

# 1 代数学引论第一卷

## 2 第五章复数和多项式

### 2.1 §1 复数域

#### 2.1.1 §1.1 辅助结构

定义  $\mathbb{C} = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$  在本节中  $i$  代表  $\sqrt{-1}$

定义 设  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $z = a + bi$ ,  $z$  的共轭是  $a - bi$ , 记为  $\bar{z}$

引理 1.1 设  $z \in \mathbb{C}$ , 则

(i)  $z\bar{z} \in \mathbb{R}$

(ii)  $z \neq 0 \Leftrightarrow z\bar{z} > 0$

命题 1.1  $\gamma: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $z \mapsto \bar{z}$  是同构

#### 2.1.2 §1.2 复数的几何解释

命题 1.2 (i) 设  $z_1 = |z_1|(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $z_2 = |z_2|(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

则  $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$

(ii) 设  $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , 则  $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$

(iii) 设  $z$  同 (ii),  $z \neq 0$ , 则  $z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$

命题 1.3 方程  $z^n - 1 = 0 (n \in \mathbb{Z}^+)$  有  $n$  个不同的复数解

$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1$

定义 称上述  $\varepsilon_0 \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}$  为  $n$  次单位根

定义 设  $\varepsilon_k \in U_n$ , 如果  $U_n = \langle \varepsilon_k \rangle$ , 则称  $\varepsilon_k$  是  $n$  次本原单位根