

### 0.1 §7 复矩阵的 Jordan 标准型 (存在性)

**定理 7.1** 设  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , 则存在  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$  (不必两两不同),  $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{Z}^+$ , 使得

$$A \sim_s J_A = \begin{bmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

注 (1)  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  互不相同的元素组成  $\text{spce}_{\mathbb{C}}(A)$

(2)  $\chi_A = (t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_l)^{d_l}$

$\mu_A = \text{lcm}((t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_l)^{d_l})$

(3) 如果  $d_1 = \dots = d_l = 1$ , 则

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_l \end{bmatrix}_{n \times n}$$

即  $A$  可对角化

注  $d_1, \dots, d_l$  是否唯一?  $l$  是否唯一? 即  $J_A$  是否唯一

### 0.2 §8 矩阵的准素有理规范型简介

**定理 8.1** 设  $A \in M_n(F)$ , 则存在  $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{Z}^+$ , 则存在  $l_1, \dots, l_s \in \mathbb{Z}^+, p_1, \dots, p_s \in F[t] \setminus F$  不可约, 使得

$$A \sim \begin{bmatrix} J_{l_1}(p_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{l_s}(p_s) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

### 0.3 §9 初等因子组

**定义** 重集 (multi-sets)-集合中相同的元素允许出现若干次

**定义**  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l(*)$ ,

其中  $V_1, \dots, V_l$  是  $\mathcal{A}$ -不可分的, 设  $A_i = \mathcal{A}|_{V_i}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , 则重集  $\{\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_l}\}$  称为  $\mathcal{A}$  关于  $(*)$  的初等因子组.

**目的** (1) 证明初等因子组由  $\mathcal{A}$  确定, 与  $V$  的  $\mathcal{A}$ -不可分子空间的直和分解无关 (2) 通过初等因子组可以“唯一”地确定 *Jordan* 标准型

**引理 9.1** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ ,  $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}} = pq$ , 其中  $p, q \in F[t] \setminus F$ , 首一, 令  $\vec{w} = q(\mathcal{A})(\vec{v})$ , 则  $\mu_{\mathcal{A}, \vec{w}}$ .

**定理 9.1** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$ , 其中  $p \in F[t]$  不可约, 对  $\forall l \in \mathbb{Z}^+$ , 令  $n_l$  为  $p^l$  是  $\mathcal{A}$  关于某个  $\mathcal{A}$ -不可分子空间直和分解的初等因子组的重数. 再令  $r_l = \text{rank}(p(\mathcal{A})^l)$ , 其中  $l \in \mathbb{N}$ , 则  $n_l = \frac{1}{d}(r_{l+1} + r_{l-1} - 2r_l)$