

請實做以下兩種不同 **feature** 的模型，回答第 (1) ~ (3) 題：

- (1) 抽全部 9 小時內的污染源 **feature** 的一次項(加 **bias**)
- (2) 抽全部 9 小時內 **pm2.5** 的一次項當作 **feature**(加 **bias**)

1. (2%)記錄誤差值 (RMSE)(根據 kaggle public+private 分數)，討論兩種 **feature** 的影響

- (1) 6.77912 (全部 feature)
- (2) 6.89455 (PM2.5)

只抽取 PM2.5 的 feature 表現較好，可能是 18 個 feature 中有一些比較沒有預測力

2. (1%)將 **feature** 從抽前 9 小時改成抽前 5 小時，討論其變化

- (1) 6.70777 (全部 feature)
- (2) 7.10312 (PM2.5)

用所有 feature 的 model 如果只用前 5 小時會預測的比較好，但是只用 PM2.5 的 model 就要用全部 9 小時預測比較好

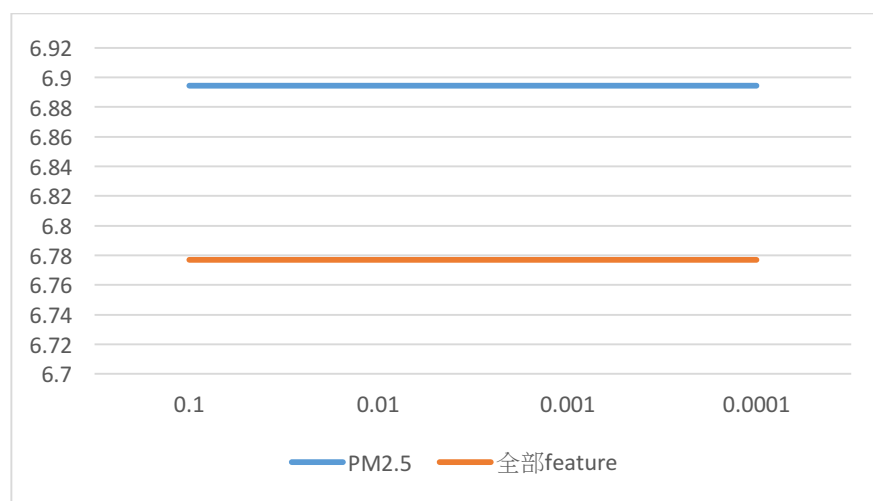
3. (1%)Regularization on all the weight with  $\lambda=0.1$ 、0.01、0.001、0.0001，並作圖

**pm2.5**

6.89455      6.89455      6.89455      6.89455

全部 feature

6.77680      6.77680      6.77680      6.77680



4. (1%) 在線性回歸問題中，假設有  $N$  筆訓練資料，每筆訓練資料的特徵 (feature) 為一向量  $\mathbf{x}^n$ ，其標註(label)為一存量  $y^n$ ，模型參數為一向量  $\mathbf{w}$  (此處忽略偏權值  $b$ )，則線性回歸的損失函數(loss function)為  $\sum_{n=1}^N (\hat{y}^n - \mathbf{x}^n \cdot \mathbf{w})^2$ 。若將所有訓練資料的特徵值以矩陣  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^1 \mathbf{x}^2 \dots \mathbf{x}^N]^T$  表示，所有訓練資料的標註以向量  $\mathbf{y} = [y^1 y^2 \dots y^N]^T$  表示，請問如何以  $\mathbf{X}$  和  $\mathbf{y}$  表示可以最小化損失函數的向量  $\mathbf{w}$ ？請寫下算式並選出正確答案。(其中  $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$  為 invertible)

- (a)  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) \mathbf{X}^T \mathbf{y}$
- (b)  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-0} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$
- (c)  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$
- (d)  $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-2} \mathbf{X}^T \mathbf{y}$

欲使  $\|\mathbf{X}\mathbf{w} - \mathbf{y}\|$  為最小， $\forall \mathbf{z}, \langle \mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{w}, \mathbf{X}\mathbf{z} \rangle = 0$

$$\rightarrow \langle \mathbf{y}, \mathbf{X}\mathbf{z} \rangle - \langle \mathbf{X}\mathbf{w}, \mathbf{X}\mathbf{z} \rangle = 0$$

$$\rightarrow \langle \mathbf{y}, \mathbf{X}\mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{X}\mathbf{w}, \mathbf{X}\mathbf{z} \rangle$$

$$\rightarrow (\mathbf{X}\mathbf{z})^T \mathbf{y} = (\mathbf{X}\mathbf{z})^T (\mathbf{X}\mathbf{w})$$

$$\rightarrow \mathbf{z}^T \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{z}^T \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{w}$$

$$\rightarrow \langle \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$$

$$\rightarrow \mathbf{X}^T \mathbf{y} = \mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{w}$$

$$\rightarrow \mathbf{w} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}, \text{ 故選(c)}$$