

子空间: 定义: V 线性空间, $W \subset V$ 非空子集

- ① 加法封闭
- ② 数乘封闭.

马念证 W 继承 V 的运算作成线性空间.

$(0 \cdot v = \vec{0}, (-1)v = -v)$ 保证了加法 0 和逆.

例子: $\{ \text{上三角阵} \} \subset M_{n \times n}(\mathbb{R})$

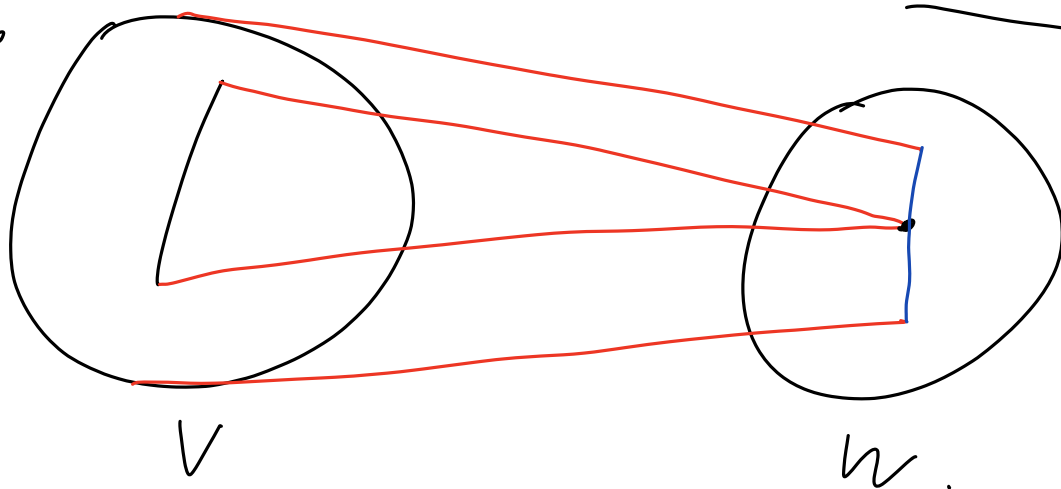
① \ker . $T: V \rightarrow W$ linear

$$\ker T = \{ v \mid T(v) = 0 \}$$

② span . $\text{span}_{\mathbb{R}} \{ v_i \}_{i \in I} = \{ a_{i_1} v_{i_1} + \dots + a_{i_k} v_{i_k} \}$

③ Image . $\text{Im } T = \{ T(v) \mid v \in V \} \subset W$ (子空间)
 $T(\vec{v}) = \vec{w}$

维数守恒: $T: V \rightarrow W$. $\dim V = \underbrace{\dim \ker T} + \underbrace{\dim \text{Im } T}$
 $\dim V < \infty$



证明: 取 $\ker T$ 的基, 扩充为 V 的基. (线性无关组扩充为极大组)
 $v_1, \dots, v_k, \quad v_{k+1}, \dots, v_{k+r}.$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} T &= \operatorname{span} \{ T(v_1), \dots, T(v_{k+r}) \} \\ &= \operatorname{span} \{ T(v_{k+1}), \dots, T(v_{k+r}) \} \end{aligned}$$

马金证 $T(v_{k+1}), \dots, T(v_{k+r})$ linearly independent.

定理: 对任意 $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$
 x_0, \dots, x_n 互不相同, 存在多项式
 $f(x), \deg \leq n$, s.t. $f(x_i) = y_i$

证明: $T: f \mapsto \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}, \ker T = \{0\}$

唯一性: T 单射 $\Leftrightarrow \ker T = \{0\}$

子空间的和与交.

$W_1, W_2 \subset V$, W_1, W_2 子空间. 则

$W_1 \cap W_2$ 是 V 的子空间. ($0 \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$)
运算封闭

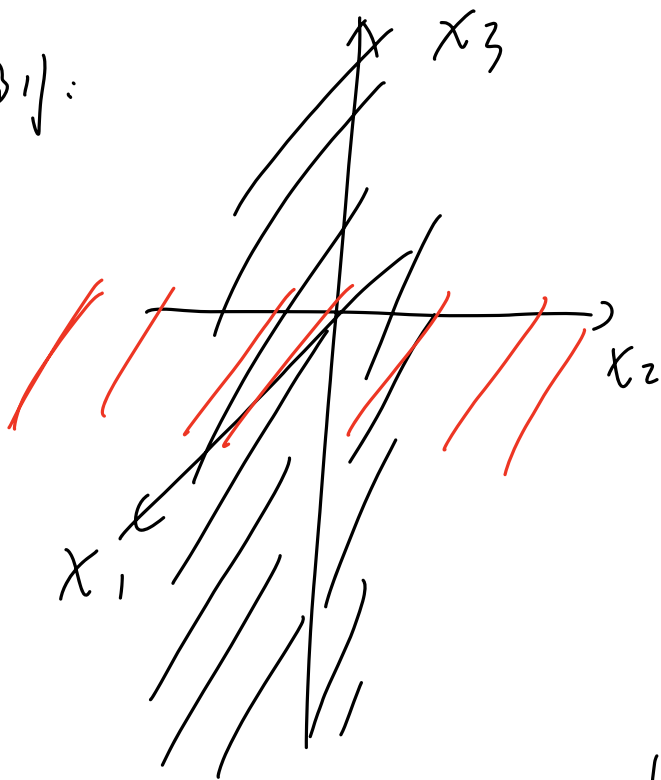
(和)

定义 $W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 \mid w_i \in W_i\}$ ($= \text{span}(W_1 \cup W_2)$)

马金证 $W_1 + W_2$ 是 V 的子空间. 且

注意 \downarrow $W_1 \cup W_2$ 通常
都不是子空间.

例:



$$W_1 = \{x_2 = 0\}$$

$$W_2 = \{x_3 = 0\}$$

$$W_1 \cap W_2 = \{x_2 = x_3 = 0\}$$

$$W_1 + W_2 = \mathbb{R}^3$$

定理:

(维数公式:) $W_1 \subset V, W_2 \subset V$ 子空间, $\dim W_i < \infty$. 则

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2$$

证明:

想法: 基扩张
成 W_1, W_2
基.

$W_1 \cap W_2$ 有基 v_1, \dots, v_k .

则 v_1, \dots, v_k 线性无关.

v_1, \dots, v_k 可添加 u_1, \dots, u_l 扩充为 W_1 的一组基
添加 w_1, \dots, w_m 扩充为 W_2 的一组基.

Claim: $v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_m$ 是
 $W_1 + W_2$ 的基.

$$\textcircled{1} \quad W_1 = \text{span}_R(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l)$$

$$W_2 = \text{span}_R(v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m)$$

$$W_1 + W_2 = \text{span}_R(W_1 \cup W_2) = \text{span}_R(v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_l, w_1, \dots, w_m)$$

② 接下来线性无关性.

$$\underbrace{a_1 v_1 + \dots + a_h v_h}_{= r_1 \in W_1} + \underbrace{b_1 u_1 + \dots + b_l u_l + c_1 w_1 + \dots + c_m w_m}_{= r_2 \in W_2} = 0$$

则

$$r_1 = -r_2 \in W_1 \cap W_2$$

$$\Rightarrow r_1 = d_1 v_1 + \dots + d_h v_h$$

$$\Rightarrow (a_1 - d_1) v_1 + \dots + (a_h - d_h) v_h + b_1 u_1 + \dots + b_l u_l = 0$$

$$\Rightarrow b_i = 0$$

$$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_h v_h + c_1 w_1 + \dots + c_m w_m = 0$$

$$\Rightarrow a_i = 0, \quad c_i = 0$$

最容易错的数学式子 (MathOverflow 投票第一名)

维数没有容斥原理. (只在 $W_1 \perp W_2$ 两个特例)

$$\dim(W_1 + W_2 + W_3) \stackrel{\text{例 4}}{=} \dim(W_1) + \dim(W_2) + \dim(W_3) - \dim(W_1 \cap W_2) - \dim(W_1 \cap W_3) - \dim(W_2 \cap W_3) + \dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$$

注意: $(W_1 + W_2) \cap W_3 \neq W_1 \cap W_3 + W_2 \cap W_3$

例 1: \mathbb{R}^2 . $W_1 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $W_2 = \text{span} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 $W_3 = \text{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

例 1 中 $W_1 \perp W_2$, 但不满足 $W_1 \perp W_3$.

§1. 外直和 $V \oplus W$. ($V \times W, +, \cdot$)

$V \oplus W$ 有子空间 $V' = \{(v, 0) \mid v \in V\} \cong V$

$$\begin{aligned} T: W_1 \oplus W_2 &\rightarrow W_1 + W_2, & \ker T &\cong W_1 \cap W_2 \\ (w_1, w_2) &\mapsto w_1 + w_2 \end{aligned}$$

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 时, T 是同构.

定理: W_1, W_2 是 V 的子空间, $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

则 T 是同构, 且 T 诱导 $W_1' \cong W_1$,

$$W_2' \cong W_2.$$

称 $W_1 + W_2$ 为内直和. (直和 $W_1 \oplus W_2$)

一般的:

线性数域律和外直和.

$$\begin{aligned} T: W_1 \oplus W_2 &\rightarrow V \\ (w_1, w_2) &\mapsto w_1 + w_2 \end{aligned}$$

$$\ker T = W_1 + W_2.$$

$$\text{ker } T = \{ (w, -w) \mid w \in W_1 \cap W_2 \}$$

$$\cong W_1 \cap W_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dim W_1 \cap W_2 + \dim (W_1 + W_2) \\ = \dim (W_1 \oplus_{\text{外}} W_2) = \\ \dim W_1 + \dim W_2 \end{aligned}$$

定义:

多个外直和 $W_1 \oplus_{\text{外}} \dots \oplus_{\text{外}} W_n = (W_1 \times \dots \times W_n, +$

内直和: $W_1 \oplus_{\text{外}} \dots \oplus_{\text{外}} W_n \rightarrow W_1 + \dots + W_n$ 是同构.)

等价于 $(W_1 \oplus \dots \oplus W_{n-1}) \oplus W_n$, 归纳定义.

等价于 $(W_1 + \dots + W_i) \cap W_{i+1} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n-1.$

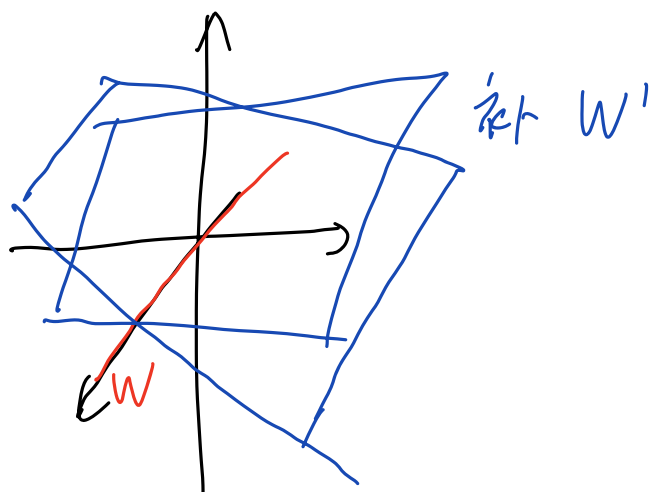
等价于 $W_j \cap W_1 + \dots + \widehat{W_j} + \dots + W_n = 0, \quad \forall j.$

(等价性练习)

如果 $W_1 \oplus W_2 = V$, 称 W_2 是 W_1 的
(内) 补空间.

性质: W 是 V 的子空间, W 的补空间存在

证明: 取 W 的基, 扩充...



考虑, $T: V \rightarrow W$. $\ker T$ 有补空间, $(\ker T)'$

T 满射, 则有 $T|_{(\ker T)'} : (\ker T)' \rightarrow W$
同构.

$(\ker T)'$ 选择太多, “不太好”

为什么? (找不到 "自然的补")

"自然" 考虑 V, W 有 $T: V \rightarrow W$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & W \\ \cup & & \cup \\ V_1 & \longrightarrow & W_1 \end{array}$$

假设 $V_1 \subset V, W_1 \subset W$ 子空间.

$$T(V_1) \subset W_1$$

理想的 picture T 分成两部分

$$T_1: V_1 \rightarrow W_1$$

V_2 是 V_1 的补

$$T_2: \underline{V_2} \rightarrow W_2.$$

W_2 是 W_1 的补

$$T|_{V_1} = T_1, \quad T|_{V_2} = T_2$$

B_1, V_1 基

C_1, W_1 基

B_2, V_2 基.

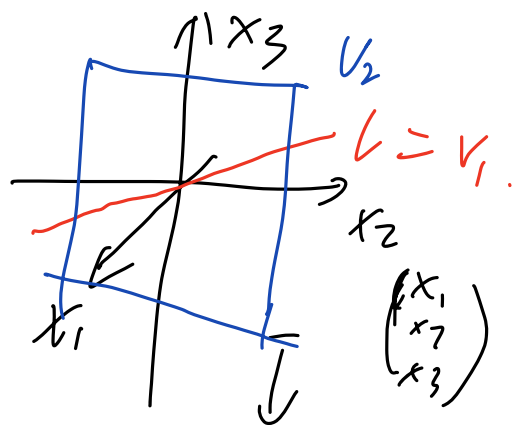
C_2, W_2 基

$$\begin{bmatrix} \bar{T} \end{bmatrix}_{(C_1, C_2)}^{(B_1, B_2)} = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} \bar{T} \end{bmatrix}_{B_1}^{C_1} & 0 \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} \bar{T} \end{bmatrix}_{B_2}^{C_2} \end{array} \right]$$

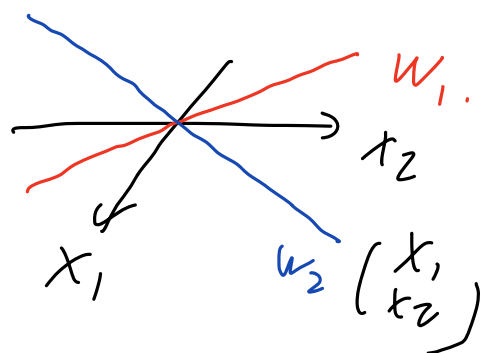
能作到. (可以, 但是 w_2 选取依赖于 V_2)

例如:

$$V = \mathbb{R}^3$$



$$W = \mathbb{R}^2$$



W 中 w_2 的选取“依赖于” V 中 V_1 的选取.

V vector space, $V_1 \subset V$.

$$S: V \rightarrow W.$$

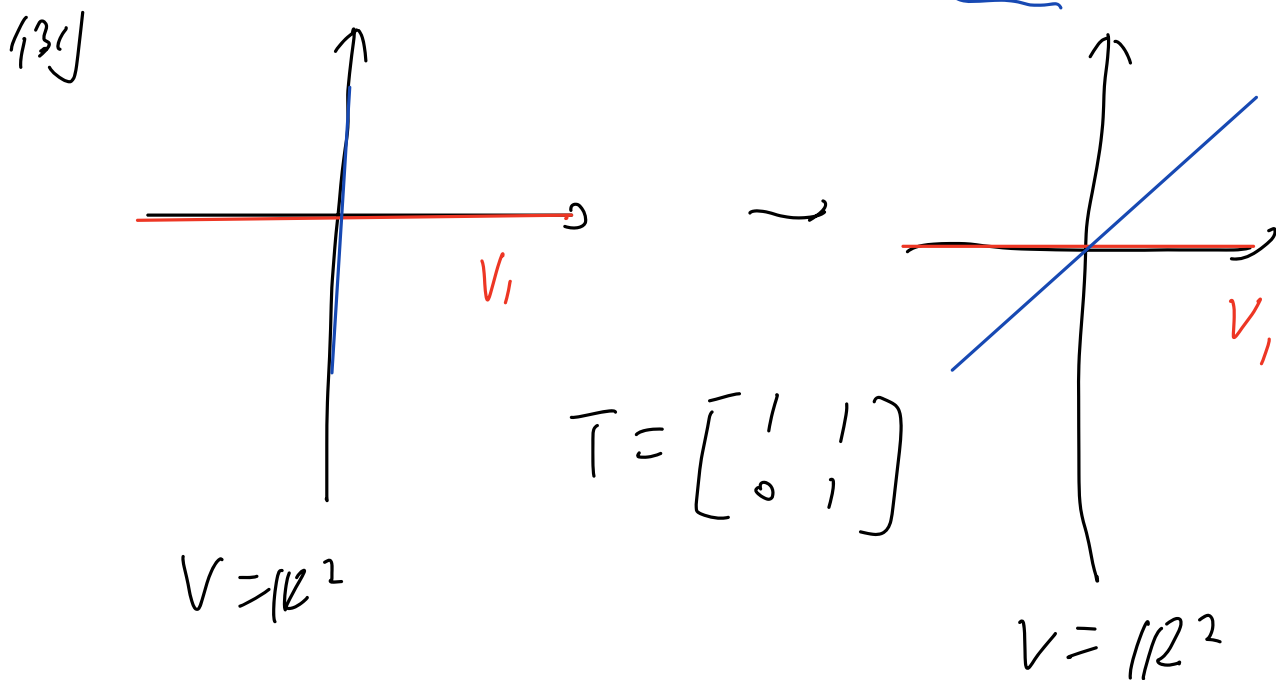
$$S(\gamma_1) \subset W_1$$

“迁就”不一致.

更需要

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V \\ U & & U \\ V_1 & \rightarrow & V_1 \end{array}$$

能找到补 $\underline{(V_1)'} \xrightarrow{T} \underline{(V_1)'} \text{ 吗? (不一定)}$



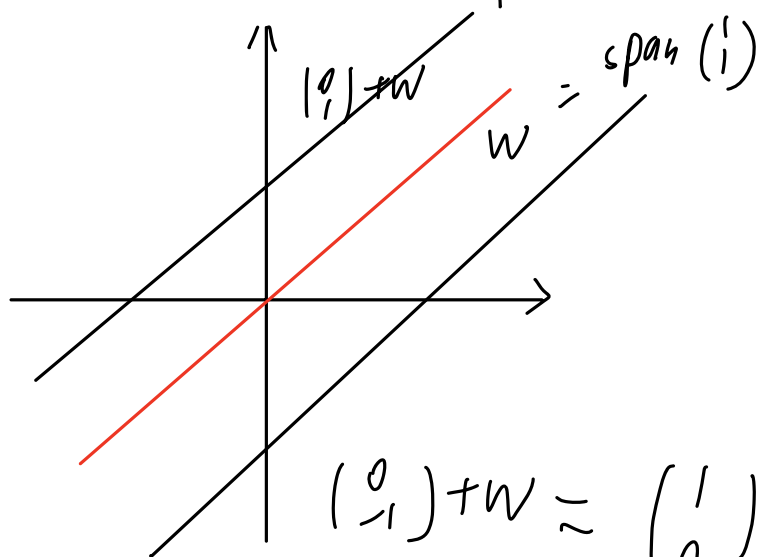
(没有基 β , $[T]_{\beta}^{\beta}$ 对角)

退而求其次, 定义商空间 (“自然”)

定义: $W \subset V$ 子空间,

V/W 作为集合: 每一个元素是 V 的子集.

$$v \in V, \quad \underline{v} + W = \{v + w \mid w \in W\} \text{ 陪集}$$



$$\underline{(0, 1)} + W = \underline{(1, 0)} + W$$

一样的 $v_1 + W, v_2 + W$
 $v_1 \neq v_2$.

$$\boxed{v_1 + W = v_2 + W \text{ 当且仅当 } v_1 - v_2 \in W.}$$

定义 V/W 上 $(+, \cdot)$

$$\begin{cases} \underline{(v_1 + W)} + \underline{(v_2 + W)} = \underline{(v_1 + v_2) + W} \\ c \underline{(v + W)} = \underline{cv + W} \end{cases}$$

"well-defined"

$\underline{v_1 + W} = \underline{v'_1 + W}$ 时, $\overset{\text{任意}}{(v_1 + v_2) + W}$

$$V_1 \subset V$$

$$= (V_1' + V_2) \cap W.$$

性质: ① $V \xrightarrow{\pi} V/V_1$
 $v \mapsto v + V_1$

π 满射, 且 $\ker \pi = V_1$

② $V \xrightarrow{T} W$
 $\pi \searrow \quad \nearrow T'$
 V/V_1

$\ker T \supset V_1$

则存在唯一的 T' ($\exists! T'$)

使得 $T = T' \circ \pi$

③ $V \xrightarrow{T} W$
 $\downarrow \quad \downarrow$
 $U \xrightarrow{T} U$
 $V_1 \xrightarrow{T} W_1$

$\approx \underline{V/V_1 \rightarrow W/W_1}$

④ $V \xrightarrow{T} W$

(同态基本
定理)

$V \longrightarrow \text{Im } T$
 $\searrow \quad \nearrow T'$
 $V/\ker T$

$T': V/\ker T \rightarrow \text{Im } T$
 线性同构.

推论 $\Rightarrow \dim \text{Im } T + \dim \ker T = \dim V$
 守恒律.

之后: 证明: $T: V_{\mathbb{C}} \rightarrow V_{\mathbb{C}}$

存在 $V_{\mathbb{C}}$ 的基, $[T]_{\mathcal{B}}$ 是上三角阵

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$. $\exists P$ 可逆.

$PA P^{-1}$ 上三角阵.