线性代数 作业 11

2025 年 4 月 1 日

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 判断下列矩阵 A 是否可在复数域上对角化. 在可对角化的情形, 给出可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP$ 是对角矩阵.

1. $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

题 2. 记 X^* 为 X 的伴随, X^T 为 X 的转置. 设 A, B 是同阶的某个域上的方阵, 证明:

- $(AB)^* = B^*A^*$;

- $(A^T)^* = (A^*)^T$;
- 还假设 A 可逆, 则 A^* 也可逆, 且 $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

如果将域替换成交换环，结论是否成立？

题 3. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 证明

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA).$$

题 4. 在微分几何中, 为了计算函数图像的子流形测度, 我们会碰到如下实际问题: 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1} & 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & 1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \end{vmatrix},$$

其中 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 是一个光滑函数.