代数 1 H 班 作业 1

2022 年 9 月 15 日

题 1. 计算下列 S_6 中的元素的乘积。其中 $\sigma = \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\1,3,4,6,5,2\end{pmatrix}$ 和 $\tau = \begin{pmatrix}1,2,3,4,5,6\\6,5,4,3,2,1\end{pmatrix}$

1. $\sigma \cdot \tau$.

2. $\sigma \cdot \tau \cdot \sigma^{-1}$.

题 2. 列出 S_4 的所有子群，并指出哪些是正规子群。

题 3. 对一个群 G 中的任意元素 g, h，证明 $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$.

题 4. 试分类 $(\mathbb{Z}, +)$ 的所有子群。

题 5. 试构造同构 $f\colon \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

题 6. *Find $|D_n|$. Is dihedral group D_n abelian? Prove your claim.*

题 7. 取素数 p, 考虑群 $G = GL(n, \mathbb{F}_p)$. 考虑 G 的子集

1. B 是 G 中上三角矩阵的全体.

2. W 是每行每列有且仅有一个 1，其余位置是 0 的方阵全体. (请说明为什么 W 是 G 的子集)

3. H 是每行每列有且仅有一个位置非零，其余位置是 0 的方阵全体. (请说明为什么 D 是 G 的子集)

4. T 是 G 中的对角阵全体.

5. U 是 G 中对角线都是 1 的上三角矩阵全体.

6. D 是 G 中纯量矩阵全体，也就是形如 $\lambda I, \lambda \neq 0$ 的矩阵全体.

7. SL 是 G 中行列式等于 1 的矩阵全体.

请完成以下证明或者计算

1. 证明以上子集都是 G 的子群.

2. 判断这些子群和 G 本身是不是阿贝尔群.

3. 求这些子群和 G 的阶数.

4. 判断哪些子群是 G 的正规子群.

5. 对于有严格包含关系的子群，判断小的群是否是大的群的正规子群.

题 8. 对于上题中取 $p = 2, n = 2$. 判断 $GL(2, \mathbb{F}_2)$ 是否和 S_3 同构. 如果是，请写下一个同构映射.

题 9. *Let H be subgroup of group G.*

1. *Try to write down the definition of right H-cosets. Prove the number of left H-cosets is equal to the number of right H-cosets.*

2. *Prove the claim in class that H is normal if and only if $gH = Hg$ for all $g \in G$.*

3. *We define the number of left H-cosets as the index of H in G and denote by $[G : H]$, i.e. $[G : H] = |G/H|$. Prove that if $[G : H] = 2$, then H is normal.*

Preliminary: a set S with binary operation $m : S \times S \to S$ is a semi-group if m is associative.

题 10. *Let G be a set of $n \times n$ matrix whose rank are less than or equal r. Prove that G is a semi-group with multiplication of matrix.*

题 11. *Suppose G is a semi-group. Assume*
(1) G has left unit e, namely for any $a \in G$, $ea = a$.
(2) every element a of G has left inverse a^{-1} such that $a^{-1}a = e$.
Show that G is a group.

题 12. *Let* $G = \{(a, b)|a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$*. Define a binary operation of* G *as* $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$*. Prove that* G *is a group with this operation.*

题 13. *Let* G *be a finite group of even order (namely the number of elements of* G *is even). Prove that the number of solutions of equation* $x^2 = e$ *in* G *is also even.*

题 14. *Let* G *be a group, and* $a, b \in G$*. Suppose* $a^5 = e$ *and* $a^3 b = ba^3$*. Prove that* $ab = ba$*.*

题 15. *Prove that the real number with additive group law is isomorphic to the positive real number with multiplicative group law.*

题 16. *Let* G *be a finite group,* $H \subset G$ *a proper subgroup*（真子群）*. Show that the union of the conjugates of* H *in* G *is not all of* G*, that is,*

$$G \neq \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}.$$

注意，对于无穷群，上述等式可能成立.

1. ① $\sigma\tau = 134652$ 作反序操作

$= 256431$

② $\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

2. S_4 有30个子群:

order of subgroup		conjugacy classes
24	1个	S_4
12	1个	A_4
8	3个	<(1 2 3 4),(1 3)> <(1 2 4 3),(1 4)> <(1 3 2 4),(1 2)>
6	4个	<(1 2 3),(1 2)> <(1 2 4),(1 2)> <(1 3 4),(1 3)> <(2 3 4),(2 3)>
4	7个	<(1 2 3 4)> <(1 2 4 3)> <(1 3 2 4)>
		<(1 3),(2 4)> <(1 4),(2 3)> <(1 2),(3 4)>
		<(1 2)(3 4),(1 3)(2 4)>
3	4个	<(1 2 3)> <(1 2 4)> <(1 3 4)> <(2 3 4)>
2	9个	<(1 3)(2 4)> <(1 4)(2 3)> <(1 2)(3 4)>
		<(1 2)> <(1 3)> <(2 3)> <(1 4)> <(2 4)> <(3 4)>
1	1个	<e>

A_4	D_4	S_3
Z_4	V	V
Z_3	Z_2	Z_2

其中圈住的4个是 normal subgroup

3. 证明：
$$(h^{-1}g^{-1})(gh) = h^{-1}(g^{-1}g)h = h^{-1}eh = h^{-1}h = e$$
$$(gh)(h^{-1}g^{-1}) = g(hh^{-1})g^{-1} = g\cdot e g^{-1} = e$$
所以 $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$

4. 若 $H \subset \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的子群，且 $H \neq \{0\}$

则令 $m = \min\{|k| \mid k \in H \setminus \{0\}\}$

则 $m > 0$，且存在 $k \in H$，s.t $|k| = m$

则 $k = m$ 或 $-k = m$，均有 $m \in H$.

$\forall n \in H$，$n = qm + r$ $\quad 0 \leq r < m$. $q, r \in \mathbb{Z}$.

则 $r = n - qm \in H$.

又 $|r| < m$，由 m 的取法 $r = 0$，

$n = qm$，所以 $H = m\mathbb{Z}$，$m \in \mathbb{Z}_{>0}$，或者 $H = \{0\}$

5. 令 $f: \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$(\bar{a}, \bar{\bar{b}}) \mapsto \bar{\bar{\bar{c}}}$$

其 $c = -2a + 3b$.

⓪ 先验证 f "well-defined"

$\bar{a} = \bar{a'}$, 则 $3 \mid a - a'$, $6 \mid -2(a-a')$

$\bar{\bar{b}} = \bar{\bar{b'}}$, 则 $2 \mid b - b'$, $6 \mid 3(b-b')$

所以 $6 \mid (-2a+3b) - (-2a'+3b')$

① 由于

$f(0,0) = 0$ $\quad f(0,1) = 3$

$f(1,0) = 4$ $\quad f(1,1) = 1$

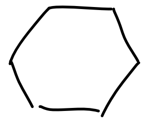
$f(2,0) = 2$ $\quad f(2,1) = 5$

f 是双射.

②
$$f((\bar{a}, \bar{\bar{b}}) + (\bar{c}, \bar{\bar{d}})) = f(\overline{a+c}, \overline{\overline{b+d}})$$
$$= \overline{\overline{\overline{-2(a+c)+3(b+d)}}} = \overline{\overline{\overline{-2a+3b}}} + \overline{\overline{\overline{-2c+3d}}}$$
$$= f((\bar{a}, \bar{\bar{b}})) + f((\bar{c}, \bar{\bar{d}}))$$

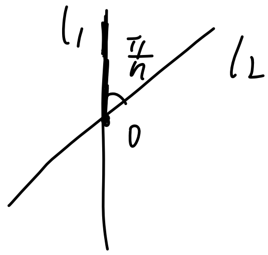
所以 f 是群同构.

6. $|D_n| = 2n$



n个旋转
n个反射.

$\boxed{n \geq 3}$ D_n 非 Abel



沿 l_1, l_2 的两个反射

g_1, g_2

$g_1 g_2$ = 绕 O 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{n}$

$g_2 g_1$ = 绕 O 顺时针旋转 $\frac{2\pi}{n}$

$g_1 g_2 \neq g_2 g_1$

$n=2$ D_n 也有定义: $D_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

7. 1. I 矩阵在每个子集中.

乘法封闭, 取逆封闭.

1. B　　A 上三角

对 $\left[\begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & * & & I \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_n & \end{array}\right]$ 作行变换.

从下面的行消去上面的行

则 $\left[I \quad A^{-1}\right]$ 　A^{-1} 是上三角.

A_i 上三角　$A_1 A_2 =$ 对 A_1 作列变换, 左边的列加到右边的列. 所以 $A_1 A_2$ 是上三角

2. $A \in W$.　则有 $\det A = \pm 1$

由行列式的乘法展开.

HW 1

8. $GL(2;\mathbb{F}_2) \simeq S_3$

由 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \to (1)$ $\quad$ $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix} \mapsto (13)$

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \mapsto (12)$ $\quad$ $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \mapsto (23)$

$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} \mapsto (123)$ $\quad$ $\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix} \mapsto (132)$ 给出

9. ① $Hg := \{hg \mid h \in H\}$ 称为右陪集

$$G/H \xrightarrow{\sim} H\backslash G$$

$$gH \longmapsto Hg^{-1}$$ 给出集合同构

② 若 H 正规 $\quad \forall\, g,h \quad ghg^{-1} \in H$

$\Rightarrow \quad gHg^{-1} \subseteq H$

由对称性 $\Rightarrow \quad g^{-1}Hg \subseteq H$

$\Rightarrow \quad gH = Hg$

若 $gH = Hg$ $\quad , \forall\, g \in G,\ h \in H$

$\exists\ h' \quad gh = h'g \quad \Rightarrow \quad ghg^{-1} = h' \in H$

即 H 正规子群

③ 若 $[G:H]=2$，任取 $g_0 \notin H$

$$G = H \sqcup g_0 H$$

对 $g \in H$， $ghg^{-1} \in H$ 成立

对 $g = g_0 h_1$ $ghg^{-1} = g_0 h_1 h h_1^{-1} g_0^{-1}$

若 $g_0 h_1 h h_1^{-1} g_0^{-1} = g_0 h_2$

$\Rightarrow$ $g_0 \in H$ 矛盾， 故 $ghg^{-1} \notin g_0 H$

$\Rightarrow ghg^{-1} \in H$

从而 H 是正规子群

10. • $\mathrm{rank}(AB) \le \mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)$

• 结合性来自矩阵乘法结合性

11.

$$a \cdot a^{-1} = [(a^{-1})^{-1} a^{-1}] \cdot a a^{-1}$$

$$= (a^{-1})^{-1} a^{-1} = e$$

$\Rightarrow a^{-1}$ 也是 a 的右逆

从而 $ae = a a^{-1} a = a$ $\Rightarrow e$ 是单位元

12. 直接验证

证：设 $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}$

注意到 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ad+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

可通过 $M \subseteq M_2(\mathbb{R})$ 的子群证明

得到 G 是群

13. 若 $x^2 \neq e \Rightarrow x^{-2} \neq e$ 且 $x \neq x^{-1}$

即 $x^2 \neq e$ 的解为偶数

G 偶数阶 $\Rightarrow x^2 = e$ 的解数为偶数

14. $b = a^5 b = a^2(a^3 b) = a^2 b a^3$

$ba^2 = a^2 b a^3 a^2 = a^2 b$

$\Rightarrow \quad ba^3 = a^3 b = a(a^2 b) = aba^2$

$\Rightarrow \quad ba = ab$

15. $(\mathbb{R}, +) \longmapsto (\mathbb{R}_{>0}, \times)$

$a \longmapsto e^a$

16. 考虑 若 $g = g_1 h_1$

$$\Rightarrow gHg^{-1} = g_1 h_1 H h_1^{-1} g_1^{-1}$$

$$= g_1 H g_1^{-1}$$

由取是陪集分解 $G = \bigsqcup_{i=1}^{[G:H]} g_i H$

$$\Rightarrow G = \bigcup_{i=1}^{[G:H]} g_i H g_i^{-1}$$

$$\Rightarrow |G| \leq [G:H] \cdot (|H| - 1) + 1$$

(考虑 $g_1 = e$ 是特殊情况)

$$= |G| - [G:H] + 1$$

$$< |G|$$

若 H 是 G 的真子群.