在交易有摩擦情況下的複利模型

作者：Cheng-Yang Chang chengyangchang1@gmail.com 2023.9.19

Check it out on GitHub

摘要：在傳統的中心化銀行存款，銀行會給我們利息，而這種利息的基礎是來自古典的複利模型，古典的複利模型是假設手續費為零的，而銀行給我們的利息已經考慮並扣除了必要手續費，我們只需要放著領利息就好，不用做其他的操作。但如果是在去中心化的合約上，不會有人提供這樣的服務，必須自己手動操作。比如在Uniswap上鎖倉，每天會產生收益，收益可以解鎖後再鎖倉注入流動性，但是解鎖與輸入流動性都要手續費，而新注入的資產也會額外產生收益，所以我們必須自己計算最佳的存入週期，以及何時執行操作才能讓收益最大化。在手續費與資金量呈正比時，我們求出了在這種特定的情況下使收益最佳化的週期。然後我們把它近似到手續費固定時的情況上，並討論這種近似是否合理。我們用公式進行實際例子的計算，並且我們討論了手續費對利率的影響。

1. 引言 (Introduction)

古典的複利模型，是指我們把單利的利息不斷的提領並再存入，當再存入沒有手續費時（沒有成本），我們會發現應該讓再存入的間隔的時間趨近於零，這樣會讓收益最大化。我們知道這就是指數函數的定義，也是複利成長的模型。

但是這種無手續費的假設，並不一定符合真實的狀況，如果我們是存在中心化的銀行，銀行給我們的利率已經考慮了手續費，銀行已經扣除了他們需要的費用與利潤，我們只需要放著領利息就好，不用做特殊的操作。但如果是在去中心化的合約上，不會有人提供這樣的服務，所以我們必須自己計算最佳的存入週期，自己手動操作。

舉例來說：在Uniswap上鎖倉，每天會產生收益，這些收益可以解鎖後再重新鎖倉注入流動性。但是解鎖與輸入流動性都要繳交鍊上礦工手續費，而新注入的資產會產生額外的收益，我們應該在甚麼時候（或是未領取手續費到達多少時）執行操作（提領並再存入），才能讓收益最大化。

由於我們進行提領利息再存入的這個動作需要手續費，所以我們就不能像古典的情況一樣讓再存入的時間間隔趨近於 0，因為時間間隔越短，會讓手續費增加，但是時間間隔越長，會讓複利效果下降。所以我們應該可以找到一個合適的時間間隔，讓收益最大化。如果手續費降低到 0，此時就退化成古典的複利模型。

2. 古典無手續費的複利模型 (The classical model of compound interest without fees)

我們回顧古典的指數函數定義，在單位時間內的複利成長公式 [1] 如下所示：

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

當再存入沒有手續費時，我們會發現當 n 趨向無限時，收入最大，且雖然表面上利率是 1，但由於不斷的複利投入所以利率從 1 變為 e。現在我們讓利率（單利）從 1 變為 a，單位時間內的複利成長公式變為：

$$(1+\frac{a}{n})^n$$

讓 n 趨向無限，得到：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^n = e^a$$

3. 當交易有摩擦時的複利機制 (The mechanism of compound interest when trading is not frictionless)

在一次的存入週期中，我們把一開始存入的資金稱為初始資金，我們叫它 V_i。從上一次存入後累積的利息收入我們叫它 I。我們把初始資金加利息收入就會得到總資金我們令它為 V_f，我們可以得到 $V_i + I = V_f$。現在我們假設利率是 a，也就是說如果放著不動，經過單位時間後，累積到的利息收入為 $V_i a$。假設進行提領再存入需要手續費 F，我們現在定義一個新的量 β，可以寫為 $\beta = \dfrac{V_f - F}{V_f} = \dfrac{V_i + I - F}{V_i + I}$，可以認為 β 代表經過再存入後剩餘的資金與存入前總資金的比，所以 βV_f 也是下一個周期的初始資金，也就是說上一個周期的總資金乘 β 以後是下一個周期的初始資金，因此 β 可以當作每次再存入後的剩餘資金比例，你可以當作 β 越接近 1 手續費越低，而 β 越接近 0 手續費越高（ $\beta < 1$，所以 $1 - \beta$ 就是收取手續費的費率）。

現在我們讓利率一樣是 a，假設單位時間一樣分割 n 次（這裡假設分割的時間間隔是均勻的），則每次的資金變為前一次的：

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)$$

但是現在假設提領收益並再存入需要手續費，則我們令再存入之後資金量變為原來的 β 倍。**假設提領再存入所需要的手續費與當前的資金量成正比**，因為 $F \propto V_f$ 所以 β 跟 V_f 無關，我們可以發現此時是 β 定值。則收了手續費後每次存入資金變為前一次的：

$$\beta\left(1 + \frac{a}{n}\right)$$

由於單位時間內要重複這個動作 n 次，所以單位時間後總資金變為原本的：

$$\left[\beta\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right]^n \tag{1}$$

我們可以想像當有手續費時，如果太頻繁操作，手續費會侵蝕獲利，導致收益下降，而如果操作周期太長，會減弱複利的效果，同樣造成收益下降。若我們想知道怎樣的 n，可以使收益最大化。我們可以對 n 微分，極值點就在微分等於 0 的地方。我們讓 $\beta\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) = g$，則對上面的式子 (1) 的微分就變為對 g^n 的微分。由於我們只是要求微分等於 0 時的 n 值是多少，而對數函數是增函數。所以取對數後使微分等於 0 的 n，也是使原函數微分後等於 0 的 n。所以我們可以得到：

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(g^n\right) = 0 \\ \Rightarrow\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\ln\left(g^n\right) = 0 \\ \Rightarrow\ &\ln g + n\frac{g'}{g} = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

將 $\beta\left(1 + \dfrac{a}{n}\right) = g$ 代入 (2)，化簡後得到：

$$\ln\left[\beta\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right] = \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{n}\right)}\frac{a}{n} \tag{3}$$

我們令 $\dfrac{a}{n} = A$，代入上式 (3) 就可以改寫成：

$$\ln\left[\beta\left(1 + A\right)\right] = \frac{1}{(1 + A)}A \tag{4}$$

再把上式化簡可以得到：

$$\beta = \frac{e^{\frac{A}{1+A}}}{1+A} \tag{5}$$

我們可以發現 β 是 A 的函數，當 A 確定時 β 也確定了。因為 a 一定大於等於 0，所以 A 也一定大於等於 0，反過來說當 β 確定時 A 也唯一確定了，也就是說 A 也是 β 的函數。所以當 β 決定時，只要求這個方程式的根就可以求出 A。

我們來看看 A 是什麼，我們知道 $A = \frac{a}{n}$。我們會發現 a 是單位時間的利率（單利），如果我們存入 1 塊錢，經過單位時間後會有 a 塊的利息收入，如果存入 V_i 塊錢，經過單位時間後會有 $V_i a$ 塊的利息收入。但是我們在單位時間中切分成 n 次，所以 $\frac{a}{n}$ 就是單位資金，從上一次再存入後累積的收入。如果初始資金是 V_i，則 $V_i \frac{a}{n}$ 就是從上一次再存入後累積的收入，可以寫為 $V_i A$，所以每次週期結束累計的利息可以寫為 $I = V_i A$。又我們知道當 β 決定時 A 也決定了，所以當 β 決定時 a 就跟 n 成正比，並且它們之間的比值由 β 決定。

為什麼我們不用 a 跟 n 而要用 A？因為在鍊上利率時常是波動的，所以在利率波動的情況下，計算出的 n 也會波動，進而影響到我們得出的最佳存入的週期，使得存入週期也是波動的。但是我們會發現 a 總是與 n 一起出現（總是相除），所以 A 只跟 β 有關與 a 無關。因此改用 A 後就可以忽略利率波動的影響，只要給定 β 後就可以求出 A，只要累積的利息收入與本來存入資金的比率到達 A，就是要再存入的時機。

我們接著看這個解的性質，我們會發現這個解如果改變時間的單位，比如我們用天當基本單位或用星期當基本單位，得出的結果也是一樣的。我們知道 $A = \frac{a}{n}$。由於是在單位時間內分割 n 個次數，所以 $\frac{1}{n}$ 是最佳分割週期，我們可以得到 $\frac{1}{n} = \frac{A}{a}$。由於當 β 確定時 A 也確定了，所以 A 除以 a 就是最佳分割週期。如果我們用天當單位，則 a 是一天收到的利息，如果用星期當單位，則 a 是一周收到的利息。當然以周為單位 a 會變大 7 倍，而 $\frac{1}{n}$ 也就是最佳分割週期，也縮小 7 倍，但不要忘記此時的時間單位由天改為周，所以實際經過的時間是不變的。也就是說這個公式的解不會因為我們改變時間的單位，就造成最佳存入周期的時間跨度改變。這很合理，因為時間單位是人為設定的，不應該我們使用不同的單位制就造成結果的不同。

同樣的道理，如果我們改變資金的單位，比如我們把單位從美元改成美分，得出的結果也是一樣的。因為首先 β 是比例假如說是 0.9 好了，代表每次再存入資金會剩下百分之九十，又由於 β 決定時 A 也決定了，我們把 $\beta = 0.9$ 代入得出對應的 A 為 0.644。因為 A 是累積的利息收入與初始資金的比例，如果初始資金是 1 美元，則累積的利息達到 0.644 美元就是再存入的時機。如果我們改用美分計價，由於 1 美元是 100 美分 A 為 0.644 所以累積利息要達到 64.4 美分，才是我們再存入的時機。而 0.644 美元與 64.4 美分相等，也就是說不管我們怎麼改變計價的單位，也不會影響最後的結果。因為這跟前面時間單位的例子相似，計價的單位是人為設定的，沒道理我們改變計價單位就造成結果不同。

我們現在再回頭看為什麼要讓手續費 F 與總資金量 V_f 成正比，因為這樣才能讓 β 是定值，使得 β 跟 V_f 無關，可以得出 β 與 n 無關。如此我們對 n 微分時，就可以把 β 當作常數，進而使我們得到想要的答案。但是這樣的假設合理不合理呢？我們必須檢驗我們解的性質，它必須在改變時間單位與資金單位的情況下，也不會改變結果，因為時間單位與資金單位是人為設定的，沒理由改變單位就造成結果不同，那我們剛剛已經說明過了確實是這樣。並且我們一開始是假設分割時間的間隔是平均的，所以我們還必須證明當分割數 n 固定時，平均的分割可以使收益最大，這個等一下會在下面做推演。如果我們的解可以符合前面說的所有條件，至少我們可以說它在我們假設的前提下（手續費與總資金量成正比時），是使成長率最快的解。

可以看我建立的Desmos頁面，其中的 x 軸代表 n，這裡紫色的線代表成長率，藍色的線代表成長率對 n 微分，而橘色的虛線就是方程式 (3) 的解。我們可以看到橘色虛線是一條直線，也就是橘色線的 x 的數值，就是公式 (3) 的解。我們會發現藍色的線（也就是成長率對 x 的微分）它的根的 x 值正好是橘色虛線的 x 值。再看此時的紫色線也正好是最高點而不是最低點。也就是說我們用數值的方法驗證了，我們前面求出的方程式 (3)，的確就是使成長率最大的公式。你可以改變不同的 β 跟 a 來驗證，剛剛說的關係在不同的 β 跟 a 下都會成立。

4. 使成長率最大的分割間隔 (The best split interval to maximise growth rate)

但是我們前面是假設，每次再存入的時間間隔是平均的，如果間隔不平均，有沒有可能使成長率更高？想要知道怎樣的間隔可以讓收益最大化，我們看前面的式子 (1)。我們知道過了單位時間後資金變為 $\left[\beta\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]^n$，我們可以拆解它，得到：

$$\left[\beta\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]^n=\beta^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^n \tag{6}$$

我們可以看到，單位時間的成長率由兩個部分構成，前半部分是 β^n 後面是 $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$。我們看後面的 $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ 這個部分，我們會發現這其實就是 $\left(1+\frac{a}{n}\right)$ 乘以 n 次，那如果 n 不是正整數怎麼辦？我們前面已經論證時間的單位是人為設定的，不會影響結果，所以如果 n 不是正整數，我們只需要找一個恰當的時間單位，使得 n 是整數。所以這裡我們只要假設 n 是正整數就好，不會影響結果。繼續往下推導 $\left(1+\frac{a}{n}\right)$ 就是每次存入後到提領出來前總資金對比初始資金的倍率，單位時間分割 n 次，所以每次的時間長度就是 $\frac{1}{n}$，我們令 $\frac{1}{n}$ 為一個新的物理量，稱它為 x。把 x 代入 $\left(1+\frac{a}{n}\right)$ 就變為 $(1+xa)$。現在如果分割間隔的時間不是平均的，我們令第 1 次再存入的時間間隔是 x_1，第 2 次的間隔是 x_2，依此類推到第 n 次是 x_n。在時間分割間隔不平均的情況下 $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ 就可以寫為 $(1+x_1a)(1+x_2a)\cdots(1+x_na)$，我們把它代入上面的成長率公式 (6)，成長率就可以寫為：

$$\beta^n(1+x_1a)(1+x_2a)\cdots(1+x_na) \tag{7}$$

我們可以改用 $(1+x_1a)(1+x_2a)\cdots(1+x_na)$ 的**幾何平均數(Geometric mean)** [2] 來取代它，我們令幾何平均數為 G，因為 $G^n=(1+x_1a)(1+x_2a)\cdots(1+x_na)$。把 G^n 代入上面的式子 (7) 我們可以把成長率改寫為：

$$\beta^nG^n \tag{8}$$

我們會發現，如果把手續費考慮在內，成長率正好是古典分割 n 次的複利成長公式乘上 β^n。但是，如果分割次數是固定的，我們會發現不論分割間隔如何改變，都不會影響到分割的總次數 n，所以 β^n 不會改變。如果我們想要最大化成長率，由於 n 是定值不會改變，所以只要 G 越大，成長率也就越高。也就是說使 G 最大的時間間隔分布，就是使成長率最大的時間間隔分布。我們看看**算術平均數 (Arithmetic mean)** [3]，而 $(1+x_1a),(1+x_2a),\cdots,(1+x_na)$ 的算術平均數是：

$$\frac{n+(x_1+x_2+\cdots+x_n)a}{n} \tag{9}$$

但是 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)=1$，因為單位時間是分割成 n 份，所以不管如何分割，這些時間間隔加起來一定是單位時間也就是 1。我們把它代入 (9) 式化簡後得到 $\left(1+\frac{a}{n}\right)$，我們會發現不論分割間隔為何，由於 n 是固定的，所以算術平均數總是相同的值。我們看看**算幾不等式** [4]，算術平均數總是大於等於幾何平均數，只有數列中每一個數都相等時，它們才會相等。也就是說當 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 時，此時的 G 大於等於其他所有可能的幾何平均數，也就是說此時的 G 是最大的。所以我們證明使 G 最大的時間間隔分布為平均分布，此時 $G=\left(1+\frac{a}{n}\right)$，代入前面的公式 (8)，此時成長率寫為：

$$\beta^n\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$$

我們會發現又回到我們最一開始的公式，所以我們證明了當分割次數 n 固定時，使成長率最高的分割是平均分割。前面又得出了當時間間隔是均勻分布的時候，使成長率最高的 n 的公式。因此可以得出，如果讓時間間隔與分割次數都可以自由改變，我們前面求的公式依然是讓成長率最高的公式，因為我們的公式可以同時滿足這兩個條件。

5. 等效利率 (Equivalent interest rate)

現在我們了解到了，當交易有摩擦時，我們並不能像傳統的複利一樣，無限短的提領再存入，而是必須在利息收入到達一定量的時候再操作，才能到達最佳的成長效果。也就是說這種交易的摩擦會造成我們資金利用能力的下降，也就是我們實際上收到的利率會小於交易無摩擦時的利率。我們想知道這樣的損失會造成多大的影響。

回顧古典複利，我們知道：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$$

意思是說經過單位時間，資金會成長為原來的 e^a 倍，其中 a 我們稱為**對數報酬率(logarithmic rate of return)** [5] 。現在我們想知道當當交易有摩擦時，如果我們嚴格依照最佳循環週期來操作，則在利率維持 a 不變的情況下，我們等效的對數報酬變為多少。

由於前面我們已經知道了，在考慮交易手續費的情況下，經過單位時間後資金會成長為原來的 $\left[\beta\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]^n$ 倍，我們令它等於 e^b，其中 b 就是等效對數報酬率：

$$\left[\beta\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]^n=e^b$$

同時對它們取對數，化簡後得到：

$$n\ln\left[\beta\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]=b$$

又前面我們已經知道符合最佳循環週期的 n 是 $\ln\left[\beta\left(1+\frac{a}{n}\right)\right]=\dfrac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)}\dfrac{a}{n}$ 的解，代入上面的式子化簡後得到：

$$b=\frac{1}{(1+A)}a$$

我們引入一個新的量，我們令 $\gamma=\dfrac{b}{a}$，然後代入並將上面的式子化簡後得到：

$$\gamma=\frac{1}{(1+A)}$$

我們會發現因為 A 一定大於 0，所以 γ 一定小於 1。並且 γ 跟 a 無關只跟 β (或 A) 有關。也就是說摩擦力會造成我們實際的收益的下降，並且對數報酬率的下降，正好等於初始資金與再存入前總資金的比值。

並且移項後我們可以得到 $(1+A)=\dfrac{1}{\gamma}$，與 $A=\dfrac{1}{\gamma}-1$，將它們代入上面的方程式 (5) 化簡後得到：

$$\beta=\gamma e^{1-\gamma} \tag{10}$$

6. 擴展到手續費固定時的狀況 (Extended to the situation where the handling fee is fixed)

然而，在鍊上交易更常見的狀況是，收取一個與總資金量無關的固定手續費，而不是百分比的手續費，因此我們要改寫我們的公式。在這裡我們直接假設前面推導出的公式（假設手續費與資金量成正比），可以套用到手續費固定時的情況，下面會討論這種假設是否合理。我們回來看我們之前得到的式子 (4)：

$$\ln\left[\beta\left(1+A\right)\right] = \frac{1}{(1+A)}A \tag{4}$$

我們先看 β 是什麼，我們知道 β 是在存入後剩餘資金與總資金的比。由上面的定義我們知道 $\beta = \frac{V_f - F}{V_f} = \frac{V_i + I - F}{V_i + I}$。而 A 是累積的利息收入與初始資金的比值，可以寫為 $A = \frac{I}{V_i}$。那麼 $(1+A)$ 就可以寫成：

$$(1+A) = 1 + \frac{I}{V_i} = \frac{V_f}{V_i}$$

我們把 β 跟 A 代入之前得到的式子 (4) 化簡後得到：

$$\begin{aligned} & \ln\left[\beta\left(1+A\right)\right] = \frac{1}{(1+A)}A \\ \Rightarrow\ & \ln\left[\frac{V_f - F}{V_f}\left(\frac{V_f}{V_i}\right)\right] = \frac{V_i}{V_f}\frac{I}{V_i} \\ \Rightarrow\ & \ln\left(\frac{V_f - F}{V_i}\right) = \frac{I}{V_f} \end{aligned}$$

我們把 $V_f = V_i + I$ 代入上面的公式，就可以得到 F 與 I 的關係：

$$\ln\left(\frac{V_i + I - F}{V_i}\right) = \frac{I}{V_i + I}$$

化簡後可以得到：

$$F = V_i + I - V_i \cdot e^{\frac{I}{V_i + I}} \tag{11}$$

當 V_i 跟 F 確定時，只要求這個方程式的根就可以得到 I。意思是當手續費固定時，當我們累積的利息收入達到 I，就是要進行提領再存入操作的時機。

但是我們直接套用之前的公式是合理的嗎？因為之前的公式是假設手續費與資金量成正比，但現在手續費是固定的。如果 V_i 遠大於 F，則我們可以認為這種近似是合理的。舉例來說，假設初始資金 V_i 是 100 美元，手續費 F 是 1 美元，代入上面的式子 (11)，得到此時 I 等於 14.5 美元，我們可以算出此時 β 是 0.991，如果用這個 β 計算初始資金 V_i 的手續費，我們會得到手續費為 0.87 美元，我們會發現 $0.87 \approx 1$，所以我們可以認為此時的手續費大致相同。如果說在區塊鍊上，費用可能會在每個 gas 12 到 20 Gwei 之間波動，並且合約執行後實際的 gas used 也只能估算，在合約執行前也無法知道精確的數量。意思是說手續費的波動，已經大於將手續費假設為與資金量成正比造成的誤差。由於在鍊上的交易本來就有隨機性，所以本來就不可能找到實際上的最佳解，因為你無法預測下一個區塊的手續費是多少，你只能預估。所以我們可以認為，如果 V_i 足夠大，這樣的近似就是合理的。

7. 計算 (Calculations)

現在我們來看實際的情況，假設我們在恆定乘積做市商，我們提供 500 個 USDT 與 500 個 USDC 的流動性。所以目前流動池的價值是 1000 美元。為了簡單起見，我們假設我們提供的資產它們之間交換的價格比值（在本例中始終是 1 個 USDT 換 1 個 USDC）以及整個流動池的總市值都不會變動。也就是 USDT 的數量永遠是 500 個市值也是 500 美元，USDC 也同理永遠是 500 個共 500 美元。既然它們對美元的市值不會變動，當然它們之間交換的價格也不會變動。並且收到的利息也都是穩定幣，所以收到的利息也不會因為幣值波動而波動，而是近似於存款的利息，數量只會變多。所以我們可以把這樣的流動池對，認為它近似於我們一開始提到的有摩擦力的存款模型，這個流動池的市值就是前面說的初始資金 V_i，在本例中就是 1000 美元。

假設當我們要把賺到的利息再存入，假設要經過三個步驟，首先把利息提領出來，由於我們收到的手續費中 USDT 與 USDC 的比值，不一定跟我們的流動池中兩種資產的比值是相同的比例。所以我們還要交易把它們換成相同比例，最後再存入。總之不管要經過多少步驟，我們把所有會產生的成本都加起來，就是所需的手續費 F，假設在目前的狀況中所需的手續費（通常是該鍊的幣）換算成美金要 20 美元。

我們代入上面的公式計算得到 I 等於 207 美元。可以看我建立的Desmos頁面，我們把 F 跟 V_i 設定成我們要的數值，然後看兩個方程式的交點，就是我們要求的 I。

另一個方法是，移項後求下面這個方程式的根。

$$V_i + I - V_i \cdot e^{\frac{I}{V_i + I}} - F = 0$$

這是可以計算的，可以看我建立的Desmos頁面，這裡橘色的線，就是我們的方程式，這個方程的根，就是我們方程式的解。你可以把 F 跟 V_i 設定成你需要的數值來幫你預測 I。

接著看另一個Desmos頁面，這裡 x 軸是我們的 F，而 y 軸是我們的 I。我們可以利用這個頁面觀察 F 與 I 之間的關係，我們會發現 I 始終大於 F，這很合理如果收到的利息小於手續費，則我們的錢就會越換越少。而當 F 趨近於 0 時 I 也趨近於 0，這代表回到古典沒有手續費的情況。

我們回顧 γ 與 β 的關係，讓此時 β 等於 0.8，代入之前的公式 (10)：

$$\beta = \gamma e^{1 - \gamma}$$

我們可以得到 γ 等於 0.472。然後我們用一樣的方法求當 β 等於 $0.9, 0.99, 0.999$ 時的 γ 值，得到：

```
beta=0.9     gamma=0.608
beta=0.99    gamma=0.865
beta=0.999   gamma=0.956
```

可以看我建立的Desmos頁面，其中 x 軸代表 β 而 y 軸代表 γ，觀察 β 與 γ 之間的關係。我們會發現當 β 很接近 1 時，斜率是趨近無窮大。從前面的計算也可以得知當 β趨近 1 時 γ 是陡峭的上升，而不是線性的趨近於 1。你看當 β 是 0.9 時 γ 是 0.608 而當 β 是 0.99 時 γ 是 0.865，即使 β 已經很接近 1 了 γ 距離 1 還是有一段差距。也就是說當交易有摩擦時，即使 β 很接近 1，並且摩擦力很小，對實際利率的影響也是巨大的。或許這個結果也說明了為什麼傳統的金融業，在資金的體量不同時，資金利用的效率完全不同，比如若是有更多資金或更大的交易量，通常會獲得更好的條件，如：利率、手續費折扣、退佣等等。除了行銷的考量，或許也是因為考慮到了操作造成的成本對利率的影響，也就是本文所討論的主題。

8. 結論 (Conclusion)

在古典複利中由於沒有手續費，所以我們再存入操作的時間間隔要無限小，才能使收益最大。但是如果考慮了手續費則時間間隔不能過小，也不能過大。我們提出了一個考量手續費的複利模型，藉由假設手續費與資金量呈正比，我們得出了要使收益最佳化的解。我們發現這個解的結果是，當收益達到初始資金的一個比例時，要進行再存入的操作，與一開始和中間過程中的利率無關。並且證明它在改變時間單位與資金單位的情況下，也不會改變結果。我們還討論了分割間隔對成長率的影響，最後發現當分割間隔是平均時，成長率最大。並且計算了手續費對利率的影響，得出了等效利率。由於在區塊鍊上的世界中，往往是收取固定手續費，所以我們拓展我們的模型到固定手續費的情況，並且討論了這種近似是否合理，並提供了網頁方便大家做計算。

參考文獻 (References)

---

1. **维基百科, s.v. "指数函数"** Wikipedia contributors (2023-06-15) https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%8C%87%E6%95%B0%E5%87%BD%E6%95%B0&oldid=77692656 ↩
2. **维基百科, s.v. "几何平均数"** Wikipedia contributors (2023-04-14) https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E5%87%A0%E4%BD%95%E5%B9%B3%E5%9D%87%E6%95%B0&oldid=76812687 ↩
3. **维基百科, s.v. "算术平均数"** Wikipedia contributors (2022-02-05) https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E7%AE%97%E6%9C%AF%E5%B9%B3%E5%9D%87%E6%95%B0&oldid=70020320 ↩
4. **维基百科, s.v. "算术-几何平均值不等式"** Wikipedia contributors (2023-02-01) https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E7%AE%97%E6%9C%AF-%E5%87%A0%E4%BD%95%E5%B9%B3%E5%9D%87%E5%80%BC%E4%B8%8D%E7%AD%89%E5%BC%8F&oldid=75780402 ↩
5. **Wikipedia, s.v. "Rate of return"** Wikipedia contributors (2023-08-06) https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rate_of_return&oldid=1169071015#Logarithmic_or_continuously_compounded_return ↩