1 第二章线性算子

1.1 §1 线性映射的矩阵

定义 设 V,W 是 F 上的线性空间,Hom(V,W) 是从 V 到 W 的线性映射的集合, 它是 F 上的线性空间.

1.1.1 §1.1 矩阵表示

设 $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ 是 V 的基,$\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_m$ 是 W 的基.$\phi \in Hom(V, W) \forall j \in 1, ..., n$.

1.2 §5 特征子空间的应用

1.2.1 §5.1 线性算子和矩阵的对角化

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\mathcal{A}$ 在 F 中互不相同的特征根的集合称为 $\mathcal{A}$ 在 F 上的谱（spectrum）

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是对角的，则称 $\mathcal{A}$ 是可对角化的。设 $A \in M_n(F)$，如果 A 相似于某个对角矩阵，则称 A 在 F 上是可对角化的。

定理 5.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，则下列断言等价：
(i)$\mathcal{A}$ 可对角化
(ii)$\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，其中 n=dim(V)
(iii)V=$\bigoplus_{\lambda \in spec(\mathcal{A})}$

推论 5.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,dimV=n, 如果 $\mathcal{A}$ 在 F 中有 n 个互不相同的特征根, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化.

定理 5.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$(i)$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 在 F 中可以分解为一次多项式之积 (ii)$\mathcal{A}$ 在每个特征根的代数重数与几何重数相同.

1.2.2 §5.2 复数方阵的三角化

引理 5.2 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间,n>0,$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 有 n-1 维不变子空间.

定理 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 其中 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, 则存在 V 中一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是上三角型的.

推论 5.2 设 A$\in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 相似于一个上三角型矩阵.

引理 5.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间, 定义:
$\overline{\mathcal{A}}:V/U\to V/U$
$\vec{a}+U\mapsto\mathcal{A}(\vec{a})+U$
则 $\overline{\mathcal{A}}\in\mathcal{L}(V/U)$

定义 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间, 则
$\overline{\mathcal{A}}:V/U\to V/U$
$\vec{v}+U\mapsto\mathcal{A}(\vec{v})+U$
称为 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子.

命题 5.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间
$\Pi:V\to V/U$ 自然投射
则 (i) $\Pi\circ\mathcal{A}=\overline{\mathcal{A}}\circ\Pi$, 其中 $\overline{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商映射.
(ii) 设 $\varphi:V/U\to V/U$ 满足 $\pi\circ\mathcal{A}=\varphi\circ\pi$, 则 $\varphi=\overline{\mathcal{A}}$

定理 5.3 设 V 是 n 维线性空间,n>1, 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间,d=dimU>0, 设 $\vec{e}_1,...,\vec{e}_d$ 是 U 的基,$\vec{e}_1,...,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},...,\vec{e}_n$ 是 V 的基. 记 A$|_U$ 为 A_U,$\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子为 $\overline{\mathcal{A}}$. 令 A_U 为 $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ 在 $\vec{e}_1,...,\vec{e}_d$ 下的矩阵.$\overline{A}$ 为 $\overline{\mathcal{A}}$ 在 $\vec{e}_{d+1},...\vec{e}_n$ 下的矩阵, 则 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,...,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},...,\vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix} A_U & B \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix} \tag{1}$$

, 其中 B$\in F^{d\times(n-d)}$

推论 5.2 沿用定理 5.3 中记号,$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)=\mathcal{X}_{\overline{\mathcal{A}}}(t)\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}}}$

命题 5.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$.U 是 $\mathcal{A}$-不变子空间,P$\in F[t]$ 则
(i) U 是 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$-子空间
(ii) 设 $\overline{\mathcal{A}}$ 和 $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ 是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 关于 U 的商算子, 则 $\mathcal{P}(\overline{\mathcal{A}})=P(\overline{A})$

定义 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\vec{v}\in V$, 由 $\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\mathcal{A}^2(\vec{v}),...$ 生成的子空间称为由 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 生成的循环子空间, 记为 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

命题 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V$
(i) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间
(ii) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \{p(\mathcal{A})(\vec{v}) | p \in F[t]\}$
(iii) $dimF[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 为 d$\Leftrightarrow$ $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), ..., \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 的一组基 (这里 $\vec{v} \neq \vec{0}$)

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V, p \in F[t]$
(i) 如果 $p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$, 则称 $p(t)$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式
(ii) 在关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的所有零化多项式中, 非零, 次数最低, 首一的多项式, 称为关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的极小多项式, 记为 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

命题 5.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V$
(i) $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 存在且唯一
(ii) 若 $p \in F[t]$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式, 则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} | p$. 特别地 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} | \mu_{\mathcal{A}}$
(iii) $dim_F F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = deg \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

引理 5.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\vec{v} \in V$, 如果 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 则 $\mu_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$, 特别地 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 $\mathcal{A}$.

Cayley-Hamilton 定理 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 $\mathcal{A}$.

推论 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mu_{\mathcal{A}} | \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, 特别地,$deg \mu_{\mathcal{A}} \leq dimV$

推论 5.4(Cayley-Hamilton 定理的矩阵版) 设 $\mathcal{A} \in M_n(F)$, 则
(i) $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 A
(ii) $\mu_A(t) | \mathcal{X}_A(t)$, 特别地,$deg \mu_A \leq n$

1.3 §6 各种类型的直和分解

1.3.1 §6.1 预备引理

引理 6.1 设 $p_1, ..., p_k, q \in F[t] \backslash \{0\}$
(i) 如果 $\forall i \in \{1, ..., k\}, gcd(p_I, q) = 1$, 则 $gcd(p_1, ..., p_k, q) = 1$
(ii) 如果 $p_1, ..., p_k$ 两两互素, 且 $p_I | q$.

引理 6.2 设 $p_1,...,p_k \in F[t]\backslash\{0\}$ 两两互素, 则 $lcm(p_1,...,p_k)=p_1...p_k$

引理 6.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), f\in F[t]$ 零化 $\mathcal{A}$, 设 $f=pq$, 其中 $p,q\in F[t]\backslash F$ 且 $gcd(p,q)=1$, 令 $K_p=ker(p(\mathcal{A}))$ 和 $K_q=ker(q(\mathcal{A}))$, 则
(i) K_p 和 K_q 是 $\mathcal{A}$-子空间且 $V=K_p\bigoplus K_q$
(ii) $p(\mathcal{A})|_{K_q}$ 和 $q(\mathcal{A})|_{K_p}$ 上都是双射
(iii) 设 $f=\mu_{\mathcal{A}}$ 且 p,q 都首一, 则 p 和 q 分别是 $\mathcal{A}|_{K_q}$ 和 $\mathcal{A}|_{K_q}$ 的极小多项式.

1.3.2 §6.2 广义特征子空间分解

定义 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约因式分解为 $\mu_{\mathcal{A}}=p_1^{m_1}...p_s^{m_s}$, 其中 $p_1,...,p_s\in F[t]\backslash F$, 首一, 不可约, 两两互素,$m_1,...,m_s\in\mathbb{Z}^+$, 则 $ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于因子 p_i 的广义子空间, 记为 $V(p_i)$.

注 $V(p_I)$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

注 书中定义的根子空间是广义子空间的特殊情形, 我们将在之后说明.

定理 6.1 利用上述定义中的记号, 我们有 $V=V(p_1)\bigoplus...\bigoplus V(p_s)$ 且
(i) $p_I^{m_I}$ $\mathcal{A}|_{V(p_i)}$ 的极小多项式
(ii) $p_I(\mathcal{A})$ 在 $V(p_1)\bigoplus...\bigoplus V(p_{i-1})\bigoplus V(p_{i+1})\bigoplus...\bigoplus V(p_s)$ 上是可逆的.

推论 6.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(t)=(t-\alpha_1)...(t-\alpha_m)$, 其中 $\alpha_1,...,\alpha_m\in F$, 两两不同.