

1 第二章线性算子

1.1 §1 线性映射的矩阵

定义 设 V, W 是 F 上的线性空间, $\text{Hom}(V, W)$ 是从 V 到 W 的线性映射的集合, 它是 F 上的线性空间.

1.1.1 §1.1 矩阵表示

设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的基, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$ 是 W 的基. $\phi \in \text{Hom}(V, W) \forall j \in 1, \dots, n$.

1.2 §5 特征子空间的应用

1.2.1 §5.1 线性算子和矩阵的对角化

定义 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, A 在 F 中互不相同的特征根的集合称为 A 在 F 上的谱 (spectrum)

定义 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, 如果 A 在 V 的某组基下的矩阵是对角的, 则称 A 是可对角化的. 设 $A \in M_n(F)$, 如果 A 相似于某个对角矩阵, 则称 A 在 F 上是可对角化的.

定理 5.1 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, 则下列断言等价:

- (i) A 可对角化
- (ii) A 有 n 个线性无关的特征向量, 其中 $n = \dim(V)$
- (iii) $V = \bigoplus_{\lambda \in \text{spec}(A)} V_\lambda$

推论 5.1 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n$, 如果 A 在 F 中有 n 个互不相同的特征根, 则 A 可对角化.

定理 5.2 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, 则 A 可对角化 \Leftrightarrow (i) \mathcal{X}_A 在 F 中可以分解为一次多项式之积 (ii) A 在每个特征根的代数重数与几何重数相同.

1.2.2 §5.2 复数方阵的三角化

引理 5.2 设 V 是 \mathbb{C} 上的 n 维线性空间, $n > 0$, $A \in \mathcal{L}(V)$, 则 A 有 $n-1$ 维不变子空间.

定理 5.3 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, 其中 V 是 \mathbb{C} 上 n 维线性空间, 则存在 V 中一组基, 使得 A 在该基下的矩阵是上三角型的.

推论 5.2 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则 A 相似于一个上三角型矩阵.

引理 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 \mathcal{A} -子空间, 定义:

$$\overline{\mathcal{A}}: V/U \rightarrow V/U$$

$$\vec{a} + U \mapsto \mathcal{A}(\vec{a}) + U$$

则 $\overline{\mathcal{A}} \in \mathcal{L}(V/U)$

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 \mathcal{A} -子空间, 则

$$\overline{\mathcal{A}}: V/U \rightarrow V/U$$

$$\vec{v} + U \mapsto \mathcal{A}(\vec{v}) + U$$

称为 \mathcal{A} 关于 U 的商算子.

命题 5.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 \mathcal{A} -子空间

$\Pi: V \rightarrow V/U$ 自然投射

则 (i) $\Pi \circ \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}} \circ \Pi$, 其中 $\overline{\mathcal{A}}$ 是 \mathcal{A} 关于 U 的商映射.

(ii) 设 $\varphi: V/U \rightarrow V/U$ 满足 $\Pi \circ \mathcal{A} = \varphi \circ \Pi$, 则 $\varphi = \overline{\mathcal{A}}$

定理 5.3 设 V 是 n 维线性空间, $n > 1$, 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U 是 \mathcal{A} -子空间, $d = \dim U > 0$, 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d$ 是 U 的基, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的基. 记 $A|_U$ 为 A_U , \mathcal{A} 关于 U 的商算子为 $\overline{\mathcal{A}}$. 令 A_U 为 \mathcal{A}_U 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d$ 下的矩阵. \overline{A} 为 $\overline{\mathcal{A}}$ 在 $\vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵, 则 \mathcal{A} 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d, \vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵是

$$A = \begin{bmatrix} A_U & B \\ 0 & \overline{A} \end{bmatrix} \quad (1)$$

, 其中 $B \in F^{d \times (n-d)}$

推论 5.2 沿用定理 5.3 中记号, $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{X}_{\overline{\mathcal{A}}}(t) \mathcal{X}_{A_U}$

命题 5.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. U 是 \mathcal{A} -不变子空间, $P \in F[t]$ 则

(i) U 是 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ -子空间

(ii) 设 $\overline{\mathcal{A}}$ 和 $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})}$ 是 \mathcal{A} 和 $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ 关于 U 的商算子, 则 $\overline{\mathcal{P}(\mathcal{A})} = \mathcal{P}(\overline{\mathcal{A}})$

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\vec{v} \in V$, 由 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \mathcal{A}^2(\vec{v}), \dots$ 生成的子空间称为由 \mathcal{A} 和 \vec{v} 生成的循环子空间, 记为 $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$

命题 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\vec{v} \in V$

- (i) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 是 \mathcal{A} -子空间
- (ii) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \{p(\mathcal{A})(\vec{v}) | p \in F[t]\}$
- (iii) $\dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 为 $d \Leftrightarrow \vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 的一组基 (这里 $\vec{v} \neq \vec{0}$)

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\vec{v} \in V$, $p \in F[t]$

- (i) 如果 $p(\mathcal{A})(\vec{v}) = \vec{0}$, 则称 $p(t)$ 是关于 \mathcal{A} 和 \vec{v} 的零化多项式
- (ii) 在关于 \mathcal{A} 和 \vec{v} 的所有零化多项式中, 非零, 次数最低, 首一的多项式, 称为关于 \mathcal{A} 和 \vec{v} 的极小多项式, 记为 $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}}$

命题 5.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\vec{v} \in V$

- (i) $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}}$ 存在且唯一
- (ii) 若 $p \in F[t]$ 是关于 \mathcal{A} 和 \vec{v} 的零化多项式, 则 $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}} | p$. 特别地 $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}} | \mu_{\mathcal{A}}$
- (iii) $\dim_F F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \deg \mu_{\mathcal{A}, \vec{v}}$

引理 5.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 $\vec{v} \in V$, 如果 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 则 $\mu_{\mathcal{A}}(t) = \mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$, 特别地 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 \mathcal{A} .

Cayley-Hamilton 定理 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mathcal{X}_{\mathcal{A}}(t)$ 零化 \mathcal{A} .

推论 5.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\mu_{\mathcal{A}} | \mathcal{X}_{\mathcal{A}}$, 特别地, $\deg \mu_{\mathcal{A}} \leq \dim V$

推论 5.4 (Cayley-Hamilton 定理的矩阵版) 设 $A \in M_n(F)$, 则

- (i) $\mathcal{X}_A(t)$ 零化 A
- (ii) $\mu_A(t) | \mathcal{X}_A(t)$, 特别地, $\deg \mu_A \leq n$

1.3 §6 各种类型的直和分解

1.3.1 §6.1 预备引理

引理 6.1 设 $p_1, \dots, p_k, q \in F[t] \setminus \{0\}$

- (i) 如果 $\forall i \in \{1, \dots, k\}, \gcd(p_i, q) = 1$, 则 $\gcd(p_1, \dots, p_k, q) = 1$
- (ii) 如果 p_1, \dots, p_k 两两互素, 且 $p_i | q, i = 1 \dots k$, 则 $(p_1, \dots, p_k) | q$.

引理 6.2 设 $p_1, \dots, p_k \in F[t] \setminus \{0\}$ 两两互素, 则 $\text{lcm}(p_1, \dots, p_k) = p_1 \dots p_k$

引理 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), f \in F[t]$ 零化 \mathcal{A} , 设 $f = pq$, 其中 $p, q \in F[t] \setminus F$ 且 $\gcd(p, q) = 1$, 令 $K_p = \ker(p(\mathcal{A}))$ 和 $K_q = \ker(q(\mathcal{A}))$, 则

- (i) K_p 和 K_q 是 \mathcal{A} -子空间且 $V = K_p \oplus K_q$
- (ii) $p(\mathcal{A})|_{K_q}$ 和 $q(\mathcal{A})|_{K_p}$ 上都是双射
- (iii) 设 $f = \mu_{\mathcal{A}}$ 且 p, q 都首一, 则 p 和 q 分别是 $\mathcal{A}|_{K_q}$ 和 $\mathcal{A}|_{K_p}$ 的极小多项式.

1.3.2 §6.2 广义特征子空间分解

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}}$ 在 $F[t]$ 中的不可约因式分解为 $\mu_{\mathcal{A}} = p_1^{m_1} \dots p_s^{m_s}$, 其中 $p_1, \dots, p_s \in F[t] \setminus F$, 首一, 不可约, 两两互素, $m_1, \dots, m_s \in \mathbb{Z}^+$, 则 $\ker(p_i^{m_i}(\mathcal{A}))$ 称为 \mathcal{A} 关于因子 p_i 的广义子空间, 记为 $V(p_i)$.

注 $V(p_i)$ 是 \mathcal{A} -子空间

注 书中定义的根本子空间是广义子空间的特殊情形, 我们将在之后说明.

定理 6.1 利用上述定义中的记号, 我们有 $V = V(p_1) \oplus \dots \oplus V(p_s)$ 且

- (i) $p_i^{m_i}$ 是 $\mathcal{A}|_{V(p_i)}$ 的极小多项式
- (ii) $p_i(\mathcal{A})$ 在 $V(p_1) \oplus \dots \oplus V(p_{i-1}) \oplus V(p_{i+1}) \oplus \dots \oplus V(p_s)$ 上是可逆的.

推论 6.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 \mathcal{A} 可对角化 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}}(t) = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_m)$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in F$, 两两不同.

推论 6.2 设 $\mathcal{A} \in M_n(F)$, 则 \mathcal{A} 可对角化 $\Leftrightarrow \mu_{\mathcal{A}} = (t - \alpha_1) \dots (t - \alpha_s)$, 其中 $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in F$, 两两不同.

1.3.3 §6.3 循环子空间的分解

命题 5.3 基本性质:

- (i) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$ 是 \mathcal{A} -子空间,
- (ii) 如果 $d = \dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 则 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 是 $F[\mathcal{A}]$ 的基
- (iii) 如果 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v})$ 线性无关, 但 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{d-1}(\vec{v}), \mathcal{A}^d(\vec{v})$ 线性相关, 则 $d = \dim F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$
- (iv) $F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v} = \{p(\mathcal{A})(\vec{v}) | p \in F[t]\}$

定理 6.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $\exists \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k \in V$ 使得 $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_1 \oplus \dots \oplus F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}_k$.

推论 6.3(Cayley-Hamilton 定理的加强版) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$,

- (i) $\mu_{\mathcal{A}} | \chi_{\mathcal{A}}$
- (ii) 设 p 是 $\chi_{\mathcal{A}}$ 的一个不可约因子, 则 $p | \mu_{\mathcal{A}}$

推论 6.4 设 $F = \mathbb{C}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则

- (i) $\chi_{\mathcal{A}}$ 的根与 $\mu_{\mathcal{A}}$ 的根相同 (不计重数)
- (ii) \mathcal{A} 可对角化 $\Leftrightarrow \gcd(\mu_{\mathcal{A}}, \mu'_{\mathcal{A}}) = 1$

1.3.4 §6.4 根子空间分解

定义 设 $F = \mathbb{C}, \mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \lambda \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}), \mathcal{A}$ 关于 λ 的根子空间是 $\{\vec{v} \in V | \exists k \in \mathbb{N}, (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^k(\vec{v}) = \vec{0}\}$, 记为 $V(\lambda)$

引理 6.4 利用上述定义中的记号, 则 $(t - \lambda) | \mu_{\mathcal{A}}$ 且 $V(t - \lambda) = V(\lambda)$.

1.3.5 §6.5 循环子空间的进一步的性质

命题 6.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 是 \mathcal{A} -循环的 $\Leftrightarrow \deg(\mu_{\mathcal{A}}) = \dim V$.

命题 6.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 V 是 \mathcal{A} -循环的, 设 $\mu_{\mathcal{A}} = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \dots + \alpha_0$, \vec{v} 是 V 关于 \mathcal{A} 的循环向量, 则 \mathcal{A} 在基底 $\vec{v}, \mathcal{A}(\vec{v}), \dots, \mathcal{A}^{n-1}(\vec{v})$ 下的矩阵是

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

1.3.6 §6.3(实为 6.5) \mathcal{A} -不可分子空间

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $U \subset V$ 是 \mathcal{A} -子空间, 如果 U 不能写成两个维数为正的 \mathcal{A} -子空间的直和, 则称 U 是 \mathcal{A} -不可分的 (indecomposable), 否则称为 \mathcal{A} -可分的

定理 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 是有限个 \mathcal{A} -不可分子空间的直和.

命题 6.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 V 是 \mathcal{A} -不可分的 \Leftrightarrow

- (i) $\mu_{\mathcal{A}}$ 是 F 上某个不可约多项式的幂次
- (ii) V 是 \mathcal{A} -循环的.

定理 6.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_l$, 其中 V_i 既是 \mathcal{A} -不可分的, 也是 \mathcal{A} -循环的, 特别地 $\mathcal{A}|_{V_i}$ 的极小多项式是 $F[t]$ 中某个不可约多项式的幂次

命题 6.4(复 Jordan 块的存在性) 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $F = \mathbb{C}$, 如果 V 是 \mathcal{A} -不可分的, 则存在 V 的一组基, 使得 \mathcal{A} 在该基下的矩阵为

$$J_n(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$$

, $\lambda \in \mathbb{C}$, 称为关于 λ 的 n 阶 *Jordan* 块

1.4 §7 复矩阵的 Jordan 标准型 (存在性)

定理 7.1 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 则存在 $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{C}$ (不必两两不同), $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$A \sim_s J_A = \begin{bmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{d_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

注 (1) $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ 互不相同的元素组成 $\text{spce}_{\mathbb{C}}(A)$

(2) $\chi_A = (t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_l)^{d_l}$

$\mu_A = \text{lcm}((t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_l)^{d_l})$

(3) 如果 $d_1 = \dots = d_l = 1$, 则

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_l \end{bmatrix}_{n \times n}$$

即 A 可对角化

注 d_1, \dots, d_l 是否唯一? l 是否唯一? 即 J_A 是否唯一

1.5 §8 矩阵的准素有理规范型简介

定理 8.1 设 $A \in M_n(F)$, 则存在 $d_1, \dots, d_l \in \mathbb{Z}^+$, 则存在 $l_1, \dots, l_s \in \mathbb{Z}^+, p_1, \dots, p_s \in F[t] \setminus F$ 不可约, 使得

$$A \sim \begin{bmatrix} J_{l_1}(p_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{l_s}(p_s) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

1.6 §9 初等因子组

定义 重集 (multi-sets)-集合中相同的元素允许出现若干次

定义 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l(*)$,

其中 V_1, \dots, V_l 是 \mathcal{A} -不可分的, 设 $A_i = \mathcal{A}|_{V_i}$, $i = 1, \dots, l$, 则重集 $\{\mu_{A_1}, \dots, \mu_{A_l}\}$ 称为 \mathcal{A} 关于 $(*)$ 的初等因子组.

目的 (1) 证明初等因子组由 \mathcal{A} 确定, 与 V 的 \mathcal{A} -不可分子空间的直和分解无关 (2) 通过初等因子组可以“唯一”地确定 *Jordan* 标准型

引理 9.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, $\mu_{\mathcal{A}, \vec{v}} = pq$, 其中 $p, q \in F[t] \setminus F$, 首一, 令 $\vec{w} = q(\mathcal{A})(\vec{v})$, 则 $\mu_{\mathcal{A}, \vec{w}}$.

引理 9.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}$, 设 $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$, 则 $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\text{rank}(p(\mathcal{A})^k) = \begin{cases} (m-k)\deg(p) & 0 \leq k < m \\ 0 & k \geq m \end{cases}$$

引理 9.3 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $f \in F[t]$, 如果 $U \subset V$ 是 \mathcal{A} -不变的, 则 U 也是 $f(\mathcal{A})$ -不变的.

引理 9.4 如上假设, 再令 $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_l$, 其中 U_1, \dots, U_l 是 \mathcal{A} -不变子空间, 则 $f(\mathcal{A})(V) = f(\mathcal{A})(U_1) \oplus \cdots \oplus f(\mathcal{A})(U_l)$

定理 9.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$ 不可约, 对 $\forall l \in \mathbb{Z}^+$, 令 n_l 为 p^l 是 \mathcal{A} 关于某个 \mathcal{A} -不可分子空间直和分解的初等因子组的重数. 再令 $r_l = \text{rank}(p(\mathcal{A})^l)$, 其中 $l \in \mathbb{N}$, 则 $n_l = \frac{1}{d}(r_{l+1} + r_{l-1} - 2r_l)$

定理 9.2 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $\mu_{\mathcal{A}}$ 的两两不同、首一的不可约因子是 $p_1, \dots, p_s \in F[t]$, 对 $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, 令 $N(i, l)$ 是 p_i^l 在 \mathcal{A} 的某个初等因子组中的重数, $R_{i,l} = \text{rank}(p_i(\mathcal{A})^l)$, 则 $N(i, l) = \frac{1}{\deg(p_i)}(R_{i,l+1} + R_{i,l-1} - 2R_{i,l})$

1.7 §10 Jordan 标准型的唯一性和应用

2 第三章内积空间

2.1 1 欧氏空间

2.1.1 1.1 内积

设 V 是 \mathbb{R} 上 n 维线性空间 $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ 是对称双线性型, 使得 f 对应的二次型是正定的.

双线性: $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R},$

$$f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}, \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{z}) + \beta f(\vec{y}, \vec{z})$$

$$f(\vec{x}, \alpha \vec{y} + \beta \vec{z}) = \alpha f(\vec{x}, \vec{y}) + \beta f(\vec{x}, \vec{z})$$

对称: $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$

二次型: $q(\vec{x}) = f(\vec{x}, \vec{x})$ 正定: $\forall \vec{x} \in V \setminus \{\vec{0}\}, q(\vec{x}) > 0$, 称 (V, f) 是一个欧氏空间, 其中 f 是 V 上的内积

注 设 $\vec{x} \in V$, 则

$$(i) \vec{x} \cdot \vec{0} = 0$$

$$(ii) \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

定义 设 $\vec{x} \in V, \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$, 称为 \vec{x} 的长度, 记为 $|\vec{x}|$

定义 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V, |\vec{x} - \vec{y}|$ 称为 \vec{x} 与 \vec{y} 的距离.

命题 1.1 设 V 是欧氏空间

$$(i) \forall \vec{x} \in V, \vec{0} \cdot \vec{x} = 0$$

$$(ii) \vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$$

注 在本节中 V 是欧氏空间, $\vec{v} \in V, L_{\vec{v}}: V \rightarrow \mathbb{R} \vec{x} \mapsto \vec{v} \cdot \vec{x}$ 是线性函数, 即 $L_{\vec{v}} \in V^*$

定义 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s \in V, G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s) = (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j)_{i=1, \dots, s, j=1, \dots, s}$ 称为 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$ 的 Gram 矩阵, $G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$ 是 s 阶实对称方阵

定理 1.1 设 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s \in V,$

$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow G(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_s)$ 满秩

2.1.2 1.2 长度 (范数) 和距离

定义 设 $\vec{x} \in V$, $\sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$ 称为 \vec{x} 的长度或范数, 记为 $|\vec{x}|$ 或 $\|\vec{x}\|$.

命题 1.2(Cauchy-Buniakowski 不等式) 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V$, $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq |\vec{x}| |\vec{y}|$; 等号成立 $\Leftrightarrow \vec{x}, \vec{y}$ 线性相关

定义 设 $\vec{x}, \vec{y} \in V$, \vec{x}, \vec{y} 之间的距离定义为 $|\vec{x} - \vec{y}|$

注 $\vec{x} \in V$, 如果 $|\vec{x}| = 1$, 则称 \vec{x} 是单位向量

2.1.3 1.5 正交矩阵

定义 设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$, 如果 $A^t = A$, 则称 A 是正交矩阵.

定理 1.3 设 V 的一组单位正交基是 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$, 而 $\vec{\varepsilon}_1, \dots, \vec{\varepsilon}_n$ 是 V 的一组基且 $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)A$, 则 $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_n$ 是单位正交基 $\Leftrightarrow A$ 是正交矩阵.

命题 1.3 设 A 是正交矩阵, 则

- (i) $\det(A) = \pm 1$
- (ii) A^t 即 A^{-1} 也是正交矩阵,
- (iii) 再设 B 是正交矩阵, 则 AB 也是正交矩阵.

推论 1.1 令 $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | A \text{ 正交} \}$, 则 $O_n(\mathbb{R})$ 是 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群

2.1.4 1.6 正交相似

定义 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, 如果存在 $P \in O_n(\mathbb{R})$, 使得 $B = P^{-1}AP$, 则称 B 与 A 正交相似, 记为 $A \sim_o B$

注 如果 $A \sim_o B$, 则 $A_s B$ 且 $A \sim_c B$

问题 给定 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 求 A 在正交相似下的“标准型”

命题 1.4 \sim_o 是等价关系

定义 设 $U \subset V$, 子空间, U 的正交补 $U^\perp = \{\vec{v} \in V | \forall \vec{u} \in U, \vec{v} \perp \vec{u}\}$

命题 1.5 设 $U \subset V$, 子空间, 则

(i) U^\perp 是子空间

(ii) $V = U \oplus U^\perp$

(iii) $(U^\perp)^\perp = U$

2.2 2 正规算子与正规矩阵

2.2.1 2.1 伴随算子

定义 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 设 $\mathcal{A}^* \in \mathcal{L}(V)$, 使得 $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V, \mathcal{A}(\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot \mathcal{A}^*(\vec{y})$, 则称 \mathcal{A}^* 是 \mathcal{A} 的伴随算子.

伴随算子: $\phi: V \rightarrow V^*$

$\vec{v} \mapsto L_{\vec{v}}$

$\phi(\vec{v}) = 0^*, L_{\vec{v}}(\vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \in V, \vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \ker(\phi) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \phi$ 是线性同构.

定理 2.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则

(i) \mathcal{A} 的伴随算子存在且唯一

(ii) 设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基, 且 \mathcal{A} 在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵是 A , 则 \mathcal{A} 的伴随算子在 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的矩阵是 A^t .

定义 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, \mathcal{A}^* 是 \mathcal{A} 的伴随算子, 如果 $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*$, 则称 \mathcal{A} 是正规 (normal) 算子. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 如果 $AA^t = A^tA$, 则称 A 是正规矩阵.

注 由定理 2.1 和第二章定理 2.1 可知, \mathcal{A} 是正规算子当且仅当 \mathcal{A} 在某组单位正交基下的矩阵是正规的.

引理 2.1 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 如果 $\text{tr}(AA^t) = 0$, 则 $A = O_{m \times n}$

引理 2.2 设 W 是 \mathcal{R} 上 n 维线性空间, $n > 0$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 则 W 有 1 维或 2 维不变子空间.

引理 2.3 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$ 是正规的, 如果

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

, 其中 $A_1 \in M_d(\mathbb{R})$, $A_2 \in \mathbb{R}^{d \times n-d}$, $A_3 \in M_{n-d}(\mathbb{R})$, $0 < d < n$, 则 $A_2 = 0$

引理 2.4 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规, 如果 $U \subset V$ 是 \mathcal{A} -不变子空间, 则 U^\perp 也是

引理 2.5 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 正规, 则存在 \mathcal{A} -不可分子空间 U_1, \dots, U_l 使得

(i) $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_l$ (ii) $\forall i, j \in \{1, \dots\}$