傅里叶变换

- 参考链接：http://blog.jobbole.com/70549/
- 理论支持：任何周期函数（或有限的非周期函数）都能表示为不同频率的正弦和/或余弦波之和的形式，每个正弦项和/或余弦项乘以不同的系数（即傅里叶级数）。而傅里叶变换就是将普通的函数转换成上述函数形式
- 数学公式（等式$f(t)$为原函数，F(x)为傅里叶函数）：

  $$F(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}x} \tag{1-1}$$

  其中

  $$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}\mathrm{d}t, n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{1-2}$$

  ，x 是连续变量，T是周期，c_n为**傅里叶级数**。
  该数学公式的另一种形式为：

  $$F(x)=a_0+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[a_n\cos\frac{2\pi x}{T}+b_n\sin\frac{2\pi x}{T}\right] \tag{2-1}$$

  其中

  $$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t\\ a_n&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi t}{T}t\mathrm{d}t\\ b_n&=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi t}{T}t\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2-2}$$

  二者的等价性证明在后面
- 目的：为了获取在原始信号中不易获得的信息
- 时域信号 $\longrightarrow$ 频域信号
  - 时域信号：信号是关于时间的函数，显示信号随时间改变的变换关系
  - 频域信号：将式（1-1）求和后，可以得到形式为 $u\cdot e^{j\cdot v}$ 的结果，则将 v 值作为图像的 x 轴的点，u 值作为图像的 y 轴的点 。显然，当（1-1）中的 x 取不同值时，就能得到系列的 u 和由此形成的二维图即为频域信号。其意义是显示信号中各个频率的“分量”
- 特点：
  1. 适用于平稳信号的变换，不适合非平稳信号的变换
  2. 显示各频率分量信息，但丢失了时间信息

证明两种傅里叶展开式等价

将式（2-2）代入（2-1）得：

$$F(x)=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\mathrm{d}t+\frac{2}{T}\sum_{n=1}^{+\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi n(t-x)}{T}\mathrm{d}t \tag{3-1}$$

将（1-2）代入（1-1）得：

$$G(x)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\mathrm{d}t\cdot e^{jk\frac{2\pi}{T}x} \tag{3-2}$$

根据欧拉公式 $e^{jk}=\cos k+j\sin k$，式（3-2）转成：

$$
\begin{aligned}
G(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\{ \quad & \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi k}{T}\,t\mathrm{d}t\cdot\cos\frac{2\pi k}{T}\,x \quad + \\
& \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi k}{T}\,t\mathrm{d}t\cdot\sin\frac{2\pi k}{T}\,x \quad - \\
& j\cdot\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi k}{T}\,t\mathrm{d}t\cdot\cos\frac{2\pi k}{T}\,x \quad + \\
& j\cdot\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi k}{T}\,t\mathrm{d}t\cdot\sin\frac{2\pi k}{T}\,x \quad \}
\end{aligned}
$$

即

$$
\begin{aligned}
G(x) = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left[\cos\frac{2\pi k}{T}\,t\cdot\cos\frac{2\pi k}{T}\,x+\sin\frac{2\pi k}{T}\,t\cdot\sin\frac{2\pi k}{T}\,x\right]\mathrm{d}t\right\} + \\
& \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left\{\frac{j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\left[\cos\frac{2\pi k}{T}\,t\cdot\sin\frac{2\pi k}{T}\,x-\sin\frac{2\pi k}{T}\,t\cdot\cos\frac{2\pi k}{T}\,x\right]\mathrm{d}t\right\}
\end{aligned}
$$

化简得

$$
\begin{aligned}
G(x) = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi k(t-x)}{T}\mathrm{d}t \quad + \\
& \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi k(t-x)}{T}\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{3-3}
$$

由式（3-3）可知，

$$
\begin{aligned}
\because \quad & \sin\frac{2\pi k(t-x)}{T}\text{为奇函数，} \\
& \cos\frac{2\pi k(t-x)}{T}\text{为偶函数，} \\
& k\in[-\infty,+\infty]\text{为对称区间} \\
\therefore \quad & \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi k(t-x)}{T}\mathrm{d}t \\
& =\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi k(t-x)}{T}\mathrm{d}t, \\
& \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{j}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\frac{2\pi k(t-x)}{T}\mathrm{d}t=0
\end{aligned}
$$

即（3-3）可化简为

$$
G(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\frac{2\pi k(t-x)}{T}\mathrm{d}t \tag{3-4}
$$

显然，（3-4）与（3-1）相等，故证得二者的等价性。