1 第二章

1.1 §5 特征子空间的应用

1.1.1 §5.1 线性算子和矩阵的对角化

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\mathcal{A}$ 在 F 中互不相同的特征根的集合称为 $\mathcal{A}$ 在 F 上的谱（spectrum）

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是对角的，则称 $\mathcal{A}$ 是可对角化的。设 $A \in M_n(F)$，如果 A 相似于某个对角矩阵，则称 A 在 F 上是可对角化的。

定理 5.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，则下列断言等价：
(i)$\mathcal{A}$ 可对角化
(ii)$\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，其中 n=dim(V)
(iii)V=$\bigoplus_{\lambda \in spec(\mathcal{A})}$

推论 5.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,dimV=n, 如果 $\mathcal{A}$ 在 F 中有 n 个互不相同的特征根, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化.

定理 5.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$(i)$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 在 F 中可以分解为一次多项式之积 (ii)$\mathcal{A}$ 在每个特征根的代数重数与几何重数相同.

1.1.2 §5.2 复数方阵的三角化

引理 5.2 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间,n>0,$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 有 n-1 维不变子空间.

定理 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 其中 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, 则存在 V 中一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是上三角型的.

推论 5.2 设 A∈ $M_n(\mathbb{C})$, 则 A 相似于一个上三角型矩阵.

引理 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间, 定义:
$\overline{\mathcal{A}} : V/U \to V/U$
$\vec{a} + U \mapsto \mathcal{A}(\vec{a}) + U$
则 $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V/U)$

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间, 则
$\overline{\mathcal{A}} : V/U \to V/U$
$\vec{v} + U \mapsto \mathcal{A}(\vec{v}) + U$
称为 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子.

命题 5.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间
$\Pi : V \to V/U$ 自然投射
则 (i) $\Pi \circ \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \circ \Pi$, 其中 $\overline{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商映射.
(ii) 设 $\varphi : V/U \to V/U$ 满足 $\pi \circ \mathcal{A} = \varphi \circ \pi$, 则 $\varphi = \overline{\mathcal{A}}$

定理 5.3 设 V 是 n 维线性空间,n>1, 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间,d=dimU>0, 设 $e_1, \vec{...}, \vec{e_d}$ 是 U 的基,$\vec{e_1}, ..., \vec{e_d}, \vec{e_{d+1}}, ..., \vec{e_n}$ 是 V 的基. 记 A$|_U$ 为 A_U,$\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子为 $\overline{\mathcal{A}}$. 令 A_U 为 $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ 在 $\vec{e_1}, ..., \vec{e_d}$ 下的矩阵.$\overline{A}$ 为 $\overline{A}$ 在 $\vec{e_{d+1}}, ...\vec{e_n}$ 下的矩阵, 则 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e_1}, ..., \vec{e_d}, \vec{e_{d+1}}, ..., \vec{e_n}$ 下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} A_U & B \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix} \tag{1}$$

, 其中 B$\in F^{d\times(n-d)}$

推论 5.2 沿用定理 5.3 中记号,$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{X}_{\overline{\mathcal{A}}}(t)\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}}}$

命题 5.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$.U 是 $\mathcal{A}$-不变子空间,P$\in F[t]$ 则
(i) U 是 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$-子空间
(ii) 设 $\overline{\mathcal{A}}$ 和 $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ 是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 关于 U 的商算子, 则 $\mathcal{P}(\overline{\mathcal{A}}) = P(\overline{A})$