.

定理1.2.5. 若 $\{A_i\}$ 是一列可列集, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 和 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 也是可列集. 即可列集的有限并和可列并还是可列集.

对于 A_i, $\forall i$, 因为其为可列集, 因此可以表示为 $A_i=\{a_{i,1},a_{i,2},\ldots\}$

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 可以按如下方式编排:

$$\begin{array}{cccccc}
A_1: & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \nearrow & \\
A_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & \\
 & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & \\
A_3: & a_{31} & a_{32} & \ldots & & \\
 & \nearrow & \nearrow & & & \\
A_4: & a_{41} & \ldots & & &
\end{array}$$

在编排时, 若遇到重复元素则跳过, 于是 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 的元素可以按照上述方式编排为一个无穷序列, 所以其可列. 可以用同样的方法证明 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 是可列集.

定理1.2.6. 若 $\{A_i\}$ 是一列有限集, 则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是有限集或可列集.

证明: 我们只需讨论 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 是无限集的情况, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 中的元素可以按照如下方式编排, 先排列 A_1 中的元素, 排完后再排 A_2 中的元素, 遇到重复则跳过, 这样一直排下去, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 中的元素可以排成一个无穷序列, 因此是可列集.

定理1.2.5和定理1.2.6表明: 可数个可数集是有限集或可列集.

定理1.2.7. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是可列集, 则它们的直积 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 也是可列集.

证明: 先证明 $n = 2$ 的情形:

设 $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots\}, A_2 = \{b_1, b_2, \ldots\}$, 则

$$A_1 \times A_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

其中 $E_k = \{(a_k, b_i), \forall i\}$, 显然是可列集. 根据定理1.2.5可知 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ 是可列集.

对于 $n = 3$ 的情形, $A_1 \times A_2$ 是可列集, 视作一个整体, 再由 $n = 2$ 时的结论, 可知 $n = 3$ 时的结论成立. 同理可证明任意有限多个可列集的直积仍是可列集.

定理1.2.8. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列集.

证明: 对于任意的有理数, 其可以表示为 $\frac{p}{q}, p, q$ 为整数, 因此 $\mathbb{Q}$ 可以表示为:

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots\}$$

显然 $\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \ldots\}$ 对任意 k 是可列集.

推论. 设 $\mathbb{Q}^n = \underbrace{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}}_{n}$.

证明: 由定理1.2.7和定理1.2.8显然可得.

定理1.2.9. 整系数多项式的全体是可列集.

证明: 记 n 次整系数多项式的全体为 P_n, 整系数多项式的全体为 $P = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} P_n$, P_n 和 $\mathbb{Z}^{n+1} = \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n+1}$ 对等, 因为存在对应关系为:

$$a_0 + a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

显然 $\mathbb{Z}$ 是可列集, 由定理1.2.7, $\mathbb{Z}^{n+1}$ 是可列集, 因此 P_n 是可列集, 由定理1.2.7, P 是可列集.

定理1.2.10. 代数数集是可列集.

证明: 由于整系数多项式的全体是可列集, 可记为 $P=\{p_1,p_2,...\}$, 设 A_n 为 p_n 的实零点集, 则每个 A_n 是有限集, 并且 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. 由定理1.2.6可知, A 是有限集或可列集. 显然每个有理数是代数数, 因此代数数的数量不少于有理数, A 是无限集, 则 A 必然是可列集.

定理1.2.11. 若 A 是 $\mathbb{R}^1$ 上一族互不相交的区间所成的集, 则 A 是可数集.

证明: 对于每个区间 $I\in A$, 在其中任选一个有理数 α, 作映射 $f\colon A\to\mathbb{Q}$, $f(I)=\alpha$, 则 f 是单射, 因为各个区间是不相交的, 因此选择的有理数必然不同. 令 $B=f(A)$, 则 f 是 $A\to B$ 的双射, B 是一个由有理数组成的集合, 因此 $B\subset\mathbb{Q}$, 由定理1.2.8和定理1.2.3可知, A 是有限集或可列集, 总之是可数集.

定理1.2.12. 单调函数的间断点的全体是可数集.

证明: 不妨设 $f(x)$ 是单调递增的 (当 $f(x)$ 单调递减时, $-f(x)$ 单调递增且拥有相同的间断点, 若单调递增时结论成立, 单调递减时结论也成立), 对于任意的间断点, 其左右极限存在且不相等, 设间断点 x 的左极限为 $f(x-0)$, 右极限为 $f(x+0)$, 则间断点 x 对应区间 $(f(x-0),f(x+0))$, 因为函数是递增的, 所以对于每两个不同的间断点, 其左右极限都不相等, $\{(f(x-0),f(x+0),\forall x\text{ 是间断点})\}$ 是一族不相交的开区间, 且和间断点集对等 , 由定理1.2.11, 间断点是可数集.

定理1.2.13. $(0,1)$ 不是可列集.

证明: 反证法: 假设 $(0,1)$ 是可列集, 则 $(0,1)$ 中的实数可以排列成一个无穷序列 $\{x_1,x_2,...\}$

其中每个 x_i 可以表示为

$$x_1=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}a_3^{(1)}\cdots$$

$$x_2=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots$$

$$x_2=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}a_3^{(2)}\cdots$$

构造实数 $x=0.a_1a_2a_3\cdots$

其中

$$a_i=\begin{cases}1 & \text{if } a_i^{(i)}\neq 1\\ 2 & \text{if } a_i^{(i)}=1\end{cases}$$

因为对于任意 i, x 与 x_i 的第 i 位数字不同, 所以 $x\neq x_i$, 所以 $x\notin\{x_1,x_2,...\}$, 而 $x\in(0,1)$, 应该属于 $\{x_1,x_2,...\}$, 产生矛盾, 因此 $(0,1)$ 不是可列集.

定理1.2.14. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 区间端点为有理数的开方体(闭方体, 半开半闭方体)全体是可列集.

证明: 设区间端点为有理数的开方体全体为 A, 构造映射 $f\colon A\to\mathbb{Q}^{2n}$

$$(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)\mapsto(a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n)$$

易证 f 是双射, 因此 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{\mathbb{Q}^{2n}}}$, 因此 A 可列.

推广. 在 $\mathbb{R}^n$ 中, 区间端点为有理数的方体的全体是可列集.

证明: 以 $n=1$ 为例, 按照区间的开闭进行划分, 区间端点为有理数的方体全体 $A=\bigcup\limits_{i=1}^{4} A_i$, $A_1=\{(a,b)|\forall a,b\in\mathbb{Q},a<b\}$, $A_1=\{(a,b)|\forall a,b\in\mathbb{Q},a$, $A_2=\{[a,b)|\forall a,b\in\mathbb{Q},a<b\}$, $A_3=\{(a,b]|\forall a,b\in\mathbb{Q},a<b\}$, $A_4=\{[a,b]|\forall a,b\in\mathbb{Q},a<b\}$, 同上面定理的证法, 可知 A_1 到 A_4 都是可列集, 所以 A 是可列集.

定理1.2.15. 可列集的有限子集的全体是可列集.

证明: 对于可列集 $A=\{a_1,a_2,\ldots\}$, $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, 其中 $A_n=\{a_1,\ldots,a_n\}$, 显然, 其中 A 的有限子集全体为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}(A_n)$, $\mathscr{P}(A_n)$ 是有限集, 由定理1.2.6可知, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{P}(A_n)$ 是可列集.

1.3 基数

1.3.1 基数的定义

定义. 设 A,B 是两个集合, 如果 $A\sim B$, 则称 A 和 B 有相同的基数 (也称为"势"), 集合 A 的基数记为 $\overline{\overline{A}}$.

规定集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的基数用 n 表示, 空集 $\emptyset$ 的基数用 0 表示, 有限集的基数用元素的个数表示, 自然数集 $\mathbb{N}$ 的基数用 $\aleph_0$ (阿列夫零) 表示, 实数集的基数用 c 表示, 称之为连续基数.

基数的比较: 如果 A 和 B 的一个子集对等, 此时称 $\overline{\overline{A}}\le\overline{\overline{B}}$. 如果 A 和 B 的一个真子集对等, 且不与 B 对等, 此时称 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$.

1.3.2 基数的性质

定理1.3.1. 若 A 是无限集, B 是有限集或可列集, 则 $\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}$.

证明: $A\cup B=A\cup(B-A)$, 因为B 是有限集或可列集, $B-A$ 作为B 的子集也为有限集或可列集, 当 $B-A$ 为可列集, 由定理1.2.4, A 包含一个可列子集, 记为 $\{a_1,a_2,\ldots\}$, 设 $B-A=\{b_1,b_2,\ldots\}$, 构造 $A\cup B\to A$ 的一个映射 f:

$$f(x)=\begin{cases} a_{2n-1} & \text{if } x=a_n\in\{a_1,a_2,\ldots\} \\ a_{2n} & \text{if } x=b_n\in\{b_1,b_2,\ldots\} \\ x & \text{otherwise} \end{cases}$$

显然 f 是双射, 因此$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}$.

定理1.3.2. 可列集的基数是无限集中最小的: 若 A 是无限集, 则 $\overline{\overline{A}}\ge\aleph_0$.

证明: 对于任意无限集, 由定理1.2.4, 其中都包含一个可列集, 若这个可列集和它对等, 则该无限集是可列集, 若不对等, 则该无限集的基数大于 $\aleph_0$, 因此 $\overline{\overline{A}}\ge\aleph_0$.

定理1.3.3. 区间 $(-1,1)$ 的基数是 c. 实际上, 直线上任意区间的基数都为 c.

证明: 作 $\mathbb{R} \to (-1,1)$ 的映射, $f(x) = \frac{2}{\pi}\text{arctan}(x)$, 显然 f 是双设. 易证对于任意的开区间 (a,b), 存在 $(-1,1) \to (a,b)$ 双射 $f(x) = \frac{-a+b}{2}x + \frac{a+b}{2}$, 对于闭区间, 半开半闭区间, 它们都是由开区间并上端点得到的, 由定理1.3.1, 和开区间有相同的基数.

定理1.3.4. 二元序列的全体所成的集具有连续基数 c.

证明: 设一元为0, 另一元为1, 则可以建立二元序列的全体到 $(0,1)$ 之间二进制小数的映射

$$f(a_1a_2,\ldots) = 0.a_1a_2\ldots$$

易证该映射是双射, 因此可得二元数列的全体和 $(0,1)$ 之间二进制小数集有相同的基数, 即和区间 $(0,1)$ 有相同的基数, 也就是 c, 证毕.

定理1.3.5. 若 X 是一可列集, 则 $\mathscr{P}(X)$ 具有连续基数. ($\mathscr{P}(X)$ 为 X 所有子集所构成的集合.)

证明: 设 $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, 设 A 为二元 (0,1) 序列的全体所构成的集, 定义映射 f: $\mathscr{P}(X) \to A$:

$$f(C) = \{r_1, r_1, \ldots\},\ \forall C \in \mathscr{P}(X)$$

$$r_i = \begin{cases} 0 & \text{if } x_i \notin C \\ 1 & \text{if } x_i \in C \end{cases}$$

易证 ψ 是双射, 因此 $\mathscr{P}(X)$ 和二元 (0,1) 序列的全体所构成的集具有相同的基数, 由定理1.3.4, $\mathscr{P}(X)$ 具有连续基数.

定理1.3.6. (F. Bernstein) 设 A, B 是两个集合, 若 A 与 B 的一个子集对等, 且 B 与 A 的一个子集对等, 则 $A \sim B$. 用基数表示就是, 若 $\overline{\overline{A}} \le \overline{\overline{B}}$, $\overline{\overline{B}} \ge \overline{\overline{A}}$, 则 $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

证明: 根据假设, 存在两个单射 $f: A \to B, g: B \to A$, 不妨设 $f(A) \neq B, f(B) \neq A$ 我们首先证明存在 $A' \subset A,\ B' \subset B$, 使得 $f(A') = B - B', g(B') = A - A'$.

设 $C_0 = A - g(B)$, 进行迭代: $D_1 = f(C_0), C_1 = g(D_1)$,...

令 $C = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} C_i, D = B - \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$, 易证: $f(C) = B - D$ 和 $g(D) = A - C$.

定义映射:

$$h(a) = \begin{cases} f(a) & \text{if } a \in C \\ g^{-1}(a) & \text{if } x \in A - C \end{cases}$$

证明 h 是单射: 首先若 a_1, a_2 同属于一类, 则显然 f 和 g^{-1}是单射, 若属于不同类, 由于 $f(C) = B - D, g^{-1}(A - C) = D$, 二者无交集, 因此 h 是单射.

证明 h 是满射: 显然 $f(C) \cup g^{-1}(A - C) = B$.

定理1.3.7. $\mathbb{R}^\infty$ 的基数是 c.

证明: 可证 $(0,1)^\infty$ 与 $\mathbb{R}^\infty$ 对等: 构造映射 f: $(0,1)^\infty \to \mathbb{R}^\infty$,

$$f(x) = (\tan(x_1 - \frac{1}{2})\pi, \tan(x_2 - \frac{1}{2})\pi, \ldots)\ (x = (x_1, x_2, \ldots) \in (0,1)^\infty)$$

易证 f 是双射.

接下来证明 $\overline{\overline{(0,1)^\infty}} = \overline{\overline{(0,1)}}$:

定义映射 f: $(0,1) \to (0,1)^\infty$: $\forall x \in (0,1), f(x) = (x, x, \ldots)$. 因此 $(0,1)$ 和 $(0,1)^\infty$ 的子集 $\{(x, x, \ldots), \forall x \in (0,1)\}$ 对等, $\overline{\overline{(0,1)}} \le \overline{\overline{(0,1)^\infty}}$.

定义映射 g: $(0,1)^\infty \to (0,1)$, 对于 $\forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in (0,1)^\infty$,

$$x_1 = 0.x_{11}x_{12}x_{13}\ldots$$

$$x_2 = 0.x_{21}x_{22}x_{23}\ldots$$

$$\ldots$$

$$x_n = 0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\ldots$$

$g(x) = 0.x_{11}x_{21}x_{12}x_{31}\ldots$, 把 $x_1 \ldots x_n \ldots$ 的小数位按对角线编排, 显然 $g(x)$ 是单射, 因此 $(0,1)^\infty$ 和 $(0,1)$ 的一个子集对等, $\overline{\overline{(0,1)^\infty}} \le \overline{\overline{(0,1)}}$. 由 Bernstein 定理, $\overline{\overline{(0,1)^\infty}} = \overline{\overline{(0,1)}} = c$.

定理1.3.8. $\mathbb{R}^n$ 的基数是 c.

证明: 显然, $\mathbb{R}^1$ 与 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $\{(x, 0, \ldots, 0) : x \in \mathbb{R}^1\}$ 对等, 因此 $\overline{\overline{\mathbb{R}^1}} \le \overline{\overline{\mathbb{R}^n}}$; 显然, $\mathbb{R}^n$ 与 $\mathbb{R}^\infty$ 的子集 $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots) | (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$ 对等, 因此, $\overline{\overline{\mathbb{R}^n}} \le \overline{\overline{\mathbb{R}^\infty}}$, 由 Bernstein 定理, $\overline{\overline{\mathbb{R}^1}} \le \overline{\overline{\mathbb{R}^n}} \le \overline{\overline{\mathbb{R}^\infty}}$.

定理1.3.9. 设 $C[a,b]$ 是区间 $[a,b]$ 上连续函数的全体, 它的基数是 c.

证明: 定义映射 f: 对任意 $c \in \mathbb{R}^1$, $c \mapsto g(x) = c$. 显然 f 是单射, 因此 f 和常数函数的全体对等, 而常数函数是连续函数, 因此连续函数的全体是 $C[a,b]$ 的子集, 进而 $\overline{\overline{\mathbb{R}^1}} \le \overline{\overline{C[a,b]}}$.

定义映射 $\mathbb{Q}[a,b]$ 是 $[a,b]$ 中有理数的全体, 因为 $\mathbb{Q}$ 是可列集, $\mathbb{Q}[a,b]$ 是 $\mathbb{Q}$ 的子集, 所以 $\mathbb{Q}[a,b]$ 可以记为 $\mathbb{Q}[a,b] = \{r_1, r_2\}$. 定义映射 ψ: $C[a,b] \to \mathbb{R}^\infty$ 使得

$$\psi(f) = (f(r_1), f(r_2), \ldots) \ (f \in C[a,b])$$

$\forall f, g \in C[a,b]$, $f \ne g$, $\psi(f) \ne \psi(g)$, 若不然, $f(r_i) = g(r_i), \forall i$, 对于 $\forall x \in [a,b]$, 存在一有理数列 $\{r_{n_k}\} \subseteq \{r_i\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} r_{n_k} = x$, 由 f 和 g 的连续性, $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f(r_k)$, $g(x) = \lim\limits_{k\to\infty} g(r_k)$, 因此 $f(x) = g(x)$. 因此 ψ 是单射, 进而可知 $C[a,b]$ 和 $\mathbb{R}^\infty$ 的子集对等, 进而 $\overline{\overline{C[a,b]}} \le \overline{\overline{\mathbb{R}^\infty}}$.

综上, $\overline{\overline{C[a,b]}} = c$.

1.4 集类

X 是一非空集, X 的某个满足特定条件的子集的全体所构成的集合称为 X 上的集类. 一般用花体表示, 例如 $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ 等. 例如, X 的所有子集构成的集合 (幂集) $\mathscr{P}(X)$ 就是 X 上的一个集类.

1.4.1 代数

定义. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 上的一个集类, 若 $\emptyset \in \mathscr{A}$, 且 $\mathscr{A}$ 对并和余运算封闭, 则称 $\mathscr{A}$ 为代数.

定理1.4.1. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 上的一个集类, 则 $\mathscr{A}$ 是代数的充要条件是 $\emptyset \in \mathscr{A}$, 且 $\mathscr{A}$ 对交和余运算封闭.

证明: 充分性: 设 $A, B \in \mathscr{A}$, 则 $A \cup B = (A^C \cap B^C)^C$, 易证 $A \cup B \in \mathscr{A}$.

必要性: 设 $A, B \in \mathscr{A}$, 则 $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C$, 易证 $A \cap B \in \mathscr{A}$.

定理1.4.2. 设 $\mathscr{A}$ 是 X 上的代数, 则 $\mathscr{A}$ 对差运算封闭.

证明: 设 $A, B \in \mathscr{A}$, 则 $A - B = A \cap B^C$, 由 1.4.1, $\mathscr{A}$ 对交和余运算封, 显然 $A - B \in \mathscr{A}$.

1.4.2 σ-代数

定义. 设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的一个集类, 若 $\emptyset \in \mathscr{F}$, 且 $\mathscr{A}$ 对可数并和余运算封闭, 则称 $\mathscr{F}$ 为 σ-代数.

显然 $\mathscr{F}$ 是代数.

定理1.4.3. $\mathscr{F}$ 对可数交运算, 差运算封闭.

证明: 同定理1.4.1 的证法, 交是余集的并的余集, 易证对可列并封闭. 同定理1.4.2的证法, 易证对差运算封闭.

定理1.4.4. $\mathscr{P}(X)$ 是 X 上最大的 σ-代数, $\{\emptyset, X\}$ 是 X 上最小的 σ-代数.

证明: 显然.

定义. 设 $\mathscr{C}$ 是一个非空集类, 则 $\mathscr{P}(X)$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ 代数, 这表明至少存在一个包含 $\mathscr{C}$ 的 σ -代数. 令 $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ- 代数的交, 容易证明:

(1) $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数.

(2) $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的代数中最小的, 即: 若 $\mathscr{F}'$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数, 则 $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}'$.

证明: (1) 显然. (2) 若 $\mathscr{F}$ 不是最小的, 则存在包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数 $\mathscr{F}'$ 真包含于 $\mathscr{F}$, 所有包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数的交际包含于 $\mathscr{F}'$, 不可能是 $\mathscr{F}$, 矛盾.

这个代数称为包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ-代数, 又被称作由集类 $\mathscr{C}$ 生成的 σ-代数.

定理1.4.5. 代数 $\mathscr{C}$ 是 σ-代数的充要条件是对互不相交的可列并封闭.

证明: 必要性显然, 下面证明充分性.

对于任意集列 $\{E_n\}$, $F_1 = E_1, F_2 = E_2 - E_1, \ldots, F_n = E_n - E_{n-1}$, 显然 $\{F_n\}$ 是一个互不相交的集列, 且

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} F_i,\ \forall n \in \mathbb{N}^+$$

由于 $\mathscr{C}$ 对互不相交的可列并运算封闭, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i \in \mathscr{C}$, 进而 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{C}$.

1.4.3 Borel 集

定义. 设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集所组成的集类, 称由 $\mathscr{C}$ 生成的 σ-代数是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Borel σ-代数, 记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ 中的集称为 Borel 集.

简单地说, Borel 集是开集经过可数次并, 交, 差, 余运算得到的集.

定理1.4.6. $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 闭集, 可数集, 各种方体都是 Borel 集.

证明: 由定义知, 开集是 Borel 集, 闭集是开集的余集, 因此闭集是 Borel 集. 单点集是闭集, 因此单点集是 Borel 集, 可列集是可列个单点集的并, 而 Borel 集是 σ-代数, 因此对可列并运算封闭, 因此可列集是 Borel 集. 开方体是开集, 闭方体是闭集, 因此开闭方体都是 Borel 集, 对于其他类型的方体, 它们可以表示为一列开方体的交, 例如 $\mathbb{R}^2$ 中的方体 $(a,b]\times(c,d)$ 可以表示为

$$(a,b]\times(c,d)=\bigcap_{n=1}^{\infty}(a,b+\frac{1}{n})\times(c,d)$$

因为开方体是 Borel 集, 因此其他类型的方体是 Borel 集.

定理1.4.7. 设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中半开方体的全体, 则 $\sigma(\mathscr{C})=\mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$.

证明: 由定理 1.1.14 可知, 任意的开集都属于 $\sigma(\mathscr{C})$, Borel 集是全体开集生成的 σ-代数, 因此 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)\subset\sigma(\mathscr{C})$. 由定理1.4.5可知, 各类方体属于 Borel 集, 因此反向的包含关系也是成立的.

1.5 Cantor 集 K

定义. 将区间 $[0,1]$ 三等分, 去掉中间的三分之一, $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, 将剩下的部分 $\left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right]$ 记为 F_1. 将 F_1 中的两个闭区间各自去掉中间的三分之一, $\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right)$ 和 $\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$, 将剩下的部分 $\left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{3}{9}\right]\cup\left[\frac{6}{9},\frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right]$ 记为 F_2, 依次进行, 在作出 F_n 后, 去掉 F_n 中每个闭区间中间的三分之一, 这样无限进行下去, 最终剩下的点构成的集合为 Cantor 集, 记为 K, 显然 $K=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$.

显然, 每一步去掉的开区间个数都是上一步的 2 倍, 因为每一步去掉的开区间是在上一步去掉的开区间的左右两侧分别去掉一个开区间所得到的. 因此易证第 n 步去掉的开区间的个数是 2^{n-1}, 截至第 n 步完成时共去掉 $\sum\limits_{i=1}^{n}2^{i-1}=2^n-1$ 个开区间.

显然 Cantor 集非空, 因为至少每个闭区间的端点都属于 Cantor 集. Cantor 集具有如下的性质:

(1) Cantor 集是闭集.

证明: K 是一列闭区间的交, 闭区间是闭集, 而任意个闭集的交都是闭集, 因此 Cantor 集是闭集.

(2) Cantor 集是疏朗集.

证明: 假设 x 是K 的内点, 则存在 $\epsilon > 0, U(x,\epsilon) \subseteq K$, 必然存在 $k \in \mathbb{N}^+$, $\frac{1}{3^k} < \epsilon$, 因此存在一个包含 x, 长度不小于 $\frac{1}{3^k}$ 的区间属于 K. 而根据 Cantor 集的构造过程, 在第 $k+1$ 步后, F_n 中就不存在长度达到 $\frac{1}{3^k}$ 的闭区间了, 产生矛盾, 因此 K 无内点, 是疏朗集.

(3) Cantor 集是完全集.

证明: 即证对任意 $x \in K$, 满足: 对任意 $\epsilon > 0$, 在 x 的去心邻域 $U(x,\epsilon) - \{x\}$ 中都存在属于 K 的点.

对于 $\forall \epsilon > 0$, 存在 $k_0 \in \mathbb{N}^+$, $\frac{1}{3^{k_0}} < \epsilon$, 若 $x \in K$, 则 x 必然属于 F_{k_0} 中的某个闭区间, 其两端端点到 x 的举例必然小于等于 $\frac{1}{3^{k_0}} < \epsilon$, 而且这两个点属于 K 且至少有 1 个不同于 x, 证毕.

(4) K 的测度为 0.

证明: 我们留到第 2 章.

(5) Cantor 集具有连续基数 c.

证明: 把第 1 步去掉的区间用三进制表示, 是 $(0.1, 0.2)_3$, 也就是所有第 1 位小数是 1 的点, 把第 2 步去掉的区间用三进制表示, 是 $(0.01, 0.02)_3$, $(0.21, 0.22)_3$, 就是所有第 1 位小数是 0/2, 第 2 位小数是 1 的点, 以此类推, 可知所有去除的区间的并如果用三进制表示, 就是 $(0,1)_3$ 所有小数点中含 1 的小数. 所以数集 K 用三进制表示就是区间 $[0,1]_3$ 中小数位全不为 1 的数集, 有 $K = \{0.a_1a_2\ldots | a_1 = 0/2, a_2 = 0/2\ldots\}$, 将 0 替换成 1, 得到二进制区间 $[0,1]_2$, 进而 K 和区间 $[0,1]$ 对等, 有连续基数 c.

Cantor 函数 $K(x)$

定义. 回顾 Cantor 集的构造过程, 第 1 步去掉的区间为 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 记为 I_1, 在 I_1 上赋值 $\frac{1}{2}$, 第 2 步去掉的区间为 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$, $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$, 分别在 I_1 的左侧, 右侧, 记为 I_n^1, I_n^2, 分别赋值 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$, 按照这样进行下去, 设第 $n-1$ 步去掉的区间为 $I_{n-1}^1, \ldots, I_{n-1}^{2(n-1)}$, 根据 Cantor 集的构造过程, 易知第 n 步去掉的区间有 2^{n-1} 个, $I_{n-1}^1, \ldots, I_{n-1}^{2(n-1)}$ 的每个开区间的左侧, 右侧分别有一个, 记为 $I_n^1, \ldots, I_n^{2n}$, 对于 I_{n-1}^i 左右两侧的两个开区间, 分别在 I_{n-1}^i 上函数值的基础上减增 $\frac{1}{2^n}$.

截至目前我们给出了 $K(x)$ 在 $[0,1] - K$ 上的定义, 将函数延拓到整个 $[0,1]$ 区间,

$$K[0] = 0$$

$$K(x) = \sup\{K(t) | t \in [0,1] - K, t < x\},\ 0 < x \le 1$$

根据 Cantor 集的构造过程, 易知截至第 n 步完成时, 共去掉 $2^n - 1$ 个开区间. 截至第 2 步完成时, 共去掉 $2^2 - 1 = 3$ 个开区间, 此时从左数第 k 个开区间上的函数值为 $\frac{k}{2^2},\ k = 1, \ldots, 2^2 - 1 = 3.$ 受此启发, 我们发现并证明以下结论:

定理1.5.1. 截至第 n 步, 共去掉 $2^n - 1$ 个开区间, 此时从左数第 k 个开区间上的函数值为 $\frac{k}{2^2},\ k = 1, \ldots, 2^n - 1.$

证明: 易验证第 1 步成立, 假设第 $n-1$ 步时成立, 接下来证明结论对于第 n 步也成立. 第 n 步时, 对于第 $n-1$ 步完成时去掉的共计 $2^n - 1$ 个开区间, 每两个的中间都被去掉了一个新的开区间, 最左侧和最右侧也分别被插入了一个开区间 (除了最左和最右的开区间外, 每个开区间都在 F_n 中的某个闭区间上, 其左右两侧都是已经去掉了的开区间), 因此每一个开区间从左到右数的编号都变为了原来的 2 倍, 它们在第 n 步中成为了编号为偶数的开区间, 新插

入的区间构成了编号为奇数的开区间, 因此从左到右数第 $2i$ 个开区间上的函数值为 $\frac{i}{2^{n-1}}=\frac{2i}{2^n}$, $i=1,\ldots,2^{n-1}-1$, 对于新插入的任意一个开区间, 它上面的函数值要么是其左侧的开区间上的函数值加 $\frac{1}{2^n}$, 要么是其右侧的开区间上的函数值减 $\frac{1}{2^n}$ (除了最左和最右的开区间), 而其左侧的开区间上的函数值和其右侧的开区间上的函数值差 $\frac{2}{2^n}$, 因此无论哪种可能, 新插入的开区间上的函数值必定是其左右两侧函数值的平均值, 对于排在第 $2i-1$, $i=1,\ldots,2^{n-1}-1$ 的开区间, 其对应的函数值应为 $\frac{2i-1}{2^n}$, $i=1\ldots,2^n-1$.

推论. (1) $K(x)$ 是单调递增的. (2) $K(1)=1$.

证明: 略.

定理1.5.2. $K(x)$ 是连续函数.

证明: 因为任意多个开集的并仍是开集, 因此 $[0,1]-K$ 是开集, $\forall x\in[0,1]-K$, 它必然是内点, 根据构造过程, 它必然属于某个开区间, 因此 $K(x)$ 必然在 x 处连续. $\forall x\in K$, 我们接下来证明对于 $\forall\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $|\Delta x|<\delta$ 时, $|K(x+\Delta x)-K(x)|<\delta$. 对于 $\forall x\in K\cap(0,1)$, $x\in F_n$, $\forall n$, x 落在 F_n 中的某个闭区间上, 而 F_n 中每个闭区间的长度为 $\frac{1}{3^n}$, 且它们之间的间隔至少为 $\frac{1}{3^n}$, 由定理1.5.1和1.5.2, 当 $|\Delta x|=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}$ 时, $|K(x+\Delta x)-K(x)|$ 小于等于其左右两侧去掉的开区间上的函数值之差, $\frac{1}{2^n}$. 因此必然存在 n, 取 $\delta=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3^n}$, $|K(x+\Delta x)-K(x)|\le\frac{1}{2^n}<\epsilon$, 证毕.

定理1.5.3. $0<K(x)<1, x\in(0,1)$.

证明: 因为 $K(x)$ 是连续且单调递增的函数, $K(0)=0$, $K(1)=1$, 因此有 $0\le K(x)\le 1$, $x\in(0,1)$. 接下来证明: 当 $x\in(0,1)$ 时, $K(x)\neq 0,1$. 若 $K(x)=0$, $x\in(0,1)$, 因为 $K(x)$ 是连续且单调递增的函数, $K(x')=0$, $x'\in(0,x)$ 由 $K(x)$ 的构造过程, 第 n 次完成后, F_n 最左侧的闭区间的长度为 $\frac{1}{3^n}$, 因此必然存在 n_0, $\frac{1}{3^{n_0}}<x$, 在第 n_0+1 次时, 最左侧闭区间的中间三分之一将会被除去且赋值为 $\frac{1}{2^{n_0+1}}$, 产生矛盾, 因此 $K(x)\neq 0, \forall x\in(0,1)$. 同理可证 $K(x)\neq 1, \forall x\in(0,1)$, 证毕.

定理1.5.4. $K(x)$ 的值域是 $[0,1]$.

值域 $K((0,1))\supseteq\{\frac{k}{2^n}|k=1,\ldots,2^n-1,n\in\mathbb{N}^+\}$, $\forall n$, 如果转化为二进制, 数集 $\{\frac{k}{2^n}|k=1,\ldots,2^n-1,n\in\mathbb{N}^+\}$ 就是所有 0 和 1 之间 n 位二进制小数全体, 所以 $K((0,1))$ 包含 $(0,1)_2$, 所以在十进制下 $K((0,1))$ 包含 $(0,1)$; 由定理1.5.3, $K((0,1))\subseteq(0,1)$, 综上, $K((0,1))=(0,1)$, 进而 $K([0,1])=[0,1]$, 证毕.