代数1H班　作业2　　参考解答.

题1. 共6个.

将$[5]$写成轨道O_i的不交并: $[5]=\bigsqcup_{i=1} O_i$.

对每个i, $|O_i| \mid |S_4|=24$. 又$|O_i|\le 5$, 故$|O_i|\in\{1,2,3,4\}$.

断言: $\forall j\in\{1,2,3,4\}$, 长度为j的S_4-轨道在同构意义下唯一.

$j=1$: 显然.

$j=2$: 这类轨道同构于S_4/H, 其中H是S_4的一个12阶子群.

这只有$H=A_4$一种可能, 得证.

$j=3$: 这类轨道同构于S_4/H, 其中H是S_4的一个8阶子群.

但S_4的所有8阶子群共轭于D_8. 得证.

$j=4$. 这类轨道同构于S_4/H, 其中H是S_4的一个6阶子群

但S_4的所有6阶子群共轭于S_3, 得证.

而5有6种划分:
不含5

$$
\begin{aligned}
5 &= 4+1\\
&= 3+2\\
&= 3+1+1\\
&= 2+2+1\\
&= 2+1+1+1\\
&= 1+1+1+1+1
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 共6个.

题2. $7=|[7]| \nmid |S_6|$, 故$[7]$不可能是一条S_6-轨道.

接下来我们证明S_7不能可迁地作用于$[8]$. (选做)

反证. 假设存在这样的作用$S_7 \curvearrowright [8]$, 这给出同态$\varphi: S_7 \to S_8$.

$\ker\varphi$是S_7的正规子群, 因此$\ker\varphi\in\{\{e\}, A_7, S_7\}$.

而由可迁性, $|\mathrm{im}\varphi|\ge 8$, 故$|\ker\varphi|\le \frac{|S_7|}{8}$. 因此$\ker\varphi=\{e\}$.

φ是单射, $\varphi(S_7)$是S_8的一个同构于S_7的子群. 考虑陪集空间$X=S_8/\varphi(S_7)$, S_8在其上有自然的左作用, 这给出同态$\Phi: S_8 \to \mathrm{Perm}(X)\cong S_8$.

由可迁性类似可得，Φ 为单射，进而 Φ 诱导了 $\mathfrak{S}_8$ 的自同构。

而 $\mathfrak{S}_8$ 只有内自同构。又在复合 $\mathfrak{S}_7 \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{S}_8 \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Perm}(\mathfrak{S}_8/\varphi(\mathfrak{S}_7)) \cong \mathfrak{S}_8$ 下，

$$\Phi\circ\varphi(\mathfrak{S}_7) = \{f \in \mathrm{Perm}(\mathfrak{S}_8/\varphi(\mathfrak{S}_7)) : f \text{ fixes } [e]\}$$

$$\cong \{f \in \mathfrak{S}_8 : f(1)=1\}$$

$\Rightarrow \varphi(\mathfrak{S}_7) = \{g \in \mathfrak{S}_8 : g(\Phi(1)) = \Phi(1)\}$. 这与 $\mathfrak{S}_7 \curvearrowright [8]$ 的可迁性矛盾，得证。

注、在本题中，我们用到了两个结论：

- $\mathfrak{S}_n$ $(n\geq 5)$ 的正规子群只有 $\{e\}$, A_n, $\mathfrak{S}_n$
- 当 $n\geq 7$ 时，$\mathfrak{S}_n$ 的自同构都是内的。

题3. $\forall\, a,b\in G$, $(ab)^{-1} = f(ab) = f(a)f(b) = a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$

$\Rightarrow ba = ab \Rightarrow G$ abelian.

题4. 直接计算可以验证，$f\circ f = id$, $g\circ g\circ g = id$, $f\circ g\circ g = g\circ f$

且 $\{id, g, g\circ g, f, f\circ g, f\circ g\circ g\}$ 两两不同。因此 $G = \{id, g, g\circ g, f, f\circ g, f\circ g\circ g\}$.

考虑 $\varphi: \mathfrak{S}_3 \longrightarrow G$ 可以手动验证知道确实是良好定义的同构。

$(12) \longmapsto f$

$(123) \longmapsto g$

注：严格说来，本题中考虑 G 函数不是 $\mathbb{R}$-值的，而是 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$-值的。

符号 ∞ 满足 $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$. $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 是 $\mathbb{R}$ 的单点紧化。

题5. $D_n = \langle \sigma, \tau : \sigma^n = \tau^2 = e,\ \sigma\tau\sigma = \tau \rangle$

$= \{id, \sigma, \cdots, \sigma^{n-1}, \tau, \tau\sigma, \cdots, \tau\sigma^{n-1}\}$.

设 H 是 D_n 的一个子群。$H = \{e\}$ 是平凡的，也是正规子群。

下设 $|H|>1$. 若 $H\cap\{\sigma,\cdots,\sigma^{n-1}\} = \phi$,

则 $H\subset\{id,\tau,\tau\sigma,\cdots,\tau\sigma^{n-1}\}$. 若 $\exists\ 0\le k<l\le n-1$，使

$\tau\sigma^k,\tau\sigma^l\in H$，则 $\sigma^{k-l}\in H$，与假设矛盾. 从而 $H=\{id,\tau\sigma^k\}$，对某个 $0\le k\le n-1$.

这类子群不是正规的：$\sigma(\tau\sigma^k)\sigma^{-1}=\tau\sigma^{k-2}\notin H$.

下设 $H\cap\{\sigma,\cdots,\sigma^{n-1}\}\neq\phi$，记 $s=\min\limits_{1\le j\le n-1}\{\sigma^j\in H\}$，由 $\sigma^s\in H$，$\sigma^n=id\in H$

及 Bézout 定理知 $\sigma^{gcd(s,n)}\in H$. 由 s 的最小性，$gcd(s,n)=s$. 故 $s|n$.

若 $H\cap\{\tau,\tau\sigma,\cdots,\tau\sigma^{n-1}\}=\phi$，则 $H=\{id,\sigma^s,\cdots,\sigma^{n-s}\}$

H 是正规子群，因为
$$\sigma\sigma^j\sigma^{-1}=\sigma^j$$
$$\tau\sigma^j\tau^{-1}=(\tau\sigma\tau^{-1})^j=\sigma^{-j}\in H,\quad j=0,s,\cdots,n-s$$

下设 $H\cap\{\tau,\tau\sigma,\cdots,\tau\sigma^{n-1}\}\neq\phi$. 记 $t=\min\limits_{0\le i\le n-1}\{\tau\sigma^i\in H\}$. 则 $r<s$.

此时由 $\sigma^i\tau\sigma^j=\tau\sigma^{j-i}$ 知 $H=\{id,\sigma^s,\cdots,\sigma^{n-s},\tau\sigma^t,\tau\sigma^{s+t},\cdots,\tau\sigma^{n-s+t}\}$.

若 $s\le 2$，同理可验证 H 正规

若 $s>2$，则 H 不正规：$\sigma(\tau\sigma^t)\sigma^{-1}=\tau\sigma^{t-2}\notin H$.

题6. $G=GL(2,\mathbb{F}_2)$ 可逆地作用于 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$，而 $|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)|=3$，

这给出同态 $\varphi: G\longrightarrow \mathrm{Perm}(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2))\cong\mathfrak{S}_3$.

由基础的线性代数，G 的作用是忠实的，i.e. φ 为单射.

又 $|G|=|GL(2,\mathbb{F}_2)|=(2^2-1)(2^2-2)=6=|\mathfrak{S}_3|$. 故 φ 给出了同构 $G\cong\mathfrak{S}_3$.

题7. 1. $e=e\cdot e\in G$. 又 $\forall\ h_1k_1\in HK$，$h_2k_2\in HK$，

$(h_1k_1)^{-1}h_2k_2=\underbrace{(k_1^{-1}h_1^{-1}h_2k_1)}_{\in k_1^{-1}Hk_1=H}\underbrace{(k_1^{-1}k_2)}_{\in K}\in HK$. 从而 HK 为子群.

2. $\forall\ k\in K$，$k(H\cap K)k^{-1}\subset kHk^{-1}=H$，$k(H\cap K)k^{-1}\subset kKk^{-1}=K$.

故 $k(H\cap K)k^{-1}\subset H\cap K$. 从而 $H\cap K\lhd K$.

3. 考虑 $\Phi: K \xrightarrow{i} HK \xrightarrow{p} HK/H$，其中 i 为含入映射，p 为典范投影.

Φ 满射：$\forall\, [hk] \in HK/H$，$\Phi(hkh^{-1}) = [hkh^{-1}] = [hk]$.

因此 Φ 诱导了同构 $\dfrac{K}{\ker\Phi} \xrightarrow{\sim} \dfrac{HK}{H}$

$\Phi(x) = e \iff x \in H \iff x \in K\cap H \to \ker\Phi = K\cap H$

故 $\dfrac{K}{K\cap H} \xrightarrow{\sim} \dfrac{HK}{H}$

题8. $|G| = |O_1| + \cdots + |O_k| = \dfrac{|G|}{|C_1|} + \dfrac{|G|}{|C_2|} + \cdots + \dfrac{|G|}{|C_k|} = |G|\left(\dfrac{1}{n_1} + \cdots + \dfrac{1}{n_k}\right)$

$\to \dfrac{1}{n_1} + \cdots + \dfrac{1}{n_k} = 1$

题9. 正确. 因为 $(PQ) * A = PQA(PQ)^T = PQAQ^TP^T = P(Q*A)P^T = P*(Q*A)$

题10. $GL(2,\mathbb{F}_3) \curvearrowright \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$，而 D 在 $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$ 上平凡地作用.

因此我们有作用 $PGL(2,\mathbb{F}_3) = GL(2,\mathbb{F}_3)/D \curvearrowright \mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)$.

这诱导出同态 $\varphi: PGL(2,\mathbb{F}_3) \longrightarrow \mathrm{Perm}(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3)) \cong S_4$ $\left(|\mathrm{Perm}(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_3))| = 4\right)$.

由基础线性代数可知 φ 为单射. 又 $|PGL(2,\mathbb{F}_3)| = \dfrac{(3^2-1)(3^2-3)}{2} = 24 = |S_4|$

故 φ 诱导了同构 $PGL(2,\mathbb{F}_3) \xrightarrow{\sim} S_4$.

题11. 设 $\chi_j: G \to \mathbb{R}^\times$ 是群同态，$(1 \le j \le r)$.

考虑 $a_1\chi_1 + \cdots + a_r\chi_r = 0$，$a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$.

假设 $a_1, \ldots, a_r$ 不全为0. 则至少有2个非0，不妨设 $a_1, a_2, \ldots, a_k \neq 0$. $a_l = 0$, $l > k$
$k \geq 2$

此时 $\chi_1 \neq \chi_2$，$\exists\, g \in G$ s.t. $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$.

此时 $a_1\chi_1 + \cdots + a_r\chi_r = 0 \Rightarrow a_1\chi_1(g)\chi_1 + a_2\chi_1(g)\chi_2 + \cdots + a_r\chi_1(g)\chi_r = 0$

又 $0 = a_1\chi_1(g\cdot) + a_2\chi_2(g\cdot) + \cdots + a_r\chi_r(g\cdot) = a_1\chi_1(g)\chi_1 + a_2\chi_2(g)\chi_2 + \cdots + a_r\chi_r(g)\chi_r = 0$

$\Rightarrow 0 = a_2(\chi_1(g) - \chi_2(g))\chi_2 + a_3(\chi_1(g) - \chi_3(g))\chi_3 + \cdots + a_r(\chi_1(g) - \chi_r(g))\chi_r = 0$

故当 $a_1, \ldots, a_r$ 中有 $k \geq 2$ 个非0 时，可给出仅为 $k-1$ 个非0.

因此可设 $a_1 \neq 0$，$a_2 = \cdots = a_r = 0$ $\Rightarrow a_1\chi_1 = 0 \Rightarrow \chi_1 = 0$，矛盾. 得证.

题12.（仅当）设 $G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 为n阶循环群，H是G的一个m阶子群，$m|n$.

$H=\{0,[a],[2a],\cdots,[(m-1)a]\}$ $\quad n|am \Rightarrow \frac{n}{m}|a$

$\Rightarrow [a]\in\{0,[\frac{n}{m}],\cdots,[(m-1)\frac{n}{m}]\} \Rightarrow H\subset\{0,[\frac{n}{m}],\cdots,[(m-1)\frac{n}{m}]\}$

又 $|H|=|\{0,[\frac{n}{m}],\cdots,[(m-1)\frac{n}{m}]\}|$，故

$H=\{0,[\frac{n}{m}],\cdots,[(m-1)\frac{n}{m}]\}$. 特别地，G只有一个m阶子群.

（当）. 设 $|G|=n$. 记 $r(m)=\#\{g\in G: ord(g)=m\}$.

固定 $g^{(m)}\in G$ s.t. $ord(g^{(m)})=m$.（若存在）.

对 $\forall g$ s.t. $ord(g)=m$，$\langle g^{(m)}\rangle=\langle g\rangle \Rightarrow g=(g^{(m)})^k$ for some k.

$ord(g)=m \Rightarrow (k,\frac{n}{m})=1$. 因此 $r(m)\le\varphi(\frac{n}{m})$.

故 $|G|=\sum_{m} r(m)=\sum_{m|n} r(m)\le\sum_{m|n}\varphi(\frac{n}{m})=|G|$.

等式成立，于是 $r(n)=\varphi(1)=1$. 因此 $\exists g_0\in G$ s.t. $ord(g_0)=n$

$\Rightarrow \langle g_0\rangle=G$. 故G为循环群

注：由初等数论知 $\sum_{d|n}\varphi(d)=n$.

题13. 利用群同态的定义可以验证此操作满足群公理.

$\{e_H\}\times K$ 为子群：$(e_H,k_1)(e_H,k_2)^{-1}=(e_H,k_1k_2^{-1})$

$H\times\{e_K\}$ 为子群：$(h_1,e_K)(h_2,e_K)^{-1}=(h_1h_2^{-1},e_K)$

正规性：$(h,k)(h_1,e_K)(h,k)^{-1}=(h\varphi(k)(h_1)h^{-1},e_K)$.

例子（$\{e_H\}\times K$ 不正规）：$K=S_3$，$H=\mathbb{Z}^3$，则K通过置换作用于H.

$k=(12)$，$k'=(123)$，$h=(1,0,0)$，

可算得 $h\varphi(kk'k^{-1})(h^{-1})=(1,0,-1)\neq 0$

$\to (h,k)(e_H,k')(h,k)^{-1}\notin\{e_H\}\times K$ 故此时不是正规子群.

题14. 作为 $\mathbb{R}$-向量空间, $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$

因此 $GL(n,\mathbb{C}) = \{f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n : f\ \mathbb{C}\text{-linear}, \text{可逆}\}$

$\subset \{f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n : f:\mathbb{R}\text{-linear}. \text{可逆}\} = \{f:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n} : f:\mathbb{R}\text{-linear}. \text{可逆}\}$

$= GL(2n,\mathbb{R})$.

题15. 考虑 $\exp(2\pi i\cdot):\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}^\times$, 这是群同态, 且满.

其 kernel 为 $\mathbb{Z}$ (复分析), 故 $\exp(2\pi i\cdot)$ 诱导了同构 $\mathbb{C}/\mathbb{Z}\xrightarrow{\sim}\mathbb{C}^\times$.

题16 和前面的问题一样. $PGL(2,\mathbb{F}_5)\curvearrowright\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5)$

给出同态 $\Phi: PGL(2,\mathbb{F}_5)\longrightarrow \mathrm{Perm}(\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5))\cong S_6$ $(|\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_5)|=6)$.

$\ker\Phi=\{e\}$ (忠实作用). 这将 $PGL(2,\mathbb{F}_5)$ 等同于 S_6 的一个 120阶子群

$\left(|PGL(2,\mathbb{F}_5)| = \frac{(5^2-1)(5^2-5)}{4} = 120\right)$. 但 S_6 的指数为 6 的子群都同构于 S_5,

故 $PGL(2,\mathbb{F}_5)\cong S_5$.

题17. 1. 6个. 考虑初等因子组. $\mathbb{F}_2$ 上次数 ≤ 3 的不可约多项式为

$x,\ x+1,\ x^2+x+1,\ x^3+x+1,\ x^3+x^2+1$. (其中 x 不可能, 因为矩阵可逆)

因此初等因子组共 6 种可能 $\rightarrow$ $GL(3,\mathbb{F}_2)$ 有6个共轭类.

2. 可以验证, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

构成 $GL(3,\mathbb{F}_2)$ 的 6个共轭类 的一组代表元.

计算 (解线性方程组) 知 只有 $\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ 的中心化子大小为 7,

其相应的共轭类大小为 24.

注: 可以用 $GL(3,\mathbb{F}_2)\hookrightarrow GL(3,\overline{\mathbb{F}}_2)$ 与 Jordan 标准型.