

Google Cardboard 的九轴融合算法—基于李群的扩展卡尔曼滤波

极品巧克力

2018-04-15

1 前言

九轴融合算法是指通过融合 IMU 中的加速度计（三轴）、陀螺仪（三轴）、磁场计（三轴），来获取物体姿态的方法。它是开发 VR 头显中的一个至关重要的部分。VR 头显必须要实时准确地获取用户头部的姿态，然后在屏幕上渲染出在对应的姿态所应该要看到的画面，才能让用户在 VR 世界里获得沉浸感。

因为人眼是非常精密的器官，如果渲染出来的画面稍微有一点点的延时或者偏差，人眼都能察觉出来，导致用户头晕想吐，再也不相信 VR 了。所以，VR 头显对九轴融合算法的实时性和精度提出了非常高的要求。

而另一方面，公开的九轴融合方法又少之又少，常见的就是互补滤波算法和 Madgwick 算法，但是这两个方法的精度都不能达到 VR 头显的要求。而精度高的九轴融合算法都掌握在一些算法公司手里，需要向他们支付高昂的算法使用费，源码的价格更是天价。



Cardboard 是谷歌在 2014 年发布的 VR 盒子，虽然它不是开源的，但是在 GitHub 上有很多 Cardboard 的反编译工程，比如<https://github.com/rsanchezsaez/cardboard-java>。Cardboard 的 VR 体验，可以在一定程度上，证明它的九轴融合算法是满足 VR 要求的。所以，我对 Cardboard 反编译工程中的九轴融合部分的程序进行了研读，这部分的程序大概有 5000 行左右。我在通读完程序之后，结合文献 [1]，把程序背后的算法理论公式全部都反推出来，总结成了本文，与各位分享。

虽然早在 2014 年, Cardboard 就已经在 GitHub 上被反编译了, 但是这么多年过去了, 有关它的代码原理分析的文章却是几乎没有。能结合源代码, 把它背后的算法理论基础详细推导出来的, 本文应该算是第一篇。如有推导错误的地方, 还请各位不吝赐教。

本文目标读者: 传感器融合算法工程师。

2 预测

基于陀螺仪积分来预测出下一个姿态。

假设在 $k-1$ 时刻的状态的 $SO3$ 形式 X_{k-1} 的概率满足高斯分布，

$$\begin{aligned} X_{k-1} &= \mu_{k-1|k-1} \exp(\xi_{k-1|k-1}^\wedge) \quad \xi_{k-1|k-1} \sim N(m_{k-1|k-1} = 0, P_{k-1|k-1}) \\ \rho(X_{k-1}) &= a \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\log\left((\mu_{k-1|k-1})^{-1} X_{k-1}\right)^\vee\right)^T (P_{k-1|k-1})^{-1} \log\left((\mu_{k-1|k-1})^{-1} X_{k-1}\right)^\vee\right) \\ &= a \exp\left(-\frac{1}{2} (\xi_{k-1|k-1} - 0)^T (P_{k-1|k-1})^{-1} (\xi_{k-1|k-1} - 0)\right) \end{aligned}$$

其中 a 为归一化常数。为方便起见，把满足上面条件的 X_{k-1} 表示成， $X_{k-1} \sim N(\mu_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1})$ 。

在 $k-1$ 时刻，陀螺仪的测量值为 ω_{k-1} ，如果没有噪声的话，则对下一个时刻 k 的状态均值的预测 $\mu_{k-1|k-1}$ 为，

$$\mu_{k|k-1} = \mu_{k-1|k-1} \exp((\omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \quad (1)$$

其中， Δt_{k-1} 为时刻 $k-1$ 到时刻 k 的时间间隔， $\Delta t_{k-1} = t_k - t_{k-1}$ 。

而如果考虑噪声的影响的话，则对时刻 k 的预测的状态分布 $X_{k|k-1}$ 要满足，

$$X_{k|k-1} = X_{k-1} \exp(((\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1})^\wedge)$$

其中， n_{k-1} 表示陀螺仪数据的噪声，协方差 R_{k-1} 可以通过采集一段时间的数据 n_{k-1} ，计算得到 $R_{k-1} = E(n_{k-1} (n_{k-1})^T)$ 。

所以，新的均值 $\mu_{k|k-1}$ 附近的扰动 $\xi_{k|k-1}$ 要满足这样的分布，

$$\begin{aligned} \exp(\xi_{k|k-1}^\wedge) &= \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \exp(\xi_{k-1|k-1}^\wedge) \exp(((\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1})^\wedge) \\ &= \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1}\right)^\wedge\right) \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \exp(((\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1})^\wedge) \\ &\approx \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1}\right)^\wedge\right) \exp\left(\left(- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1} + J_r (- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^{-1} (\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \\ &= \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1}\right)^\wedge\right) \exp\left(\left(- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1} + J_r (\omega_{k-1} \Delta t_{k-1}) \omega_{k-1} \Delta t_{k-1} + J_r (\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \\ &\approx \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1}\right)^\wedge\right) \exp\left(\left(J_r (\omega_{k-1} \Delta t_{k-1}) n_{k-1} \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \\ &\approx \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1} + J_r (\omega_{k-1} \Delta t_{k-1}) n_{k-1} \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \\ &\approx \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1} + n_{k-1} \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \end{aligned}$$

又因为 $SO3$ 上的性质， $\exp(\phi^\wedge)^{-1} = \exp((- \phi)^\wedge)$ ，所以，上式中的 $\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge)^{-1} = \exp(\omega_{k-1} \Delta t_{k-1}^\wedge)$ 。所以，原式可以转换如下，

$$\exp(\xi_{k|k-1}^\wedge) = \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \exp(\xi_{k-1|k-1}^\wedge) \exp(((\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1})^\wedge)$$

这时候，又因为有 $SO(3)$ 上的伴随性质，

$$\begin{aligned} R \exp(p^\wedge) R^T &= \exp((Rp)^\wedge) \Rightarrow \\ R \exp(p^\wedge) &= \exp((Rp)^\wedge) R \end{aligned}$$

原式就可以转换为，

$$\begin{aligned} \exp(\hat{\xi}_{k|k-1}^\wedge) &= \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \exp(\hat{\xi}_{k-1|k-1}^\wedge) \exp(((\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1})^\wedge) \\ &= \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \hat{\xi}_{k-1|k-1}\right)^\wedge\right) \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \exp(((\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1})^\wedge) \\ &\approx \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \hat{\xi}_{k-1|k-1}\right)^\wedge\right) \exp\left(\left(- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1} + J_r (- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^{-1} (\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \\ &= \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \hat{\xi}_{k-1|k-1}\right)^\wedge\right) \exp\left(\left(- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1} + J_r (\omega_{k-1} \Delta t_{k-1}) \omega_{k-1} \Delta t_{k-1} + J_r (\omega_{k-1} + n_{k-1}) \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \\ &\approx \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \hat{\xi}_{k-1|k-1}\right)^\wedge\right) \exp\left(\left(J_r (\omega_{k-1} \Delta t_{k-1}) n_{k-1} \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \\ &\approx \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \hat{\xi}_{k-1|k-1} + J_r (\omega_{k-1} \Delta t_{k-1}) n_{k-1} \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \\ &\approx \exp\left(\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \hat{\xi}_{k-1|k-1} + n_{k-1} \Delta t_{k-1}\right)^\wedge\right) \end{aligned}$$

所以，就可以得到，

$$\hat{\xi}_{k|k-1} = \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \hat{\xi}_{k-1|k-1} + n_{k-1} \Delta t_{k-1}$$

所以，新的扰动 $\hat{\xi}_{k|k-1}^\wedge$ 的均值 $m_{k|k-1}$ ，

$$\begin{aligned} m_{k|k-1} &= E(\hat{\xi}_{k|k-1}) \\ &= E\left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \hat{\xi}_{k-1|k-1} + n_{k-1} \Delta t_{k-1}\right) \\ &= \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) E(\hat{\xi}_{k-1|k-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

新的扰动 $\hat{\xi}_{k|k-1}^\wedge$ 的协方差， $P_{k|k-1}$ ，

$$\begin{aligned}
P_{k|k-1} &= E \left((\xi_{k|k-1} - m_{k|k-1}) (\xi_{k|k-1} - m_{k|k-1})^T \right) \\
&= E \left(\xi_{k|k-1} (\xi_{k|k-1})^T \right) \\
&= E \left((\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1} + n_{k-1} \Delta t_{k-1}) (\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1} + n_{k-1} \Delta t_{k-1})^T \right) \\
&= E \left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1} (\xi_{k-1|k-1})^T \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge)^T \right) \\
&\quad + E \left(\exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) \xi_{k-1|k-1} (n_{k-1})^T \Delta t_{k-1} \right) \\
&\quad + E \left(n_{k-1} \Delta t_{k-1} (\xi_{k-1|k-1})^T \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge)^T \right) \\
&\quad + E \left(n_{k-1} \Delta t_{k-1} (n_{k-1})^T \Delta t_{k-1} \right) \\
&= \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) E \left(\xi_{k-1|k-1} (\xi_{k-1|k-1})^T \right) \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge)^T \\
&\quad + \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) E \left(\xi_{k-1|k-1} (n_{k-1})^T \right) \Delta t_{k-1} \\
&\quad + \Delta t_{k-1} E \left(n_{k-1} (\xi_{k-1|k-1})^T \right) \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge)^T \\
&\quad + \Delta t_{k-1} E \left(n_{k-1} (n_{k-1})^T \right) \Delta t_{k-1} \\
&= \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) E \left(\xi_{k-1|k-1} (\xi_{k-1|k-1})^T \right) \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge)^T + \Delta t_{k-1} E \left(n_{k-1} (n_{k-1})^T \right) \Delta t_{k-1} \\
&= \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) P_{k-1|k-1} \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge)^T + \Delta t_{k-1} R_{k-1} \Delta t_{k-1}
\end{aligned}$$

所以,

$$P_{k|k-1} = \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge) P_{k-1|k-1} \exp((- \omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge)^T + \Delta t_{k-1} R_{k-1} \Delta t_{k-1} \quad (2)$$

所以, 最终得到,

$$X_{k|k-1} = \mu_{k|k-1} \exp(\xi_{k|k-1}^\wedge) \sim N(\mu_{k|k-1}, P_{k|k-1}) \quad \xi_{k|k-1} \sim N(0, P_{k|k-1})$$

3 更新

设在世界坐标系下，加速度计所测的重力向量为 g_w ，磁场计所测的磁场向量为 γ_w 。则在时刻 k 时，加速度计所测的重力向量为 g_k ，磁场计所测的磁场向量为 γ_k 。加速度计上面的测量噪声 n_{g_k} 满足 $n_{g_k} \sim N(0, Q_{g_k})$ 。磁场计上面的测量噪声 n_{γ_k} 满足 $n_{\gamma_k} \sim N(0, Q_{\gamma_k})$ 。

3.1 加速度计测量更新

把第一部分预测出来的姿态 $\mu_{k|k-1}$ ，作为预测的测量姿态，可以预测出当前加速度计的测量值 $g_{k|k-1}$ ，其计算过程如下，

$$\begin{aligned} g_w &= \mu_{k|k-1} g_{k|k-1} \Rightarrow \\ g_{k|k-1} &= (\mu_{k|k-1})^{-1} g_w \\ &= (\mu_{k|k-1})^T g_w \end{aligned}$$

而根据实际测量值 g_k ，可以反过来计算出姿态 μ_{g_k} ，作为实际的测量姿态。以之前的预测姿态 $\mu_{k|k-1}$ 为初值，则把两者的关系表示为，

$$\mu_{g_k} = \mu_{k|k-1} \exp \left((\xi_{g_{k|k-1}, g_k})^\wedge \right)$$

可以把 $\xi_{g_{k|k-1}, g_k}$ 优化出来，或者直接叉乘出来。

$$\begin{aligned} g_w &= \mu_{g_k} g_k \Rightarrow \\ g_w &= \mu_{k|k-1} \exp \left((\xi_{g_{k|k-1}, g_k})^\wedge \right) g_k \\ (\mu_{k|k-1})^{-1} g_w &= \exp \left((\xi_{g_{k|k-1}, g_k})^\wedge \right) g_k \Rightarrow \\ g_{k|k-1} &= \exp \left((\xi_{g_{k|k-1}, g_k})^\wedge \right) g_k \end{aligned}$$

根据李代数与向量叉乘的转换关系。不考虑测量噪声 n_{g_k} ，则可以得到 $\xi_{g_{k|k-1}, g_k}$ 的均值 $m_{g_{k|k-1}, g_k}$ 。

$$\begin{aligned} c &= \frac{g_k}{\|g_k\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \\ \|c\| &= \left\| \frac{g_k}{\|g_k\|} \right\| \cdot \left\| \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right\| \sin \theta = \sin \theta \Rightarrow \\ \theta &= \arcsin(\|c\|) = \arcsin \left(\frac{g_k}{\|g_k\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right) \Rightarrow \\ m_{g_{k|k-1}, g_k} &= \frac{c}{\|c\|} \theta \\ &= \left(\frac{g_k}{\|g_k\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right) \frac{1}{\left\| \frac{g_k}{\|g_k\|} \right\| \cdot \left\| \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right\|} \arcsin \left(\left\| \frac{g_k}{\|g_k\|} \right\| \cdot \left\| \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right\| \right) \end{aligned}$$

设 $\xi_{g_k|k-1, g_k}$ 上的噪声为 n_ξ ，则关系满足如下，

$$\xi_{g_k|k-1, g_k} = m_{g_k|k-1, g_k} + n_\xi$$

进一步得到，

$$\begin{aligned} \xi_{g_k|k-1, g_k} &= m_{g_k|k-1, g_k} + n_\xi \\ &= \left(\frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right) \frac{1}{\left\| \frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|} \cdot \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right\|} \arcsin \left(\left\| \frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|} \right\| \cdot \left\| \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right\| \right) \end{aligned}$$

要获得 n_ξ 与之 n_{g_k} 间的关系，

$$\begin{aligned} n_\xi &= f(n_{g_k}) \\ &= \left(\frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right) \frac{1}{\left\| \frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|} \cdot \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right\|} \arcsin \left(\left\| \frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|} \right\| \cdot \left\| \frac{g_{k|k-1}}{\|g_{k|k-1}\|} \right\| \right) - m_{g_k|k-1, g_k} \end{aligned}$$

这两者间的关系不是线性化的，那么就只能进行线性化，一阶泰勒展开，

$$\begin{aligned} n_\xi &= f(n_{g_k})|_{n_{g_k} \rightarrow 0} + \frac{\partial f(n_{g_k})}{\partial n_{g_k}} \Big|_{n_{g_k} \rightarrow 0} n_{g_k} \\ &= \frac{\partial f(n_{g_k})}{\partial n_{g_k}} \Big|_{n_{g_k} \rightarrow 0} n_{g_k} \\ &= F_{n_{g_k}} n_{g_k} \end{aligned}$$

其中， $F_{n_{g_k}} = \frac{\partial f(n_{g_k})}{\partial n_{g_k}} \Big|_{n_{g_k} \rightarrow 0}$ 的计算，采用数值扰动的方法。

从而，可以得到 $Q_{g_k|k-1, g_k} \circ$

$$Q_{g_k|k-1, g_k} = E \left((\xi_{g_k|k-1, g_k} - m_{g_k|k-1, g_k}) (\xi_{g_k|k-1, g_k} - m_{g_k|k-1, g_k})^T \right) = E(n_\xi n_\xi^T)$$

最终得到， $\xi_{g_k|k-1, g_k}$ 的分布，

$$\xi_{g_k|k-1, g_k} \sim N(m_{g_k|k-1, g_k}, Q_{g_k|k-1, g_k})$$

再进行转换，用跟第一部分同样的方法，转换出扰动 $\xi_{Z_k} \circ$

$$\begin{aligned} Z_k &= \mu_{k|k-1} \exp \left(\xi_{g_k|k-1, g_k}^\wedge \right) \\ &= \mu_{k|k-1} \exp \left(m_{g_k|k-1, g_k}^\wedge \right) \exp \left(\xi_{Z_k}^\wedge \right) \\ \xi_{Z_k} &\sim N(0, Q_k) \end{aligned}$$

用 z_k 来表示。

$$z_k = \mu_{k|k-1} \exp \left(m_{g_{k|k-1}, g_k}^\wedge \right)$$

$$Z_k = z_k \exp \left(\xi_{z_k}^\wedge \right) \sim N(z_k, Q_k)$$

所以，根据第一部分，可以得到 $\mu_{k|k-1}$ ，现在又得到了 z_k 。综合这两者的信息，可以得到， $\rho(\mu_k | \mu_{k|k-1}, z_k)$ 。就是要求一个 μ_k ，使得 $\rho(\mu_k | \mu_{k|k-1}, z_k)$ 最大，用公式表达如下。

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_k &= \arg \max_{\mu_k} \rho(\mu_k | \mu_{k|k-1}, z_k) \\ &= \arg \max_{\mu_k} \frac{\rho(\mu_k | \mu_{k|k-1}) \rho(z_k | \mu_{k|k-1})}{\rho(z_k | \mu_{k|k-1})} \\ &= \arg \max_{\mu_k} \rho(\mu_k | \mu_{k|k-1}) \rho(z_k | \mu_k) \\ &= \arg \max_{\mu_k} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\left(\log(\mu_{k|k-1}^{-1} \mu_k)^\vee \right)^T P_{k|k-1}^{-1} \log(\mu_{k|k-1}^{-1} \mu_k)^\vee \right) \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\left(\log(\mu_k^{-1} z_k)^\vee \right)^T Q_k^{-1} \log(\mu_k^{-1} z_k)^\vee \right) \right) \end{aligned}$$

其中， μ_k 是个未知数，用 $\mu_k = \mu_{k|k-1} \exp(\xi^\wedge)$ ，转换成用未知数 ξ 来表示。然后，上式就可以转换为，

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_k &= \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\left(\log(\mu_{k|k-1}^{-1} (\mu_{k|k-1} \exp(\xi^\wedge)))^\vee \right)^T P_{k|k-1}^{-1} \log(\mu_{k|k-1}^{-1} (\mu_{k|k-1} \exp(\xi^\wedge)))^\vee \right) \right) \\ &\quad \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\left(\log((\mu_{k|k-1} \exp(\xi^\wedge))^{-1} z_k)^\vee \right)^T Q_k^{-1} \log((\mu_{k|k-1} \exp(\xi^\wedge))^{-1} z_k)^\vee \right) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} (\xi - 0)^T P_{k|k-1}^{-1} (\xi - 0) \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\left(\log((\mu_{k|k-1} \exp(\xi^\wedge))^{-1} z_k)^\vee \right)^T Q_k^{-1} \log((\mu_{k|k-1} \exp(\xi^\wedge))^{-1} z_k)^\vee \right) \right) \end{aligned}$$

但这样子也解不出来。对上式中的部分，在 $\xi = 0$ 处进行线性化，一阶泰勒展开。则可以转换为，

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \xi - 0 = \xi \\ b(\xi) &= \log \left((\mu_{k|k-1} \exp(\xi^\wedge))^{-1} z_k \right)^\vee \\ J &= \left. \frac{\partial b(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} \\ &= \left. \frac{\partial \log \left((\mu_{k|k-1} \exp(\xi^\wedge))^{-1} \exp(m_{g_{k|k-1}, g_k}^\wedge) \right)^\vee}{\partial \xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} \\ &= \left. \frac{\partial \log(\exp(\xi^\wedge) z_k)^\vee}{\partial \xi} \right|_{\xi \rightarrow 0} \\ b(\xi) &= b(0) + J(\xi - 0) \\ &= m_{z_k} + J\xi \end{aligned}$$

其中, J 的计算, 程序里面是用数值扰动的方法。这里应该也可以用解析的方法, 把公式都展开来推导。

接下来, 为了转换成卡尔曼滤波的形式, 用 $H = -J$ 来表示。

所以, 原式就可以表示为,

$$\begin{aligned} & \rho(\mu_k | \mu_{k|k-1}, z_k) \\ & \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \left((\xi - 0)^T P_{k|k-1}^{-1} (\xi - 0)\right)\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left((m_{z_k} - H\xi)^T Q_k^{-1} (m_{z_k} - H\xi)\right)\right) \end{aligned}$$

参考《State Estimation for Robotics》的第 3.1.2 和 3.3.2 节, 求 $\arg \max_{\mu_k} \rho(\mu_k | \mu_{k|k-1}, z_k)$, 则上式最终可以转换出卡尔曼滤波的形式了。

$$\begin{cases} K_k = P_{k|k-1} H_k^T (H_k P_{k|k-1} H_k^T + Q_k)^{-1} \\ m_{k|k}^- = 0 + K_k (m_{z_k} - 0) \\ P_{k|k}^- = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \end{cases} \quad (3)$$

所以,

$$\xi_{k|k}^- \sim N(m_{k|k}^-, P_{k|k}^-)$$

同时,

$$P_{k|k-1}^- = E\left(\left(\xi_{k|k}^- - m_{k|k}^-\right)\left(\xi_{k|k}^- - m_{k|k}^-\right)^T\right)$$

则融合后的姿态的均值 $\mu_{k|k}$ 为,

$$\mu_{k|k} = \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(m_{k|k}^-\right)^\wedge\right) \quad (4)$$

设相对于姿态 $\mu_{k|k}$ 的李代数扰动。则 $\xi_{k|k}$ 与 $\xi_{k|k}^-$ 的关系要满足,

$$\begin{aligned} \mu_{k|k} \exp\left(\left(\xi_{k|k}\right)^\wedge\right) &= \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{k|k}^-\right)^\wedge\right) \Rightarrow \\ \xi_{k|k} &= \log\left(\mu_{k|k}^{-1} \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{k|k}^-\right)^\wedge\right)\right)^\vee \\ &= \log\left(\left(\mu_{k|k-1} \exp\left(\left(m_{k|k}^-\right)^\wedge\right)\right)^{-1} \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{k|k}^-\right)^\wedge\right)\right)^\vee \\ &= \log\left(\left(\exp\left(\left(m_{k|k}^-\right)^\wedge\right)\right)^{-1} \mu_{k|k-1}^{-1} \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{k|k}^-\right)^\wedge\right)\right)^\vee \\ &= \log\left(\exp\left(\left(-m_{k|k}^-\right)^\wedge\right) \exp\left(\left(\xi_{k|k}^-\right)^\wedge\right)\right)^\vee \\ &= \log\left(\exp\left(\left(-m_{k|k}^- + J_r \left(-m_{k|k}^-\right)^{-1} \xi_{k|k}^-\right)^\wedge\right)\right)^\vee \\ &= -m_{k|k}^- + J_r \left(m_{k|k}^-\right) \xi_{k|k}^- \end{aligned}$$

所以，得到扰动 $\xi_{k|k}$ 的均值 $m_{k|k}$ ，

$$\begin{aligned}
 m_{k|k} &= E(\xi_{k|k}) \\
 &= E\left(-m_{k|k}^- + J_r\left(m_{k|k}^-\right)\xi_{k|k}^-\right) \\
 &= -m_{k|k}^- + J_r\left(m_{k|k}^-\right)E\left(\xi_{k|k}^-\right) \\
 &= J_r\left(m_{k|k}^-\right)m_{k|k}^- - m_{k|k}^- \\
 &\approx 0
 \end{aligned}$$

得到扰动 $\xi_{k|k}$ 的协方差 $P_{k|k}$ ，

$$\begin{aligned}
 P_{k|k} &= E\left(\left(\xi_{k|k} - \left(J_r\left(m_{k|k}^-\right)m_{k|k}^- - m_{k|k}^-\right)\right)\left(\xi_{k|k} - \left(J_r\left(m_{k|k}^-\right)m_{k|k}^- - m_{k|k}^-\right)\right)^T\right) \\
 &= E\left(\left(-m_{k|k}^- + J_r\left(m_{k|k}^-\right)\xi_{k|k}^- - \left(J_r\left(m_{k|k}^-\right)m_{k|k}^- - m_{k|k}^-\right)\right)\left(-m_{k|k}^- + J_r\left(m_{k|k}^-\right)\xi_{k|k}^- - \left(J_r\left(m_{k|k}^-\right)m_{k|k}^- - m_{k|k}^-\right)\right)^T\right) \\
 &= E\left(\left(J_r\left(m_{k|k}^-\right)\xi_{k|k}^- - J_r\left(m_{k|k}^-\right)m_{k|k}^-\right)\left(J_r\left(m_{k|k}^-\right)\xi_{k|k}^- - J_r\left(m_{k|k}^-\right)m_{k|k}^-\right)^T\right) \\
 &= J_r\left(m_{k|k}^-\right)E\left(\left(\xi_{k|k}^- - m_{k|k}^-\right)\left(\xi_{k|k}^- - m_{k|k}^-\right)^T\right)J_r\left(m_{k|k}^-\right)^T \\
 &= J_r\left(m_{k|k}^-\right)P_{k|k-1}^-J_r\left(m_{k|k}^-\right)^T
 \end{aligned}$$

所以,

$$P_{k|k} = J_r \left(m_{k|k}^- \right) P_{k|k-1}^- J_r \left(m_{k|k}^- \right)^T \quad (5)$$

所以, X_k 的分布满足,

$$\begin{aligned} X_k &= \mu_{k|k-1} \exp \left(\xi_{k|k} \right) \sim N \left(\mu_{k|k-1}, P_{k|k} \right) \\ \xi_{k|k} &\sim N \left(0, P_{k|k} \right) \end{aligned}$$

3.2 公式总结

前面推导的公式总结出来就是,

A. Time Update(“Predict”)
(1) Project the state ahead, eq.(1)
$\mu_{k k-1} = \mu_{k-1 k-1} \exp \left((\omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge \right)$
(2) Project the error covariance ahead, eq.(2)
$P_{k k-1} = \exp \left((\omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge \right) P_{k-1 k-1} \exp \left((\omega_{k-1} \Delta t_{k-1})^\wedge \right)^T + \Delta t_{k-1} R_{k-1} \Delta t_{k-1}$
B. Measurement Update(“Correct”)
(1) Compute the Kalman gain, eq.(3)
$K_k = P_{k k-1} H_k^T \left(H_k P_{k k-1} H_k^T + Q \right)^{-1}$
(2) Update estimate with measurement z_k , eq.(3)
$m_{k k}^- = 0 + K_k (m_{z_k} - 0)$
(3) Update the error covariance, eq.(3)
$P_{k k}^- = (I - K_k H_k) P_{k k-1}$
(4) Project the state ahead with m_k , eq.(4)
$\mu_{k k} = \mu_{k k-1} \exp \left(\left(m_{k k}^- \right)^\wedge \right)$
(5) Project the error covariance ahead with m_k , eq.(5)
$P_{k k} = J_r \left(m_{k k}^- \right) P_{k k-1}^- J_r \left(m_{k k}^- \right)^T$

其中各符号含义如下，

- $\mu_{k|k-1}$ ，预测姿态。
- $\mu_{k|k}$ ，校正姿态。
- ω ，角速度。对 ESKF 系统来说，这是控制输入，或称为驱动输入。
- $\exp((\omega_{k-1}\Delta t_{k-1})^\wedge)$ ，用驱动角度向量 $\omega\Delta t$ 计算得到的旋转矩阵。也可以用四元数表示。
- $P_{k|k-1}$ ，先验估计误差协方差。
- $P_{k|k}$ ，后验估计误差协方差。
- R ，陀螺仪测量噪声协方差。在此做为过程激励协方差使用。
- Q ，加速计测量噪声协方差。
- K ，卡尔曼增益。
- $f()$ ，Process nonlinear vector function
- $h()$ ，Observation nonlinear vector function
- H ，是 $h()$ 相对于状态向量 m 的偏导数的 Jacobian 矩阵。
- $m_{k|k}^-$ ，状态向量。在 ESKF 系统中，是表示旋转误差的旋转向量。每次迭代都重置为 0。
- z_k ，测量向量。
- m_{z_k} ，创新向量，或称为残差向量。
- $\exp\left(\left(m_{k|k}^-\right)^\wedge\right)$ ，用误差旋转向量 $m_{k|k}^-$ 计算得到的旋转矩阵。也可以用四元数表示。
- F ，是 $f()$ 相对于状态向量 m 的偏导数的 Jacobian 矩阵。
 - 对于驱动角度向量 $\omega\Delta t$ ， $F = \exp((\omega_{k-1}\Delta t_{k-1})^\wedge)$ 。参见公式 (2)。
 - 对于误差旋转向量 $m_{k|k}^-$ ， $F = J_r(m_{k|k}^-)$ 。参见公式 (5)。

上面的方法跟《State Estimation for Robotics》的第 7.3.4 和 8.2.4 节很像，但是上面的方法，对协方差的处理更加精细。

要融合磁场计，也是同样的方法。

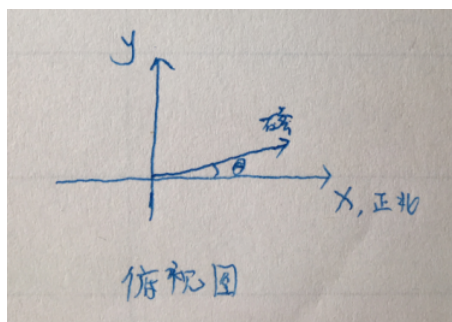
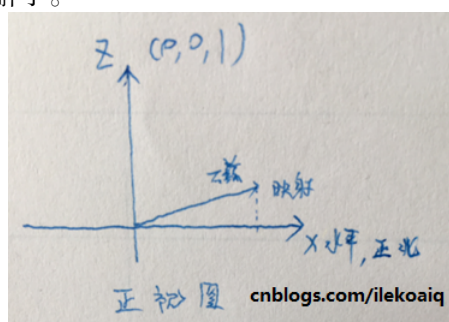
要融合视觉 SLAM 中送过来的姿态，也是同样的方法。

4 实际程序

在 cardboard 的实际程序中，还有很多细节的处理。比如：

- 增加了很多加权滤波的方法。
- 把加速度计的模的变化滤波出来，实时更新加速度计的协方差。这一步，相当于是 madgwick 里面的动态调整权重，但这一步更好，因为是直接算加速度计的协方差来调整权重，而不是通过陀螺仪的测量值来间接表示运动过快而调整权重。
- 在静止的时候，把陀螺仪的偏移滤波出来。
- 还有时间差平滑滤波的方法。

在融合磁场计的时候，把磁场计向量映射到水平面上，相当于只优化水平面上的旋转偏差。这个，在空间想象时，应该保持重力竖直方向 $(0, 0, 1)$ 不变，以此作为参考，再看原来的模型，就容易理解了。



但是没有对磁场计进行修正。如果要对磁场计进行修正，简单的方法可以参考 madgwick 里面的方法。全面的方法，则要参考那些专门搞磁场计标定的论文了。

5 总结

Cardboard 里面的九轴融合算法，效果比 Madgwick 方法和互补滤波方法都要好，对细节的处理也非常棒。以后再写一篇文章，详细比较基于李群的扩展卡尔曼滤波方法，Madgwick 算法，互补滤波的异同。

根据参考文献 [1]，这套理论也同样可以使用在六自由度（位移 + 旋转）融合上面，只需要把 $SO3$ 改成 $SE3$ 就可以了。可以用同一套理论，把视觉 SLAM 的位姿与 IMU 位姿融合在一起，得到融合后的六自由度数据，应用在 VR 头显中。

希望有一天，VR 头显的体验能做到像电影《头号玩家》里面那样。与仍然还在做 VR 的各位同行共勉。



6 求赞赏

您觉得，本文值多少？



7 有奖问答

给各位出一道思考题。

已知，一个 IMU 水平地放在桌面上不动。重力大小为 g 。陀螺仪和加速度计以相同的频率同时输出，输出的时间间隔为 Δt 。它的初始状态为 x_0 。陀螺仪数据的噪声为 n_ω ，加速度计数据的噪声为 n_a 。

$$x_0 \in so(3) \sim N(0, P_0)$$

$$n_\omega \in R^3 \sim N(0, Q)$$

$$n_a \in R^3 \sim N(0, R)$$

其中， P_0 ， Q ， R 都为对角矩阵。则随着时间的增长，请问，

- (1) 这个 IMU 的后验状态协方差是否会收敛？
- (2) 如果收敛的话，会收敛到什么值？

8 参考文献

1. Bourmaud G, Megret R, Giremus A, et al. Discrete Extended Kalman Filter on Lie groups[C] // Signal Processing Conference. EURASIP, 2013:1-5.
2. Timothy D. Barfoot. State Estimation for Robotics [M].Cambridge University Press, 2017.