

## 1 第二章

### 1.1 §6 各种类型的直和分解

#### 1.1.1 §6.1 预备引理

**引理 6.1** 设  $p_1, \dots, p_k, q \in F[t] \setminus \{0\}$

- (i) 如果  $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \gcd(p_i, q) = 1$ , 则  $\gcd(p_1, \dots, p_k, q) = 1$
- (ii) 如果  $p_1, \dots, p_k$  两两互素, 且  $p_i | q, i = 1 \dots k$ , 则  $(p_1, \dots, p_k) | q$ .

**引理 6.2** 设  $p_1, \dots, p_k \in F[t] \setminus \{0\}$  两两互素, 则  $\text{lcm}(p_1, \dots, p_k) = p_1 \dots p_k$

**引理 6.3** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), f \in F[t]$  零化  $\mathcal{A}$ , 设  $f = pq$ , 其中  $p, q \in F[t] \setminus F$  且  $\gcd(p, q) = 1$ , 令  $K_p = \ker(p(\mathcal{A}))$  和  $K_q = \ker(q(\mathcal{A}))$ , 则

- (i)  $K_p$  和  $K_q$  是  $\mathcal{A}$ -子空间且  $V = K_p \oplus K_q$
- (ii)  $p(\mathcal{A})|_{K_q}$  和  $q(\mathcal{A})|_{K_p}$  上都是双射
- (iii) 设  $f = \mu_{\mathcal{A}}$  且  $p, q$  都首一, 则  $p$  和  $q$  分别是  $\mathcal{A}|_{K_q}$  和  $\mathcal{A}|_{K_p}$  的极小多项式.

#### 1.1.2 §6.2 广义特征子空间分解

**定义** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}}$  在  $F[t]$  中的不可约因式分解为  $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$ , 其中  $p_1, \dots, p_s \in F[t] \setminus F$ , 首一, 不可约, 两两互素,  $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}^+$ , 则  $\ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$  称为  $\mathcal{A}$  关于因子  $p_i$  的广义子空间, 记为  $V(p_i)$ .

**注**  $V(p_i)$  是  $\mathcal{A}$ -子空间

**注** 书中定义的根本子空间是广义子空间的特殊情形, 我们将在之后说明.

**定理 6.1** 利用上述定义中的记号, 我们有  $V = V(p_1) \oplus \dots \oplus V(p_s)$  且

- (i)  $p_i^{m_i}(\mathcal{A})|_{V(p_i)}$  的极小多项式
- (ii)  $p_i(\mathcal{A})$  在  $V(p_1) \oplus \dots \oplus V(p_{i-1}) \oplus V(p_{i+1}) \oplus \dots \oplus V(p_s)$  上是可逆的.

**推论 6.1** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $\mathcal{A}$  可对角化  $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(t) = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_m)$ , 其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$ , 两两不同.

**推论 6.2** 设  $\mathcal{A} \in M_n(F)$ , 则  $\mathcal{A}$  可对角化  $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}} = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_s)$ , 其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in F$ , 两两不同.

### 1.1.3 §6.3 循环子空间的分解

**命题 5.3** 基本性质:

- (i)  $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$  是  $\mathcal{A}$ -子空间,
- (ii) 如果  $d = \dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ , 则  $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$  是  $F[\mathcal{A}]$  的基
- (iii) 如果  $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$  线性无关, 但  $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v}), \mathcal{A}^d(\vec{v})$  线性相关, 则  $d = \dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$
- (iv)  $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \{p(\mathcal{A})(\vec{v}) | p \in F[t]\}$

**定理 6.2** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $\exists \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$  使得  $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_1 \oplus \dots \oplus F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_k$ .

**推论 6.3 (Cayley-Hamilton 定理的加强版)** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,

- (i)  $\mu_{\mathcal{A}} | \chi_{\mathcal{A}}$
- (ii) 设  $p$  是  $\chi_{\mathcal{A}}$  的一个不可约因子, 则  $p | \mu_{\mathcal{A}}$

**推论 6.4** 设  $F = \mathbb{C}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 则

- (i)  $\chi_{\mathcal{A}}$  的根与  $\mu_{\mathcal{A}}$  的根相同 (不计重数)
- (ii)  $\mathcal{A}$  可对角化  $\Leftrightarrow \gcd(\mu_{\mathcal{A}}, \mu'_{\mathcal{A}}) = 1$

### 1.1.4 §6.4 根子空间分解

**定义** 设  $F = \mathbb{C}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A}$  关于  $\lambda$  的根子空间是  $\{\vec{v} \in V | \exists k \in \mathbb{N}, (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$ , 记为  $V(\lambda)$

**引理 6.4** 利用上述定义中的记号, 则  $(t - \lambda) | \mu_{\mathcal{A}}$  且  $V(t - \lambda) = V(\lambda)$ .

### 1.1.5 §6.5 循环子空间的进一步的性质

**命题 6.1** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $V$  是  $\mathcal{A}$ -循环的  $\Leftrightarrow \deg(\mu_{\mathcal{A}}) = \dim V$ .

**命题 6.2** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  且  $V$  是  $\mathcal{A}$ -循环的, 设  $\mu_{\mathcal{A}} = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_0$ ,  $\vec{v}$  是  $V$  关于  $\mathcal{A}$  的循环向量, 则  $\mathcal{A}$  在基底  $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$  下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

### 1.1.6 §6.3(实为 6.5) $\mathcal{A}$ -不可分子空间

**定义** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $U \in V$  是  $\mathcal{A}$ -子空间, 如果  $U$  不能写成两个维数为正的  $\mathcal{A}$ -子空间的直和, 则称  $U$  是  $\mathcal{A}$ -不可分的 (indecomposable), 否则称为  $\mathcal{A}$ -可分的

**定理 6.3** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $V$  是有限个  $\mathcal{A}$ -不可分子空间的直和.