

2018 年江苏省信息与未来小学生夏令营 IT 小能手 PK 之程序设计试题 (共 6 题, 满分 100 分)

问题 1: 圣诞树 (15 分)

圣诞树共有 n 层, 从上向下数第 1 层有 1 个星星、第 2 层有 2 个星星、以此类推, 排列成右图所示的形状。

星星和星星之间用绳子连接。第 1, 2, ..., $n-1$ 层的每个星星都向下一层最近的两个星星连一段绳子, 最后一层的相邻星星之间连一段绳子。

你能算出如果要布置一棵很大(n 层)的圣诞树, 需要买多少段绳子吗?

输入格式

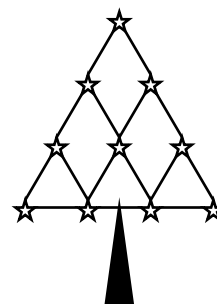
输入一行一个整数 n , 圣诞树的层数。

输出格式

输出一行一个整数, 代表圣诞树中绳子的段数。

样例数据

样例数据 1	输入	2	2 层的圣诞树只需 3 段绳子
	输出	3	
样例数据 2	输入	4	参考题图
	输出	15	



数据规模

所有数据满足 $1 \leq n \leq 1,000$ 。

问题 2: 最大公约数 (15 分)

输入三个正整数 x, y, z , 求它们的最大公约数(Greatest Common Divisor) g : 最大的正整数 $g \geq 1$, 满足 x, y, z 都是 g 的倍数, 即 $(x \bmod g) = (y \bmod g) = (z \bmod g) = 0$ 。

输入格式

输入一行三个正整数 x, y, z 。

输出格式

输出一行一个整数 g , 表示 x, y, z 的最大公约数。

样例数据

样例数据 1	输入	12 34 56	$12 = 2 \times 6, 34 = 2 \times 17, 56 = 2 \times 28, g = 2$
	输出	2	
样例数据 2	输入	28 70 28	$28 = 14 \times 2, 70 = 14 \times 5, 28 = 14 \times 2, g = 14$
	输出	14	

数据规模

所有数据满足 $1 \leq x, y, z \leq 1,000,000$ 。

问题 3: 双十一 (15 分)

每年 11 月 11 日, 各大网上商店都会有促销活动, 因此大家都希望 11 月 11 日在周末, 就可以更愉快地购物啦。请你写一个程序计算一段时间中, 11 月 11 日是周末(周六或周日)的数量。

以下关于日期的定义和事实能帮到你:

- 1900 年 1 月 1 日是星期一。
- 每年的 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12 月有 31 天; 4, 6, 9, 11 月有 30 天; 闰年的 2 月有 29 天, 非闰年的 2 月有 28 天。
- 闰年的计算方法: 不能被 100 整除的年份称为普通年。普通年能被 4 整除的为闰年, 因此 2004 年是闰年, 1999 年不是闰年; 能被 100 整除的年份称为世纪年。世纪年能被 400 整除的是闰年, 因此 2000 年是闰年, 1900 年不是闰年。

输入格式

输入一行两个整数 x, y , 代表需要计算的起止年份。

输出格式

输出一个整数, 第 x 年到第 y 年中 11 月 11 日是周末的年数(包括第 x 年和第 y 年)。

样例数据

样例数据 1	输入	2018 2018	2018 年 11 月 11 日是星期日
	输出	1	
样例数据 2	输入	2018 2100	2018 年到 2100 年之间共有 23 个 11 月 11 日是周末
	输出	23	

数据规模

所有数据满足 $1,900 \leq x \leq y \leq 3,000$ 。

问题 4: 素数方阵 (15 分)

把前 n^2 个素数从左上角开始按右、下、左、上、右、下、左、上……的顺序填入 $n \times n$ 的方阵就得到了蛇形素数方阵。以下是 $n = 4$ 和 $n = 5$ 的蛇形素数方阵:

2	3	5	7
37	41	43	11
31	53	47	13
29	23	19	17

2	3	5	7	11
53	59	61	67	13
47	89	97	71	17
43	83	79	73	19
41	37	31	29	23

给出 n , 你的任务是求出 $n \times n$ 的蛇形素数方阵, 并输出其中某个方格中的数值。

素数, 又称质数, 是指除 1 和其自身之外, 没有其他约数的大于 1 的正整数。

输入格式

输入一行三个正整数 n, x, y ($1 \leq x, y \leq n$)。

输出格式

输出一行一个整数，表示 $n \times n$ 蛇形素数方阵第 x 行第 y 列中的数字。

样例数据

样例数据 1	输入	5 1 4	参考上图 $n = 5$
	输出	7	
样例数据 2	输入	5 4 3	
	输出	79	

数据规模

所有数据满足 $1 \leq n \leq 20$ 。

问题 5：整数乘方 (20 分)

定义 a 的 n 次幂 $a^n = a \times a \times \dots \times a$ (共 n 个 a 相乘)。记 a^n 的十进制表示转换为字符串后奇数字符(阿拉伯数字 1, 3, 5, 7, 9)的个数为 A ，偶数字符(阿拉伯数字 0, 2, 4, 6, 8)的个数为 B ，求 $A - B$ 的数值。

例如， $a = 3, n = 12, a^n = 3^{12} = (531441)_{10}$ ，

奇数数位用方框标出： $\boxed{5}\boxed{3}\boxed{1}44\boxed{1}$ ，故 $A = 4$ ；

偶数数位用方框标出： $531\boxed{4}\boxed{4}1$ ，故 $B = 2, A - B = 2$ 。

输入格式

输入一行两个整数 a, n 。

输出格式

输出一行一个整数，代表 $A - B$ 的值。

样例数据

样例数据 1	输入	3 12	参考题目描述中的解释
	输出	2	
样例数据 2	输入	5 18	$5^{18} = 3,814,697,265,625, A - B = -1$ 。
	输出	-1	

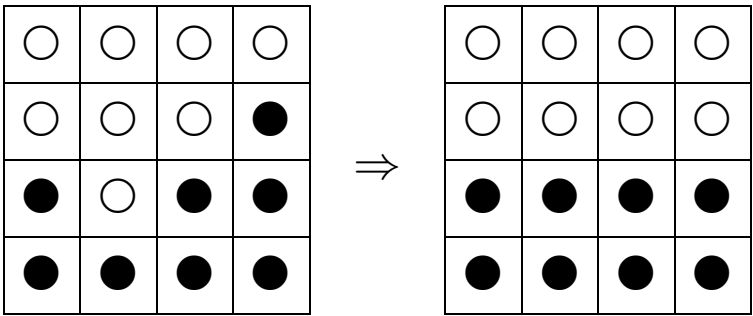
数据规模

30% 的数据满足 $a^n < 2^{32}$ ；所有数据满足 $2 \leq a \leq 9, 1 \leq n \leq 100$ 。

问题 6：棋盘游戏 (20 分)

给定一个十进制数 $0 \leq x < 2^{16}$ ，将它转换为二进制字符串并在高位填 0 以补足 16 位，就得到了一个长度为 16 的 01 字符串，我们用这个字符串表示 4×4 的棋盘，按从左到右、从上到下的顺序将 0 (白子)、1 (黑子)放入棋盘。

例如， $(447)_{10} = (0000\ 0001\ 1011\ 1111)_2$ ，按顺序填入棋盘(0 白子、1 黑子)，得到如下棋盘(左边棋盘)：



我们现在可以交换棋盘中**相邻**(共享一条边的两个格子相邻，因此一个格子至多有 4 个相邻的格子)的黑色和白色棋子。从左图的棋盘变为全部白子在上、全部黑子在下(右边棋盘所示)的棋盘，至少需要 3 步。

对于给定的棋盘(保证棋盘中恰好有 8 个白子和 8 个黑子)，求把棋盘变为全部白子在上、全部黑子在下最少的交换步数。

输入格式

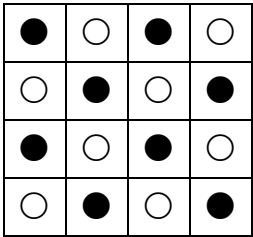
输入一行一个整数 x ，为十进制表示下的棋盘。

输出格式

输出一行一个整数，最少需要交换的步数。

样例数据

样例数据 1	输入	447	参考上图，将(2,4)处的黑子移动到(3,2)需要3步
	输出	3	
样例数据 2	输入	42405	如右图所示， $(42405)_{10} = (1010\ 0101\ 1010\ 0101)_2$
	输出	8	



数据规模

50%的测试数据满足棋盘可以在 6 次交换内变为白子在上、黑子在下。

所有数据保证 $0 \leq x < 2^{16}$ ，且 x 转换为二进制后恰好有 8 个“1”。