0.1 §7 复矩阵的 Jordan 标准型 (存在性)

定理 7.1 设 $\mathcal{A} \in M_n(\mathbb{C})$, 则存在 $\lambda_1, \cdots, \lambda_l \in \mathbb{C}$(不必两两不同),$d_1, \cdots, d_l \in \mathbb{Z}^+$, 使得

$$A \sim_s J_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{d_l}(\lambda_l) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

注 (1) $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ 互不相同的元素组成 $spce_{\mathbb{C}}(A)$

(2) $\mathcal{X}_A = (t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_l)^{d_l}$

$\mu_A = lcm((t-\lambda_1)^{d_1} \cdots (t-\lambda_l)^{d_l})$

(3) 如果 $d_1 = \cdots = d_l = 1$, 则

$$J_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_l \end{bmatrix}_{n\times n}$$

即 A 可对角化

注 $d_1, \cdots, d_l$ 是否唯一?l 是否唯一? 即 J_A 是否唯一

0.2 §8 矩阵的准素有理规范型简介

定理 8.1 设 $A \in M_n(F)$, 则存在 $d_1, \cdots, d_l \in \mathbb{Z}^+$, 则存在 $l_1, \cdots, l_s \in \mathbb{Z}^+, p_1, \cdots, p_s \in F[t]\backslash F$ 不可约, 使得

$$A \sim \begin{bmatrix} J_{l_1}(p_1) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_{l_s}(p_s) \end{bmatrix}_{n\times n}$$

0.3 §9 初等因子组

定义 重集 (multi-sets)-集合中相同的元素允许出现若干次

定义 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$, $V=V_1\bigoplus\cdots\bigoplus V_l(*)$,
其中 $V_1,\cdots,V_l$ 是 $\mathcal{A}$-不可分的, 设 $A_i=\mathcal{A}|_{V_i}, I=1,\cdots,l$, 则重集 $\{\mu_{\mathcal{A}_1},\cdots,\mu_{\mathcal{A}_l}\}$ 称为 $\mathcal{A}$ 关于 $(*)$ 的初等因子组.

目的 (1) 证明初等因子组由 $\mathcal{A}$ 确定, 与 V 的 $\mathcal{A}$-不可分子空间的直和分解无关 (2) 通过初等因子组可以"唯一"地确定 $Jordan$ 标准型

引理 9.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}, \mu_{\mathcal{A},\vec{v}}=pq$, 其中 $p,q\in F[t]\backslash F$, 首一, 令 $\vec{w}=q(\mathcal{A})(\vec{v})$, 则 $\mu_{\mathcal{A},\vec{w}}$.

引理 9.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$, 设 $\mu_{\mathcal{A}}=p^m$, 其中 $p\in F[t]$, 则 $\forall k\in\mathbb{N}$

$$rank(p(\mathcal{A})^k)=\begin{cases}(m-k)deg(p) & 0\le k<m\\ 0 & k\ge m\end{cases}$$

引理 9.3 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), f\in F[t]$, 如果 $U\subset V$ 是 $\mathcal{A}$-不变的, 则 U 也是 $f(\mathcal{A})-$ 不变的.

引理 9.4 如上假设, 再令 $V=U_1\bigoplus\cdots\bigoplus U_l$, 其中 $U_1,...,U_l$ 是 $\mathcal{A}$-不变子空间, 则 $f(\mathcal{A})(V)=f(\mathcal{A})(U_1)\bigoplus\cdots\bigoplus f(\mathcal{A})(U_l)$

定理 9.1 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}}=p^m$, 其中 $p\in F[t]$ 不可约, 对 $\forall l\in\mathbb{Z}^+$, 令 n_l 为 p^l 是 $\mathcal{A}$ 关于某个 $\mathcal{A}$-不可分子空间直和分解的初等因子组的重数. 再令 $r_l=rank(p(\mathcal{A})^l)$, 其中 $l\in\mathbb{N}$, 则 $n_l=\frac{1}{d}(r_{l+1}+r_{l-1}-2r_l)$

定理 9.2 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V), \mu_{\mathcal{A}}$ 的两两不同、首一的不可约因子是 $p_1,\cdots,p_s\in F[t]$, 对 $\forall I\in\{1,\cdots,s\}, l\in\mathbb{Z}^+$, 令 $N(i,l)$ 是 p_i^l 在 $\mathcal{A}$ 的某个初等因子组中的重数,$R_{i,l}=rank(p_I(\mathcal{A})^l)$, 则 $N(i,l)=\frac{1}{deg(p_I)}(R_{i,l+1}+R_{i,l-1}-2R_{i,l})$

0.4 §10 Jordan 标准型的唯一性和应用