

第二节课习题

高翔

2021 年 9 月 8 日

1 习题说明

- 第 i 节课习题所有材料打包在 $L_i.zip$ 中, $\forall i = 1 \dots 8$ 。
- 习题分为若干种: **计算类**习题, 需要读者编程计算一个实际问题, 我们会附有参考答案以供自测。**操作类**习题, 会指导读者做一个具体的实验, 给出中间步骤截图或结果。**简述类**习题则提供阅读材料, 需要读者阅读材料后, 回答若干问题。
- 每个习题会有一定的分值。每次习题分值加和为 10 分。你需要获得 8 分以上才能得到“通过”的评价。带 * 的习题为附加题, 会在总分之外再提供一定的分值, 所以总和可能超过 10 分。换句话说, 你也可以选择一道附加题, 跳过一道正常题。
- 每道习题的给分由助教评判, 简述类习题可能存在一定开放性, 所以评分也存在主观因素。
- 请利用深蓝学院系统提交习题。每次习题我们会记通过与否。提交形式为 word 或 pdf 格式报告, 如有编程习题请提交可编译的源码。
- 为方便读者, 我通常会准备一些阅读材料, 放在 books/或 papers/目录下。请读者按个人需求使用这些材料。它们多数是从网络下载的, 如果侵犯到你的权利, 请及时告诉我。
- 每个习题会标注大致用时, 但视同学个人水平可能会有出入。
- 习题的完成情况会影响你对本课程内容的掌握程度, 请认真、独立完成。**习题总得分较高的同学将获得推荐资格。**

备注:

- 本习题内容更新于 2021 年 9 月。考虑到大家的知识水平增加, 本次更新增加了一些作业内容和难度。

2 熟悉 Eigen 矩阵运算 (2 分, 约 2 小时)

Eigen (<http://eigen.tuxfamily.org>) 是常用的 C++ 矩阵运算库, 具有很高的运算效率。大部分需要在 C++ 中使用矩阵运算的库, 都会选用 Eigen 作为基本代数库, 例如 Google Tensorflow, Google Ceres, GTSAM 等。本次习题, 你需要使用 Eigen 库, 编写程序, 求解一个线性方程组。为此, 你需要先了解一些有关线性方程组数值解法的原理。

设线性方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 在 \mathbf{A} 为方阵的前提下, 请回答以下问题:

1. 在什么条件下, \mathbf{x} 有解且唯一?
2. 高斯消元法的原理是什么?
3. QR 分解的原理是什么?
4. Cholesky 分解的原理是什么?
5. 编程实现 \mathbf{A} 为 100×100 随机矩阵时, 用 QR 和 Cholesky 分解求 \mathbf{x} 的程序。你可以参考本次课用到的 useEigen 例程。

提示: 你可能需要参考相关的数学书籍或文章。请善用搜索引擎。Eigen 固定大小矩阵最大支持到 50, 所以你会用到动态大小的矩阵。

3 矩阵论基础 (2 分, 约 2 小时)

除了我们本科学过的基础线性代数之外, 大部分研究生课程还会开设矩阵论课程, 以作为对本科阶段知识的扩充。对于很多线性问题 (SLAM 里也会碰到许多线性问题), 了解一些矩阵论基础知识是很有好处的。我们在附件中为大家提供了张贤达老师的《矩阵分析与应用》。请参考该书内容 (或者你能找到的其他书籍), 回答以下问题。

1. 什么是正定矩阵和半正定矩阵?
2. 对于方阵 \mathbf{A} , 它的特征值是什么? 特征向量是什么? 特征值一定是实数吗? 如何计算一个矩阵的特征值?
3. 什么是矩阵的相似性? 相似性反映了什么几何意义?
4. 矩阵一定能对角化吗? 什么样的矩阵能保证对角化? 不能对角化的矩阵能够形成什么样的形式 (Jordan 标准形)?
5. 奇异值分解 (SVD) 是什么意思?
6. 矩阵的伪逆是什么意思 (Pseudo inverse)? 莫尔——彭多斯逆是如何定义的? 怎么计算一个矩阵的伪逆?
7. 对于超定方程: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 且 \mathbf{A} 不可逆时, 我们通常计算最小二乘解: $\mathbf{x} = \arg \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$ 。线性方程的最小二乘解在代数意义上是可以解析地写出来的。请回答以下小问题:
 - (a) 在 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 时, \mathbf{x} 的解是什么形式? 事实上, 我们可以对 \mathbf{A} 求奇异值或对于 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 求特征值。请阐述两者之间的关系。
 - (b) 当 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ 时, 我们希望求 \mathbf{x} 的非零解。请说明如何求解 \mathbf{x} 。
 - (c) 请谈谈你对上述解法在几何意义上的理解。该问题为开放问题。

4 几何运算练习 (2 分, 约 1 小时)

下面我们来练习如何使用 Eigen/Geometry 计算一个具体的例子。

一个机器人上通常会安装许多不同的传感器, 而且这些传感器之间还存在固连关系。我们举一个典型的例子。

在世界系 W 下, 存在一个运动的机器人 R 。按照固定的或者某些开发人员或者领导的特殊喜好, R 系定义在机器人脚部的位置。但是机器人在设计的时候, 又定义了 B 系 (Body 系, 或本体系), 位于机器人头部的位置。由于沟通不畅, 标定人员把一台激光传感器和一台视觉传感器标定在了 B 系下。我们称激光传感器为 L 系, 视觉传感器为 C 系。现在请你完成以下工作:

1. 说明一个激光传感器下的看到的点应该如何计算它的世界坐标。
2. 取: $\mathbf{q}_{WR} = [0.55, 0.3, 0.2, 0.2]$, $\mathbf{t}_{WR} = [0.1, 0.2, 0.3]^T$, $\mathbf{q}_{RB} = [0.99, 0, 0, 0.01]$, $\mathbf{t}_{RB} = [0.05, 0, 0.5]^T$, $\mathbf{q}_{BL} = [0.3, 0.5, 0, 20.1]$, $\mathbf{t}_{BL} = [0.4, 0, 0.5]^T$, $\mathbf{q}_{BC} = [0.8, 0.2, 0.1, 0.1]$, $\mathbf{t}_{BC} = [0.5, 0.1, 0.5]^T$ 。现在假设相机传感器观察到自身坐标系下的点 $[0.3, 0.2, 1.2]$, 请计算:
 - (a) 这个点在激光系下的坐标;
 - (b) 这个点在世界系下的坐标。

提示:

1. 本题的数据是随意取的, 没有真实意义, 产生什么结果都不要奇怪。
2. 四元数在使用前需要归一化。
3. 请注意 Eigen 在使用四元数时的虚部和实部顺序。

5 旋转的表达 (2 分, 约 1 小时)

课程中提到了旋转可以用旋转矩阵、旋转向量与四元数表达, 其中旋转矩阵与四元数是日常应用中常见的表达方式。请根据课件知识, 完成下述内容的证明。

1. 设有旋转矩阵 \mathbf{R} , 证明 $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$ 且 $\det \mathbf{R} = +1$ ¹。
2. 设有四元数 \mathbf{q} , 我们把虚部记为 $\boldsymbol{\varepsilon}$, 实部记为 η , 那么 $\mathbf{q} = (\boldsymbol{\varepsilon}, \eta)$ 。请说明 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 η 的维度。
3. 定义运算 $+$ 和 \oplus 为:

$$\mathbf{q}^+ = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}^\times & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^T & \eta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^\oplus = \begin{bmatrix} \eta \mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon}^\times & \boldsymbol{\varepsilon} \\ -\boldsymbol{\varepsilon}^T & \eta \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中运算 \times 含义与 \wedge 相同, 即取 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的反对称矩阵 (它们都成叉积的矩阵运算形式), $\mathbf{1}$ 为单位矩阵。请证明对任意单位四元数 $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$, 四元数乘法可写成矩阵乘法:

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_1^+ \mathbf{q}_2 \quad (2)$$

或者

$$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2^\oplus \mathbf{q}_1. \quad (3)$$

¹若行列式为-1, 通常称为瑕旋转 (improper rotation, 对应物理当中旋转 + 镜像)。 $\det \mathbf{R} = +1$ 主要由定义给出。

6 罗德里格斯公式的证明 (1 分, 约 1 小时)

罗德里格斯公式描述了从旋转向量到旋转矩阵的转换关系。设旋转向量长度为 θ , 方向为 \mathbf{n} , 那么旋转矩阵 \mathbf{R} 为:

$$\mathbf{R} = \cos \theta \mathbf{I} + (1 - \cos \theta) \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \sin \theta \mathbf{n}^\wedge. \quad (4)$$

1. 我们在课程中仅指出了该式成立, 但没有给出证明。请你证明此式。提示: 参考 https://en.wikipedia.org/wiki/Rodrigues%27_rotation_formula。
2. 请使用此式证明 $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ 。

7 四元数运算性质的验证 (1 分, 约 1 小时)

课程中介绍了单位四元数可以表达旋转。其中, 在谈论用四元数 q 旋转点 p 时, 结果为:

$$p' = qpq^{-1}. \quad (5)$$

我们说, 此时 p' 必定为虚四元数 (实部为零)。请你验证上述说法。

此外, 上式亦可写成矩阵运算: $p' = Qp$ 。请根据你的推导, 给出矩阵 Q 。注意此时 p 和 p' 都是四元数形式的变量, 所以 Q 为 4×4 的矩阵。

提示: 如果使用第 4 题结果, 那么有:

$$\begin{aligned} p' &= qpq^{-1} = q^+p^+q^{-1} \\ &= q^+q^{-1\oplus}p. \end{aligned} \quad (6)$$

从而可以导出四元数至旋转矩阵的转换方式:

$$R = \text{Im}(q^+q^{-1\oplus}). \quad (7)$$

其中 Im 指取出虚部的内容。

8 * 熟悉 C++11 (2 分, 约 1 小时)

请注意本题为附加题。

C++ 是一门古老的语言, 但它的标准至今仍在不断发展。在 2011 年、2014 年和 2017 年, C++ 的标准又进行了更新, 被称为 C++11, C++14, C++17。其中, C++11 标准是最重要的一次更新, 让 C++ 发生了重要的改变, 也使得近年来的 C++ 程序与你在课本上 (比如谭浩强) 学到的 C++ 程序有很大的不同。你甚至会惊叹这是一种全新的语言。C++14 和 C++17 则是对 11 标准的完善与扩充。

越来越多的程序开始使用 11 标准, 它也会让你在写程序时更加得心应手。本题中, 你将学习一些 11 标准下的新语法。请参考本次作业 books/目录下的两个 pdf, 并回答下面的问题。

设有类 A, 并有 A 类的一组对象, 组成了一个 vector。现在希望对这个 vector 进行排序, 但排序的方式由 A.index 成员大小定义。那么, 在 C++11 的语法下, 程序写成:

```
1 #include <iostream>
2 #include <vector>
3 #include <algorithm>
4
5 using namespace std;
6
7 class A {
8 public:
9     A(const int& i) : index(i) {}
10    int index = 0;
11 };
12
13 int main() {
14     A a1(3), a2(5), a3(9);
15     vector<A> avec{a1, a2, a3};
16     std::sort(avec.begin(), avec.end(), [](const A&a1, const A&a2) {return a1.index<a2.index;});
17     for ( auto& a: avec ) cout<<a.index<<" ";
18     cout<<endl;
19     return 0;
20 }
```

请说明该程序中哪些地方用到了 C++11 标准的内容。提示: 请关注范围 for 循环、自动类型推导、lambda 表达式等内容。