线性代数 作业 25

2025 年 11 月 4 日

说明：晚自习请独立完成一部分作业并上交，鼓励大家独立完成更多。剩余带回家继续完成。请将答案写在答题纸上，不要写在试卷上，答题纸上交，试卷可以带走。

完成度不好的作业题，需要重写解答。助教会在批改之后标记需要重写的题号。

请写下必要的解答过程以及理由，直接写答案的题目会被扣分。

1 晚自习完成的题目

本次作业中，矩阵 A 的伴随 $A^* = \overline{A}^T$ 是指共轭转置。

题 1. 假设 V 是带有正定厄米型的复线性空间，$T\colon V \to V$ 是 V 上的自伴算子。如果 v, w 是 T 的两个不同特征值的对应的特征向量，证明 v 和 w 是正交的。

题 2. 证明两个酉方阵复相似当且仅当他们酉相似.

题 3. 证明反对称实方阵可以酉对角化，并且特征值一定是 0 或者纯虚数。

题 4. 令复方阵 $X = A + \sqrt{-1}B$，$A, B \in M_n(\mathbb{R})$，证明 X 是酉方阵当且仅当

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

是正交阵。

题 5. 假设 A, B 是可交换的厄米阵，证明存在一个酉矩阵 P 使得 P^*AP 和 P^*BP 同时都是对角阵。

题 6. 假设 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 是行列式为 1 的酉方阵，证明 $a=\bar{d}$, $b=-\bar{c}$.

题 7. 一个矩阵称作正规，如果 $AA^*=A^*A$.

1. 如果 A,B 正规，AB 是否一定正规？如果额外假定 $AB=BA$ 呢？
2. 验证矩阵 $A=\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & \sqrt{-1} \end{pmatrix}$ 是否正规，是否厄米阵，是否酉矩阵.

题 8. 证明以下方阵酉相似: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$

2 带回家做的题

题 9. 复矩阵 A 的 SVD 分解是指 $A=UDV^*$, 使得 U,V 为酉阵, D 是拟对角矩阵，其对角元素依次为 $\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_r$，$r=rank(A)$. 请写出复矩阵的 SVD 分解存在性的证明细节。证明奇异值 $\sigma_1,\cdots,\sigma_r$ 只依赖于 A。

题 10. 设 A 是一个正规复方阵。证明 A^* 可以写成 A 的多项式。