0.0.1 1.1

命题 1.1 设 V 是欧氏空间
(i) $\forall \vec{x} \in V, \vec{0} \cdot \vec{x} = 0$
(ii) $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$

注 在本节中 V 是欧氏空间,$\vec{v} \in V, L_{\vec{v}} : V \to \mathbb{R}\vec{x} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{x}$ 是线性函数, 即 $L_{\vec{v}} \in V^*$

定义 设 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s \in V, G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s) = (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j)_{i=1,\cdots,s,j=1,\cdots,s}$ 称为 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s$ 的 Gram 矩阵,$G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s)$ 是 s 阶实对称方阵

定理 1.1 设 $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s \in V$,
$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow G(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_s)$ 满秩

0.0.2 1.2 长度 (范数) 和距离

定义 设 $\vec{x} \in V, \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ 称为 $\vec{x}$ 的长度或范数, 记为 $|\vec{x}|$ 或 $\|\vec{x}\|$.

命题 1.2(Cauchy-Buniakowski 不等式) 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V, |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}||\vec{y}|$; 等号成立 $\Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ 线性相关

定义 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V, \vec{x}, \vec{y}$ 之间的距离定义为 $|\vec{x} - \vec{y}|$

注 $\vec{x} \in V$, 如果 $|\vec{x}| = 1$, 则称 $\vec{x}$ 是单位向量

0.0.3 1.5 正交矩阵

定义 设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$, 如果 $A^t = A$, 则称 A 是正交矩阵.

定理 1.3 设 V 的一组单位正交基是 $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$, 而 $\vec{\varepsilon}_1, \cdots, \vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基且 $A \in GL_n(\mathbb{R}), (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)A$, 则 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_n$ 是单位正交基 $\Leftrightarrow A$ 是正交矩阵.

命题 1.3 设 A 是正交矩阵, 则
(i) $det(A) = \pm 1$
(ii) A^t 即 A^{-1} 也是正交矩阵,
(iii) 再设 B 是正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

推论 1.1 令 $O_n(\mathbb{R})=\{A\in GL_n(\mathbb{R})|A$ 正交 $\}$, 则 $O_n(\mathbb{R})$ 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群

0.0.4 1.6 正交相似

定义 设 $A,B\in M_n(\mathbb{R})$, 如果存在 $P\in O_n(\mathbb{R})$, 使得 $B=P^{-1}AP$, 则称 B 与 A 正交相似，记为 $A\sim_o B$

注 如果 $A\sim_o B$, 则 A_sB 且 $A\sim_c B$

问题 给定 $A\in M_n(\mathbb{R})$, 求 A 在正交相似下的“标准型”

命题 1.4 $\sim_o$ 是等价关系

定义 设 $U\subset V$, 子空间,U 的正交补 $U^{\perp}=\{\vec{v}\in V|\forall\vec{u}\in U,\vec{v}\perp\vec{u}\}$

命题 1.5 设 $U\subset V$, 子空间, 则
(i) $U^{\perp}$ 是子空间
(ii) $V=U\bigoplus U^{\perp}$
(iii) $(U^{\perp})^{\perp}=U$

0.1 2 正规算子与正规矩阵

0.1.1 2.1 伴随算子

定义 设 V 是 n 维欧氏空间,$\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, 设 $\mathcal{A}^*\in\mathcal{L}(V)$, 使得 $\forall\vec{x},\vec{y}\in V$,$\mathcal{A}(\vec{x})\cdot\vec{y}=\vec{x}\cdot\mathcal{A}^*(\vec{y})$, 则称 $\mathcal{A}^*$ 是 $\mathcal{A}$ 的伴随算子.
伴随算子:$\phi:V\to V^*$
$\vec{v}\mapsto L_{\vec{v}}$
$\phi(\vec{v})=0^*,L_{\vec{v}}(\vec{u})=0\Leftrightarrow\vec{u}\in V,\vec{v}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow ker(\phi)=\{\vec{0}\}\Leftrightarrow\phi$ 是线性同构.

定理 2.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, 则
(i) $\mathcal{A}$ 的伴随算子存在且唯一
(ii) 设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基, 且 $\mathcal{A}$ 在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是 A, 则 $\mathcal{A}$ 的伴随算子在 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n$ 下的矩阵是 A^t.