

# 线性代数 小测 1

2025 年 3 月 17 日

请写出每道题的解答过程.

题 1. 找到一个  $4 \times 3$  矩阵  $A$  使得  $A$  的列空间有基向量  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ , 行空间有基

向量  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

题 2. 设  $A$  是一个  $3 \times 3$  矩阵, 假设对于任意 3 维列向量  $x$ , 都有某个依赖于  $x$  的实数, 使得  $Ax = c(x)x$ . 证明  $A = cI_3$ .

题 3. 请写出一个  $3 \times 3$  矩阵  $A$ , 使得  $A$  的 *kernel* 是  $\text{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$ .

题 4. 设  $A$  是一个  $m \times n$  矩阵, 秩为  $r$ . 假设  $Ax = b$  对于某些右端  $b$  没有解, 而对于另一些右端  $b$  有无穷多解。

1. 决定  $A$  的零空间是否只包含零向量, 并说明原因.
2. 决定  $A$  的列空间是否是  $\mathbb{R}^m$ , 并说明原因.
3. 是否存在某个右端  $b$  使得  $Ax = b$  有且只有一个解? 为什么?
4. 找出  $r, m$  和  $n$  之间的大小关系.

题 5. 对  $n$  阶方阵  $A$ , 证明以下秩等式

$$\text{rank}(A + I) + \text{rank}(A - I) = \text{rank}(A^2 - I) + n.$$