计算机算法设计与分析

- 32学时（11周停课）
- 考核方法：

  平时成绩30%

  考试卷面70% （第19周考试）

平时成绩30分：

（1）无故缺课第1次扣5分，第2次扣10分，第三次扣20分，缺课4次平时成绩为0

（2）上课玩手机第一次扣10分，第2次扣20分，第3次平时成绩归0

（3） 请假2次扣5分，请假3次扣10分，请假4次平时成绩归0

第1章 算法概述

学习要点:

- 理解算法的概念。
- 理解什么是程序，程序与算法的区别和内在联系。
- 掌握算法的计算复杂性概念。
- 掌握算法渐近复杂性的数学表述。
- 掌握用C++语言描述算法的方法。

算法(Algorithm)

- 算法是指解决问题的一种方法或一个过程。
- 算法是若干指令的有穷序列，满足性质：

(1)**输入**：有外部提供的量作为算法的输入。

(2)**输出**：算法产生至少一个量作为输出。

(3)**确定性**：组成算法的每条指令是清晰，无歧义的。

(4)**有限性**：算法中每条指令的执行次数是有限的，执行每条指令的时间也是有限的。

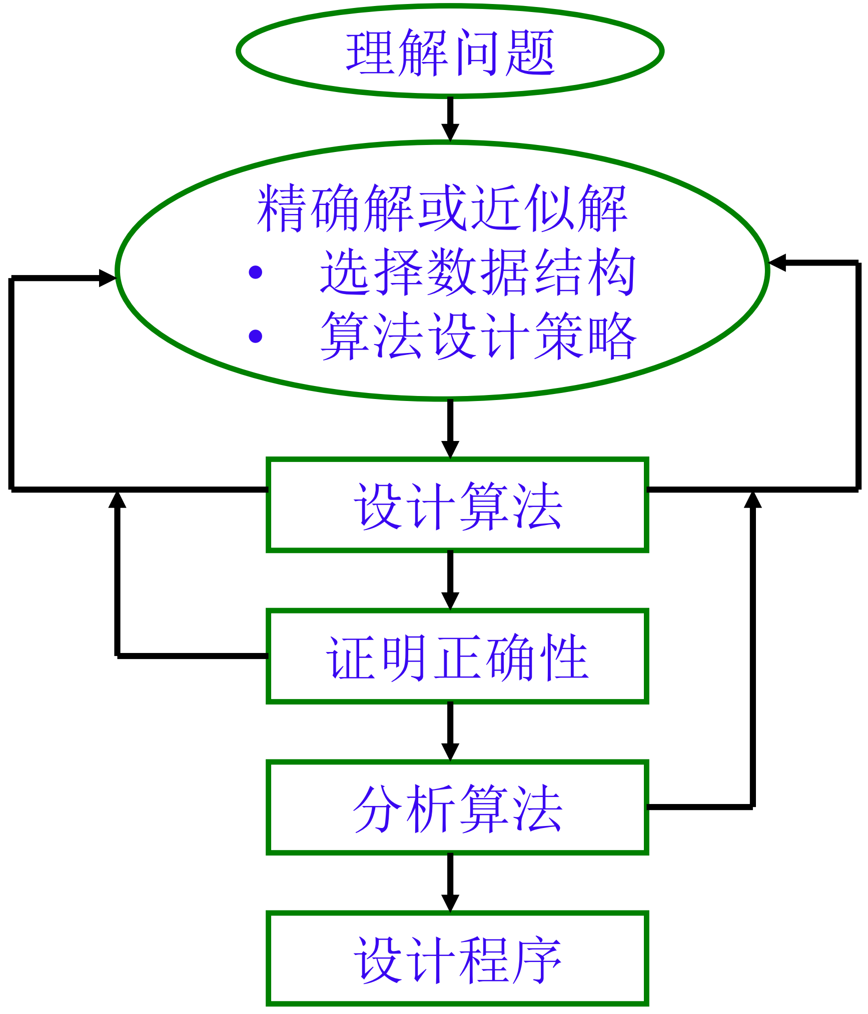
程序(Program)

- 程序是算法用某种程序设计语言的具体实现。
- 程序可以不满足算法的性质(4)。

例如操作系统，是一个在无限循环中执行的程序，因而不是一个算法。

操作系统的各种任务可看成是单独的问题，每一个问题由操作系统中的一个子程序通过特定的算法来实现。该子程序得到输出结果后便终止。

问题求解(Problem Solving)



算法复杂性分析

- 算法复杂性 = 算法所需要的计算机资源
- 算法的时间复杂性$T(n)$；
- 算法的空间复杂性$S(n)$。
- 其中n是问题的规模（输入大小）。

算法的时间复杂性

- （1）**最坏情况**下的时间复杂性
- $T_{max}(n) = \max\{ T(I) \mid size(I)=n \}$
- （2）**最好情况**下的时间复杂性
- $T_{min}(n) = \min\{ T(I) \mid size(I)=n \}$
- （3）**平均情况**下的时间复杂性
- $T_{avg}(n) = \sum_{size(I)=n} p(I)T(I)$
- 其中I是问题的规模为n的实例，$p(I)$是实例I出现的概率。

算法渐近复杂性

- $T(n) \to \infty$， as $n \to \infty$;
- $(T(n) - t(n))/ T(n) \to 0$， as $n \to \infty$;
- $t(n)$是$T(n)$的渐近性态，为算法的渐近复杂性。

在数学上， $t(n)$是$T(n)$的渐近表达式，是$T(n)$略去低阶项留下的主项。它比$T(n)$ 简单。

渐近分析的记号

对所有n，$f(n) \geq 0$，$g(n) \geq 0$。

（1）**渐近上界记号*O***

- $O(g(n)) = \{ f(n) \mid$ 存在正常数c和n_0使得对所有$n \geq n_0$有：$0 \leq f(n) \leq cg(n) \}$

（2）**渐近下界记号Ω**

- $\Omega(g(n)) = \{ f(n) \mid$ 存在正常数c和n_0使得对所有$n \geq n_0$有：$0 \leq cg(n) \leq f(n) \}$

（3）**非紧上界记号*o***

- $o(g(n)) = \{ f(n) \mid$ 对于任何正常数$c>0$，存在正数和$n_0>0$使得对所有$n \geq n_0$有：$0 \leq f(n)<cg(n) \}$
- 等价于 $f(n) / g(n) \to 0$， as $n \to \infty$。

（4）**非紧下界记号*ω***

- $\omega(g(n)) = \{ f(n) \mid$ 对于任何正常数$c>0$，存在正数和$n_0>0$使得对所有$n \geq n_0$有：$0 \leq cg(n) < f(n) \}$
- 等价于 $f(n) / g(n) \to \infty$， as $n \to \infty$。
- $f(n) \in \omega(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in o(f(n))$

（5）**紧渐近界记号Θ (theta)**

- $\Theta(g(n)) = \{ f(n) \mid$ 存在正常数c_1, c_2和n_0使得对所有$n \geq n_0$有：$c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \}$

- **定理1：** $\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

渐近分析记号在等式和不等式中的意义

- $f(n)=\Theta(g(n))$的确切意义是：$f(n) \in \Theta(g(n))$。
- 一般情况下，等式和不等式中的渐近记号$\Theta(g(n))$表示$\Theta(g(n))$中的某个函数。
- 例如：$2n^2 + 3n + 1 = 2n^2 + \Theta(n)$ 表示
- $2n^2 +3n +1=2n^2 + f(n)$，其中$f(n)$ 是$\Theta(n)$中某个函数。
- 等式和不等式中渐近记号O,o, Ω和ω的意义是类似的。

渐近分析中函数比较

- $f(n) = O(g(n)) \approx a \leq b$;
- $f(n) = \Omega(g(n)) \approx a \geq b$;
- $f(n) = \Theta(g(n)) \approx a = b$;
- $f(n) = o(g(n)) \approx a < b$;
- $f(n) = \omega(g(n)) \approx a > b$.

算法渐近复杂性分析中常用函数

- **（1）单调函数**
- 单调递增：$m \le n \Rightarrow f(m) \le f(n)$;
- 单调递减：$m \le n \Rightarrow f(m) \ge f(n)$;
- 严格单调递增：$m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$;
- 严格单调递减：$m < n \Rightarrow f(m) > f(n)$.
- **（2）取整函数**
- $\lfloor x \rfloor$：不大于x的最大整数；
- $\lceil x \rceil$：不小于x的最小整数。

取整函数的若干性质

- $x-1 < \lfloor x \rfloor \le x \le \lceil x \rceil < x+1$；
- $\lfloor n/2 \rfloor + \lceil n/2 \rceil = n$;
- 对于$n \ge 0$，$a,b>0$，有：
- $\lceil \lceil n/a \rceil /b \rceil = \lceil n/ab \rceil$;
- $\lfloor \lfloor n/a \rfloor /b \rfloor = \lfloor n/ab \rfloor$;
- $\lceil a/b \rceil \le (a+(b-1))/b$;
- $\lfloor a/b \rfloor \ge (a-(b-1))/b$;
- $f(x)=\lfloor x \rfloor$, $g(x)=\lceil x \rceil$为单调递增函数。

- **（3）多项式函数**
- $p(n)= a_0+a_1n+a_2n^2+\ldots+a_dn^d$； $a_d>0$;
- $p(n) = \Theta(n^d)$;
- $f(n) = O(n^k) \Leftrightarrow f(n)$多项式有界；
- $f(n) = O(1) \Leftrightarrow f(n) \leq c$;
- $k \geq d \Rightarrow p(n) = O(n^k)$;
- $k \leq d \Rightarrow p(n) = \Omega(n^k)$;
- $k > d \Rightarrow p(n) = o(n^k)$;
- $k < d \Rightarrow p(n) = \omega(n^k)$.

- **（4）指数函数**
- 对于正整数m,n和实数$a>0$:
- $a^0=1$;
- $a^1=a$;
- $a^{-1}=1/a$;
- $(a^m)^n = a^{mn}$;
- $(a^m)^n = (a^n)^m$;
- $a^m a^n = a^{m+n}$;
- $a>1 \Rightarrow a^n$为单调递增函数;
- $a>1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0 \Rightarrow n^b = o(a^n)$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

- $e^x \geq 1+x$;
- $|x| \leq 1 \Rightarrow 1+x \leq e^x \leq 1+x+x^2$;
- $e^x = 1+x+ \Theta(x^2)$, as $x \to 0$;

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

- **（5）对数函数**
- $\log n = \log_2 n$;
- $\lg n = \log_{10} n$;
- $\ln n = \log_e n$;
- $\log^k n = (\log n)^k$l;
- $\log \log n = \log(\log n)$;
- for a>0,b>0,c>0

$$a = b^{\log_b a}$$

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$$

$$\log_b a^n = n \log_b a$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\log_b(1/a) = -\log_b a$$

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

- $|x| \leq 1 \Rightarrow \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots.$
- for $x > -1$, $\quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$
- for any $a > 0$, $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log^b n}{(2^a)^{\log n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log^b n}{n^a} = 0 \quad , \Rightarrow \log^b n = o(n^a)$

- （6）阶层函数

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$$

- Stirling's approximation

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1 + \Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

算法分析中常见的复杂性函数

FUNCTION	NAME
c	Constant
$\log N$	Logarithmic
$\log^2 N$	Log-squared
N	Linear
$N \log N$	N log N
N^2	Quadratic
N^3	Cubic
2^N	Exponential

计算时间的典型函数曲线

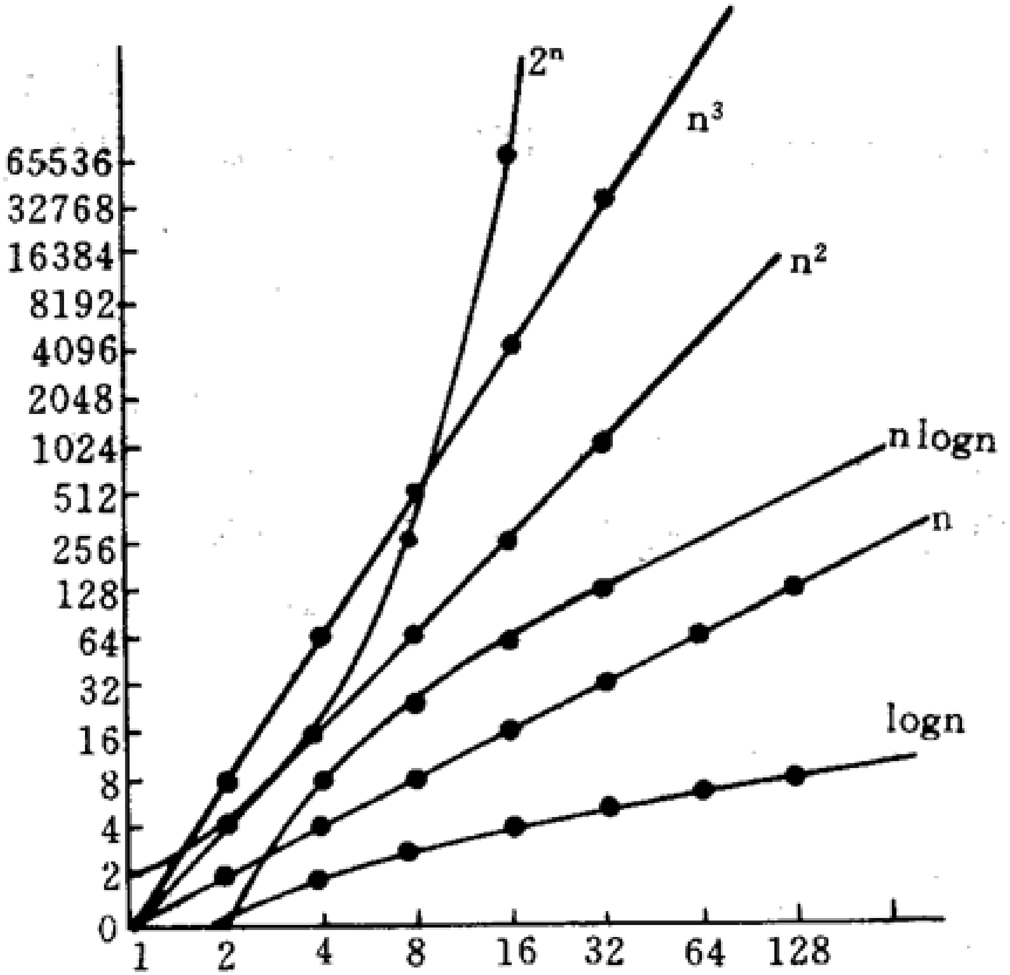


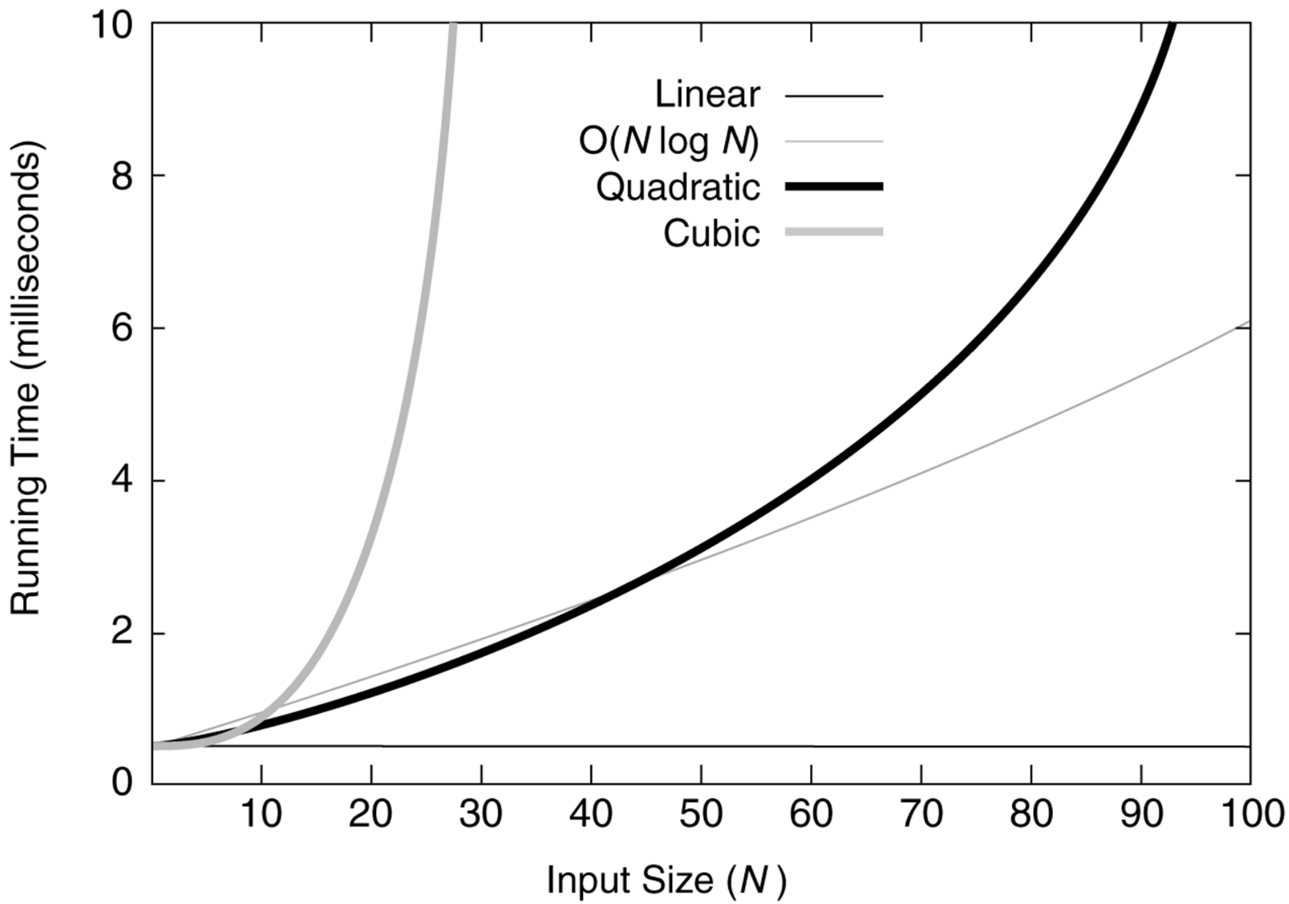
图 1.1　一般计算时间函数的曲线

计算时间函数值比较

典型函数的值

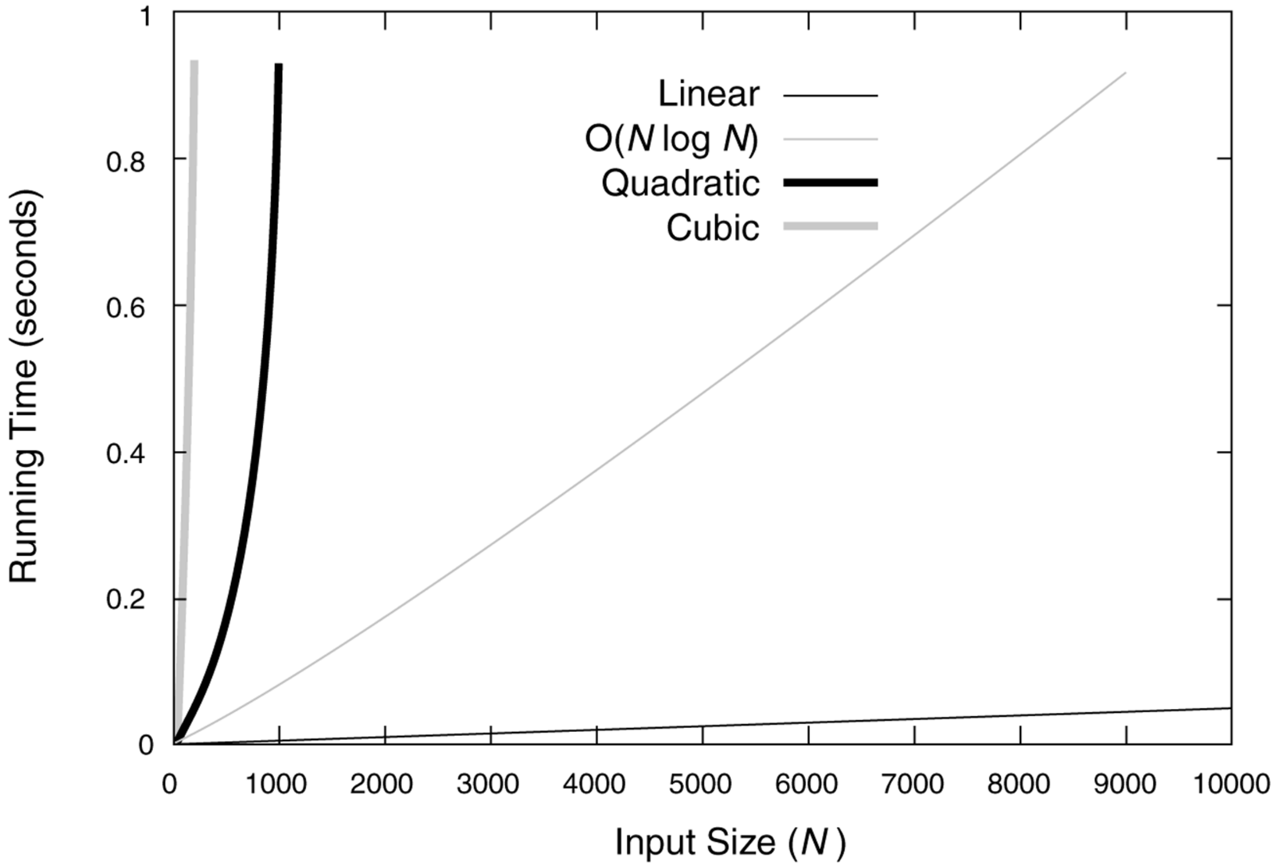
Log(n)	n	nlogn	n^2	n^3	2^n
0	1	0	1	1	2
1	2	2	4	8	4
2	4	8	16	64	16
3	8	24	64	512	256
4	16	64	256	4096	65536
5	32	160	1024	32768	4294967296

小规模数据



Linear
O(N log N)
Quadratic
Cubic
Running Time (milliseconds)
Input Size (N)
0
2
4
6
8
10
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

中等规模数据



Linear
O(N log N)
Quadratic
Cubic
Running Time (seconds)
Input Size (N)
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
0
1000
2000
3000
4000
5000
6000
7000
8000
9000
10000

用c++描述算法

Category	Examples	Associativity
Operations on References	. []	Left to right
Unary	++ -- ! - (type)	Right to left
Multiplicative	* / %	Left to right
Additive	+ -	Left to right
Shift (bitwise)	<< >>	Left to right
Relational	< <= > >= instanceof	Left to right
Equality	== !=	Left to right
Boolean (or bitwise) AND	&	Left to right
Boolean (or bitwise) XOR	^	Left to right
Boolean (or bitwise) OR	|	Left to right
Logical AND	&&	Left to right
Logical OR	||	Left to right
Conditional	?:	Right to left
Assignment	= *= /= %= += -=	Right to left

（1）选择语句：

（1.1）if 语句：

```
if (expression) statement;
else statement;
```

（1.2）？语句：

```
exp1?exp2:exp3
y= x>9 ? 100:200; 等价于：
if (x>9) y=100;
else y=200;
```

（1.3) switch语句：

```
switch (expression) {
    case 1:
       statement sequence;
       break;
    case 2:
       statement sequence;
       break;
     …
    default:
       statement sequence;
 }
```

（2）迭代语句

（2.1) for 循环：

- for (init;condition;inc) statement;

（2.2) while 循环：

- while (condition) statement;

（2.3) do-while 循环：

- do{
-    statement;
- } while (condition);

（3）跳转语句

（3.1) return语句：

- return expression;

（3.2) goto语句：

- goto label;
- …
- label:

（4）函数：

```
return-type function name(para-list)
{
    body of the function
}
```

- 例：

```
int max(int x,int y)
{
   return x>y?x:y;
}
```

（5）模板template：

```
template <class Type>
Type max(Type x,Type y)
{
   return x>y?x:y;
}

int i=max(1,2)；
double x=max(1.0,2.0)；
```

（6）动态存储分配

（6.1）运算符new

- 运算符new用于动态存储分配。
- new返回一个指向所分配空间的指针。
- 例：int *y；y=new int；*y=10；
- 也可将上述各语句作适当合并如下：
- int *y=new int；*y=10；
- 或 int *y=new int(10)；
- 或 int *y；y=new int(10)；

（6.2）一维数组

- 为了在运行时创建一个大小可动态变化的一维浮点数组x，可先将x声明为一个float类型的指针。然后用new为数组动态地分配存储空间。
- **例：**

  float ∗x=new float[n]；

- 创建一个大小为n的一维浮点数组。运算符new分配n个浮点数所需的空间，并返回指向第一个浮点数的指针。
- 然后可用x[0]，x[1]，…，x[n-1]来访问每个数组元素。

（6.3）运算符delete

- 当动态分配的存储空间已不再需要时应及时释放所占用的空间。
- 用运算符delete来释放由new分配的空间。
- **例：**
- delete y；
- delete [ ]x；
- 分别释放分配给*y的空间和分配给一维数组x的空间。

如果动态申请的内存不释放，会怎么样？

（6.4）动态二维数组

- 创建类型为Type的动态工作数组，这个数组有rows行和cols列。

```
template <class Type>
void Make2DArray(Type** &x,int rows, int cols)
{
     x=new Type*[rows];
     for (int i=0;i<rows;i++)
        x[i]=new Type[cols];
}
```

- 当不再需要一个动态分配的二维数组时，可按以下步骤释放它所占用的空间。首先释放在for循环中为每一行所分配的空间。然后释放为行指针分配的空间。

```
template <class Type>
void Delete2DArray(Type** &x,int rows)
{
     for (int i=0;i<rows;i++)
        delete []x[i];
    delete []x;
    x=0;
}
```

- 释放空间后将x置为0，以防继续访问已被释放的空间。

算法分析方法

- 例：顺序搜索算法

```
template<class Type>
int seqSearch(Type *a, int n, Type k)
{
    for(int i=0;i<n;i++)
            if (a[i]==k) return i;
    return -1;
}
```

（1）$T_{max}(n) = \max\{ T(I) \mid size(I)=n \}=O(n)$

（2）$T_{min}(n) = \min\{ T(I) \mid size(I)=n \}=O(1)$

（3）在平均情况下，假设：

(a) 搜索成功的概率为p ($0 \le p \le 1$)；

(b) 在数组的每个位置i ($0 \le i < n$)搜索成功的概率相同，均为 p/n。

$$T_{avg}(n) = \sum_{size(I)=n} p(I)T(I)$$

$$= \left(1 \cdot \frac{p}{n} + 2 \cdot \frac{p}{n} + 3 \cdot \frac{p}{n} + \cdots + n \cdot \frac{p}{n}\right) + n \cdot (1 - p)$$

$$= \frac{p}{n}\sum_{i=1}^{n} i + n(1 - p) = \frac{p(n+1)}{2} + n(1 - p)$$

算法分析的基本法则

- **非递归算法：**

（1）for / while 循环

- 循环体内计算时间*循环次数；

（2）嵌套循环

- 循环体内计算时间*所有循环次数；

（3）顺序语句

- 各语句计算时间相加；

（4）if-else语句

- if语句计算时间和else语句计算时间的较大者。

```
template<class Type>
void insertion_sort(Type *a, int n)
{
    Type key;                               //  cost      times
    for (int i = 1; i < n; i++){            //   c1       n
        key=a[i];                           //   c2       n-1
        int j=i-1;                          //   c3       n-1
        while( j>=0 && a[j]>key ){          //   c4       sum of ti
            a[j+1]=a[j];                    //   c5       sum of (ti-1)
            j--;                            //   c6       sum og (ti-1)
        }
        a[j+1]=key;                         //   c7       n-1
    }
}
```

$$T(n)=c_1 n+c_2(n-1)+c_3(n-1)+c_4\sum_{i=1}^{n-1}t_i+c_5\sum_{i=1}^{n-1}(t_i-1)+c_6\sum_{i=1}^{n-1}(t_i-1)+c_7(n-1)$$

- 在最好情况下，$t_i=1$, for $1 \le i < n$;

$$T_{\min}(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4(n-1) + c_7(n-1)$$

$$=(c_1+c_2+c_3+c_4+c_7)n-(c_2+c_3+c_4+c_7)=O(n)$$

- 在最坏情况下，$t_i \le i+1$, for $1 \le i < n$;

$$\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)=\frac{n(n+1)}{2}-1 \qquad \sum_{i=1}^{n-1}i=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$T_{\max}(n)\le c_1 n+c_2(n-1)+c_3(n-1)+$$

$$c_4\left(\frac{n(n+1)}{2}-1\right)+c_5\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)+c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)+c_7(n-1)$$

$$=\frac{c_4+c_5+c_6}{2}n^2+\left(c_1+c_2+c_3+\frac{c_4-c_5-c_6}{2}+c_7\right)n-(c_2+c_3+c_4+c_7)$$

$$=O(n^2)$$

- 对于输入数据a[i]=n-i,i=0,1,…,n-1，算法insertion_sort 达到其最坏情形。因此，

$$T_{\max}(n) \geq \frac{c_4+c_5+c_6}{2}n^2 + \left(c_1+c_2+c_3+\frac{c_4-c_5-c_6}{2}+c_7\right)n-(c_2+c_3+c_4+c_7)$$

$$=\Omega(n^2)$$

- 由此可见，$T_{\max}(n)=\Theta(n^2)$

最优算法

- 问题的计算时间下界为$\Omega(f(n))$，则计算时间复杂性为$O(f(n))$的算法是最优算法。

  例如，排序问题的计算时间下界为$\Omega(n\log n)$，计算时间复杂性为$O(n\log n)$的排序算法是最优算法。

- 堆排序算法是最优算法。

递归算法复杂性分析

- int **factorial**(int n)
- {
-     if (n == 0) return 1;
-     return n*factorial(n-1);
- }

$$T(n)=\begin{cases}0 & n=0\\ T(n-1)+1 & n>0\end{cases}$$

$$T(n)=n$$

对算法复杂性的一般认识

- 当数据集的规模很大时，要在现有的计算机系统上运行具有比O (nlogn)复杂度还高的算法是比较困难的。
- 不要尝试使用指数时间复杂度的算法，因为指数时间算法只有在n取值非常小时才有用！
- 要想在顺序处理机上扩大所处理问题的规模，有效的途径是降低算法的计算复杂度，而不是（仅仅依靠）提高计算机的速度。

NP问题：Non-deterministic Polynomial，多项式复杂程度的非确定性问题。

•什么是非确定性问题呢？

有些计算问题是确定性的，比如加减乘除之类，只要按照公式推导，按部就班一步步来，就可以得到结果。但是，有些问题是无法按部就班直接地计算出来。

比如，找大质数的问题。有没有一个公式就可以一步步推算出来，下一个质数应该是多少呢？这样的公式是没有的。

再比如，大的合数分解质因数的问题，有没有一个公式，把合数代进去，就直接可以算出，它的因子各自是多少？也没有这样的公式。

这种问题的答案，是无法直接计算得到的，只能通过间接的“猜算”来得到结果。这也就是非确定性问题。

NP问题：Non-deterministic Polynomial，多项式复杂程度的非确定性问题。

但对这些问题通常有个算法，它不能直接告诉你答案是什么，但可以告诉你，某个可能的结果是正确的答案还是错误的答案。这个可以告诉你“猜算”的答案正确与否的算法，假如可以在多项式时间内算出来，就叫做多项式非确定性问题。而如果这个问题的所有可能答案，都是可以在多项式时间内进行正确与否的验算的话，就叫完全多项式非确定问题。

完全多项式非确定性问题可以用穷举法得到答案，一个个检验下去，最终便能得到结果。但是这样算法的复杂程度，是指数关系，因此计算的时间随问题的复杂程度成指数的增长，很快便变得不可计算了。