线性代数 作业 23

2025 年 10 月 15 日

说明：晚自习请独立完成一部分作业并上交，鼓励大家独立完成更多。剩余带回家继续完成。请将答案写在答题纸上，不要写在试卷上，答题纸上交，试卷可以带走。

完成度不好的作业题，需要重写解答。助教会在批改之后标记需要重写的题号。

请写下必要的解答过程以及理由，直接写答案的题目会被扣分。

1 晚自习完成的题目

题 1. 假设平面 $\mathbb{R}^2$ 上有三个点的坐标为 $\alpha_1 = (1,0), \alpha_2 = (-1,-1), \alpha_3 = (0,1)$. 以 α_i 做成第 i 行的行向量的 3×2 矩阵记为 A.

1. 请写出矩阵 A 的一个奇异值分解.
2. 在标准内积和距离下，找到平面上哪一条直线（一维仿射空间）到这三个点的距离平方之和最小.

题 2 (极分解)**.** 假设 A 是 n-阶实方阵，证明存在半正定对称矩阵 B 和正交矩阵 P 使得 $A = BP$. 这样的分解称为 A 的极分解. (请思考这样的 B 和 P 由 A 唯一确定吗 ?)

题 3. 对形如 $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ 的矩阵写下一个极分解.

题 4. 证明第一个奇异值不等式，假设 A 是 n-阶实方阵，且有实特征值 λ, 证明 $\sigma_1(A) \geq \lambda$.

题 5. 假设 A 是可逆 n 阶实方阵，有奇异值 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$. 求 A^{-1} 的奇异值.

题 6. 假设 A 是 n 阶实方阵。判断题: 证明或举出反例.

1. n 阶方阵 A 为正交矩阵当且仅当它有 n 个奇异值, 值都是 1.
2. 如果 n 阶方阵有 n 个奇异值, 则所有奇异值的乘积等于所有特征值的乘积.
3. 假设 n 阶方阵 A 的奇异值分解为 $A = QDP^T$, 而 $A + I_n$ 的奇异值分解为 $A + I_n = Q(D + I_n)P^T$, 则 A 是对称矩阵.
4. 如果 n 阶方阵 A 的 n 个奇异值就是它的 n 个特征值, 则 A 是对称矩阵.

2 可以带回家做的题目

题 7. *Prove the additive inequality of singular values. Let* A, B *be two* $m \times n$ *real matrices. Prove that*

$$\sigma_{k+l-1}(A+B) \leq \sigma_k(A) + \sigma_l(B)$$

for $k + l - 1 \leq \min(m, n)$.

题 8. 请证明 $m \times n$ 实矩阵 A 的第 k 个奇异值的 *Min-Max* 描述.

$$\sigma_k = \min\left\{\max\left\{|A(x)| : x \perp W_k, |x| = 1\right\} : W_k \subset E \text{ 子空间}, \dim W_k = k-1\right\}$$

这里先固定 $k-1$ 维子空间 W_k，取出对应的最大值

$$\max\left\{|A(x)| : x \perp W_k, |x| = 1\right\}.$$

然后让 W_k 取遍 $k-1$ 维子空间，取出这些值中的最小值.

证明实矩阵 A 的第 k 个奇异值的 *Max-Min* 描述.

$$\sigma_k = \max\left\{\min\left\{|A(x)| : x \in W_k, |x| = 1\right\} : W_k \subset E \text{ 子空间}, \dim W_k = k\right\}$$

题 9 (思考题)**.** 请证明方阵 A 的奇异值和特征值的如下不等式，如果 A 有奇异值 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$，以及 n 个实特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_n$，则 $\sigma_1 \cdots \sigma_i \geq |\lambda_1 \cdots \lambda_i|$. *(对于复矩阵版本的 SVD 就不用假设实特征值的存在性.)*