

# 线性代数 作业 2

2025 年 2 月 20 日

这次作业里所有矩阵不加说明都是实数矩阵.

## 1 基础题

本部分题必做.

题 1. 把下列矩阵化为最简行阶梯型: (默认空格处为 0)

1. 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

2. 
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

3. 
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

**题 2.** 考虑一个连通无向无圈无多重边的有限图  $G$ . 假设  $V$  是顶点的集合, 其中只有一条边相连的顶点称为边界点, 有多条边相连的顶点称为内部点. 假设内部点和边界点的集合都非空. 对每一个顶点  $i$  取一个温度  $T_i \in \mathbb{R}$ , 称  $T = (T_i)_{i \in V}$  是一个图上的温度分布. 如果每一个内部点的温度等于与之相连的点的温度的平均值, 则称这一分布称为稳定的. 证明: 对于每一组边界点的温度值, 存在唯一的内部点的温度取值, 使得这一温度分布是稳定的.

**题 3.** 将下列问题转化为求解线性方程组的问题, 并求解:

1. 设  $2 \times 2$  矩阵  $A$  满足  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$  且  $A$  的第一列元素之和为 2, 求所有可能的  $A$ .

2. 空间中有一个平面经过点  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 求所有与该平面垂直的向量.

3. 写出通过 5 点  $M_1(0, 1), M_2(2, 0), M_3(-2, 0), M_4(1, -1), M_5(-1, -1)$  的二次曲线的方程. 这里二次曲线是  $xy$ -平面上形如  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  的方程决定的曲线.

**题 4.** 若  $A, C$  均为  $m \times n$  矩阵, 如果对任何  $b$ , 线性方程组  $Ax = b$  与  $Cx = b$  都有相同的解集, 是否一定有  $A = C$ ?

## 2 思考题

本部分题选做, 不计成绩。

**题 5.** 课上我们研究过  $G(m, n)$  的分解中  $\mathbb{R}^i$  的个数, 记为  $b_i$ .

1. 求  $b_i$  的生成函数  $\sum_i b_i t^i$ .

2. 验证  $b_i = b_{m(n-m)-i}$ .

3. 任取一组正实数  $m, n$ , 验证  $b_i$  是单峰的 (先单调递增后单调递减).

**题 6.** 若  $A, A'$  均为  $m \times n$  矩阵,  $b, b'$  为  $m$  维向量, 方程  $Ax = b$  与  $A'x = b'$  的解集相同且非空, 请思考  $(A', b')$  是否一定可由  $(A, b)$  经过行变换得到, 你能对  $m = n = 2$  写出证明吗?