子空间: 定义: V 线性空间, $W \subset V$ 非空子集

① 加法封闭

② 数乘封闭.

可验证 W 继承 V 的运算作成线性空间.

$(0\cdot v = \vec{0}$, $(-1)v = -v)$ 保证了加法 0 和逆.

例子: $\{$上三角阵$\} \subset M_{n\times n}(\mathbb{R})$

① ker, $T: V \to W$ linear

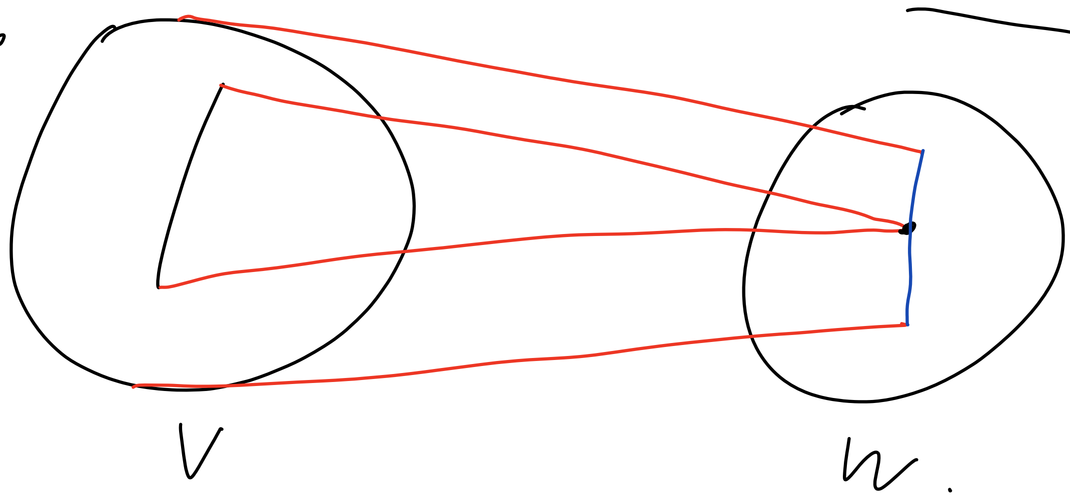
$$\ker T = \{v \mid T(v) = 0\}$$

② span. $\text{span}_{\mathbb{R}}\{v_i\}_{i\in I} = \{a_{i_1}v_{i_1} + \cdots + a_{i_n}v_{i_n}\}$

③ Image. $\operatorname{Im} T = \{T(v) \mid v \in V\} \subset W$ (子空间) 对T满.

维数守恒: $T: V \to W$. $\dim V = \underline{\dim \ker T} + \underline{\dim \operatorname{Im} T}$

$\dim V < \infty$



证明：取 $\ker T$ 的基，扩充为 V 的基（线性无关组扩充为极大组）

$v_1 \cdots v_k$，$v_{k+1} \cdots v_{k+r}$.

$$\mathrm{Im}\,T = \mathrm{span}\{T(v_1), \cdots, T(v_{k+r})\}$$

$$= \mathrm{span}\,\underline{\{T(v_{k+1}), \cdots, T(v_{k+r})\}}$$

只需验证 $T(v_{k+1}) \cdots T(v_{k+r})$ linearly independent.

定理：对任意 $(x_0, y_0), \cdots (x_n, y_n)$

$x_0, \cdots x_n$ 互不相同，存在多项式

$f(x)$，$\deg \le n$，s.t. $f(x_i) = y_i$

证明：$T: f \mapsto \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$，$\ker T = \{0\}$

<u>唯一性</u>：T 单射 $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

子空间的和与交

$W_1, W_2 \subset V$，W_1, W_2 子空间，则

$W_1 \cap W_2$ 是 V 的子空间．（$0 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \phi$ 运算封闭）

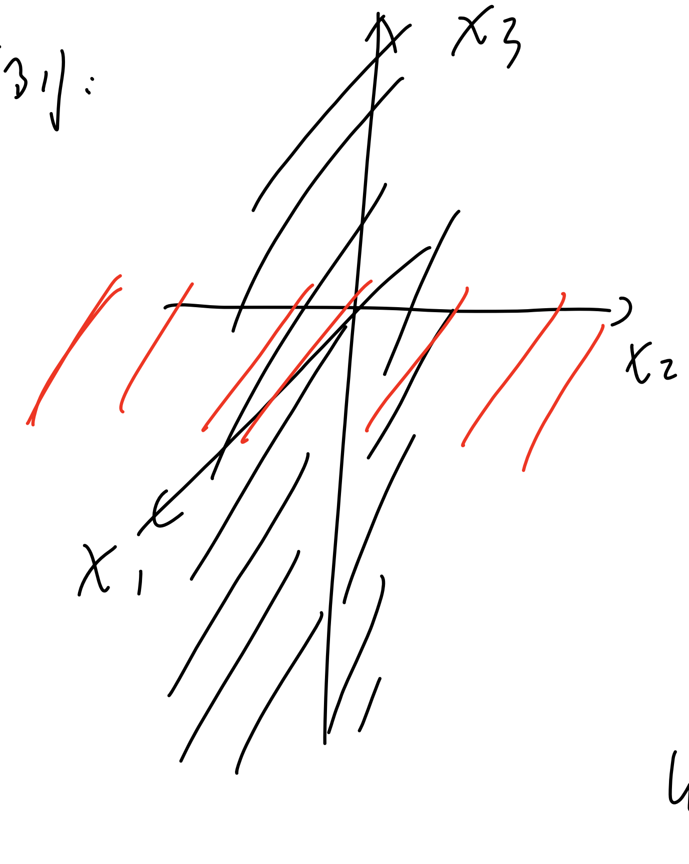
（和）

定义 $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_i \in W_i\}$ （$= \underline{\mathrm{span}(W_1 \cup W_2)}$）

验证 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间，且

注意 $W_1 \cup W_2$ 通常都不是子空间．

例：



$W_1 = \{x_2 = 0\}$

$W_2 = \{x_3 = 0\}$

$W_1 \cap W_2 = \{x_2 = x_3 = 0\}$

$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$

定理：

(维数公式：) $W_1 \subset V$, $W_2 \subset V$ 子空间，$\dim W_i < +\infty$，则

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

想法：基扩张成 W_1, W_2 基.

证明：

$W_1 \cap W_2$ 有基 $v_1 \cdots v_k$.

则 $v_1 \cdots v_k$ 线性无关.

$v_1 \cdots v_k$ 可添加 $u_1 \cdots u_l$ 扩充为 W_1 的一组基

添加 $w_1 \cdots w_m$ 扩充为 W_2 的一组基.

Claim: $v_1 \cdots v_k, u_1 \cdots u_l, w_1 \cdots w_m$ 是 $W_1 + W_2$ 的基.

①

$$W_1 = \operatorname{span}_R(v_1 \cdots v_k, u_1 \cdots u_l)$$

$$W_2 = \operatorname{span}_R(v_1 \cdots v_k, w_1 \cdots w_m)$$

$$W_1 + W_2 = \operatorname{span}_R(W_1 \cup W_2) = \operatorname{span}_R(v_1 \cdots v_k, u_1 \cdots u_l, w_1 \cdots w_m)$$

② 接下来线性无关性.

$$\underbrace{a_1v_1+\cdots+a_kv_k+b_1u_1+\cdots b_lu_l}_{=r_1\in W_1}+\underbrace{c_1w_1+\cdots c_mw_m}_{=r_2\in W_2}=0$$

则

$$r_1=-r_2\in W_1\cap W_2$$

$$\Rightarrow r_1=d_1v_1+\cdots+d_kv_k$$

$$\Rightarrow (a_1-d_1)v_1+\cdots+(a_k-d_k)v_k+b_1u_1+\cdots+b_lu_l=0$$

$$\Rightarrow b_i=0$$

$$\Rightarrow a_1v_1+\cdots+a_kv_k+c_1w_1+\cdots+c_mw_m=0$$

$$\Rightarrow a_i=0,\quad c_i=0$$

最容易错的数学式子 (MathOverflow 投票第一名)

维数没有容斥原理. (只在 W_1, W_2 两个时有)

$$\dim(W_1+W_2+W_3) \overset{\text{[illegible]}}{\neq} \dim(W_1)+\dim(W_2)+\dim(W_3)-\dim(W_1\cap W_2)-\dim(W_1\cap W_3)-\dim(W_1\cap W_3)+\dim(W_1\cap W_2\cap W_3)$$

引入了外直和 $\underline{V \oplus W}$. $(V\times W, +, \cdot)$

$V\oplus W$ 有子空间 $V'=\{(v,0) \mid v\in V\} \underset{\text{同构}}{\cong} V$

$$T: W_1\oplus W_2 \longrightarrow W_1+W_2, \quad \ker T \cong W_1\cap W_2$$

$$(w_1, w_2) \longmapsto w_1+w_2$$

$\underline{W_1\cap W_2=\{0\}\text{ 时}}$，$T$ 是同构.

定理：W_1，W_2 是 V 的子空间，$W_1\cap W_2=\{0\}$

则 T 是同构，$\underline{且}$ T 诱导 $W_1'\cong W_1$，

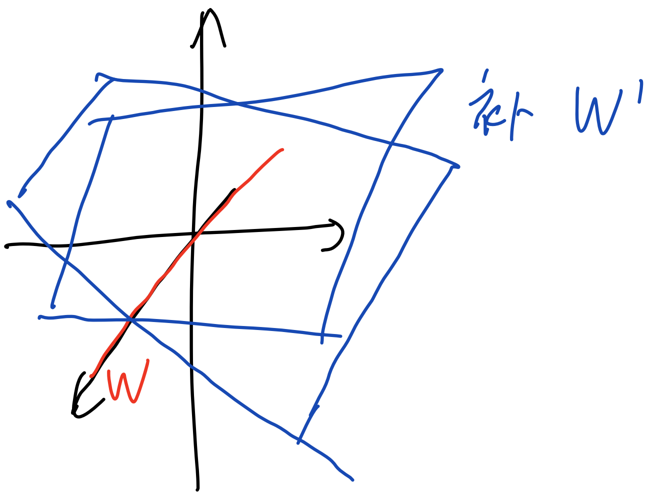
$W_2'\cong W_2$.

称 W_1+W_2 为内直和.（直和 $W_1\oplus W_2$）

如果 $W_1 \oplus W_2 = V$，称 W_2 是 W_1 的补空间.
(内)

性质：W 是 V 的子空间，W 的补空间存在

证明：取 W 的基，扩张...



考虑，$T: V \to W$.　$\ker T$ 有补空间 $(\ker T)'$

T 满射，则有 $T|_{(\ker T)'} : (\ker T)' \to W$ 同构.

$(\ker T)'$ 选择太多."不太好"

为什么？（找不到"自然"的补）

"自然" 考虑 V, W 有 $T: V \to W$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \cup & & \cup \\ V_1 & \longrightarrow & W_1 \end{array}$$

假设 $V_1 \subset V$, $W_1 \subset W$ 子空间.

$$T(V_1) \subset W_1$$

理想的 picture T 分成两部分

$T_1: V_1 \to W_1$ $\quad$ V_2 是 V_1 的补

$T_2: V_2 \to W_2$. $\quad$ W_2 是 W_1 的补

$$T|_{V_1} = T_1, \quad T|_{V_2} = T_2$$

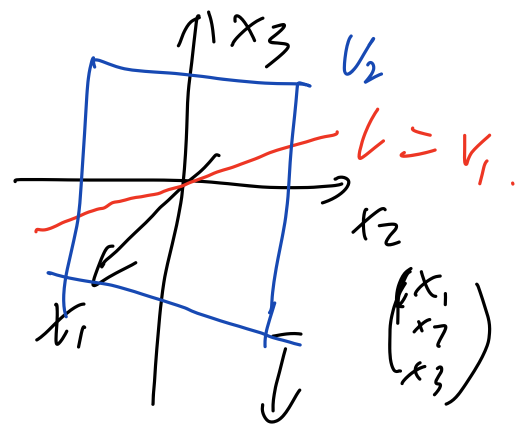
B_1, V_1 基 $\quad$ C_1, W_1 基

B_2, V_2 基. $\quad$ C_2, W_2 基

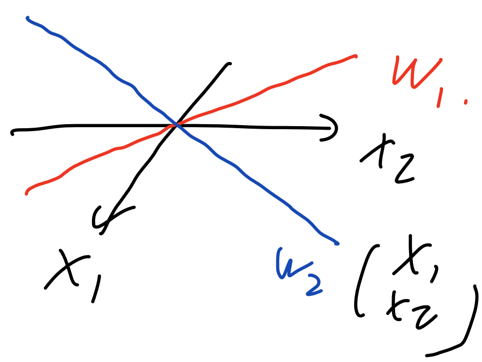
$$[T]_{(B_1,B_2)}^{(C_1,C_2)} = \left[\begin{array}{c|c} [T]_{B_1}^{C_1} & 0 \\ \hline 0 & [T]_{B_2}^{C_2} \end{array}\right]$$

能作到.（可以，但是 W_2 选取依赖于 V_2）

例如：$V = \mathbb{R}^3$



$W = \mathbb{R}^2$



W 中 W_2 的选取 <u>ｰ</u>依赖于 V 中 V_1 的补的选取.

Y vector space, $Y_1 \subset Y$.

$S : Y \to W$.

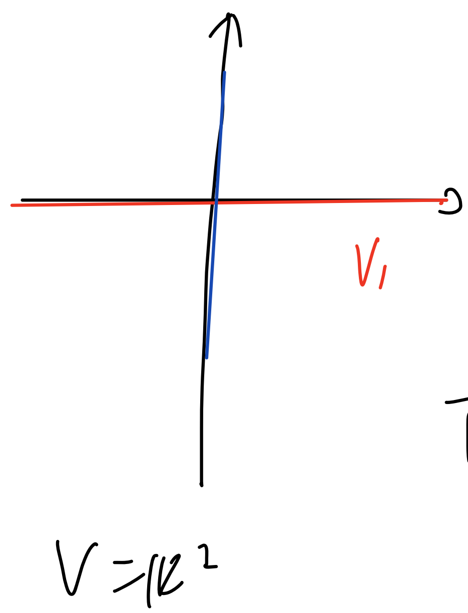
$S(V_1) \subset W_1$

“对就”不一致.

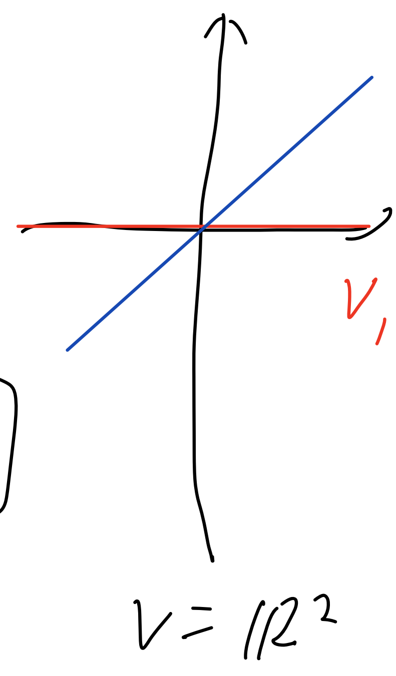
更需要 $\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ \cup & & \cup \\ V_1 & \longrightarrow & V_1 \end{array}$

能找到补 $(V_1)' \xrightarrow{T} (V_1)'$ 吗? (不一定)

例



$\longrightarrow$



$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

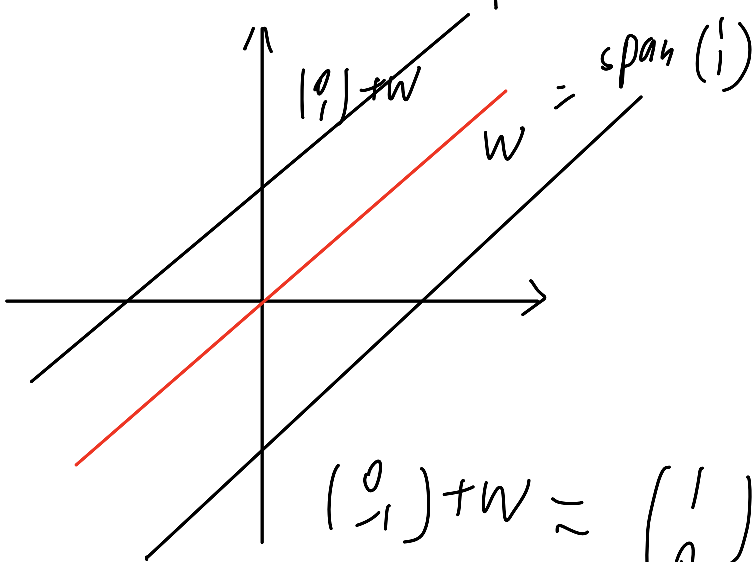
(没有基 β, $[T]_\beta^\beta$ 对角)

退而求其次, 定义商空间(“自然”)

定义: $W \subset V$ 子空间,

V/W 作为集合: 每一个元素是 V 的子集.

$v \in V$, $\underset{\sim}{v} + W = \{ v + w \mid w \in W \}$ 陪集



$\underline{\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + W = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + W}$

一样的 $v_1 + W$, $v_2 + W$

$v_1 \neq v_2$.

$\boxed{v_1 + W = v_2 + W \text{ 当且仅当 } v_1 - v_2 \in W.}$

定义 V/W 上 $(+, \cdot)$

$$\begin{cases} \underline{(v_1 + W)} + \underline{(v_2 + W)} = (v_1 + v_2) + W \\ c(v + W) = cv + W \end{cases}$$

"well-defined"　$\underline{v_1} + W = \underline{v_1'} + W$ 时, $(v_1 + v_2) + W$ 验证

$V_1 \subset V$ $\qquad\qquad\qquad\qquad = (V_1' + V_2) + W.$

性质: ① $V \xrightarrow{\pi} V/V_1$ $\quad$ π 满, 且 $\ker \pi = V_1$

$v \longmapsto v + V_1$

②
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ V/V_1 \arrow[ur, dashed, "T'"'] & \end{tikzcd}$$
, $\ker T \supset V_1$.

则存在唯一的 T' $(\exists!\, T')$

使得 $T = T' \circ \pi$

③
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] & W \\ V_1 \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, "T"] & W_1 \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow$ $V/V_1 \longrightarrow W/W_1$

之后: 证明: $T: V_{\mathbb{C}} \to V_{\mathbb{C}}$

存在 $V_{\mathbb{C}}$ 的基, $[T]_B^B$ 是上三角阵

$A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. $\exists P$ 可逆,

PAP^{-1} 上三角阵.