代数 0 R1 班 作业 9

2022 年 6 月 1 日

这次作业里所有矩阵不加说明都是实数矩阵.

1 基础题

本部分题必做.

题 1. 计算下列对称矩阵 A 的符号 (p, q, r):

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$;

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$;

3. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

题 2. 计算下列矩阵 A 的一个奇异值分解:

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

题 3. 判断题: 证明或举出反例.

1. n 阶方阵 A 为正交矩阵当且仅当它有 n 个奇异值, 值都是 1.

2. 如果 n 阶方阵有 n 个奇异值, 则所有奇异值的乘积等于所有特征值的乘积.

3. 假设 n 阶方阵 A 的奇异值分解为 $A = U\Sigma V^T$, 而 $A + I_n$ 的奇异值分解为 $A + I_n = U(\Sigma + I_n)V^T$, 则 A 是对称矩阵.

4. 如果 n 阶方阵 A 的 n 个奇异值就是它的 n 个特征值, 则 A 是对称矩阵.

题 4. 设实对称矩阵 A 满足 $A^5 = I_n$, 证明 $A = I_n$.

题 5. 设实对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$. 证明

- $Sx = \lambda x$ 当且仅当 $x = \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$, 满足 $Az = \lambda y, A^T y = \lambda z$.

- 如果 λ 是 S 的特征值, 则 $-\lambda$ 也是 S 的特征值.

- 如果 $\lambda \neq 0$ 是 S 的特征值, 则 λ^2 是 $A^T A$ 的特征值, 也是 AA^T 的特征值.

- AA^T 和 $A^T A$ 的非零特征值相同, 且有相同的重数.

2 思考题

本部分题选做, 不计成绩.

题 6. *你能用别的办法证明"符号不变"吗? (即符号不依赖基的选取.)*

Arthur Cayley 先生最初并不是用课上办法证明的, 他的方法是纯代数/矩阵论的.

这是最后一次作业了. 之前大家的作业都写的很好, 有些作业我们出太难了, 不用特别在意, 慢慢学总能明白那些东西. 当然也不是一定要去学那些理论 (表示论, Lie 理论, 代数几何 etc.) 对自己有信心, 找准自己要做的是最重要的.

祝期末考试顺利.