定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子，如果 $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$, 则称 $\mathcal{A}$ 是正规 (normal) 算子. 设 $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{R})$, 如果 $AA^t = A^tA$, 则称 A 是正规矩阵.

注 由定理 2.1 和第二章定理 2.1 可知,$\mathcal{A}$ 是正规算子当且仅当 $\mathcal{A}$ 在某组单位正交基下的矩阵是正规的.

引理 2.1 设 $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 如果 $tr(AA^t) = 0$, 则 $A = O_{m\times n}$

引理 2.2 设 W 是 $\mathcal{R}$ 上 n 维线性空间,$n > 0$,$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 W 有 1 维或 2 维不变子空间.

引理 2.3 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是正规的, 如果

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

, 其中 $A_1 \in M_d(\mathbb{R}), A_2 \in \mathbb{R}^{d\times n-d}, A_3 \in M_{n-d}(\mathbb{R}), 0 < d < n.$, 则 $A_2 = 0$

引理 2.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规, 如果 $U \subset V$ 是 $\mathcal{A}-$ 不变子空间, 则 $U^\perp$ 也是

引理 2.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规, 则存在 $A-$ 不可分子空间 $U_1, \cdots, U_l$ 使得
(i) $V = U_1 \bigoplus \cdots \bigoplus U_l$ (ii) $\forall i, j \in \{1, \cdots\}$