

## 1 第二章线性算子

### 1.1 §1 线性映射的矩阵

**定义** 设  $V, W$  是  $F$  上的线性空间,  $\text{Hom}(V, W)$  是从  $V$  到  $W$  的线性映射的集合, 它是  $F$  上的线性空间.

#### 1.1.1 §1.1 矩阵表示

设  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$  是  $V$  的基,  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$  是  $W$  的基.  $\phi \in \text{Hom}(V, W) \forall j \in 1, \dots, n$ .

### 1.2 §5 特征子空间的应用

#### 1.2.1 §5.1 线性算子和矩阵的对角化

**定义** 设  $A \in \mathcal{L}(V)$ ,  $A$  在  $F$  中互不相同的特征根的集合称为  $A$  在  $F$  上的谱 (spectrum)

**定义** 设  $A \in \mathcal{L}(V)$ , 如果  $A$  在  $V$  的某组基下的矩阵是对角的, 则称  $A$  是可对角化的。设  $A \in M_n(F)$ , 如果  $A$  相似于某个对角矩阵, 则称  $A$  在  $F$  上是可对角化的。

**定理 5.1** 设  $A \in \mathcal{L}(V)$ , 则下列断言等价:

- (i)  $A$  可对角化
- (ii)  $A$  有  $n$  个线性无关的特征向量, 其中  $n = \dim(V)$
- (iii)  $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} V_\lambda$

**推论 5.1** 设  $A \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\dim V = n$ , 如果  $A$  在  $F$  中有  $n$  个互不相同的特征根, 则  $A$  可对角化.

**定理 5.2** 设  $A \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $A$  可对角化  $\Leftrightarrow$  (i)  $\mathcal{X}_A$  在  $F$  中可以分解为一次多项式之积 (ii)  $A$  在每个特征根的代数重数与几何重数相同.

#### 1.2.2 §5.2 复数方阵的三角化

**引理 5.2** 设  $V$  是  $\mathbb{C}$  上的  $n$  维线性空间,  $n > 0$ ,  $A \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $A$  有  $n-1$  维不变子空间.

**定理 5.3** 设  $A \in \mathcal{L}(V)$ , 其中  $V$  是  $\mathbb{C}$  上  $n$  维线性空间, 则存在  $V$  中一组基, 使得  $A$  在该基下的矩阵是上三角型的.

**推论 5.2** 设  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , 则  $A$  相似于一个上三角型矩阵.

**引理 5.3** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $U$  是  $\mathcal{A}$ -子空间, 定义:

$$\overline{\mathcal{A}}: V/U \rightarrow V/U$$

$$\vec{a} + U \mapsto \mathcal{A}(\vec{a}) + U$$

则  $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V/U)$

**定义** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $U$  是  $\mathcal{A}$ -子空间, 则

$$\overline{\mathcal{A}}: V/U \rightarrow V/U$$

$$\vec{v} + U \mapsto \mathcal{A}(\vec{v}) + U$$

称为  $\mathcal{A}$  关于  $U$  的商算子.

**命题 5.1** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $U$  是  $\mathcal{A}$ -子空间

$\Pi: V \rightarrow V/U$  自然投射

则 (i)  $\Pi \circ \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \circ \Pi$ , 其中  $\overline{\mathcal{A}}$  是  $\mathcal{A}$  关于  $U$  的商映射.

(ii) 设  $\varphi: V/U \rightarrow V/U$  满足  $\Pi \circ \mathcal{A} = \varphi \circ \Pi$ , 则  $\varphi = \overline{\mathcal{A}}$

**定理 5.3** 设  $V$  是  $n$  维线性空间,  $n > 1$ , 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $U$  是  $\mathcal{A}$ -子空间,  $d = \dim U > 0$ , 设  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d$  是  $U$  的基,  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n$  是  $V$  的基. 记  $A|_U$  为  $A_U$ ,  $\mathcal{A}$  关于  $U$  的商算子为  $\overline{\mathcal{A}}$ . 令  $A_U$  为  $\mathcal{A}_U$  在  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d$  下的矩阵.  $\overline{A}$  为  $\overline{\mathcal{A}}$  在  $\vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n$  下的矩阵, 则  $\mathcal{A}$  在  $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n$  下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} A_U & B \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix} \quad (1)$$

, 其中  $B \in F^{d \times (n-d)}$

**推论 5.2** 沿用定理 5.3 中记号,  $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{X}_{\overline{\mathcal{A}}}(t) \mathcal{X}_{A_U}$

**命题 5.2** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ .  $U$  是  $\mathcal{A}$ -不变子空间,  $P \in F[t]$  则

(i)  $U$  是  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ -子空间

(ii) 设  $\overline{\mathcal{A}}$  和  $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$  是  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$  关于  $U$  的商算子, 则  $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})} = \mathcal{P}(\overline{\mathcal{A}})$

**定义** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\vec{v} \in V$ , 由  $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \mathcal{A}^2(\vec{v}), \dots$  生成的子空间称为由  $\mathcal{A}$  和  $\vec{v}$  生成的循环子空间, 记为  $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$

**命题 5.3** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\vec{v} \in V$

- (i)  $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$  是  $\mathcal{A}$ -子空间
- (ii)  $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \{p(\mathcal{A})(\vec{v}) | p \in F[t]\}$
- (iii)  $\dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$  为  $d \Leftrightarrow \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$  是  $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$  的一组基 (这里  $\vec{v} \neq \vec{0}$ )

**定义** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\vec{v} \in V$ ,  $p \in F[t]$

- (i) 如果  $p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$ , 则称  $p(t)$  是关于  $\mathcal{A}$  和  $\vec{v}$  的零化多项式
- (ii) 在关于  $\mathcal{A}$  和  $\vec{v}$  的所有零化多项式中, 非零, 次数最低, 首一的多项式, 称为关于  $\mathcal{A}$  和  $\vec{v}$  的极小多项式, 记为  $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}}$

**命题 5.4** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ ,  $\vec{v} \in V$

- (i)  $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}}$  存在且唯一
- (ii) 若  $p \in F[t]$  是关于  $\mathcal{A}$  和  $\vec{v}$  的零化多项式, 则  $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}} | p$ . 特别地  $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}} | \mu_{\mathcal{A}}$
- (iii)  $\dim_F F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \deg \mu_{\mathcal{A}, \vec{v}}$

**引理 5.4** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$  且  $\vec{v} \in V$ , 如果  $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ , 则  $\mu_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ , 特别地  $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$  零化  $\mathcal{A}$ .

**Cayley-Hamilton 定理** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$  零化  $\mathcal{A}$ .

**推论 5.3** 设  $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ , 则  $\mu_{\mathcal{A}} | \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$ , 特别地,  $\deg \mu_{\mathcal{A}} \leq \dim V$

**推论 5.4 (Cayley-Hamilton 定理的矩阵版)** 设  $A \in M_n(F)$ , 则

- (i)  $\mathcal{X}_A(t)$  零化  $A$
- (ii)  $\mu_A(t) | \mathcal{X}_A(t)$ , 特别地,  $\deg \mu_A \leq n$