

### 0.0.1 1.1

**命题 1.1** 设  $V$  是欧氏空间

- (i)  $\forall \vec{x} \in V, \vec{0} \cdot \vec{x} = 0$
- (ii)  $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

**注** 在本节中  $V$  是欧氏空间,  $\vec{v} \in V, L_{\vec{v}}: V \rightarrow \mathbb{R}\vec{x} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{x}$  是线性函数, 即  $L_{\vec{v}} \in V^*$

**定义** 设  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s \in V, G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) = (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j)_{i=1, \dots, s, j=1, \dots, s}$  称为  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$  的 Gram 矩阵,  $G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$  是  $s$  阶实对称方阵

**定理 1.1** 设  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s \in V$ ,  
 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$  线性相关  $\Leftrightarrow G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$  满秩

### 0.0.2 1.2 长度 (范数) 和距离

**定义** 设  $\vec{x} \in V, \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$  称为  $\vec{x}$  的长度或范数, 记为  $|\vec{x}|$  或  $\|\vec{x}\|$ .

**命题 1.2(Cauchy-Buniakowski 不等式)** 设  $\vec{x}, \vec{y} \in V, |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$ ; 等号成立  $\Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$  线性相关

**定义** 设  $\vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x}, \vec{y}$  之间的距离定义为  $|\vec{x} - \vec{y}|$

**注**  $\vec{x} \in V$ , 如果  $|\vec{x}| = 1$ , 则称  $\vec{x}$  是单位向量

### 0.0.3 1.5 正交矩阵

**定义** 设  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ , 如果  $A^t = A^{-1}$ , 则称  $A$  是正交矩阵.

**定理 1.3** 设  $V$  的一组单位正交基是  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ , 而  $\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n$  是  $V$  的一组基且  $A \in GL_n(\mathbb{R}), (\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)A$ , 则  $\vec{\epsilon}_1, \dots, \vec{\epsilon}_n$  是单位正交基  $\Leftrightarrow A$  是正交矩阵.

**命题 1.3** 设  $A$  是正交矩阵, 则

- (i)  $\det(A) = \pm 1$
- (ii)  $A^t$  即  $A^{-1}$  也是正交矩阵,
- (iii) 再设  $B$  是正交矩阵, 则  $AB$  也是正交矩阵.

**推论 1.1** 令  $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ 正交} \}$ , 则  $O_n(\mathbb{R})$  是  $GL_n(\mathbb{R})$  的子群

#### 0.0.4 1.6 正交相似

**定义** 设  $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ , 如果存在  $P \in O_n(\mathbb{R})$ , 使得  $B = P^{-1}AP$ , 则称  $B$  与  $A$  正交相似, 记为  $A \sim_o B$

**注** 如果  $A \sim_o B$ , 则  $A_s B$  且  $A \sim_c B$

**问题** 给定  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , 求  $A$  在正交相似下的“标准型”

**命题 1.4**  $\sim_o$  是等价关系

**定义** 设  $U \subset V$ , 子空间,  $U$  的正交补  $U^\perp = \{\vec{v} \in V | \forall \vec{u} \in U, \vec{v} \perp \vec{u}\}$

**命题 1.5** 设  $U \subset V$ , 子空间, 则

- (i)  $U^\perp$  是子空间
- (ii)  $V = U \oplus U^\perp$
- (iii)  $(U^\perp)^\perp = U$

### 0.1 2 正规算子与正规矩阵

#### 0.1.1 2.1 伴随算子

**定义** 设  $V$  是  $n$  维欧氏空间,  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 设  $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$ , 使得  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \mathcal{A}^*(\vec{y})$ , 则称  $\mathcal{A}^*$  是  $\mathcal{A}$  的伴随算子.

伴随算子:  $\phi: V \rightarrow V^*$

$$\vec{v} \mapsto L_{\vec{v}}$$

$$\phi(\vec{v}) = 0^*, L_{\vec{v}}(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \in V, \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \ker(\phi) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \phi \text{ 是线性同构.}$$

**定理 2.1** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 则

- (i)  $\mathcal{A}$  的伴随算子存在且唯一
- (ii) 设  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  是  $V$  的一组单位正交基, 且  $\mathcal{A}$  在  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  下的矩阵是  $A$ , 则  $\mathcal{A}$  的伴随算子在  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  下的矩阵是  $A^t$ .