

# 基于离差最大化的决策者权重的确定方法

马永红 周荣喜\* 李振光

(北京化工大学经济管理学院, 北京 100029)

**摘要:** 基于离差最大化思想提出了一种确定多属性群决策中决策者权重的新方法。先根据群决策者对方案属性的客观评价价值计算出属性的权重, 然后根据各方案的综合属性值, 基于离差最大化法给出决策者的权重, 进而给出多方案间的排序。该方法充分发挥了离差最大法的客观赋权性, 并且能够激励决策者对已知方案进行客观合理评价。最后将该方法应用于某化工建设项目环境影响技术评估, 实例表明该方法的可行性和有效性。

**关键词:** 多属性群决策; 离差最大化; 化工项目; 环境评估

**中图分类号:** O223

## 引言

多属性决策是多目标决策的一种, 又称有限方案多目标决策, 它是对具有多个属性(指标)的有限方案, 按照某种决策准则进行多方案选择和排序。其理论方法已被广泛地应用于社会、经济、管理、军事等领域, 其求解方法与属性权重有密切关系, 因为权重的合理性直接影响着多属性决策排序的准确性, 所以在多属性决策中, 权重问题的研究占有重要地位。文献[1]提出离差最大化方法, 该方法能够自动确定各评价指标间的加权系数, 即属性权重, 且概念清楚、排序结果准确、可信, 不具有主观随意性, 文献[2-3]对其进行了拓展与应用。

现代决策问题往往需要多个决策者共同参与, 群决策理论方法为之提供了一种很好的手段<sup>[4-5]</sup>。群决策中决策者权重的确定是一个关键, 通常有两种: 主观权重和客观权重。主观权重或直接给出, 或用 AHP 法、Delphi 法等来确定, 而客观权重通常是依据决策信息来确定, 更符合实际, 如文献[6-8]。文献[6]提出利用凸组合方式将决策者的主观权重和客观权重集结为决策者的最终权重; 文献[7]通过对偏好关系的调整来获得权重; 文献[8]通过比较群决策中各专家信息的相似程度, 确定各专家的相对

群组可信度权值, 得出专家判断信息合成时的各专家客观权重。本文提出利用离差最大化法来确定决策者权重, 该方法简单易行。

## 1 一种基于离差最大化的多属性群决策法

对于某个多属性群决策问题, 设其方案集为  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , 属性集为  $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ , 决策者集合为  $D = \{d_1, d_2, \dots, d_t\}$ 。假定决策者  $d_k \in D$  对于已知方案  $s_i \in S$  在属性  $p_j \in P$  下的属性值为  $a_{ij}^k$  ( $a_{ij}^k > 0$ ,  $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ ;  $j \in M = \{1, 2, \dots, m\}$ ;  $k \in T = \{1, 2, \dots, t\}$ ), 从而构成决策矩阵  $A_k$ 。通常属性值可分为效益型或成本型等, 采用文献[9]中的方法进行无量纲化处理可得规范化的决策矩阵  $R_k = (r_{ij}^k)_{n \times m}$ 。并假设属性权重向量  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m)$ ,  $\omega_j \geq 0$ , 且满足单位化约束条件  $\sum_{j=1}^m \omega_j^2 = 1$ , 且假设  $t$  位决策者的权重为  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$ , 亦满足,  $0 \leq \lambda_k \leq 1$ ,  $\sum_{k=1}^t \lambda_k^2 = 1$ 。

### 1.1 属性权重的确定

在多属性决策中, 对于某一决策者的规范化决策矩阵  $R = (r_{ij})_{n \times m}$ 。如果第  $j$  个属性  $p_j$  对所有决策方案而言均无差别, 则属性  $p_j$  对决策方案的排序将不起作用, 这样的属性可令其权系数为 0; 反之, 如果  $p_j$  使所有决策方案的属性值有较大差异, 这样的属性对决策方案的排序将起较大作用, 此时应该给  $p_j$  赋予较大的权系数。对于属性  $p_j$ , 用  $V_{ij}(\omega)$  表示方案  $s_i$  与其他所有方案之间的离差, 则

收稿日期: 2006-09-05

基金项目: 国家自然科学基金(70372011); 北京化工大学青年教师基金(QN0521)

第一作者: 女, 1966 年生, 研究员, 博士

\* 通讯联系人

E-mail: zrx103@buaa.edu.cn

可定义  $V_{ij}(\omega) = \sum_{l=1}^n |r_{ij}\omega_j - r_{lj}\omega_j|$ 。令

$V_j(\omega) = \sum_{i=1}^n V_{ij}(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |r_{ij} - r_{lj}| \omega_j$ , 则

$V_j(\omega)$  表示对属性  $p_j$  而言, 所有方案与其它方案的总离差。基于这种离差最大化思想, 求解权重向量  $\omega$  等价于求解如下最优化模型<sup>[1-2, 10]</sup>

$$\begin{cases} \max V(\omega) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |r_{ij} - r_{lj}| \omega_j \\ \text{s.t. } \omega_j \geq 0, j \in M, \sum_{j=1}^m \omega_j^2 = 1 \end{cases}$$

求解该模型并进行归一化处理, 得属性权重计算式

$$\omega_j = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |r_{ij} - r_{lj}|}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |r_{ij} - r_{lj}|}, j \in M \quad (1)$$

## 1.2 群决策者权重的确定

多属性群决策是把每一决策者对相应方案的综合属性值, 根据其权重大小进行集结, 然后排序择优。通常情况下决策者的权重是主观直接给出, 或采用一些主观方法给出, 更符合现实的是根据决策信息客观确定, 如文献[6-8]。本文试图采用离差最大化思想来确定决策者权重: 即若某一决策者的综合属性值对所有方案来说差异越小, 则说明该决策者的决策对方案的排序所起的作用越小; 反之, 若某一决策者的综合属性值对所有方案来说差异较大, 则说明该决策者的决策对方案的排序所起的作用较大, 此时应该给该决策者赋予较大的权重。该方法能够激励决策者对已知方案进行客观合理评价, 避免出现“老好人”现象。下面给出具体实现过程。

根据式(1), 可以计算出决策者  $d_k$  对各方案的综合属性值为

$$z_{ik}(\omega) = \sum_{j=1}^m r_{ij}^k \omega_j^k, i \in N, k \in T \quad (2)$$

对于决策者  $d_k$ , 用  $U_{ik}(\lambda)$  表示方案  $x_i$  与其它所有方案之间的离差, 则可定义

$$U_{ik}(\lambda) = \sum_{l=1}^n |z_{ik}\lambda_k - z_{lk}\lambda_k|, i \in N, k \in T$$

令  $U_k(\lambda) = \sum_{i=1}^n U_{ik}(\lambda) = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |z_{ik} - z_{lk}| \lambda_k, k \in$

$T$ , 则  $U_k(\lambda)$  表示对决策者  $d_k$  而言, 所有方案与其它方案之总离差。根据上述分析, 加权向量  $\lambda$  的选择应使所有决策者的综合属性值对所有方案之总离差最大。为此, 构造目标函数为

$$\max U(\lambda) = \sum_{k=1}^t U_k(\omega) = \sum_{k=1}^t \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |z_{ik} - z_{lk}| \lambda_k$$

于是, 求解权重向量  $\lambda$  等价于求解如下最优化问题

$$\begin{cases} \max U(\lambda) = \sum_{k=1}^t \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |z_{ik} - z_{lk}| \lambda_k \\ \text{s.t. } \lambda_k \geq 0, k \in T, \sum_{k=1}^t \lambda_k^2 = 1 \end{cases}$$

解此最优化模型, 作拉格朗日函数

$$L(\lambda, \zeta) = \sum_{k=1}^t \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |z_{ik} - z_{lk}| \lambda_k + \frac{1}{2} \zeta \left( \sum_{k=1}^t \lambda_k^2 - 1 \right)$$

求其偏导数, 并令

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |z_{ik} - z_{lk}| + \zeta \lambda_k = 0, k \in T \\ \frac{\partial L}{\partial \zeta} = \sum_{k=1}^t \lambda_k^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

求得最优解

$$\lambda_k^* = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |z_{ik} - z_{lk}|}{\sqrt{\sum_{k=1}^t \left[ \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |z_{ik} - z_{lk}| \right]^2}}, k \in T$$

归一化处理得

$$\lambda_k = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |z_{ik} - z_{lk}|}{\sum_{k=1}^t \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n |z_{ik} - z_{lk}|}, k \in T \quad (3)$$

显然, 式(3)得到的决策者权重是依据决策信息而得到的客观权重, 它无需像文献[7]通过对偏好关系的调整来获得权重, 也不必像文献[8]通过比较群决策中各专家信息的相似程度来确定各专家的相对群组可信度权值, 最终得出各专家客观权重。当然, 由于本文方法只是直接依据决策者对方案属性的判断信息, 这与文献[6-8]中利用更多的决策信息而得到的决策者权重而言, 其客观性要稍差。但这也进一步表明信息量的多少决定了决策的有效性、客观性及真实性。在决策者仅给出方案属性值的信息情况下, 本文的基于离差最大化的决策者权重确定的方法是切实可行的。

## 1.3 基于离差最大化的多属性群决策方法步骤

综上, 基于离差最大化的多属性群决策方法的具体步骤为

第 1 步: 对于某一多属性群决策问题, 属性权重

信息和决策者权重信息完全未知。设决策者  $d_k$  的决策矩阵  $A_k$  经过规范化处理后得到规范化矩阵  $R_k=(r_{ij}^k)_{n\times m}$ ;

第 2 步:利用(1)式计算对于决策者  $d_k$  的最优指标权重向量  $\omega^k$ ;

第 3 步:利用(2)式计算决策者  $d_k$  对于方案  $x_i$  的综合属性值  $z_{ik}(\omega^k)$ ;

第 4 步:利用(3)式计算决策者  $d_k$  的权重  $\lambda_k$ ;

第 5 步:利用公式  $Q_i(\lambda)=\sum_{k=1}^t z_{ik}\lambda_k$  计算决策者  $d_k$  所给出方案  $s_i$  的综合属性值;

第 6 步:根据  $Q_i(\lambda)$  值对方案进行排序和择优。

2 实例分析

由于化学工业的特点,化学工业建设项目存在潜在环境危害和环境风险较大,因此,在化工建设项目环境保护审批过程中,必须严格执行《环境影响评价法》,按照国家有关法律法规和规章制度慎重决

策。作为建设项目环境影响审批前的一个重要环节,建设项目环境影响技术评估责任重大,它是针对建设项目的环评评价文件,整合社会各种技术力量和技术资源,结合现场调查对建设项目活动(或计划、规划)的环境影响评价结论进行科学判定和做出正确选择,提出合理的技术评估意见与要求<sup>[11]</sup>。文献[11—12]从定性角度提出对化工行业建设项目的技术评估应结合化工行业特点,从产业政策、规划选址、环保达标排放、清洁生产、总量控制等方面予以技术审查,本文根据已建立的模型,给出一种定量评估方法。

现假定评估专家组由 4 位专家  $d_k(k=1,2,3,4)$  组成,依据上述 5 项主要指标:产业政策、规划选址、环保达标排放、清洁生产、总量控制,分别记为  $p_i'(i'=1,2,\dots,5)$ ,对 4 个化工建设项目的环境影响程度(方案)  $s_i(i=1,2,3,4)$  进行评价打分,分数越高,说明该指标越优。4 位专家的评估结果构成决策矩阵,如表 1 所示。试对 4 个化工建设项目的环境影响大小排序。

表 1 决策矩阵  
Table 1 Decision Matrix

$s_i$	$p^1$				$p^2$				$p^3$				$p^4$				$p^5$			
	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$	$d_1$	$d_2$	$d_3$	$d_4$
$s_1$	90	80	85	90	85	85	82	80	93	95	80	85	75	75	80	75	85	85	86	86
$s_2$	85	85	90	85	80	86	80	88	95	90	78	80	80	85	85	78	90	80	90	80
$s_3$	88	90	86	86	86	78	78	81	90	85	85	85	85	88	90	83	80	86	82	80
$s_4$	92	80	82	88	82	88	82	82	92	90	76	88	76	78	85	80	85	83	88	82

根据决策矩阵,无需规范化,有  
第 2 步:直接根据 4 位专家的决策矩阵,利用公式(1)计算得

$\omega_1=(0.1855, 0.1694, 0.1290, 0.2742, 0.2419)$   
 $\omega_2=(0.2160, 0.1914, 0.1852, 0.2840, 0.1235)$   
 $\omega_3=(0.2016, 0.1129, 0.2339, 0.2419, 0.2097)$   
 $\omega_4=(0.1518, 0.2232, 0.2143, 0.2321, 0.1786)$

第 3 步:利用公式(2)计算决策者  $d_k$  对方案  $s_i$  的综合属性值,分别得

$z_{11}(\omega_1)=84.22, z_{21}(\omega_1)=85.28,$   
 $z_{31}(\omega_1)=85.16, z_{41}(\omega_1)=84.23;$   
 $z_{12}(\omega_2)=82.93, z_{22}(\omega_2)=85.50,$   
 $z_{32}(\omega_2)=85.71, z_{42}(\omega_2)=83.19;$   
 $z_{13}(\omega_3)=82.49, z_{23}(\omega_3)=84.85,$

$z_{33}(\omega_3)=84.99, z_{43}(\omega_3)=82.58;$   
 $z_{14}(\omega_4)=82.50, z_{24}(\omega_4)=82.08,$   
 $z_{34}(\omega_4)=82.90, z_{44}(\omega_4)=83.73。$

第 4 步:利用(3)式计算决策者  $d_k$  的权重  $\lambda_k$ ,分别为

$\lambda_1=0.1380, \lambda_2=0.3564,$   
 $\lambda_3=0.3266, \lambda_4=0.1790。$

第 5 步:利用公式  $Q_i(\lambda)=\sum_{k=1}^t z_{ik}\lambda_k$  计算决策者  $d_k$  所给出方案  $s_i$  的综合属性值,分别为

$Q_1(\lambda)=82.89, Q_2(\lambda)=84.65,$   
 $Q_3(\lambda)=84.90, Q_4(\lambda)=83.23。$

第 6 步:根据  $Q_i(\lambda)$  值对方案进行  $s_i, i=1,2,3,4$  进行排序,有

$$s_3 > s_2 > s_4 > s_1.$$

故第 3 个化工建设项目的的环境影响最低,即方案  $s_3$  最优。

### 3 结束语

群决策中决策者权重的分配始终是一个核心研究领域。本文将离差最大化思想用来确定多属性群决策中决策者权重,该方法充分发挥了离差最大法的客观赋权性,可操作性强,并且具有能够激励决策者对已知方案进行客观合理评价的优点。应用实例表明了该方法的可行性和有效性,具有推广应用价值。该方法可以与其他确定属性权重方法结合,衍生出更多的多属性群决策方法。此外,该方法可以考虑推广到多属性决策中属性值为区间数的情形,甚至为语言或不确定语言的情况。

### 参考文献:

- [1] 王应明. 运用离差最大化方法进行多指标决策与排序[J]. 系统工程与电子技术, 1998, 20(7): 24—26.
- [2] 王明涛. 多指标综合评价中权重确定的离差、均方差决策方法[J]. 中国软科学, 1999, 8: 100—103.
- [3] 陈华友. 多属性决策中基于离差最大化的组合赋权方法[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(2): 194—

197.

- [4] SMITH J E, von WINTERFELDT D. Decision analysis in management science[J]. Management Science, 2004, 50(5): 561—574.
- [5] XU Zeshui. An approach to group decision making based on incomplete linguistic preference relations[J]. International Journal of Information Technology & Decision Making, 2005, 4(1): 153—160.
- [6] 宋光兴, 邹平. 多属性群决策中决策者权重的确定方法[J]. 系统工程, 2001, 19(4): 83—89.
- [7] YAN H, WEI O L. Determining compromise weights for group decision making[J]. Journal of the Operational Research Society, 2002, 53: 680—687.
- [8] 梁梁, 熊立, 王国华. 一种群决策中专家客观权重的确定方法[J]. 系统工程与电子技术, 2005, 27(4): 652—655.
- [9] 刘树林, 邱菀华. 多属性决策基础理论研究[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 18(1): 38—43.
- [10] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
- [11] 宋世伟. 化工建设项目环境影响技术评估要点探讨[J]. 当代化工, 2006, 35(2): 93—96.
- [12] 李海生, 邢文利, 刘伟生, 等. 建设项目环境影响技术评估指南[M]. 北京: 中国环境科学出版社, 2003.

## The method of determining the weights of decision-makers based on the maximizing deviation

MA YongHong ZHOU RongXi LI ZhenGuang

(College of Economics and Management, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

**Abstract:** A new method of determining the weights of the decision-makers is proposed based on the idea of maximizing deviations. First, the weights of attributes can be computed by the decision-makers' objective value for the attributes of alternatives. Then, the weights of the decision-makers can be obtained based on the maximizing deviations method by the synthesizing attribute value of each alternative, and the order relation of all the alternatives can be gotten. In this method, the objectiveness of determining weight of maximizing deviations is sufficiently used, and the decision-makers can be stimulated to properly appraise the alternatives given. Finally, this method is applied to technology assessment of environmental effect of chemical industry items of basic construction, which is illustrated to show the feasibility and effectiveness of this method.

**Key words:** multiattribute group decision making; maximizing deviation; chemical industry project; environmental assessment