# 问题

已知某应力张量的分量为

$$\sigma_{11} = 3, \quad \sigma_{12} = \sigma_{13} = 1, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0, \quad \sigma_{23} = 2$$

求

- 1、全部主应力
- 2、最大主应力对应的主方向
- 3、求方向矢量为 $\boldsymbol{n} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 的斜面上的正应力 $\sigma_n$ 和剪应力 $\tau_n$。

## 应力张量

已知应力张量有如下形式

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

## 导入 sympy 模块

In [1]:

```
from sympy import *
init_printing(use_unicode=True)
```

## `Matrix` 对象表示应力矩阵

In [2]:

```
# 生成矩阵对象
sigma = Matrix([[3, 1, 1],[1, 0, 2], [1, 2, 0]])
sigma
```

Out[2]:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

## 1、求全部主应力

### 求特征值

- 调用 Matrix 对象的 eigenvals 方法

In [3]:

```
sigma.eigenvals()
```

Out[3]:

$$\{-2:1,\quad 1:1,\quad 4:1\}$$

- 冒号后的数字表示 一重 特征值

**求特征矢量**

- 调用 Matrix 对象的 eigenvects 方法

In [4]:

```
sigma.eigenvects()
```

Out[4]:

$$\left[\left(-2,\quad 1,\quad \left[\left[\begin{matrix}0\\-1\\1\end{matrix}\right]\right]\right),\ \left(1,\quad 1,\quad \left[\left[\begin{matrix}-1\\1\\1\end{matrix}\right]\right]\right),\ \left(4,\quad 1,\quad \left[\left[\begin{matrix}2\\1\\1\end{matrix}\right]\right]\right)\right]$$

## 2、求最大主应力对应的主方向

**最大主应力**

$$\sigma_1 = 4$$

**最大主应力对应的主方向**

$$\frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 1)$$

## 3、求斜面上的正应力 $\sigma_n$ 和剪应力 $\tau_n$

**方向矢量**

$$\boldsymbol{n} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

In [5]:

```
n = Matrix([[0],[1],[1]])/sqrt(2)
n
```

Out[5]:

$$\left[\begin{matrix}0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right]$$

### 应力矢量 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}$

In [6]:

```
T = sigma*n
T
```

Out[6]:

$$\left[\begin{matrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{matrix}\right]$$

## 正应力 $\sigma_n = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}$

In [7]:

```
sigma_n = T.T*n
sigma_n
```

Out[7]:

$$\left[\begin{matrix}2\end{matrix}\right]$$

## 剪应力

$$\tau_n = \sqrt{T^2 - \sigma_n^2}$$

In [8]:

```
tau_n = sqrt(T.T*T-sigma_n**2)
tau_n
```

Out[8]:

$$\left(\left[2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

## 结束