

线性代数 作业 17

2025 年 5 月 23 日

题 1. 设 F 是一个域, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in F[x]$ 。类似微积分, 定义 f 的导数为 $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$ 。对于 $f(x), g(x) \in F[x]$, 证明:

1. $(fg)' = fg' + f'g$ 。
2. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'$ 。
3. 当且仅当 f 的不可约分解中没有重因子时, $\gcd(f, f') = 1$ 。

题 2. 证明 \mathbb{Q}/\mathbb{Z} 不是有限生成的 \mathbb{Z} -模。

题 3. 求以下 \mathbb{Z} 上矩阵的 *Smith* 标准形:

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 6 \\ -3 & -12 & -12 \end{bmatrix}.$$

题 4.

定义 1. 设 R 是一个环, $A \in M_{m \times n}(R)$ 。取 i_1, i_2, \dots, i_k 行和 j_1, j_2, \dots, j_k 列组成的子矩阵的行列式称为 A 的 $k \times k$ 子式。所有 $k \times k$ 子式的最大公因数称为第 k 个行列式因子 a_k 。

1. 类似域 F , 定义 R 上的初等矩阵。有三类初等矩阵:

- (a) $E_{ij}(\lambda)$: 在单位矩阵上, 将第 i 行的 $\lambda \in R$ 倍加到第 j 行。
- (b) $E_{ii}(\lambda)$: 在单位矩阵上, 将第 i 行乘以 $\lambda \in R^\times$, 其中 R^\times 是 R 中的可逆元集合。

(c) $E_{ij}(\lambda)$: 在单位矩阵上, 交换第 i 行和第 j 行。

证明: 若 R 是欧几里得环, 则任意可逆矩阵 $A \in M_n(R)$ 都可以表示为有限个初等矩阵的乘积。

2. 当 R 是欧几里得环时, 证明 A 左右乘可逆矩阵时, (a_k) 不变。

3. 证明行列式因子和不变因子可以互相确定。(在乘以 R 中乘法可逆元的意义下)

题 5. 1. 假设 $f(x) \in F[x]$ 是域 F 上的不可约多项式, 证明 $F[x]/(f)$ 在商环结构下也是一个域。

2. 请对 \mathbb{R} 上的不可约多项式构造域, 并且证明这些域只能同构于 \mathbb{R} 和 \mathbb{C} 。

1 英文版

题 6. Let F be a field and $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0 \in F[x]$. Define the derivative of f similarly as calculus. $f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$. For $f(x), g(x) \in F[x]$, prove

1. $(fg)' = fg' + f'g$.

2. $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'$.

3. $\gcd(f, f') = 1$ if and only if in the irreducible factorization of f , there are no factors with multiplicities.

题 7. Prove that \mathbb{Q}/\mathbb{Z} is not a finitely generated \mathbb{Z} -module.

题 8. Find the Smith normal form of the following matrix over \mathbb{Z} :

$$\begin{bmatrix} 15 & 6 & 9 \\ 6 & 6 & 6 \\ -3 & -12 & -12 \end{bmatrix}.$$

题 9.

定义 2. Let R be a ring and $A \in M_{m \times n}(R)$. The determinant of submatrix with i_1, i_2, \dots, i_k th rows and j_1, j_2, \dots, j_k th columns is called a $k \times k$ -minor of A . The greatest common divisor of all $k \times k$ -minors is called a determinant divisors a_k .

1. Define the elementary matrix over R similarly as field F . There are three types of elementary matrices:

- (a) $E_{ij}(\lambda)$: For identity matrix, add $\lambda \in R$ times i th row to j th row.
- (b) $E_{ii}(\lambda)$: For identity matrix, multiply i th row by $\lambda \in R^\times$. Here R^\times is the set of multiplicative invertible elements in R .
- (c) $E_{ij}(\lambda)$: For identity matrix, swap i th row and j th row.

Show that if R is a Euclidean domain, then any invertible matrix $A \in M_n(R)$ is the product of a finite number of elementary matrices.

- 2. When R is Euclidean Domain, show that a_k does not change when A is multiplied by invertible matrices on the left or right.
- 3. Show that determinant divisors and invariant factors determines each other.

题 10. 1. Suppose $f(x) \in F[x]$ is an irreducible polynomial over the field F . Prove that $F[x]/(f)$ is also a field under the quotient ring structure.

2. Construct fields from irreducible polynomials over \mathbb{R} and prove that these fields can only be isomorphic to \mathbb{R} or \mathbb{C} .