

1 第二章

1.1 §6 各种类型的直和分解

1.1.1 §6.1 预备引理

引理 6.1 设 $p_1, \dots, p_k, q \in F[t] \setminus \{0\}$

- (i) 如果 $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \gcd(p_i, q) = 1$, 则 $\gcd(p_1, \dots, p_k, q) = 1$
- (ii) 如果 p_1, \dots, p_k 两两互素, 且 $p_i | q, i = 1 \dots k$, 则 $(p_1, \dots, p_k) | q$.

引理 6.2 设 $p_1, \dots, p_k \in F[t] \setminus \{0\}$ 两两互素, 则 $\text{lcm}(p_1, \dots, p_k) = p_1 \dots p_k$

引理 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), f \in F[t]$ 零化 \mathcal{A} , 设 $f = pq$, 其中 $p, q \in F[t] \setminus F$ 且 $\gcd(p, q) = 1$, 令 $K_p = \ker(p(\mathcal{A}))$ 和 $K_q = \ker(q(\mathcal{A}))$, 则

- (i) K_p 和 K_q 是 \mathcal{A} -子空间且 $V = K_p \oplus K_q$
- (ii) $p(\mathcal{A})|_{K_q}$ 和 $q(\mathcal{A})|_{K_p}$ 上都是双射
- (iii) 设 $f = \mu_{\mathcal{A}}$ 且 p, q 都首一, 则 p 和 q 分别是 $\mathcal{A}|_{K_q}$ 和 $\mathcal{A}|_{K_p}$ 的极小多项式.

1.1.2 §6.2 广义特征子空间分解

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约因式分解为 $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$, 其中 $p_1, \dots, p_s \in F[t] \setminus F$, 首一, 不可约, 两两互素, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}^+$, 则 $\ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$ 称为 \mathcal{A} 关于因子 p_i 的广义子空间, 记为 $V(p_i)$.

注 $V(p_i)$ 是 \mathcal{A} -子空间

注 书中定义的根本子空间是广义子空间的特殊情形, 我们将在之后说明.

定理 6.1 利用上述定义中的记号, 我们有 $V = V(p_1) \oplus \dots \oplus V(p_s)$ 且

- (i) $p_i^{m_i}$ 是 $\mathcal{A}|_{V(p_i)}$ 的极小多项式
- (ii) $p_i(\mathcal{A})$ 在 $V(p_1) \oplus \dots \oplus V(p_{i-1}) \oplus V(p_{i+1}) \oplus \dots \oplus V(p_s)$ 上是可逆的.

推论 6.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 \mathcal{A} 可对角化 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(t) = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_m)$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$, 两两不同.

推论 6.2 设 $\mathcal{A} \in M_n(F)$, 则 \mathcal{A} 可对角化 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}} = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_s)$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in F$, 两两不同.

1.1.3 §6.3 循环子空间的分解

命题 5.3 基本性质:

- (i) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 是 \mathcal{A} -子空间,
- (ii) 如果 $d = \dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 则 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}]$ 的基
- (iii) 如果 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 线性无关, 但 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v}), \mathcal{A}^d(\vec{v})$ 线性相关, 则 $d = \dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$
- (iv) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \{p(\mathcal{A})(\vec{v}) | p \in F[t]\}$

定理 6.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\exists \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ 使得 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_1 \oplus \dots \oplus F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_k$.

推论 6.3 (Cayley-Hamilton 定理的加强版) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,

- (i) $\mu_{\mathcal{A}} | \chi_{\mathcal{A}}$
- (ii) 设 p 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的一个不可约因子, 则 $p | \mu_{\mathcal{A}}$

推论 6.4 设 $F = \mathbb{C}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则

- (i) $\chi_{\mathcal{A}}$ 的根与 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的根相同 (不计重数)
- (ii) \mathcal{A} 可对角化 $\Leftrightarrow \gcd(\mu_{\mathcal{A}}, \mu'_{\mathcal{A}}) = 1$

1.1.4 §6.4 根子空间分解

定义 设 $F = \mathbb{C}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A})$, \mathcal{A} 关于 λ 的根子空间是 $\{\vec{v} \in V | \exists k \in \mathbb{N}, (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$, 记为 $V(\lambda)$

引理 6.4 利用上述定义中的记号, 则 $(t - \lambda) | \mu_{\mathcal{A}}$ 且 $V(t - \lambda) = V(\lambda)$.

1.1.5 §6.5 循环子空间的进一步的性质

命题 6.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 是 \mathcal{A} -循环的 $\Leftrightarrow \deg(\mu_{\mathcal{A}}) = \dim V$.

命题 6.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 V 是 \mathcal{A} -循环的, 设 $\mu_{\mathcal{A}} = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_0$, \vec{v} 是 V 关于 \mathcal{A} 的循环向量, 则 \mathcal{A} 在基底 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

1.1.6 §6.3(实为 6.5) \mathcal{A} -不可分子空间

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $U \subset V$ 是 \mathcal{A} -子空间, 如果 U 不能写成两个维数为正的 \mathcal{A} -子空间的直和, 则称 U 是 \mathcal{A} -不可分的 (indecomposable), 否则称为 \mathcal{A} -可分的

定理 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 是有限个 \mathcal{A} -不可分子空间的直和.

命题 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 是 \mathcal{A} -不可分的 \Leftrightarrow

- (i) $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 F 上某个不可约多项式的幂次
- (ii) V 是 \mathcal{A} -循环的.

定理 6.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$, 其中 V_i 既是 \mathcal{A} -不可分的, 也是 \mathcal{A} -循环的, 特别地 $\mathcal{A}|_{V_i}$ 的极小多项式是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次

命题 6.4(复 Jordan 块的存在性) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $F = \mathbb{C}$, 如果 V 是 \mathcal{A} -不可分的, 则存在 V 的一组基, 使得 \mathcal{A} 在该基下的矩阵为

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

, $\lambda \in \mathbb{C}$, 称为关于 λ 的 n 阶 *Jordan 块*