

逢山开路的数学模型

孙长银 杨 峤 黄 琼
(数学系) (四川大学)

摘 要 在修建公路中,线路设计是首要的问题,对于具体的地形和必经之点,要做出最合理的工程成本最低的线路,是一个重要问题.本文用拉格朗日二元三点插值进行数据处理.以此为基础建立了两个模型:①用等高线方法,依着路线的总体方向,用解析法和目估法画出直观的路线(包括一般路段、桥梁、隧道).②用深度搜索法,在每一格点自动确定下一方向,然后利用函数的递归调用,给出一条路线.

关键词 插值; 控制点; 深度搜索

中国图书分类号 O 29:U4

1 问题的提出

在山区修建公路,每距 400 米的高度数据如下所示:

3010	3098	3005	3002	3010	2998	2999	3010	3015	3011	3009	3006	3009	2999	3020
2960	2967	2962	3970	2965	2950	2953	2942	2949	2957	2972	2969	2970	2982	2952
2920	2922	2912	2922	2921	2940	3941	2912	2922	2930	3922	3941	3947	2991	2962
2890	2900	2890	2892	2995	2898	2896	2900	2901	3903	3909	3897	3910	2914	2900
3548	3612	3541	3612	3523	3620	3612	3560	3510	3512	3549	3501	3528	3671	3562
2310	2362	2900	3100	3400	2243	3310	2322	2310	2320	2322	2330	2338	2308	2418
2271	2278	2269	2281	2285	2290	2283	2291	2272	2269	2281	2279	2260	2242	2272
2245	2241	2250	2252	2249	2248	3106	2210	2243	2236	2235	2200	2150	2238	2240
2220	2218	2215	2223	2210	2248	2198	1948	2006	1999	2010	2050	2096	2210	2212
2195	2190	2200	2195	2196	2190	2145	2100	1900	1958	2000	2043	2086	2180	2190
2160	2148	2172	2200	2148	2152	2135	2105	2000	1910	2050	2100	2140	2148	2158
2156	2110	2120	2110	2128	2208	2100	2110	2090	1999	1820	2013	2110	2102	2130
2100	2062	2090	2095	2083	2100	2090	2080	2050	2041	1998	1801	2007	2079	2082

$0 \leq x \leq 5600, 0 \leq y \leq 4800$ (单位米,下同),在这区域内有一东西走向山峰,和西北-东南走向的山谷,且在雨季,在山谷形成一溪流,雨量最大时溪流宽度近似为

$$W(x) = \left(\frac{x - 2400}{2} \right)^3.$$

要求公路起点为山脚(0,800)经居民点(4000,2000)至矿区(2000,4000),路段工程成本要求一般路段为 150 元/米,桥梁为 5000 元/米,隧道 30000 元/米;路段坡度 $0 \leq \alpha < 0.125$. 在给出的这些条件下,解决以下问题.

(1) 给出一路线路设计方案,包括原理方法及比较精确的线路位置(含桥梁、隧道),并估算该方案的总成本.

(2) 居民点改为($3600 \leq x \leq 4000, 2000 \leq y \leq 4000$)的居民区,公路只须经过居民区即可,(1)所得方案的改变.

2 问题的假设

1. 公路的等级低于中级以下.

- 2. 桥梁总是高于水位 .
- 3. 溪流两岸为直线,最深处也为直线 .

直线方程

$$\begin{cases} y = (4455 - x) \frac{2400}{2455} \\ y = (4355 - x) \frac{2400}{2345} \\ y = -x + 4800 \end{cases} \quad (2000 \leq x \leq 4000)$$

- 4. 山形平坦,舒缓,山体连续性较好 .

5. 定义及名词约定

主要控制点——山脚 A,居民点 B,矿区 C;

控制点——路线必经之点(A,a',b',c',⋯,C);

导向线——示出路线将行经的部位连接 A a' b' ⋯ C 的折线;

线路总方向——A - B - C;

S——路线;

H——等高线间距(米);

h——每一步跃迁的高度;

α——坡度;

α_均——平均坡度;

Δ——相邻控制点距离;

P——总成本;

τ——等高线平距(米);

F——点集合;

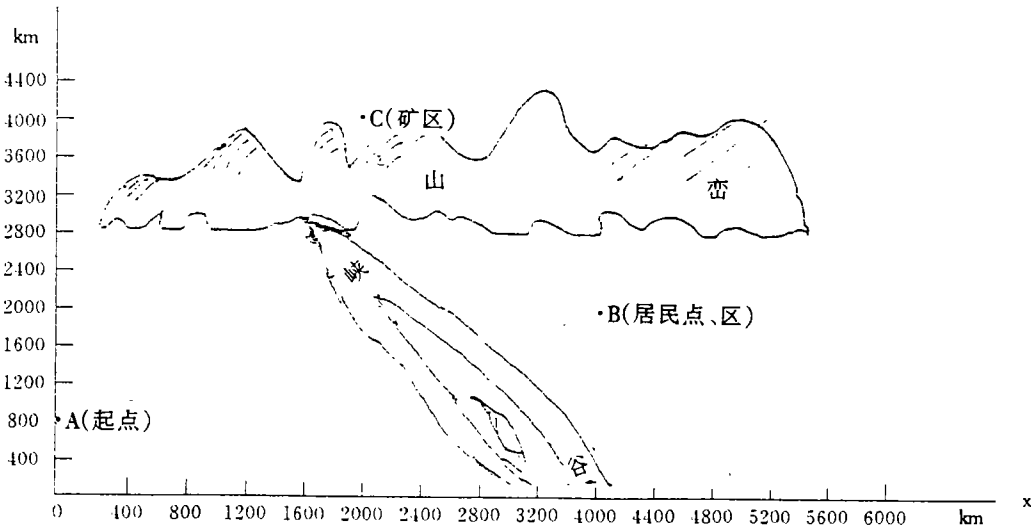
3 问题的分析

公路工程中的线路分析,就是两个控制点尽量找出直接并且起伏较小的直线.根据地形,桥梁一般应放在溪流较窄处,并且与溪流正交.对于中小型桥梁可以以桥就路,公路不能穿行谷底,以防洪水冲毁,公路转弯半径不宜过大.

本题实质上是一个优化问题,就是在满足坡度限制的条件下,尽量减少总成本,它有两个相互制约的因素,即线路总长和单位线段成本.

因为所给坐标点间距较大,数据粗糙,为了得到较精确的地形,需要对数据进行处理,一般采用多项式回归和二次响应面回归来拟合,但由于山形复杂(山峰,山谷)高度差极大,拟合的效果极差,因为山体有一定的连续性,我们采用了拉格朗日二元三点插值,兼顾了地形的连续性和多样性.地形略图如下所示.

由拉格朗日插值公式算法程序算出的间距 50 米的高度值得到的地形模拟图(略).



地形略图

对于一般的线路设计大都采用直接定线,即依靠经验将控制点加密,进而做出线路,但主观因素太强,可依赖程度不高,我们用计算机建立了模型A和模型B.

4 模型的建立

模型A

等高线勾绘,一般采用解析法、图表法和目估法,解析法是从起点开始按照 t 和坡度 α :

$$at \leq h \leq amax(\cos\alpha + \sin\alpha)t$$

逐点沿着总方向计算,比较麻烦.

图表法就是给出等高线,根据等高线间距 H 及选用的平距坡度 $\alpha_{均}$ 按 $t = \frac{h}{\alpha_{均}}$ 计算出等高线平均 t ,从A开始,沿各拟定走线在等高线上依次截取 $a', b', c' \dots$ 等点,如最后一点的位置和标高均接近另一主要控制点时,则方案成立,否则修改走法或调整 $\alpha_{均}$,重新试验至方案成立.

用计算机将插值得出的数据分为四块给出了四个局部等高线.为此加进如下假设.

两等高线间连接无障碍.

按照地形模拟图所示等高线绘出的线路说明如下:

$h = 50$ 米 $\alpha_{均} = 0.1$ 总成本 $P = 480$ 万元

如果居民点改为居民区,则线路需要做出调整

总成本 $P = 430$ 万元

模型B

I. 本模型采取了计算机深度搜索算法.本问题的关键在于确定桥梁和隧道的位置,使总成本最少.首先,将数据点以10米为间距离散化,形成网格.路线必须通过网格点.路线前进方向共有16个记为数字(0~15).整个搜索过程划为四个阶段:

第一阶段:从起点A(0,800)开始,搜索到山谷河岸为止. ($y = (4455 - x) \frac{2400}{2455}$)

第二阶段:从居民点B(4000,2000)反向搜索到山谷河岸的另一侧, ($y = (4355 - x) \frac{2400}{2345}$)

第三阶段:从居民点B(4000,2000)反向搜索到山梁线的南侧, ($y = 3000$)

第四阶段:从矿区C(2000,4000)反向搜索到山梁线的北侧($y = 3600$)

由第一阶段和第二阶段的结果确定桥梁位置.由第三阶段和第四阶段的结果得出隧道位置.

具体算法如下:

1. 输入起始坐标 x_0, y_0 ,以及起始方向D.
2. 判断是否已达目标线,如果是即终止,打印路线.
3. 判断下一步方向:

原则1:转向不能超过九十度,即新方向 $newD, D_0 - 4 \leq newD \leq D_0 + 4$.

原则2:在该方向上,梯度要求符合限制,

$$\left| \frac{newh - h_0}{\sqrt{(newx - x_0)^2 + (newy - y_0)^2}} \right| < 0.125$$

原则3:如果多个方向满足要求,则优先考虑梯度最大者,这是因为在确定桥梁及隧道的位置时,梯度越大,桥梁和隧道越短,造价越低.

4. 符合以上原则者,即被选为当前坐标点,继续执行第一步.

5. 如果无符合以上原则者,则该点无路,退回上一点,搜索另一方向.

程序清单及运行结果(略).

这样,我们确定了河岸两侧可能达到的坐标点如下:

(3300,1371), (3290,1358), (3280,1330), (3310,1352), (3320,1349). 在满足桥梁梯度的前提下,计算了桥梁位置改变对总成本的影响,即总成本 = 左右路线成本 + 桥梁成本.

我们得到在(3300,1371)到(3365,1431)架桥,可使起点至居民点的公路成本最少。

同理通过山梁两侧的坐标点,确定出隧道位置应在(4500,3200)到(4500,3270)之间。一般路段线路总长为 15145 米,桥梁长为 100 米,隧道长为 70 米。这与模型 A 的结果是基本吻合的。

II. 如果居民点改为居民区,我们在居民区的边界上每隔 50 米选一个点,作为第二阶段和第三阶段的起始点如 I 搜索出可能的最短路径。计算结果如下:

一般路段线路总长为 11875 米,桥梁长为 70 米,隧道 70 米。

所以,我们选出(3650,2400)作为公路通过居民区的点,它的成本为 425 万元,比 I 所得出的结果少 50 万元。

5 模型的优缺点及改进方向和建议

通过模型 B 与直接定线和纸上定线法相比较,上述模型的优点是明显的:

①增加了线路设计的可靠性。

②简洁,易懂,利用公路设计人员掌握。

模型的主要缺点就是采用的线路是基于插值曲面,在实际工作中难免高挖深填,但这无碍大局。其次,在搜索算法中采用递归调用,占用内存和时间较多。最后,在模型 B 程序运行过程中,在某些点遇到无路的情况下,小范围修改此点数据(± 10 米)这在实际中是可行的。

基于本模型的不足,模型的改进余地也是很大的,它只使用了深度搜索算法的单一准则的速度,我们可以考虑成本大小和总体方向的收敛程度,采用图论上的逆向追踪算法,或许也能得出满意的结果。

最后,我们建议:对于一个具体的线路设计,可以将等高线法和深度搜索法结合起来考虑,这样可能会得出更合乎实际的线路设计方案。

(收稿日期:1997-10-31)

Mathematical Model of Building Road Through Mountains

Sun Changyin

Yang Qiao Huang Qiong

(Department of Maths)

(Sichuan University)

Abstract Route design is a major problem in building a road. For specific topography and the road one must take. It is a significant problem to design the most reasonable and least cost route.

In the paper, Data is processed by Lagrange's two unknown quantities and three points interpolation and on this basis two mathematical models are established, Firstly, Draw a audio-visual route along the general direction by method of analysis and range estimation, in which contour is used. Secondly, determine automatically the next direction at each net point by method of depth searching and draw a route by the method of recursive function.

Key words Interpolation; Control point; Depth Searching