示范班，代数，2025.9.17

今日主要讲内积空间.

回顾：Sylvester 惯性定理：任何实对称阵 $\simeq \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

在其证明中我们用到了正定/半正定/负定/半负定的对称双线性型/二次型.

$V/\mathbb{R}$ $g: V\times V \to \mathbb{R}$ 正定 若 $\forall v \in V, v\neq 0$, $g(v,v)>0$.

此时记 $g>0$.

由 Sylvester 定理，必存在一组基 B (of V), s.t. Gram 矩阵 $G_{g,B}=I_n$.

例. $V=\mathbb{R}^n$, $e_1,\cdots,e_n$ 标准基，定义标准内积 (on $\mathbb{R}^n$)

$g: V\times V \to \mathbb{R}$, $g(e_i,e_j)=\delta_{ij}$.

命题：$g: V\times V\to\mathbb{R}$ 正定，则 $\forall$ $W<V$ 子空间，$g|_{W\times W}$ 也正定 (从而非退化) 从而 $V=W \oplus W^{\perp}$.

定义. $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A=A^T$, 称 A 正定，如果 $\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^{(n)}$, 有 $\vec{x}^TA\vec{x}\geq 0$, 且等号成立当且仅当 $\vec{x}=\vec{0}$. 记 $A>0$.

类似可定义负定，半正定，半负定.

命题. $(V,g)/\mathbb{R}$, 则以下等价：

(1) $g>0$ (2). $\forall$ 基 B, $G_{g,B}>0$ (3) $\exists$ 基 B, $G_{g,B}>0$.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2). 设 $B=(v_1,\cdots,v_n)$, 则 $G_{g,B}=(g(v_i,v_j))$

$\forall_{\vec{0}\neq}\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. 有 $\vec{x}^TG_{g,B}\vec{x}=g(v,v)>0$, 其中

$v=(v_1,\cdots,v_n)\vec{x} = \sum x_i v_i$.

(2) ⇒ (3) 显然. (3) ⇒ (1): 设 $B=(v_1,\cdots,v_n)$, 则

任取 $v\in V$, 写 $v=\sum x_i v_i$ (唯一), $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

于是 $g(v,v)=g(\sum x_i v_i,\sum x_i v_i)=(x_1,\cdots,x_n)G_{g,B}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}>0$ □

性质. ① $\forall c>0$, $A>0 \Rightarrow cA$ 正定

② A_1,A_2 正定 $\Rightarrow A_1+A_2$ 正定.

这个性质告诉我们 正定 n 阶实阵 构成 $M_n(\mathbb{R})$ 中一个凸锥 (convex cone).

③ A 正定, $P\in GL(n,\mathbb{R})$, 则 P^TAP 正定

④ A_1,A_2 正定 $\Rightarrow \begin{pmatrix}A_1 & \\ & A_2\end{pmatrix}$ 正定

证: 用正定矩阵的定义 易证.

对 ③ 我们从双线性型角度给一个证明:

考虑 A 定义的 $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(x,y)\mapsto x^TAy$

设 $P=(v_1,\cdots,v_n)$, 则 P 可视作 $\mathbb{R}^n$ 的一个基 B

在这个基下, Gram 阵 $G_{g,B}=(g(v_i,v_j))=(v_i^TAv_j)_{i,j}$

$=P^TAP$.

所以 P^TAP 正定. □

定理：$A\in M_n(\mathbb{R})$，$A=A^T$，以下等价：

① A 正定 ② $A=PP^T$，$\exists P\in GL(n,\mathbb{R})$ ③ 顺序主子式 >0

（$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$ $A_1=a_{11}$ $A_2=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$，$A_3=\cdots$

$\det A_i$ 为第 i 个顺序主子式）

证：①⇒②：设 $A\simeq\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0\end{pmatrix}$，若 $p<n$，则 $\exists$

$\vec{x}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{x}\neq 0$ s.t. $\vec{x}A\vec{x}\leq 0$，与 A 正定矛盾。

所以 $A\simeq I_n \Rightarrow A=PP^T$，对某 $P\in GL(n,\mathbb{R})$。

②⇒① 由正定矩阵定义即得：

$\forall \vec{x}\in\mathbb{R}^n$，$\vec{x}\neq 0$ 有 $\vec{x}^TA\vec{x}=\vec{x}^TPP^T\vec{x}=(P^T\vec{x})^T(P^T\vec{x})>0$。

①⇒③：取 $1\leq i\leq n$，考虑 $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$，$x_{i+1}=\cdots=x_n=0$。

则知 $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_i\end{pmatrix}^T A_i\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_i\end{pmatrix}\geq 0$，等号成立当且仅当 $x_1,\cdots,x_i=0$

所以 A_i 正定 $\Rightarrow A_i=P_iP_i^T \Rightarrow \det A_i=(\det P_i)^2>0$。

③⇒①．对 n 归纳．$n=1$ 成立．现设 $n\geq 2$．

由归纳假设知 A_{n-1} 正定

设 $g:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$，$(\vec{x},\vec{y})\mapsto\vec{x}^TA\vec{y}$

令 $W=\mathrm{span}(e_1,\cdots,e_{n-1})$，由 A_{n-1} 正定知 $g|_{W\times W}>0$

$\det A = \det A_n > 0 \Rightarrow g$ 非退化

于是 $\mathbb{R}^n = W \underset{g}{\oplus} W^\perp$

$\dim W^\perp = 1$，取 $0 \neq v \in W^\perp$，则 $e_1, \cdots, e_{n-1}, v$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的一组基，记为 B，考虑 $G_{g,B} = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & g(v,v) \end{array}\right)$

$G_{g,B}$ 和 A 均为 g（关于某些基）的 Gram 阵，所以

$G_{g,B} \simeq A$ 相合 $\Rightarrow \det G_{g,B} > 0 \Rightarrow g(v,v) > 0$

$\Rightarrow G_{g,B}$ 正定 $\Rightarrow g > 0 \Rightarrow A > 0$. $\square$

解释：$g: V \times V \to F$，B_1, B_2 为两个基，

设 $B_1 = (v_1, \cdots, v_n)$ $B_2 = (w_1, \cdots, w_n)$

则 $G_{g,B_1} = (g(v_i, v_j)) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \underset{g}{*} (v_1, \cdots, v_n)$

$$G_{g,B_2} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \underset{g}{*} (w_1, \cdots, w_n)$$

设 $(w_1, \cdots, w_n) = (v_1, \cdots, v_n) P$，$P \in GL_n(F)$

则 $G_{g,B_2} = P^T \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \underset{g}{*} (v_1, \cdots, v_n) P = P^T G_{g,B_1} P$.

③ ⇒ ① 直接看矩阵.

$$A = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} P^TP & \alpha \\ \hline \alpha^T & b \end{array}\right) \begin{array}{l} n-1 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} n-1 & 1 \end{array} \end{array} \quad \text{则} \begin{pmatrix} P^{-1} & \\ & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} P & \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \beta \\ \beta^T & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ -\beta^T & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & \beta \\ \beta^T & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n-1} & -\beta \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & c-\beta^T\beta \end{pmatrix}$$

$\det A > 0 \Rightarrow c-\beta^T\beta > 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} I_{n-1} & \\ & c-\beta^T\beta \end{pmatrix}$ 正定 $\Rightarrow A$ 正定.

半正定, 负定, 半负定 均有类似结果. ~~留作作业或习题课~~.

定理: $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A = A^T$, 以下等价.

① A 半正定 ② $A \simeq \begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$ ③ $A = Q^TQ$, $\exists Q \in M_n(\mathbb{R})$

④ A 的所有主子式 ≥ 0.

证: ①, ②, ③ 等价容易证. (习题?)

① $\Rightarrow$ ④: $\forall \lambda > 0$, $A+\lambda I_n$ 正定 $\Rightarrow$ $A+\lambda I_n$ 的任一主子式 >0, 令 $\lambda \to 0^+$ 知 A 的任一主子式 ≥ 0

④ $\Rightarrow$ ①: 考虑 A 一个 $\overbrace{\text{主子阵}}^{m\text{阶}}$ B, 考虑 $\det(B+\lambda I)$

展开: $\det(B+\lambda I) = \lambda^m + a_{m-1}\lambda^{m-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$,

则 a_i 为 B 的一些主子式之和 $\Rightarrow a_i \geq 0$.

所以 $\forall \lambda > 0 \Rightarrow \det(B+\lambda I) > 0$

所以 $\underset{\forall \lambda>0}{\forall} A+\lambda I$ 正定 $\Rightarrow$ A 半正定. $\square$

$(V, g)/\mathbb{R}$, $g > 0$ 称为一个内积空间, g 称为内积

$\dim V = n$. $(\mathbb{R}^n, \underset{\langle\cdot,\cdot\rangle}{\text{标准内积}})$ 称为标准内积空间.

$\exists\ B = (v_1, \cdots, v_n)$ 基 s.t. $g(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ $\leftarrow$ 标准正交基 (内积空间)

所以 $(V, g) \to (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, $v_i \mapsto e_i$ 为同构.

也就是说任何 n 维内积空间均同构于标准内积空间.

给定 inner space (V, g), $Q(v) = g(v,v)$ 二次型

则 $\forall\, 0 \neq v \in V$, $Q(v) > 0$.

记 $|v| = \sqrt{Q(v)}$ 称为 v 的长度.

对 $v, w \in V$, 定义 $d(v,w) = |v-w|$ 为 v, w 距离.

定理: ① Cauchy-Schwartz: $\forall\, v, w \in V$. $|g(v,w)| \le |v| \cdot |w|$, "=" $\Leftrightarrow$ $0, v, w$ 共线

② 三角不等式: $\forall\, v, w, u \in V$, $d(v,u) \le d(v,w) + d(w,u)$

等号成立当且仅当 $\exists\, \lambda \in [0,1]$, $w = \lambda v + (1-\lambda) u$.

(即 w 在 v, u 连成线段上).

← 不妨 $w \neq 0$.

证: ① 考虑 $0 \le Q(v - \lambda w) = |w|^2 \lambda^2 - 2 g(v,w) \lambda + |v|^2$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ 判别式 $(2g(v,w))^2 - 4|w|^2 |v|^2 \le 0$. "=" $\Rightarrow$ $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ $v = \lambda w$.

② 不妨 $w = 0$. 欲证 $d(v,u) \le |v| + |u|$

$\Leftrightarrow$ $|v-u|^2 \le (|v| + |u|)^2$

$\Leftrightarrow$ $|v|^2 + |u|^2 - 2g(v,u) \le |v|^2 + |u|^2 + 2|v||u|$.

$\Leftrightarrow$ $-g(v,u) \le |v||u|$ 即 Cauchy-Schwartz.

等号成立时 $0, v, u$ 共线 且 $g(v,u) \le 0$.

$\Rightarrow$ $\exists\, \lambda \in [0,1]$, s.t. $0 = \lambda v + (1-\lambda) u$. □

对 $v, w \in V$ 非零, 定义 $\theta(v,w) \in [0, \pi]$ 满足

$$\cos\theta(v,w) = \frac{g(v,w)}{|v||w|} \in [-1,1].$$

称之为 v, w 的夹角.

(回忆 $\mathbb{R}^2$ + 标准内积). 则 $v \perp w$ 时 $\theta(v,w) = \frac{\pi}{2}$.

$B(v_1, \cdots, v_n)$ 为 (V, g) 标准正交基 (orthonormal basis)

$\Leftrightarrow g(v_i, v_j) = \delta_{ij} \Leftrightarrow |v_i| = 1, \ v_i \perp v_j, \ \forall i \neq j.$

标准　　正交

下次 Gram-Schmidt，QR 分解.

(V, g) 内积空间，$(v_1, \cdots, v_n)$ 任一个基，可以以如下方式将之变为标准正交基：

(算法)

① $v_1 \xrightarrow[\text{换成}]{} \dfrac{v_1}{|v_1|}$　标准化 normalization.

② $v_2 \xrightarrow[\text{换成}]{} v_2 - g(v_1, v_2) v_1$　使 $v_1 \perp v_2$.

③ $v_2 \longrightarrow v_2 / |v_2|$

④ $v_3 \longrightarrow v_3 - g(v_1, v_3) v_1 - g(v_2, v_3) v_2$　使 $v_3 \perp v_1, v_3 \perp v_2$

$\cdots$