

# 线性代数 作业 15

2025 年 5 月 9 日

题 1. 在 *Google PageRank* 算法中, 我们写下了一个  $n$  维向量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , 表示一个网页的权重。我们假设每个网页都有一个初始权重  $x_i$ , 并且第  $j$  个网页都有一个链到其他网页  $i$  的概率  $p_{ij}$ 。我们可以用一个  $n \times n$  的矩阵  $P = (p_{ij})$  来表示这个概率分布, 并且求解权重向量时, 写下了方程  $Px = x$ 。请证明  $P$  有特征值 1, 并且所有复特征值的绝对值小于等于 1。

题 2. 假设写出一个用极小多项式判定域  $F$  上的  $n$  阶方阵  $A$  是可上三角化的充分必要条件, 并证明。

题 3. 假设域  $F$  上的  $n$  阶方阵  $A$  是对角化的, 证明  $A^T$  也是可对角化的。请思考当  $A$  可以上三角化时,  $A^T$  是否也可以上三角化。

题 4. 假设域  $F$  上的  $n$  阶方阵  $A$  是对角化的,  $m$  阶方阵  $B$  也是可以对角化的, 证明  $F$  线性空间  $M_{n \times m}(F)$  上的线性变换  $T$ ,  $T(X) = AXB$  也是可对角化的。请找出  $T$  的 *determinant* 和 *trace* 与  $A$  和  $B$  的关系。请思考  $A$  和  $B$  可以上三角化时,  $T$  是否也可以上三角化。

题 5. 假设域  $F$  上的有限维线性空间有线性变换  $T$ , 和  $T$  的不变子空间  $W$ , 则  $T$  诱导了商空间上  $V/W$  上的线性变换  $\tilde{T}$ 。证明  $T$  的特征多项式等于  $T|_W$  和  $\tilde{T}$  的特征多项式的乘积。

题 6. 对域  $F$  上的  $n$  阶方阵  $A$ , 特征多项式  $\det(\lambda I - A) = \lambda^n + s_1 \lambda^{n-1} + \dots + s_n$  的展开系数  $s_k$  定义了函数  $S_k: M_n(F) \rightarrow F, A \mapsto s_k$ 。证明这些函数满足  $S_k(AB) = S_k(BA)$ 。请思考将域  $F$  换成任意交换环  $R$ , 这个结论是否成立。

题 7. 假设可交换的复方阵  $A$  和  $B$ , 满足  $B^n = 0$ 。证明  $A$  和  $A + B$  有相同的特征多项式。请思考将复数域换成任意域  $F$ , 这个结论是否成立。

题 8. 请验证  $R$ -模  $M$  中满足以下等式

1.  $0_R \cdot m = 0_M, \forall m \in M.$

2.  $-1 \cdot m = -m, \forall m \in M.$

3.  $r \cdot 0_M = 0_M, \forall r \in R.$

题 9. 请验证课上关于商模的构造的良定部分.