示范班代数 期中考试 2025 秋季

2025 年 10 月 28 日

题 1 (10 分)**.** 计算以下对称矩阵 A 的惯性指数 $(p, q, n-p-q)$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

题 2 (10 分)**.** 假设 V 是关于 x 的次数小于或等于 2 次的实系数多项式组成的实线性空间. 定义 V 上的对称双线性型为 $B(f,g) = \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x)\, dx$. 求 B 的符号, 如果正定请用 *Gram-Schmidt* 正交化和基 $1, x, x^2$ 求出一组标准正交基.

题 3 (15 分)**.** 证明 n 阶实方阵 A 是反对称的当且仅当对任意列向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 有 $\boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x} = 0$.

题 4 (15 分)**.** 假设实方阵 A 是 n 阶正交阵, 满足 $A^T A = I_n$, 且 $det(A) < 0$。证明 $det(I_n + A) = 0$。

题 5 (15 分)**.** 对可逆实方阵 A, 判断是否总存在满足如下条件的实方阵 B, C 使得 $A = BC$ (不需要证明):

1. B 下三角阵, C 上三角阵。
2. B 正交阵, C 上三角阵。
3. B 反对称, C 正交阵。
4. B 对称, C 正交阵。
5. $B = C$。

题 6 (15 分)**.** 在 $\mathbb{R}^n$ 中，记标准内积下的向量 v 的长度为 $||v||$. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$。

(a) 对向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$, 问 $\frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}$ 的最大可能值和最小可能值是多少。

(b) 求使得 $\frac{||A\mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||}$ 取到最大可能值的一个向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \backslash \{\mathbf{0}\}$。

题 7 (20 分)**.** 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -1 & 5 & -1 \end{bmatrix}$。求一个奇异值分解 $A = UDV$, 使得 U 为 2 阶正交矩阵，V 为 3 阶正交矩阵，$D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}$, 其中 $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$。

以下为附加题:

题 8 (附加题 20 分)**.** 设 A, B 为正定 n 阶实对称方阵，证明

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B).$$