0.1 §7 复矩阵的 Jordan 标准型 (存在性)

定理 7.1 设 $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{C})$, 则存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathbb{C}$(不必两两不同),$d_1, \cdots, d_l \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$A \sim_s J_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{d_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

注 (1) $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 互不相同的元素组成 $spce_{\mathbb{C}}(A)$
(2) $\mathcal{X}_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_l)^{d_l}$
$\mu_A = lcm((t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_l)^{d_l})$
(3) 如果 $d_1 = \cdots = d_l = 1$, 则

$$J_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_l \end{bmatrix}_{n\times n}$$

即 A 可对角化

注 $d_1, \cdots, d_l$ 是否唯一?l 是否唯一? 即 J_A 是否唯一

0.2 §8 矩阵的准素有理规范型简介

定理 8.1 设 $A \in M_n(F)$, 则存在 $d_1, \cdots, d_l \in \mathbb{Z}^+$, 则存在 $l_1, \cdots, l_s \in \mathbb{Z}^+, p_1, \cdots, p_s \in F[t]\backslash F$ 不可约, 使得

$$A \sim \begin{bmatrix} J_{l_1}(p_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{l_s}(p_s) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

0.3 §9 初等因子组

定义 重集 (multi-sets)-集合中相同的元素允许出现若干次

定义 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, $V = V_1 \bigoplus \cdots \bigoplus V_l(*)$,
其中 $V_1, \cdots, V_l$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的, 设 $A_i = \mathcal{A}|_{V_i}, I = 1, \cdots, l$, 则重集 $\{\mu_{\mathcal{A}_1}, \cdots, \mu_{\mathcal{A}_l}\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 $(*)$ 的初等因子组.

目的 (1) 证明初等因子组由 $\mathcal{A}$ 确定, 与 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和分解无关 (2) 通过初等因子组可以“唯一”地确定 $Jordan$ 标准型

引理 9.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), V = F[\mathcal{A}] \cdot \vec{v}, \mu_{\mathcal{A},\vec{v}} = pq$, 其中 $p, q \in F[t] \backslash F$, 首一, 令 $\vec{w} = q(\mathcal{A})(\vec{v})$, 则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$.

定理 9.1 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}} = p^m$, 其中 $p \in F[t]$ 不可约, 对 $\forall l \in \mathbb{Z}^+$, 令 n_l 为 p^l 是 $\mathcal{A}$ 关于某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解的初等因子组的重数. 再令 $r_l = rank(p(\mathcal{A})^l)$, 其中 $l \in \mathbb{N}$, 则 $n_l = \frac{1}{d}(r_{l+1} + r_{l-1} - 2r_l)$