Google Cardboard 的九轴融合算法—基于李群的扩展卡尔曼滤波

极品巧克力

2018-04-15

1 前言

九轴融合算法是指通过融合 IMU 中的加速度计（三轴）、陀螺仪（三轴）、磁场计（三轴），来获取物体姿态的方法。它是开发 VR 头显中的一个至关重要的部分。VR 头显必须要实时准确地获取用户头部的姿态，然后在屏幕上渲染出在对应的姿态所应该要看到的画面，才能让用户在 VR 世界里获得沉浸感。

因为人眼是非常精密的器官，如果渲染出来的画面稍微有一点点的延时或者偏差，人眼都能察觉出来，导致用户头晕想吐，再也不相信 VR 了。所以，VR 头显对九轴融合算法的实时性和精度提出了非常高的要求。

而另一方面，公开的九轴融合方法又少之又少，常见的就是互补滤波算法和 Madgwick 算法，但是这两个方法的精度都不能达到 VR 头显的要求。而精度高的九轴融合算法都掌握在一些算法公司手里，需要向他们支付高昂的算法使用费，源码的价格更是天价。

Cardboard 是谷歌在 2014 年发布的 VR 盒子，虽然它不是开源的，但是在 GitHub 上有很多 Cardboard 的反编译工程，比如`https://github.com/rsanchezsaez/cardboard-java`。Cardboard 的 VR 体验，可以在一定程度上，证明它的九轴融合算法是满足 VR 要求的。所以，我对 Cardboard 反编译工程中的九轴融合部分的程序进行了研读，这部分的程序大概有 5000 行左右。我在通读完程序之后，结合文献 [1]，把程序背后的算法理论公式全部都反推出来，总结成了本文，与各位分享。

虽然早在 2014 年，Cardboard 就已经在 GitHub 上被反编译了，但是这么多年过去了，有关它的代码原理分析的文章却是几乎没有。能结合源代码，把它背后的算法理论基础详细推导出来的，本文应该算是第一篇。如有推导错误的地方，还请各位不吝赐教。

本文目标读者：传感器融合算法工程师。

2 预测

基于陀螺仪积分来预测出下一个姿态。

假设在 $k-1$ 时刻的状态的 $SO3$ 形式 X_{k-1} 的概率满足高斯分布，

$$\begin{aligned}
X_{k-1} &= \mu_{k-1|k-1}\exp\left(\xi_{k-1|k-1}^{\wedge}\right) \qquad \xi_{k-1|k-1}\sim N\left(m_{k-1|k-1}=0, P_{k-1|k-1}\right)\\
\rho\left(X_{k-1}\right) &= a\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\log\left(\left(\mu_{k-1|k-1}\right)^{-1}X_{k-1}\right)^{\vee}\right)^{T}\left(P_{k-1|k-1}\right)^{-1}\log\left(\left(\mu_{k-1|k-1}\right)^{-1}X_{k-1}\right)^{\vee}\right)\\
&= a\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\xi_{k-1|k-1}-0\right)^{T}\left(P_{k-1|k-1}\right)^{-1}\left(\xi_{k-1|k-1}-0\right)\right)
\end{aligned}$$

其中 a 为归一化常数。为方便起见，把满足上面条件的 X_{k-1} 表示成，$X_{k-1}\sim N\left(\mu_{k-1|k-1}, P_{k-1|k-1}\right)$。

在 $k-1$ 时刻，陀螺仪的测量值为 ω_{k-1}，如果没有噪声的话，则对下一个时刻 k 的状态均值的预测 $\mu_{k-1|k-1}$ 为，

$$\mu_{k|k-1}=\mu_{k-1|k-1}\exp\left(\left(\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right) \tag{1}$$

其中，Δt_{k-1} 为时刻 $k-1$ 到时刻 k 的时间间隔，$\Delta t_{k-1}=t_k-t_{k-1}$。

而如果考虑噪声的影响的话，则对时刻 k 的预测的状态分布 $X_{k|k-1}$ 要满足，

$$X_{k|k-1}=X_{k-1}\exp\left(\left(\left(\omega_{k-1}+n_{k-1}\right)\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)$$

其中，n_{k-1} 表示陀螺仪数据的噪声，协方差 R_{k-1} 可以通过采集一段时间的数据 n_{k-1}，计算得到 $R_{k-1}=E\left(n_{k-1}\left(n_{k-1}\right)^{T}\right)$。

所以，新的均值 $\mu_{k|k-1}$ 附近的扰动 $\xi_{k|k-1}$ 要满足这样的分布，

$$\begin{aligned}
\exp\left(\xi_{k|k-1}^{\wedge}\right) &= \exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\xi_{k-1|k-1}^{\wedge}\right)\exp\left(\left(\left(\omega_{k-1}+n_{k-1}\right)\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\\
&= \exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\left(\left(\omega_{k-1}+n_{k-1}\right)\Delta t_{k-
\right.\right.\\
&\approx \exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}+J_r\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{-1}\left(\omega_{k-
\right.\right.\right.\\
&= \exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}+J_r\left(\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}
\right.\right.\\
&\approx \exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\left(J_r\left(\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)n_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\\
&\approx \exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}+J_r\left(\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)n_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\\
&\approx \exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}+n_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)
\end{aligned}$$

又因为有 $SO3$ 上的性质，$\exp\left(\phi^{\wedge}\right)^{-1}=\exp\left((-\phi)^{\wedge}\right)$，所以，上式中的 $\exp\left(\left(\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)^{-1}=\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)$。所以，原式可以转换如下，

$$\exp\left(\xi_{k|k-1}^{\wedge}\right)=\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\xi_{k-1|k-1}^{\wedge}\right)\exp\left(\left(\left(\omega_{k-1}+n_{k-1}\right)\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)$$

这时候，又因为有 $SO3$ 上的伴随性质，

$$\begin{aligned}\mathrm{R}\exp\left(p^{\wedge}\right)\mathrm{R}^{T}=\exp\left((Rp)^{\wedge}\right)\Rightarrow\\ \mathrm{R}\exp\left(p^{\wedge}\right)=\exp\left((Rp)^{\wedge}\right)\mathrm{R}\end{aligned}$$

原式就可以转换为，

$$\begin{aligned}\exp\left(\xi_{k|k-1}^{\wedge}\right)&=\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\xi_{k-1|k-1}^{\wedge}\right)\exp\left(\left(\left(\omega_{k-1}+n_{k-1}\right)\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\\ &=\exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\Bigl(\bigl(\bigl(\omega_{k-1}+n_{k-1}\bigr)\Delta t_{k-}\\ &\approx\exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\Biggl(\Bigl(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}+J_{r}\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{-1}(\omega_{k-1}\\ &=\exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\Bigl(\bigl(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}+J_{r}\left(\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\\ &\approx\exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\right)^{\wedge}\right)\exp\left(\left(J_{r}\left(\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)n_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\\ &\approx\exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}+J_{r}\left(\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)n_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\\ &\approx\exp\left(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}+n_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\end{aligned}$$

所以，就可以得到，

$$\xi_{k|k-1}=\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}+n_{k-1}\Delta t_{k-1}$$

所以，新的扰动 $\xi_{k|k-1}^{\wedge}$ 的均值 $m_{k|k-1}$，

$$\begin{aligned}m_{k|k-1}&=E\left(\xi_{k|k-1}\right)\\ &=E\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}+n_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)\\ &=\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)E\left(\xi_{k-1|k-1}\right)\\ &=0\end{aligned}$$

新的扰动 $\xi_{k|k-1}^{\wedge}$ 的协方差，$P_{k|k-1}$，

$$
\begin{aligned}
P_{k|k-1} &= E\Big(\left(\xi_{k|k-1} - m_{k|k-1}\right)\left(\xi_{k|k-1} - m_{k|k-1}\right)^T\Big) \\
&= E\Big(\xi_{k|k-1}\left(\xi_{k|k-1}\right)^T\Big) \\
&= E\Big(\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1} + n_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)\left(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1} + n_{k-1}\Delta t_{k-\right. \\
&= E\Big(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\left(\xi_{k-1|k-1}\right)^T\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)^T\Big) \\
&+ E\Big(\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)\xi_{k-1|k-1}\left(n_{k-1}\right)^T\Delta t_{k-1}\Big) \\
&+ E\Big(n_{k-1}\Delta t_{k-1}\left(\xi_{k-1|k-1}\right)^T\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)^T\Big) \\
&+ E\Big(n_{k-1}\Delta t_{k-1}\left(n_{k-1}\right)^T\Delta t_{k-1}\Big) \\
&= \exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)E\Big(\xi_{k-1|k-1}\left(\xi_{k-1|k-1}\right)^T\Big)\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)^T \\
&+ \exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)E\Big(\xi_{k-1|k-1}\left(n_{k-1}\right)^T\Big)\Delta t_{k-1} \\
&+ \Delta t_{k-1}E\Big(n_{k-1}\left(\xi_{k-1|k-1}\right)^T\Big)\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)^T \\
&+ \Delta t_{k-1}E\Big(n_{k-1}\left(n_{k-1}\right)^T\Big)\Delta t_{k-1} \\
&= \exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)E\Big(\xi_{k-1|k-1}\left(\xi_{k-1|k-1}\right)^T\Big)\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)^T + \Delta t_{k-1}E\Big(n_{k-1}\left(n_{k-1\right. \\
&= \exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)P_{k-1|k-1}\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)^T + \Delta t_{k-1}R_{k-1}\Delta t_{k-1}
\end{aligned}
$$

所以，

$$
P_{k|k-1} = \exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)P_{k-1|k-1}\exp\left(\left(-\omega_{k-1}\Delta t_{k-1}\right)^{\wedge}\right)^T + \Delta t_{k-1}R_{k-1}\Delta t_{k-1} \tag{2}
$$

所以，最终得到，

$$
X_{k|k-1} = \mu_{k|k-1}\exp\left(\xi_{k|k-1}^{\wedge}\right) \sim N\left(\mu_{k|k-1}, P_{k|k-1}\right) \qquad \xi_{k|k-1} \sim N\left(0, P_{k|k-1}\right)
$$

3 更新

设在世界坐标系下，加速度计所测的重力向量为 g_w，磁场计所测的磁场向量为 γ_w。则在时刻 k 时，加速度计所测的重力向量为 g_k，磁场计所测的磁场向量为 γ_k。加速度计上面的测量噪声 n_{g_k} 满足 $n_{g_k} \sim N\left(0, Q_{g_k}\right)$。磁场计上面的测量噪声 n_{γ_k} 满足 $n_{\gamma_k} \sim N\left(0, Q_{\gamma_k}\right)$。

3.1 加速度计测量更新

把第一部分预测出来的姿态 $\mu_{k|k-1}$，作为预测的测量姿态，可以预测出当前加速度计的测量值 $g_{k|k-1}$，其计算过程如下，

$$\begin{aligned} g_w &= \mu_{k|k-1} g_{k|k-1} \Rightarrow \\ g_{k|k-1} &= \left(\mu_{k|k-1}\right)^{-1} g_w \\ &= \left(\mu_{k|k-1}\right)^{T} g_w \end{aligned}$$

而根据实际测量值 g_k，可以反过来计算出姿态 μ_{g_k}，作为实际的测量姿态。以之前的预测姿态 $\mu_{k|k-1}$ 为初值，则把两者的关系表示为，

$$\mu_{g_k} = \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{g_{k|k-1}, g_k}\right)^{\wedge}\right)$$

可以把 $\xi_{g_{k|k-1}, g_k}$ 优化出来，或者直接叉乘出来。

$$\begin{aligned} g_w &= \mu_{g_k} g_k \Rightarrow \\ g_w &= \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{g_{k|k-1}, g_k}\right)^{\wedge}\right) g_k \\ \left(\mu_{k|k-1}\right)^{-1} g_w &= \exp\left(\left(\xi_{g_{k|k-1}, g_k}\right)^{\wedge}\right) g_k \Rightarrow \\ g_{k|k-1} &= \exp\left(\left(\xi_{g_{k|k-1}, g_k}\right)^{\wedge}\right) g_k \end{aligned}$$

根据李代数与向量叉乘的转换关系。不考虑测量噪声 n_{g_k}，则可以得到 $\xi_{g_{k|k-1}, g_k}$ 的均值 $m_{g_{k|k-1}, g_k}$。

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{g_k}{\|g_k\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|} \\
\|c\| &= \left\|\frac{g_k}{\|g_k\|}\right\| \cdot \left\|\frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right\| \sin\theta = \sin\theta \Rightarrow \\
\theta &= \arcsin\left(\|c\|\right) = \arcsin\left(\frac{g_k}{\|g_k\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_{g_{k|k-1},g_k} &= \frac{c}{\|c\|}\theta \\
&= \left(\frac{g_k}{\|g_k\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right) \frac{1}{\left\|\frac{g_k}{\|g_k\|}\right\| \cdot \left\|\frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right\|} \arcsin\left(\left\|\frac{g_k}{\|g_k\|}\right\| \cdot \left\|\frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right\|\right)
\end{aligned}
$$

设 $\xi_{g_{k|k-1},g_k}$ 上的噪声为 n_ξ，则关系满足如下，

$$
\xi_{g_{k|k-1},g_k} = m_{g_{k|k-1},g_k} + n_\xi
$$

进一步得到，

$$
\begin{aligned}
\xi_{g_{k|k-1},g_k} &= m_{g_{k|k-1},g_k} + n_\xi \\
&= \left(\frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right) \frac{1}{\left\|\frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|}\right\| \cdot \left\|\frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right\|} \arcsin\left(\left\|\frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|}\right\| \cdot \left\|\frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right\|
\end{aligned}
$$

要获得 n_ξ 与之 n_{g_k} 间的关系，

$$
\begin{aligned}
n_\xi &= f\left(n_{g_k}\right) \\
&= \left(\frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|} \times \frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right) \frac{1}{\left\|\frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|}\right\| \cdot \left\|\frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right\|} \arcsin\left(\left\|\frac{g_k + n_{g_k}}{\|g_k + n_{g_k}\|}\right\| \cdot \left\|\frac{g_{k|k-1}}{\left\|g_{k|k-1}\right\|}\right\|\right) - m_g
\end{aligned}
$$

这两者间的关系不是线性化的，那么就只能进行线性化，一阶泰勒展开，

$$
\begin{aligned}
n_\xi &= f\left(n_{g_k}\right)\big|_{n_{g_k}\to 0} + \left.\frac{\partial f\left(n_{g_k}\right)}{\partial n_{g_k}}\right|_{n_{g_k}\to 0} n_{g_k} \\
&= \left.\frac{\partial f\left(n_{g_k}\right)}{\partial n_{g_k}}\right|_{n_{g_k}\to 0} n_{g_k} \\
&= F_{n_{g_k}} n_{g_k}
\end{aligned}
$$

其中，$F_{n_{g_k}} = \left.\frac{\partial f\left(n_{g_k}\right)}{\partial n_{g_k}}\right|_{n_{g_k}\to 0}$ 的计算，采用数值扰动的方法。

从而，可以得到 $Q_{g_{k|k-1},g_k}$。

$$
Q_{g_{k|k-1},g_k} = E\left(\left(\xi_{g_{k|k-1},g_k} - m_{g_{k|k-1},g_k}\right)\left(\xi_{g_{k|k-1},g_k} - m_{g_{k|k-1},g_k}\right)^T\right) = E\left(n_\xi n_\xi^T\right)
$$

最终得到，$\xi_{g_{k|k-1},g_k}$ 的分布，

$$
\xi_{g_{k|k-1},g_k} \sim N\left(m_{g_{k|k-1},g_k}, Q_{g_{k|k-1},g_k}\right)
$$

再进行转换，用跟第一部分同样的方法，转换出扰动 ξ_{Z_k}。

$$
\begin{aligned}
Z_k &= \mu_{k|k-1} \exp\left(\xi^\wedge_{g_{k|k-1},g_k}\right) \\
&= \mu_{k|k-1} \exp\left(m^\wedge_{g_{k|k-1},g_k}\right) \exp\left(\xi^\wedge_{Z_k}\right) \\
\xi_{Z_k} &\sim N\left(0, Q_k\right)
\end{aligned}
$$

用 z_k 来表示。

$$
\begin{aligned}
z_k &= \mu_{k|k-1} \exp\left(m^\wedge_{g_{k|k-1},g_k}\right) \\
Z_k &= z_k \exp\left(\xi^\wedge_{z_k}\right) \sim N\left(z_k, Q_k\right)
\end{aligned}
$$

所以, 根据第一部分, 可以得到 $\mu_{k|k-1}$, 现在又得到了 z_k。综合这两者的信息, 可以得到, $\rho\left(\mu_k|\mu_{k|k-1}, z_k\right)$。就是要求一个 μ_k, 使得 $\rho\left(\mu_k|\mu_{k|k-1}, z_k\right)$ 最大，用公式表达如下。

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_k &= \arg\max_{\mu_k} \rho\left(\mu_k|\mu_{k|k-1}, z_k\right) \\
&= \arg\max_{\mu_k} \frac{\rho\left(\mu_k|\mu_{k|k-1}\right)\rho\left(z_k|\mu_{k|k-1}\right)}{\rho\left(z_k|\mu_{k|k-1}\right)} \\
&= \arg\max_{\mu_k} \rho\left(\mu_k|\mu_{k|k-1}\right)\rho\left(z_k|\mu_k\right) \\
&= \arg\max_{\mu_k} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\log\left(\mu_{k|k-1}^{-1}\mu_k\right)^\vee\right)^T P_{k|k-1}^{-1}\log\left(\mu_{k|k-1}^{-1}\mu_k\right)^\vee\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\log\left(\mu_k^{-1}z_k\right)^\vee\right)^T Q
\end{aligned}
$$

其中，μ_k 是个未知数，用 $\mu_k = \mu_{k|k-1}\exp\left(\xi^\wedge\right)$，转换成用未知数 ξ 来表示。然后，上式就可以转换为，

$$
\begin{aligned}
\hat{\mu}_k =& \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\log\left(\mu_{k|k-1}^{-1}\left(\mu_{k|k-1}\exp\left(\xi^\wedge\right)\right)\right)^\vee\right)^T P_{k|k-1}^{-1}\log\left(\mu_{k|k-1}^{-1}\left(\mu_{k|k-1}\exp\left(\xi^\wedge\right)\right)\right)^\vee\right)\right) \\
&\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\log\left(\left(\mu_{k|k-1}\exp\left(\xi^\wedge\right)\right)^{-1}z_k\right)^\vee\right)^T Q_k^{-1}\log\left(\left(\mu_{k|k-1}\exp\left(\xi^\wedge\right)\right)^{-1}z_k\right)^\vee\right)\right) \\
=& \exp\left(-\frac{1}{2}\left((\xi-0)^T P_{k|k-1}^{-1}(\xi-0)\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\log\left(\left(\mu_{k|k-1}\exp\left(\xi^\wedge\right)\right)^{-1}z_k\right)^\vee\right)^T Q_k^{-1}\log\left(\left(\mu_{k|k-
\end{aligned}
$$

但这样子也解不出来。对上式中的部分，在 $\xi = 0$ 处进行线性化，一阶泰勒展开。则可以转换为，

$$
\begin{aligned}
a(\xi) &= \xi - 0 = \xi \\
b(\xi) &= \log\left(\left(\mu_{k|k-1}\exp\left(\xi^\wedge\right)\right)^{-1}z_k\right)^\vee \\
J &= \left.\frac{\partial b(\xi)}{\partial \xi}\right|_{\xi\to 0} \\
&= \left.\frac{\partial \log\left(\left(\mu_{k|k-1}\exp\left(\xi^\wedge\right)\right)^{-1}\exp\left(m^\wedge_{g_{k|k-1},g_k}\right)\right)^\vee}{\partial \xi}\right|_{\xi\to 0} \\
&= \left.\frac{\partial \log\left(\exp\left(\xi^\wedge\right)z_k\right)^\vee}{\partial \xi}\right|_{\xi\to 0} \\
b(\xi) &= b(0) + J(\xi - 0) \\
&= m_{z_k} + J\xi
\end{aligned}
$$

其中，J 的计算，程序里面是用数值扰动的方法。这里应该也可以用解析的方法，把公式都展开来推导。

接下来，为了转换成卡尔曼滤波的形式，用 $H=-J$ 来表示。

所以，原式就可以表示为，

$$\rho\left(\mu_k|\mu_{k|k-1},z_k\right) \\ \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left((\xi-0)^T P_{k|k-1}^{-1}(\xi-0)\right)\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\left((m_{z_k}-H\xi)^T Q_k^{-1}(m_{z_k}-H\xi)\right)\right)$$

参考《State Estimation for Robotics》的第 3.1.2 和 3.3.2 节,求 $\arg\max_{\mu_k}\rho\left(\mu_k|\mu_{k|k-1},z_k\right)$，则上式最终可以转换出卡尔曼滤波的形式了。

$$\begin{cases} K_k=P_{k|k-1}H_k^T\left(H_kP_{k|k-1}H_k^T+Q_k\right)^{-1} \\ m_{k|k}^-=0+K_k\left(m_{z_k}-0\right) \\ P_{k|k}^-=\left(I-K_kH_k\right)P_{k|k-1} \end{cases} \tag{3}$$

所以，

$$\xi_{k|k}^-\sim N\left(m_{k|k}^-,P_{k|k-1}^-\right)$$

同时，

$$P_{k|k-1}^-=E\left(\left(\xi_{k|k}^--m_{k|k}^-\right)\left(\xi_{k|k}^--m_{k|k}^-\right)^T\right)$$

则融合后的姿态的均值 $\mu_{k|k}$ 为，

$$\mu_{k|k}=\mu_{k|k-1}\exp\left(\left(m_{k|k}^-\right)^\wedge\right) \tag{4}$$

设相对于姿态 $\mu_{k|k}$ 的李代数扰动。则 $\xi_{k|k}$ 与 $\xi_{k|k}^-$ 的关系要满足，

$$
\begin{aligned}
\mu_{k|k} \exp\left(\left(\xi_{k|k}\right)^{\wedge}\right) = \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{k|k}^{-}\right)^{\wedge}\right) \Rightarrow \\
\xi_{k|k} &= \log\left(\mu_{k|k}^{-1} \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{k|k}^{-}\right)^{\wedge}\right)\right)^{\vee} \\
&= \log\left(\left(\mu_{k|k-1} \exp\left(\left(m_{k|k}^{-}\right)^{\wedge}\right)\right)^{-1} \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{k|k}^{-}\right)^{\wedge}\right)\right)^{\vee} \\
&= \log\left(\left(\exp\left(\left(m_{k|k}^{-}\right)^{\wedge}\right)\right)^{-1} \mu_{k|k-1}^{-1} \mu_{k|k-1} \exp\left(\left(\xi_{k|k}^{-}\right)^{\wedge}\right)\right)^{\vee} \\
&= \log\left(\exp\left(\left(-m_{k|k}^{-}\right)^{\wedge}\right) \exp\left(\left(\xi_{k|k}^{-}\right)^{\wedge}\right)\right)^{\vee} \\
&= \log\left(\exp\left(\left(-m_{k|k}^{-} + J_r\left(-m_{k|k}^{-}\right)^{-1} \xi_{k|k}^{-}\right)^{\wedge}\right)\right)^{\vee} \\
&= -m_{k|k}^{-} + J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) \xi_{k|k}^{-}
\end{aligned}
$$

所以，得到扰动 $\xi_{k|k}$ 的均值 $m_{k|k}$，

$$
\begin{aligned}
m_{k|k} &= E\left(\xi_{k|k}\right) \\
&= E\left(-m_{k|k}^{-} + J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) \xi_{k|k}^{-}\right) \\
&= -m_{k|k}^{-} + J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) E\left(\xi_{k|k}^{-}\right) \\
&= J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) m_{k|k}^{-} - m_{k|k}^{-} \\
&\approx 0
\end{aligned}
$$

得到扰动 $\xi_{k|k}$ 的协方差 $P_{k|k}$，

$$
\begin{aligned}
P_{k|k} &= E\left(\left(\xi_{k|k} - \left(J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) m_{k|k}^{-} - m_{k|k}^{-}\right)\right)\left(\xi_{k|k} - \left(J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) m_{k|k}^{-} - m_{k|k}^{-}\right)\right)^{T}\right) \\
&= E\Big(\Big(-m_{k|k}^{-} + J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) \xi_{k|k}^{-} - \left(J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) m_{k|k}^{-} - m_{k|k}^{-}\right)\Big)\Big(-m_{k|k}^{-} + J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) \xi_{k|k}^{-} - \Big(J_r\Big(m_{k|k}^{-} \\
&= E\left(\left(J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) \xi_{k|k}^{-} - J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) m_{k|k}^{-}\right)\left(J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) \xi_{k|k}^{-} - J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) m_{k|k}^{-}\right)^{T}\right) \\
&= J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) E\left(\left(\xi_{k|k}^{-} - m_{k|k}^{-}\right)\left(\xi_{k|k}^{-} - m_{k|k}^{-}\right)^{T}\right) J_r\left(m_{k|k}^{-}\right)^{T} \\
&= J_r\left(m_{k|k}^{-}\right) P_{k|k-1}^{-} J_r\left(m_{k|k}^{-}\right)^{T}
\end{aligned}
$$

所以，

$$P_{k|k}=J_r\left(m_{k|k}^-\right)P_{k|k-1}^-J_r\left(m_{k|k}^-\right)^T \tag{5}$$

所以，X_k 的分布满足，

$$\begin{aligned} X_k &= \mu_{k|k-1}\exp\left(\xi_{k|k}\right)\sim N\left(\mu_{k|k-1},P_{k|k}\right) \\ \xi_{k|k} &\sim N\left(0,P_{k|k}\right) \end{aligned}$$

3.2 公式总结

前面推导的公式总结出来就是，

A. Time Update("**Predict**")
(1) Project the state ahead, eq.(1)
$\mu_{k\|k-1}=\mu_{k-1\|k-1}\exp\left((\omega_{k-1}\Delta t_{k-1})^\wedge\right)$
(2) Project the error covariance ahead, eq.(2)
$P_{k\|k-1}=\exp\left((\omega_{k-1}\Delta t_{k-1})^\wedge\right)P_{k-1\|k-1}\exp\left((\omega_{k-1}\Delta t_{k-1})^\wedge\right)^T+\Delta t_{k-1}R_{k-1}\Delta t_{k-1}$

B. Measurement Update("**Correct**")
(1) Compute the Kalman gain, eq.(3)
$K_k=P_{k\|k-1}H_k^T\left(H_kP_{k\|k-1}H_k^T+Q\right)^{-1}$
(2) Update estimate with measurement z_k, eq.(3)
$m_{k\|k}^-=0+K_k\left(m_{z_k}-0\right)$
(3) Update the error covariance, eq.(3)
$P_{k\|k}^-=\left(I-K_kH_k\right)P_{k\|k-1}$
(4) Project the state ahead with m_k, eq.(4)
$\mu_{k\|k}=\mu_{k\|k-1}\exp\left(\left(m_{k\|k}^-\right)^\wedge\right)$
(5) Project the error covariance ahead with m_k, eq.(5)
$P_{k\|k}=J_r\left(m_{k\|k}^-\right)P_{k\|k-1}^-J_r\left(m_{k\|k}^-\right)^T$

其中符号含义如下，

- $\mu_{k|k-1}$，预测姿态。
- $\mu_{k|k}$，校正姿态。
- ω，角速度。对 ESKF 系统来说，这是控制输入，或称为驱动输入。
- $\exp\left((\omega_{k-1}\Delta t_{k-1})^{\wedge}\right)$，用驱动角度向量 $\omega\Delta t$ 计算得到的旋转矩阵。也可以用四元数表示。
- $P_{k|k-1}$，先验估计误差协方差。
- $P_{k|k}$，后验估计误差协方差。
- R，测量噪声协方差。
- Q，过程噪声协方差。
- K，卡尔曼增益。
- $f()$，Process nonlinear vector function
- $h()$ ，Observation nonlinear vector function
- H，是 $h()$ 相对于状态向量 m 的偏导数的 Jacobian 矩阵。
- $m^{-}_{k|k}$，状态向量。在 ESKF 系统中，是表示旋转误差的旋转向量。每次迭代都重置为 0。
- z_k，测量向量。
- m_{z_k}，创新向量，或称为残差向量。
- $\exp\left(\left(m^{-}_{k|k}\right)^{\wedge}\right)$，用误差旋转向量 $m^{-}_{k|k}$ 计算得到的旋转矩阵。也可以用四元数表示。
- F，是 $f()$ 相对于状态向量 m 的偏导数的 Jacobian 矩阵。
  - 对于驱动角度向量 $\omega\Delta t$, $F = \exp\left((\omega_{k-1}\Delta t_{k-1})^{\wedge}\right)$。参见公式 (2)。
  - 对于误差旋转向量 $m^{-}_{k|k}$，$F = J_r\left(m^{-}_{k|k}\right)$。参见公式 (5)。

上面的方法跟《State Estimation for Robotics》的第 7.3.4 和 8.2.4 节很像，但是上面的方法，对协方差的处理更加精细。

要融合磁场计，也是同样的方法。

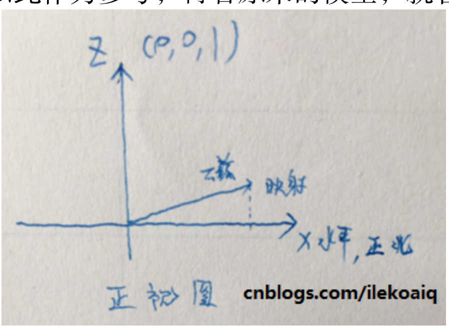
要融合视觉 SLAM 中送过来的姿态，也是同样的方法。

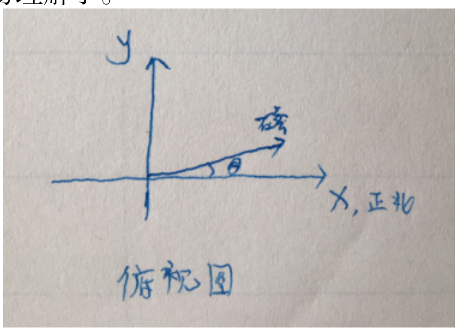
4 实际程序

在 cardboard 的实际程序中，还有很多细节的处理。比如：

- 增加了很多加权滤波的方法。
- 把加速度计的模的变化滤波出来，实时更新加速度计的协方差。这一步，相当于是 madgwick 里面的动态调整权重，但这一步更好，因为是直接算加速度计的协方差来调整权重，而不是通过陀螺仪的测量值来间接表示运动过快而调整权重。
- 在静止的时候，把陀螺仪的偏移滤波出来。
- 还有时间差平滑滤波的方法。

在融合磁场计的时候，把磁场计向量映射到水平面上，相当于只优化水平面上的旋转偏差。这个，在空间想象时，应该保持重力竖直方向 $(0, 0, 1)$ 不变，以此作为参考，再看原来的模型，就容易理解了。





但是没有对磁场计进行修正。如果要对磁场计进行修正，简单的方法可以参考 madgwick 里面的方法。全面的方法，则要参考那些专门搞磁场计标定的论文了。

5 总结

Cardboard 里面的九轴融合算法，效果比 Madgwick 方法和互补滤波方法都要好，对细节的处理也非常棒。以后再写一篇文章，详细比较基于李群的扩展卡尔曼滤波方法，Madgwick 算法，互补滤波的异同。

根据参考文献 [1]，这套理论也同样可以使用在六自由度（位移 + 旋转）融合上面，只需要把 $SO3$ 改成 $SE3$ 就可以了。可以用同一套理论，把视觉 SLAM 的位姿与 IMU 位姿融合在一起，得到融合后的六自由度数据，应用在 VR 头显中。

希望有一天，VR 头显的体验能做到像电影《头号玩家》里面那样。与仍然还在做 VR 的各位同行共勉。

6 求赞赏

您觉得，本文值多少?

7 有奖问答

给各位出一道思考题。

已知，一个 IMU 水平地放在桌面上不动。重力大小为 g。陀螺仪和加速度计以相同的频率同时输出，输出的时间间隔为 Δt。它的初始状态为 x_0。陀螺仪数据的噪声为 n_ω，加速度计数据的噪声为 n_a。

$$x_0 \in so(3) \sim N(0, P_0)$$
$$n_\omega \in R^3 \sim N(0, Q)$$
$$n_a \in R^3 \sim N(0, R)$$

其中，P_0，Q，R 都为对角矩阵。则随着时间的增长，请问，

（1）这个 IMU 的后验状态协方差是否会收敛?

（2）如果收敛的话，会收敛到什么值?

8 参考文献

1. Bourmaud G, Megret R, Giremus A, et al. Discrete Extended Kalman Filter on Lie groups[C]// Signal Processing Conference. EURASIP, 2013:1-5.
2. Timothy D. Barfoot. State Estimation for Robotics [M].Cambridge University Press, 2017.