线性代数 作业 10

2025 年 3 月 25 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 设 V 是有限维线性空间, $T\colon V\to V$ 是线性变换. 证明 T 是可逆的当且仅当 T 的核是 $\{0\}$. 当 V 是无限维线性空间时, 这个结论是否成立?

题 2. 定义 P_n 为关于未定元 x 次数小于或等于 n 的复系数多项式组成的复线性空间. 定义 P_n 上的线性变换 $T\colon P_n\to P_n$ 为 $T(f)=f'+f$. 请问这个线性变换是否可逆，并写下其逆变换.

题 3. 假设 A, B 都是 n-阶实矩阵, 且 A 可逆，$B^n=0$. 证明以下映射 F 是双射

$$F\colon M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}),\ F(X)=AX+XB.$$

Suppose A, B are both $n\times n$ complex matrices, and A is invertible, $B^n=0$. Prove that the following map F is bijective.

$$F\colon M_n(\mathbb{R})\to M_n(\mathbb{R}),\ F(X)=AX+XB.$$

题 4. 假设 V 是 $M_n(\mathbb{R})$ 中的对称矩阵组成的子空间，W 是反对称矩阵组成的子空间. 证明 $V\oplus W=M_n(\mathbb{R})$. *(注意，需要证明左边是内直和，并且等于右边.)*

题 5. 假设 V 是实轴上的全体实值函数组成的线性空间，其中又子空间 W_1 是全体奇函数组成的线性空间, W_2 是全体偶函数组成的线性空间. 证明 $V=W_1\oplus W_2$. *(注意，需要证明左边是内直和，并且等于右边.)*

题 6. 假设 T 是实线性空间 V 上的线性变换且满足 $T^2 = \mathrm{Id}$. 证明 $V = \ker(T - \mathrm{Id}) \oplus \ker(T + \mathrm{Id})$. 这里 Id 是恒等变换. 你能用这个事实来解释前两题的结论吗?

题 7. 假设 T 是有限维线性空间 V 上的线性变换且满足 $T^2 = T$. 证明 $V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$.

题 8. 以下假设线性空间的维数均有限. 对子空间 $W \subset V$, 定义余维数 $\operatorname{codim}(W) = \dim V - \dim W$. 设

$$V_0 \xrightarrow{T_1} V_1 \xrightarrow{T_2} \cdots \xrightarrow{T_m} V_m$$

是一串线性映射, 证明

$$\sum_{i=1}^{m} \dim \ker T_i - \sum_{i=1}^{m} \operatorname{codim} \operatorname{Im} T_i = \dim V_0 - \dim V_m.$$

2 思考题

本部分题选做.

题 9. 设 $G = (V, E)$ 是一个有向图, 带有映射 $s, t : E \to V$, $s(e), t(e)$ 分别表示有向边 e 的起点和终点.

记 $\mathbb{R}\{V\}$ 为形如 $\sum_{v \in V} x_v \cdot v \, (x_v \in \mathbb{R})$ 的表达式构成的线性空间; 类似地有 $\mathbb{R}\{E\}$.

定义线性映射 $d : \mathbb{R}\{E\} \to \mathbb{R}\{V\}$, 使得对于 $e \in E$, $d(e) = t(e) - s(e)$.

那么 $\dim \ker d, \operatorname{codim} \operatorname{Im} d$ 给出了有向图中的什么信息?

尝试对一些例子计算 $\dim \ker d$.