

关于“逢山开路”的优化设计方案

范正森 王良远 胡启旭

(基 础 部)

摘 要 本文在对“逢山开路”的问题进行认真分析并作出合理假设的基础上,运用动态规划的原理和方法给出了一个解决本问题的优化设计方案。

关键词 逢山开路 动态规划 优化设计

中图分类号 O224 U412.3

1994 年全国大学生数学建模竞赛 A 题——“逢山开路”是一个工程应用中广泛存在的最优化设计问题,例如修建公路、铁路、水渠,架设输油管道等。在这次竞赛中,我院的两个队比较圆满地做出了这个问题的设计方案,并分别荣获了全国二等奖和三等奖。下面是我们给出的一种关于“逢山开路”的优化设计方案,在此方案中,重点谈谈对问题的分析及建立数学模型的过程。

1 问题的提出

为了在某山区修建一条从山脚开始经居民点(或居民区)到矿区的公路,首先测得该山区在长 5600 米,宽 4800 米范围内均匀分布的若干个点的高程(数据见建模竞赛 A 题)。数据显示:在 $y = 3200$ 处有一东西走向的山峰;从坐标 $(2400, 2400)$ 到 $(4800, 0)$ 有一西北—东南走向的山谷;在 $(2000, 2800)$ 附近有一山口湖,雨季在山谷中形成一溪流,雨量最大时溪流水面宽度 w 与溪流最深处的 x 坐标的关系可近似表示为:

$$w(x) = ((x - 2400)/2)^{3/4} + 5, \quad 2400 \leq x \leq 4000$$

已知路段工程成本及对路坡度 α 的限制如表 1 所示。

表 1 路段工程成本及对坡度的限制

工程种类	一般路段	桥梁	隧道
工程成本(元/m)	300	2000	1500(长度 ≤ 300 m);3000(长度 > 300 m)
对 α 的限制(度)	< 0.125	0	< 0.100

需要解决的问题是:分别给出从山脚 $(0, 800)$ 开始,经居民点 $(4000, 2000)$ 至矿区 $(2000, 4000)$ 和从山脚经居民区: $3600 \leq x \leq 4000, 2000 \leq y \leq 2400$ 至矿区的线路设计方案,并估算该方案的总成本。

收稿日期:1995-03-02

2 问题的分析与假设

2.1 分析 从题设条件可知,从山脚到居民点(区)不但是由低到高,而且必须经过一条西北至东南走向的山谷,因此中间需架一座桥梁;从居民点(区)到矿区要经过一座东西走向的山峰,在这段线路上要么开挖一条隧道,要么修盘山公路到达矿区。由于一般路段、桥梁和隧道的工程成本差别很大,为了降低成本,我们架设的桥梁和开挖的隧道应尽可能的短。因为山谷溪流上游的水面窄,隧道长度随海拔的升高和山坡变陡而缩短,所以桥梁应尽量架在河谷的上游,隧道应选择在山坡较陡而海拔高的位置。在确定了桥梁和隧道的大致位置后,可在满足坡度要求的前提下,由山脚经桥址、居民点(区)、隧道到矿区寻找公路须经过的接收域,在接收域内进行逐步插值,构成可选择路径的网络图,然后可考虑运用动态规划的原理和方法寻找一条最优线路。

2.2 假设 根据分析的情况及实际经验我们给出如下的假设。

2.2.1 整个曲面(山坡表面)是分片光滑的,不会出现异常凹凸现象,并假设公路须经的接收域中,纵向距离 400 米左右的相邻两点间的路线近似于直线,山坡表面与横坐标为常数的截面交线在接收域内近似为抛物线。

2.2.2 在修路过程中,一般只考虑修路费用,不考虑因路段的弯曲、长短对驾驶车辆的损耗以及森林的砍伐、房屋拆迁等费用。并假设路面宽为常数,路的宽度所引起的成本变化不予考虑。

2.2.3 进行插值搜索得到的动态规划状态变量,既能描述过程的演变特征又满足无后效性。

3 模型的建立与求解

3.1 确定接收域并在接收域内寻找若干个可供选择的备用点而得到一个线路网络图 从山脚到桥址这一段,只上不下,首先确定一条自山脚到山谷边的宽为 800 米的接收域,在接收域内用抛物线插值得到若干个备用点。其次沿山谷西岸向上游采用线性插值得到包括桥梁西端在内的许多备用点。经过计算知,此时桥梁西端备用点的海拔高度在 950 米至 1030 米之间。依此类推,采用抛物线和线性相结合的插值法得到从桥址经居民点(区)、隧道至矿区的若干个可供选择的备用点。其中居民区备用点的高度可达到 1138 米,隧道口在 $x = 4000$ 米坡面上,其高度在 1175 米与 1350 米之间。将这些备用点连接起来便得满足坡度要求的线路网络图(略)。这样,问题便转化为动态规划中典型的最短路线问题。

关于是否开挖隧道的问题,若隧道长大于 300 米,其成本将大于一般路段 3000 米的成本。注意到山顶与道口的高程差为 250 米左右,如果翻山修路,路长大于 $250 \times 2/0.125 = 4000$ 米,成本大于 120 万元。经过计算,在 1300 米的高度开挖隧道的长度不到 300 米,其成本小于 $1500 \times 300 = 45$ 万元。成本远小于翻山修路的成本,故应选择开挖隧道这一方案。

3.2 建立动态规划基本方程并求解 首先将前面得到的从起点到终点的线路网络划分为 $n + 1$ 个阶段,用 S_k 表示第 k 个阶段的状态变量, X_k 表示第 k 个阶段的决策变量, $f_{k-1}(X_k(S_k))$ 表示决策变量 $X_k(S_k)$ 所对应的点到终点的最优成本, $d_k(S_k, X_k(S_k))$ 表示第 k 段上的 S_k 对应的点与第 $k + 1$ 段上 $X_k(S_k)$ 所对应的点之间的成本。根据动态规划的原理和方法即得本问题动态规划的基本方程为:

$$f_k(S_k) = \min_{X_k \in D_k(S_k)} \{d_k(S_k, X_k(S_k)) + f_{k+1}(X_k(S_k))\} \quad k = n, n-1, \dots, 2, 1$$

边界条件为

$$f_{n+1}(S_{n+1}) = 0$$

其中 $D_k(S_k)$ 为每阶段上允许的决策集合。

根据线路网络图以及上面的动态规划基本方程,我们编制程序(略)上机操作运行得到从山脚经居民点(区)到矿区的优化线路如图 1 所示。图 1 中横线上方的数字是两点间的距离。

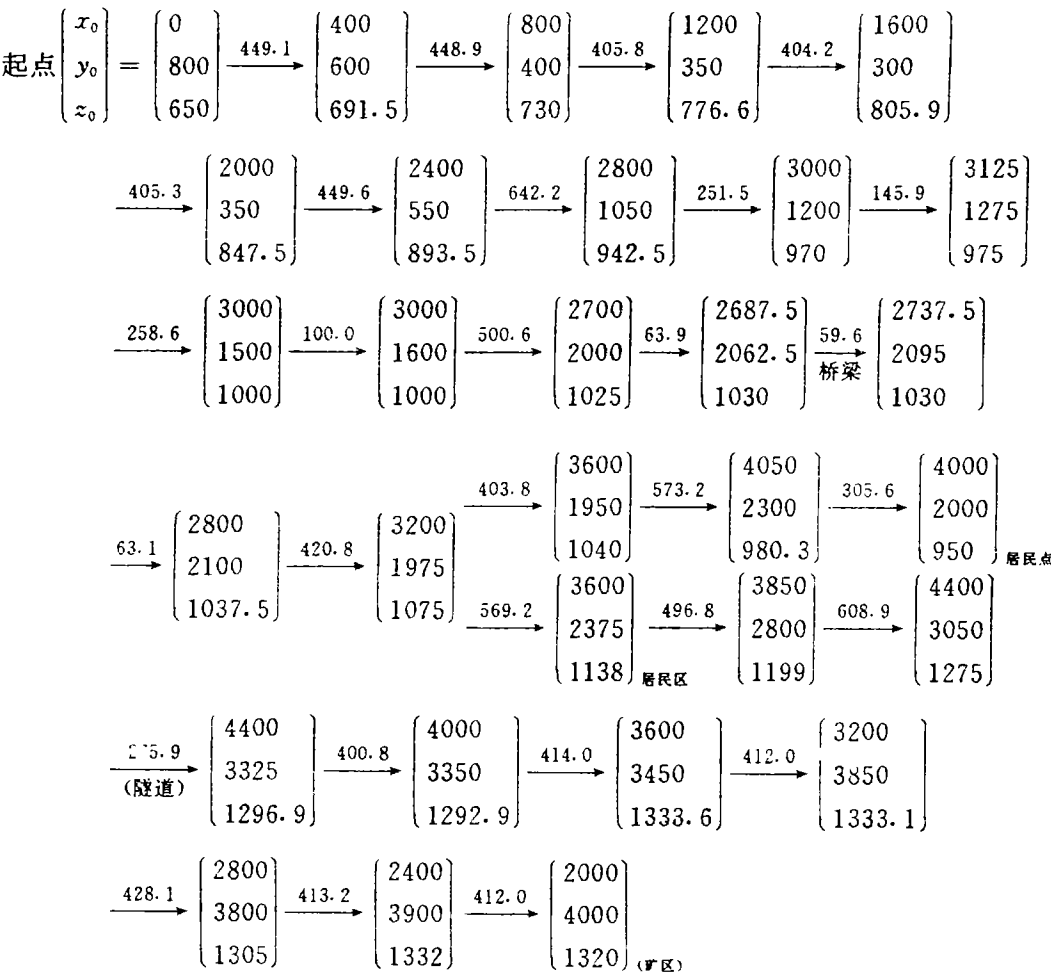


图 1 从山脚经居民点(区)到矿区的优化路线图

由此可知,从起点山脚经居民点到终点矿区的公路长为 10782.6 米,最低成本为 366.72 万元,从山脚经居民区到矿区的公路长为 9500 米,最低成本为 328.25 万元。其中桥梁长 59.6 米,成本 11.93 万元,隧道长 275.9 米,成本 41.39 万元。

4 模型的讨论与推广

上面的优化线路图及其计算结果显示,桥梁东西两端的海拔高程均为 1030 米,桥长为

59.6米,经过计算,此处的溪流水面宽约为50米,桥长大于水面宽度,满足设计要求,隧道南北两个道口的高程分别为1275米和1297米,隧道长275.9米,控制在300米以内。如果不修隧道而修盘山公路翻过山峰到达矿区,经粗略计算知,成本大于开挖隧道这种方案的成本。

根据题设条件知,在(2000,2800)附近有一海拔为1350米的山口湖,假若该山口湖对矿区或居民区的工作和生活大有益处,那么在设计方案时,可适当放宽条件限制,使公路经过湖边而充分利用这一有益资源。

利用动态规划的原理和方法所建立的“逢山开路”数学模型,可以说是一种理论上成熟、结构合理、稳定性好、操作方便、实用性较强的模型。该模型还可以推广到解决其它具有多阶段决策问题中去。除了这种模型之外,还可以考虑先对山坡表面进行局部曲面拟合,然后用变分法的理论和方法找到一条优化线路。不过从实际应用的角度来看,还是用动态规划的理论及方法建立的模型比较理想。

参 考 文 献

- 1 俞玉森. 数学规划的原现和方法. 华中工学院出版社,1985
- 2 林治勋. 动态规划与直接搜索法. 郑州大学数学系,1983
- 3 范鸣玉、张莹. 最优化技术基础. 清华大学出版社,1982
- 4 吴文江、袁仪方. 实用数学规划. 机械工业出版社,1993
- 5 张巨洪等. BASIC 语言程序库自动化工程中常用算法. 清华大学出版社,1981

AN OPTIMAL DESIGN PLAN ABOUT “CUTTING PATHS THROUGH MOUNTAINS”

Fan Zhengsen Wang Yinyuan Hu Qixu

(Basic Course Department)

ABSTRACT In this article the problem about “cutting paths through mountains” is seriously analysed and reasonably hypothesized. On this basis, the article gives an optimal design plan for solving the problem by the use of the principle and method of dynamic planning.

KEY WORDS cutting paths through mountains dynamic plan optimal design