1 第二章线性算子

1.1 §1 线性映射的矩阵

定义 设 V,W 是 F 上的线性空间,Hom(V,W) 是从 V 到 W 的线性映射的集合, 它是 F 上的线性空间.

1.1.1 §1.1 矩阵表示

设 $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ 是 V 的基,$\vec{\varepsilon}_1, ..., \vec{\varepsilon}_m$ 是 W 的基.$\phi \in Hom(V, W) \forall j \in 1, ..., n$.

1.2 §5 特征子空间的应用

1.2.1 §5.1 线性算子和矩阵的对角化

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，$\mathcal{A}$ 在 F 中互不相同的特征根的集合称为 $\mathcal{A}$ 在 F 上的谱（spectrum）

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，如果 $\mathcal{A}$ 在 V 的某组基下的矩阵是对角的，则称 $\mathcal{A}$ 是可对角化的。设 $A \in M_n(F)$，如果 A 相似于某个对角矩阵，则称 A 在 F 上是可对角化的。

定理 5.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$，则下列断言等价：
(i)$\mathcal{A}$ 可对角化
(ii)$\mathcal{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量，其中 n=dim(V)
(iii)V=$\bigoplus_{\lambda \in spec(\mathcal{A})}$

推论 5.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,dimV=n, 如果 $\mathcal{A}$ 在 F 中有 n 个互不相同的特征根, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化.

定理 5.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow$(i)$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 在 F 中可以分解为一次多项式之积 (ii)$\mathcal{A}$ 在每个特征根的代数重数与几何重数相同.

1.2.2 §5.2 复数方阵的三角化

引理 5.2 设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的 n 维线性空间,n>0,$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 有 n-1 维不变子空间.

定理 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 其中 V 是 $\mathbb{C}$ 上 n 维线性空间, 则存在 V 中一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵是上三角型的.

推论 5.2 设 A$\in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 相似于一个上三角型矩阵.

引理 5.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间, 定义:
$\overline{\mathcal{A}}:V/U\to V/U$
$\vec{a}+U\mapsto\mathcal{A}(\vec{a})+U$
则 $\overline{\mathcal{A}}\in\mathcal{L}(V/U)$

定义 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间, 则
$\overline{\mathcal{A}}:V/U\to V/U$
$\vec{v}+U\mapsto\mathcal{A}(\vec{v})+U$
称为 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子.

命题 5.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间
$\Pi:V\to V/U$ 自然投射
则 (i) $\Pi\circ\mathcal{A}=\overline{\mathcal{A}}\circ\Pi$, 其中 $\overline{\mathcal{A}}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 U 的商映射.
(ii) 设 $\varphi:V/U\to V/U$ 满足 $\pi\circ\mathcal{A}=\varphi\circ\pi$, 则 $\varphi=\overline{\mathcal{A}}$

定理 5.3 设 V 是 n 维线性空间,n>1, 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$,U 是 $\mathcal{A}$-子空间,d=dimU>0, 设 $\vec{e}_1,...,\vec{e}_d$ 是 U 的基,$\vec{e}_1,...,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},...,\vec{e}_n$ 是 V 的基. 记 A$|_U$ 为 A_U,$\mathcal{A}$ 关于 U 的商算子为 $\overline{\mathcal{A}}$. 令 A_U 为 $\mathcal{A}_{\mathcal{U}}$ 在 $\vec{e}_1,...,\vec{e}_d$ 下的矩阵.$\overline{A}$ 为 $\overline{\mathcal{A}}$ 在 $\vec{e}_{d+1},...\vec{e}_n$ 下的矩阵, 则 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,...,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},...,\vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$A=\begin{bmatrix} A_U & B \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix} \tag{1}$$

, 其中 B$\in F^{d\times(n-d)}$

推论 5.2 沿用定理 5.3 中记号,$\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)=\mathcal{X}_{\overline{\mathcal{A}}}(t)\mathcal{X}_{\mathcal{A}_{\mathcal{U}}}$

命题 5.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$.U 是 $\mathcal{A}$-不变子空间,P$\in F[t]$ 则
(i) U 是 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$-子空间
(ii) 设 $\overline{\mathcal{A}}$ 和 $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ 是 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 关于 U 的商算子, 则 $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}=P(\overline{\mathcal{A}})$

定义 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V),\vec{v}\in V$, 由 $\vec{v},\mathcal{A}(\vec{v}),\mathcal{A}^2(\vec{v}),...$ 生成的子空间称为由 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 生成的循环子空间, 记为 $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$

命题 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V$
(i) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间
(ii) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \{p(\mathcal{A})(\vec{v}) | p \in F[t]\}$
(iii) $dimF[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 为 d$\Leftrightarrow \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), ..., \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 的一组基 (这里 $\vec{v} \neq \vec{0}$)

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V, p \in F[t]$
(i) 如果 $p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$, 则称 $p(t)$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式
(ii) 在关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的所有零化多项式中, 非零, 次数最低, 首一的多项式, 称为关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的极小多项式, 记为 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

命题 5.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \vec{v} \in V$
(i) $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$ 存在且唯一
(ii) 若 $p \in F[t]$ 是关于 $\mathcal{A}$ 和 $\vec{v}$ 的零化多项式, 则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} | p$. 特别地 $\mu_{\mathcal{A},\vec{v}} | \mu_{\mathcal{A}}$
(iii) $dim_F F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = deg \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}$

引理 5.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\vec{v} \in V$, 如果 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 则 $\mu_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$, 特别地 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 $\mathcal{A}$.

Cayley-Hamilton 定理 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 $\mathcal{A}$.

推论 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mu_{\mathcal{A}} | \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, 特别地,$deg \mu_{\mathcal{A}} \leq dimV$

推论 5.4(Cayley-Hamilton 定理的矩阵版) 设 $\mathcal{A} \in M_n(F)$, 则
(i) $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 A
(ii) $\mu_A(t) | \mathcal{X}_A(t)$, 特别地,$deg \mu_A \leq n$

1.3 §6 各种类型的直和分解

1.3.1 §6.1 预备引理

引理 6.1 设 $p_1, ..., p_k, q \in F[t]\backslash\{0\}$
(i) 如果 $\forall i \in \{1, ..., k\}, gcd(p_I, q) = 1$, 则 $gcd(p_1, ..., p_k, q) = 1$
(ii) 如果 $p_1, ..., p_k$ 两两互素, 且 $p_I|q, i = 1...k$, 则 $(p_1, \cdots, p_k)|q$.

引理 6.2 设 $p_1, ..., p_k \in F[t]\backslash\{0\}$ 两两互素, 则 $lcm(p_1, ..., p_k) = p_1...p_k$

引理 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), f \in F[t]$ 零化 $\mathcal{A}$, 设 $f = pq$, 其中 $p, q \in F[t]\backslash F$ 且 $gcd(p, q) = 1$, 令 $K_p = ker(p(\mathcal{A}))$ 和 $K_q = ker(q(\mathcal{A}))$, 则
(i) K_p 和 K_q 是 $\mathcal{A}$-子空间且 $V = K_p \bigoplus K_q$
(ii) $p(\mathcal{A})|_{K_q}$ 和 $q(\mathcal{A})|_{K_p}$ 上都是双射
(iii) 设 $f = \mu_{\mathcal{A}}$ 且 p, q 都首一, 则 p 和 q 分别是 $\mathcal{A}|_{K_q}$ 和 $\mathcal{A}|_{K_q}$ 的极小多项式.

1.3.2 §6.2 广义特征子空间分解

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约因式分解为 $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1}...p_s^{m_s}$, 其中 $p_1, ..., p_s \in F[t]\backslash F$, 首一, 不可约, 两两互素,$m_1, ..., m_s \in \mathbb{Z}^+$, 则 $ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于因子 p_i 的广义子空间, 记为 $V(p_i)$.

注 $V(p_I)$ 是 $\mathcal{A}$-子空间

注 书中定义的根子空间是广义子空间的特殊情形, 我们将在之后说明.

定理 6.1 利用上述定义中的记号, 我们有 $V = V(p_1) \bigoplus ... \bigoplus V(p_s)$ 且
(i) $p_I^{m_I}$ 是 $\mathcal{A}|_{V(p_i)}$ 的极小多项式
(ii) $p_I(\mathcal{A})$ 在 $V(p_1) \bigoplus ... \bigoplus V(p_{i-1}) \bigoplus V(p_{i+1}) \bigoplus ... \bigoplus V(p_s)$ 上是可逆的.

推论 6.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(t) = (t - \alpha_1)...(t - \alpha_m)$, 其中 $\alpha_1, ..., \alpha_m \in F$, 两两不同.

推论 6.2 设 $\mathcal{A} \in M_n(F)$, 则 $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}} = (t - \alpha_1)...(t - \alpha_s)$, 其中 $\alpha_1, ..., \alpha_s \in F$, 两两不同.

1.3.3 §6.3 循环子空间的分解

命题 5.3 基本性质:
(i) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 是 $\mathcal{A}$-子空间,
(ii) 如果 $d = dimF[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 则 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), ..., \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}]$ 的基
(iii) 如果 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), ..., \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 线性无关, 但 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), ..., \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v}), \mathcal{A}^{d}(\vec{v})$ 线性相关, 则 $d = dimF[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$
(iv) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \{p(\mathcal{A})(\vec{v}) | p \in F[t]\}$

定理 6.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\exists \vec{v}_1, ..., \vec{v}_k \in V$ 使得 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_1 \bigoplus ... \bigoplus F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_k$.

推论 6.3(Cayley-Hamilton 定理的加强版) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,
(i) $\mu_{\mathcal{A}} | \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$
(ii) 设 p 是 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 的一个不可约因子, 则 $p | \mu_{\mathcal{A}}$

推论 6.4 设 $F = \mathbb{C}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则
(i) $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ 的根与 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的根相同 (不计重数)
(ii) $\mathcal{A}$ 可对角化 $\Leftrightarrow gcd(\mu_{\mathcal{A}}, \mu_{\mathcal{A}}^{'}) = 1$

1.3.4 §6.4 根子空间分解

定义 设 $F = \mathbb{C}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \lambda \in spec_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}), \mathcal{A}$ 关于 λ 的根子空间是 $\{\vec{v} \in V | \exists k \in \mathbb{N}, (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$, 记为 $V(\lambda)$

引理 6.4 利用上述定义中的记号, 则 $(t - \lambda) | \mu_{\mathcal{A}}$ 且 $V(t - \lambda) = V(\lambda)$.

1.3.5 §6.5 循环子空间的进一步的性质

命题 6.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 是 $\mathcal{A}$-循环的 $\Leftrightarrow deg(\mu_{\mathcal{A}}) = dimV$.

命题 6.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 V 是 $\mathcal{A}$-循环的, 设 $\mu_{\mathcal{A}} = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + ... + \alpha_0, \vec{v}$ 是 V 关于 $\mathcal{A}$ 的循环向量, 则 $\mathcal{A}$ 在基底 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), ..., \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

1.3.6 §6.3(实为 6.5)$\mathcal{A}$-不可分子空间

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), U \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间, 如果 U 不能写成两个维数为正的 $\mathcal{A}$-子空间的直和, 则称 U 是 $\mathcal{A}$-不可分的 (indecomposable), 否则称为 $\mathcal{A}$-可分的

定理 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 是有限个 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和.

命题 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的 $\Leftrightarrow$
(i) $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 F 上某个不可约多项式的幂次
(ii) V 是 $\mathcal{A}$-循环的.

定理 6.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_l$, 其中 V_i 既是 $\mathcal{A}$-不可分的, 也是 $\mathcal{A}$-循环的, 特别地 $\mathcal{A}|_{V_I}$ 的极小多项式是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次

命题 6.4(复 Jordan 块的存在性) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), F = \mathbb{C}$, 如果 V 是 $\mathcal{A}$-不可分的, 则存在 V 的一组基, 使得 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩阵为

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

,$\lambda \in \mathbb{C}$, 称为关于 λ 的 n 阶 $Jordan$ 块

1.4 §7 复矩阵的 Jordan 标准型 (存在性)

定理 7.1 设 $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{C})$, 则存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathbb{C}$(不必两两不同),$d_1, \cdots, d_l \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$A \sim_s J_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{d_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

注 (1) $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 互不相同的元素组成 $spce_{\mathbb{C}}(A)$

(2) $\mathcal{X}_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_l)^{d_l}$

$\mu_A = lcm((t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_l)^{d_l})$

(3) 如果 $d_1 = \cdots = d_l = 1$, 则

$$J_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_l \end{bmatrix}_{n \times n}$$

即 A 可对角化

注 $d_1, \cdots, d_l$ 是否唯一?l 是否唯一? 即 J_A 是否唯一

1.5 §8 矩阵的准素有理规范型简介

定理 8.1 设 $A \in M_n(F)$, 则存在 $d_1, \cdots, d_l \in \mathbb{Z}^+$, 则存在 $l_1, \cdots, l_s \in \mathbb{Z}^+, p_1, \cdots, p_s \in F[t] \backslash F$ 不可约, 使得

$$A \sim \begin{bmatrix} J_{l_1}(p_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{l_s}(p_s) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

1.6 §9 初等因子组

定义 重集 (multi-sets)-集合中相同的元素允许出现若干次

定义 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_l(*)$,
其中 $V_1, \cdots, V_l$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的, 设 $A_i = \mathcal{A}|_{V_i}, I = 1, \cdots, l$, 则重集 $\{\mu_{\mathcal{A}_1}, \cdots, \mu_{\mathcal{A}_l}\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 $(*)$ 的初等因子组.

目的 (1) 证明初等因子组由 $\mathcal{A}$ 确定, 与 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和分解无关 (2) 通过初等因子组可以"唯一"地确定 *Jordan* 标准型

引理 9.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}, \mu_{\mathcal{A},\vec{v}} = pq$, 其中 $p, q \in F[t] \backslash F$, 首一, 令 $\vec{w} = q(\mathcal{A})(\vec{v})$, 则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$.

引理 9.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 设 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$, 则 $\forall k \in \mathbb{N}$

$$rank(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m-k)deg(p) & 0 \leq k < m \\ 0 & k \geq m \end{cases}$$

引理 9.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), f \in F[t]$, 如果 $U \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-不变的, 则 U 也是 $f(\mathcal{A})-$ 不变的.

引理 9.4 如上假设, 再令 $V = U_1 \bigoplus \cdots \bigoplus U_l$, 其中 $U_1, ..., U_l$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间, 则 $f(\mathcal{A})(V) = f(\mathcal{A})(U_1) \bigoplus \cdots \bigoplus f(\mathcal{A})(U_l)$

定理 9.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$ 不可约, 对 $\forall l \in \mathbb{Z}^+$, 令 n_l 为 p^l 是 $\mathcal{A}$ 关于某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解的初等因子组的重数. 再令 $r_l = rank(p(\mathcal{A})^l)$, 其中 $l \in \mathbb{N}$, 则 $n_l = \frac{1}{d}(r_{l+1} + r_{l-1} - 2r_l)$

定理 9.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}}$ 的两两不同、首一的不可约因子是 $p_1, \cdots, p_s \in F[t]$, 对 $\forall I \in \{1, \cdots, s\}, l \in \mathbb{Z}^+$, 令 $N(i,l)$ 是 p_i^l 在 $\mathcal{A}$ 的某个初等因子组中的重数,$R_{i,l} = rank(p_I(\mathcal{A})^l)$, 则 $N(i,l) = \frac{1}{deg(p_I)}(R_{i,l+1} + R_{i,l-1} - 2R_{i,l})$

1.7 §10 Jordan 标准型的唯一性和应用

2 第三章内积空间

2.1 1 欧氏空间

2.1.1 1.1 内积

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上 n 维线性空间 $f: V \times V \to \mathbb{R}$ 是对称双线性型, 使得 f 对应的二次型是正定的.
双线性:$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$f(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}, \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{z}) + \beta f(\vec{y}, \vec{z})$
$f(\vec{x}, \alpha\vec{y} + \beta\vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{y}) + \beta f(\vec{x}, \vec{z})$
对称:$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{z})$
二次型:$q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$ 正定:$\forall \vec{x} \in V \backslash \{\vec{0}\}, q(\vec{x}) > 0$, 称 (V, f) 是一个欧氏空间, 其中 f 是 V 上的内积

注 设 $\vec{x} \in V$, 则
(i) $\vec{x} \cdot \vec{0} = \vec{0}$
(ii) $\vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

定义 设 $\vec{x} \in V, \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$, 称为 $\vec{x}$ 的长度, 记为 $|\vec{x}|$

定义 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V, |\vec{x} - \vec{y}|$ 称为 $\vec{x}$ 与 $\vec{y}$ 的距离.

命题 1.1 设 V 是欧氏空间
(i) $\forall \vec{x} \in V, \vec{0} \cdot \vec{x} = 0$
(ii) $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

注 在本节中 V 是欧氏空间,$\vec{v} \in V, L_{\vec{v}}: V \to \mathbb{R}\vec{x} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{x}$ 是线性函数, 即 $L_{\vec{v}} \in V^*$

定义 设 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s \in V, G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s) = (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j)_{i=1,\cdots,s, j=1,\cdots,s}$ 称为 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s$ 的 Gram 矩阵,$G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s)$ 是 s 阶实对称方阵

定理 1.1 设 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s \in V$,
$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s)$ 满秩

2.1.2 1.2 长度 (范数) 和距离

定义 设 $\vec{x} \in V, \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ 称为 $\vec{x}$ 的长度或范数, 记为 $|\vec{x}|$ 或 $\|\vec{x}\|$.

命题 1.2(Cauchy-Buniakowski 不等式) 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V, |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$; 等号成立 $\Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ 线性相关

定义 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x}, \vec{y}$ 之间的距离定义为 $|\vec{x} - \vec{y}|$

注 $\vec{x} \in V$, 如果 $|\vec{x}| = 1$, 则称 $\vec{x}$ 是单位向量

2.1.3 1.5 正交矩阵

定义 设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$, 如果 $A^t = A$, 则称 A 是正交矩阵.

定理 1.3 设 V 的一组单位正交基是 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$, 而 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基且 $A \in GL_n(\mathbb{R}), (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)A$, 则 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_n$ 是单位正交基 $\Leftrightarrow A$ 是正交矩阵.

命题 1.3 设 A 是正交矩阵, 则
(i) $det(A) = \pm 1$
(ii) A^t 即 A^{-1} 也是正交矩阵,
(iii) 再设 B 是正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

推论 1.1 令 $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ 正交 }\}$, 则 $O_n(\mathbb{R})$ 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群

2.1.4 1.6 正交相似

定义 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 如果存在 $P \in O_n(\mathbb{R})$, 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 B 与 A 正交相似，记为 $A \sim_o B$

注 如果 $A \sim_o B$, 则 $A_s B$ 且 $A \sim_c B$

问题 给定 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 求 A 在正交相似下的“标准型”

命题 1.4 $\sim_o$ 是等价关系

定义 设 $U \subset V$, 子空间,U 的正交补 $U^{\perp} = \{\vec{v} \in V | \forall \vec{u} \in U, \vec{v} \perp \vec{u}\}$

命题 1.5 设 $U \subset V$, 子空间, 则
(i) $U^{\perp}$ 是子空间
(ii) $V = U \bigoplus U^{\perp}$
(iii) $(U^{\perp})^{\perp} = U$

2.2 2 正规算子与正规矩阵

2.2.1 2.1 伴随算子

定义 设 V 是 n 维欧氏空间,$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 设 $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$, 使得 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$,$\mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \mathcal{A}^*(\vec{y})$, 则称 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.
伴随算子:$\phi : V \to V^*$
$\vec{v} \mapsto L_{\vec{v}}$
$\phi(\vec{v}) = 0^*, L_{\vec{v}}(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \in V, \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow ker(\phi) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \phi$ 是线性同构.

定理 2.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则
(i) $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一
(ii) 设 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基, 且 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 下的矩阵是 A, 则 $\mathcal{A}$ 的伴随算子在 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ 下的矩阵是 A^t.