题目

已知某点的应力张量为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_y & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

并已知经过该点的某一平面上的应力矢量为 0，求 σ_y 和主应力？

分析

由题意，存在某个微分面（单位法向量为 $\boldsymbol{n}$ ），其上的应力矢量 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0}$，即

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_y & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

行列式必须为零

线性方程组存在非零解，必然行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_y & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 2 - 4\sigma_y - 0 - 0 = 0$$

求得 $\sigma_y = 1$。

应力张量

于是，应力张量为

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

特征值问题

求主应力，即为求应力张量的特征值。

特征值问题

$$|\boldsymbol{\sigma} - \sigma \boldsymbol{I}| = 0$$

或

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 1 & 2 \\ 1 & 1-\sigma & 1 \\ 2 & 1 & -\sigma \end{vmatrix} = (1-\sigma)\sigma^2 + 2 + 2 - 4(1-\sigma) + \sigma + \sigma = 0$$

整理得

$$-\sigma^3 + \sigma^2 + 6\sigma = -\sigma(\sigma-3)(\sigma+2) = 0$$

主应力

得到三个主应力分别为

$$\begin{cases} \sigma_1 & = & 3 \\ \sigma_2 & = & 0 \\ \sigma_3 & = & -2 \end{cases}$$

符号运算求特征值

- 调用 Python 下的 sympy 模块

In [1]:

```
from sympy import init_printing, Matrix
```

In [2]:

```
init_printing(use_unicode=True)
```

`Matrix` 对象表示应力矩阵

In [3]:

```
# 生成矩阵对象
sigma = Matrix([[0, 1, 2],[1, 1, 1], [2, 1, 0]])
sigma
```

Out[3]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

求特征值

- 前已求得三个主应力分别为

$$\begin{cases} \sigma_1 & = & 3 \\ \sigma_2 & = & 0 \\ \sigma_3 & = & -2 \end{cases}$$

- 调用 Matrix 对象的 eigenvals 方法

In [4]:

```
sigma.eigenvals()
```

Out[4]:

$$\{-2:1,\quad 0:1,\quad 3:1\}$$

- 冒号后的数字表示 一重 特征值

求特征矢量

- 调用 Matrix 对象的 eigenvects 方法

In [5]:

```
Matrix([[0, 1, 2],[1, 1, 1], [2, 1, 0]]).eigenvects()
```

Out[5]:

$$\left[\left(-2,\quad 1,\quad \left[\left[\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}\right]\right]\right),\ \left(0,\quad 1,\quad \left[\left[\begin{matrix}1\\-2\\1\end{matrix}\right]\right]\right),\ \left(3,\quad 1,\quad \left[\left[\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right]\right]\right)\right]$$