

# 线性代数 作业 9

2025 年 3 月 20 日

题 1. 假设  $l$  是二维平面上过原点的直线, 且  $l$  与横轴的夹角为  $\theta$ . 记  $T$  为以  $l$  为对称轴的反射. 求线性变换  $T$  在标准基下的矩阵. 假设另一条二维平面上过原点的直线  $l'$  与横轴的夹角为  $\alpha$ , 记  $T'$  为以  $l'$  为对称轴的反射. 利用线性变化与矩阵乘法的关系, 证明  $T \circ T'$  是绕原点旋转的线性变换.

题 2. 设  $T_i$  是  $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  上的线性变换, 定义为绕  $x_i$  轴旋转角度  $\pi$ . 请写下这三个变换在标准基下的矩阵并证明  $T_1 \circ T_2$  仍然是某个旋转变换.

题 3. 证明复数在通常的加法和实数的乘法下做成  $\mathbb{R}$  线性空间, 且有基  $B: 1, \sqrt{-1}$ . 对某一固定的复数  $u + v\sqrt{-1}$ . 定义  $T: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  为  $T(z) = u \cdot z$ . 证明  $T$  是  $\mathbb{C}$  上的  $\mathbb{R}$  线性变换并写出  $T$  在基  $B$  下的矩阵.

题 4. 找到一个  $\mathbb{R}^2$  上的线性变换将曲线  $C$

$$\{(x, y)^T \mid x^2 + 4xy + 10y^2 = 1\}$$

映射为半径为 1 的圆. 找到一个旋转变换将这个圆映射为长轴在  $x$  轴上的椭圆.

题 5. 对于  $\mathbb{R}^2$  上的线性变换  $T$ , 请找出  $\text{tr}(T^3)$  和  $\text{tr}(T^2), \text{tr}(T)$  之间的关系.