

1 代数学引论第一卷

2 第五章复数和多项式

2.1 §1 复数域

2.1.1 §1.1 辅助结构

定义 $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ 在本节中 i 代表 $\sqrt{-1}$

定义 设 $a, b \in \mathbb{R}$, $z = a + bi$, z 的共轭是 $a - bi$, 记为 \bar{z}

引理 1.1 设 $z \in \mathbb{C}$, 则

(i) $z\bar{z} \in \mathbb{R}$

(ii) $z \neq 0 \Leftrightarrow z\bar{z} > 0$

命题 1.1 $\tau: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \bar{z}$ 是同构

2.1.2 §1.2 复数的几何解释

命题 1.2 (i) 设 $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

则 $z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

(ii) 设 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, $n \in \mathbb{N}$, 则 $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(iii) 设 z 同 (ii), $z \neq 0$, 则 $z^{-1} = \frac{1}{|z|} (\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

命题 1.3 方程 $z^n - 1 = 0$ ($n \in \mathbb{Z}^+$) 有 n 个不同的复数解

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

定义 称上述 $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ 为 n 次单位根

定义 设 $\varepsilon_k \in U_n$, 如果 $U_n = \langle \varepsilon_k \rangle$, 则称 ε_k 是 n 次本原单位根