计算物理作业 3

作业说明

1. 本次作业截至时间为 2025 年 12 月 2 日 18:00, 迟交作业将只能获得本次作业分数的 90%。每人都有一次迟交作业且不影响成绩的机会, 但该次迟交必须在规定截至时间的 48h 内。病假等特殊情况需要在截至日期之前向助教说明。

2. 作业相关的所有文件请打包到一个压缩文件后发送到课程邮箱 `com_phy2025@163.com`, 压缩包的文件名和邮件题目请取为“学号 _ 姓名 _hw2”(例如“2300000000_ 张三 _hw2”)。

3. 请提交一个 PDF 格式的作业解答, 其中可以描述解题步骤, 程序运行的结果, 必要的图表等。

4. 请提交程序的源文件 (格式: `python/fortran/c/c++`), 并提交一个说明文档 (任意可读格式), 主要说明代码的大致思路、输入输出格式等。请确保代码能够顺利编译, 且运行后能得到你提供的解答中的结果。

5. 作业严禁抄袭, 助教可能抽取部分同学当面说明解题思路和细节。

1. Chebyshev 近似

考虑函数 $f(x)=\sin(2\pi x)/\left(1+x^2\right)$。给出 $f(x)$ 在区间 $[2,5]$ 上的 5、10、15 阶 Chebyshev 近似展开。讨论并作图比较。

2. 数值积分

利用梯形法则、辛普森法则以及 Gauss-Legendre 方法，给出下面积分的数值结果：

$$\int_1^{100}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x \tag{1}$$

其中梯形法则、辛普森法的格点数分别取为 10、100、1000（格点包括左右端点），Gauss-Legendre 方法的格点数取为 10、100。Gauss-Legendre 节点和权重因子可以查阅文献或者调用已有的库函数，不需要自己推算。

注：要求程序明确输出，并在答案文档中明确写出这几种情况的计算结果，并至少保留 5 位有效数字。

3. 高振荡函数的积分

考虑含有参数 k 的积分表达式

$$I_k=\int_0^1\mathrm{e}^x\cos(kx)\mathrm{d}x \tag{2}$$

(a) 编写程序实现复化 Simpson 数值积分，计算 $k=10^3,10^4,10^5,10^6$，并且剖分点数量 $N=\alpha k$, $\alpha=10^{-2},10^{-1},\cdots,10^2$ 时数值积分 I_k 的值，与精确值进行比较，分析误差变化趋势。

(b) 计算积分表达式

$$I_{\text{Filon}} = \int_{-h}^{h} (A + Bt + Ct^2) \cos[k(x_0 + t)] \mathrm{d}t \tag{3}$$

的解析表达式 (不需要编写程序)

(c) 将 $[0,1]$ 区间分成 $2N$ 个区间，区间长度为 $h = 1/(2N)$，节点为 $x_j = jh$。在区间 $[x_{2j}, x_{2j+2}]$ 上，使用二次多项式 $f_2(x)$ 在三个节点 $x_{2j}, x_{2j+1}, x_{2j+2}$ 处对 e^x 进行插值，利用 (b) 中结果，计算

$$\int_{x_{2j}}^{x_{2j+2}} \mathrm{e}^x \cos(kx) \mathrm{d}x$$

的近似值，最后计算 I_k。编写程序计算 $k = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$，并且剖分点数量 $N = \alpha k$, $\alpha = 10^{-2}, 10^{-1}, \cdots, 10^2$ 时数值积分 I_k 的值，与精确值进行比较，分析误差变化趋势。

4. 方程求根

(a) 利用二分法、牛顿-Raphson 法以及割线法，求解方程 $x - 2\sin x = 0$ 的正根。要求求解结果的精度为 10^{-5}，请在各方法中选择适当的量来表示精度。

对于二分法，选取初始区间为 $[1.5, 2]$；对于牛顿法，选取初始点为 $x_0 = 1.5$；对于割线法，选取初始点为 $x0 = 1.5$ 以及牛顿法第一次迭代后的点 x_1。

请给出一张表格，列出第 i 次迭代时二分法的区间 $[a, b]$，牛顿法和割线法的迭代值 x_i，并指出各方法在第几次迭代时误差达到了精度要求。

(b) 求解方程 $x^2 - 4x\sin x + (2\sin x)^2 = 0$。上述三种方法是否都还适用？对于适用的方法进行求解，要求同 (a)。

5. 最速下降法和共轭梯度法

编写最速下降和共轭梯度算法，尝试不同的初始点，求解下面函数的极值，进行讨论。

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 \tag{4}$$