第四章　　动 态 规 划

4-1　引言及内容框架

本节要点

- 动态规划的研究对象和特点
- 静态决策问题的动态处理
- 动态规划部分内容框架

一、动态规划的研究对象

——多阶段决策问题

1、多阶段决策问题

1) 动态决策——将时间作为变量的决策问题称为动态决策，其基本特点是多次决策。

2) 多阶段决策问题是一类特殊形式的动态决策问题。是指这样一类活动过程：系统的动态过程可以按照时间进程分为状态相互联系而又相互区别的各个阶段，而且在每个阶段都要进行决策，当每一阶段的决策确定以后，就完全确定了一个过程的活动路线。

多阶段决策问题的典型例子：

- 企业在生产过程中，由于需求是随着时间变化的因素，因此企业为了获得全年最佳经济效益，就要在整个生产过程中逐月或逐季的根据库存和需求决定生产计划。
- 某种机器，可以在高、低两种负荷下生产。高负荷下生产的产量多，但每生产一个阶段后机器的完好率低；低负荷下生产时的情况则相反。现在需要安排该种机器在多个阶段内的生产，问应该如何决定各阶段中机器的使用，使整个计划期内的总产量最大。

- 某台设备，例如汽车，刚买来时故障少，耗油低，出车时间长，处理价值和经济效益高。随着使用时间的增加则变为故障多，耗油高，维修费用增加，经济效益差。使用时间愈长，处理价值也愈低。另外，每次更新都要付出更新费用。因此，应当如何决定设备的使用年限，使总的效益最佳。

- 化工生产过程包含一系列的过程设备，如反应器、蒸馏塔、吸收器等等，前一设备的输出是后一设备的输入。因此，应该如何控制生产过程中各个设备的输出和输入，使总产量最大。
- 发射一枚火箭去击中运动中的目标。由于目标的行动是不断改变的，因此应如何根据目标运动情况，不断调整火箭飞行的方向与速度，使之最快地命中目标，等等。

2. 什么是动态规划？

DP是运筹学**OR**的一个分支，是解决多阶段决策过程最优化的一种方法或是一种分析多阶段决策过程的数学方法，这种方法可根据人们所采取的措施，一步步地控制过程的发展，以实现预定的要求。

这一运筹学分支最初是由美国数学家**Bellman**等人根据一类多阶段决策问题的特性，提出了解决这类问题的最优化原理，并研究了许多实际问题而建立起来的。

3. 动态规划方法的特点

☺ 优点：

①许多问题用动态规划研究求解比线性规划、非线性规划更有效，特别是离散性问题，解析数学无用武之地，而动态规划成为得力工具；

②某些情况下，用动态规划处理不仅能作定性描述分析，且可利用计算机给出求其数值解的方法。

☹缺点：

①没有统一的处理方法，求解时要根据问题的性质，结合多种数学技巧。因此，实践经验及创造性思维将起重要的引导作用。

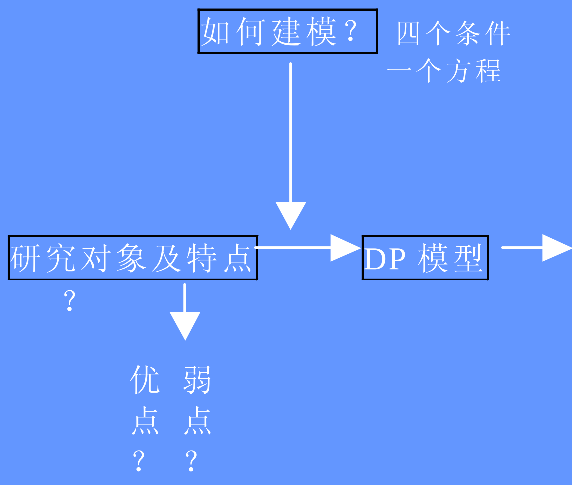
②“维数障碍”：当变量个数太多时，由于计算机内存和速度的限制导致问题无法解决。有些问题由于涉及的函数没有理想的性质使问题只能用动态规划描述，而不能用动态规划方法求解。

二、静态决策问题的动态处理

不包含时间因素的决策问题称为静态决策问题，是一次性决策（如线性规划）。但若能恰当地人为引入“时段”概念，就可以把问题转化成一个多阶段决策问题，这样就能用动态规划去处理了。

这样的例子是大量的（如最短路线问题，资源分配问题等等）。

三、动态规划部分内容框架



- 基本概念
  - 阶段与阶段变量
  - 状态与状态变量
  - 决策与决策变量、允许决策集、策略
  - 状态转移方程
  - 阶段效应和目标函数
- 基本理论
  - Bellman 函数
  - 最优化原理
  - 基本方程
- 求解要求
  - 求出最优策略（最优决策序列）
  - 求出最优路线（最优状态序列）
  - 求出最优目标函数值
- 应用
  - 工程路线问题
    - 定步数问题
      - 分步计算法
      - 表格法
      - 标号法
    - 不定步数问题
      - 无回路有向网络
        - 化为定步数问题
        - 二次标号法
      - 一般网络
        - 函数迭代法
        - 策略迭代法
  - 资源分配问题
    - 多元分配：列表求解
    - 多段分配：注意运用线性与非线性函数求极值技巧
  - 生产库存问题：列表求解，注意状态与决策变量允许取值范围
  - 背包问题
    - 一维背包
    - 二维背包
  - 设备更新问题：注意允许决策集的特点
  - 可靠性问题：注意目标函数的形式是阶段效应之乘积

4-2　动态规划的基本概念和模型

一、基本概念

DP中描述多段决策过程的基本概念主要有：

- ●阶段和阶段变量；
- ●状态和状态变量；
- ●决策、决策变量和决策序列；
- ●状态转移方程；
- ●阶段效应和目标函数等。

1.　阶段和阶段变量

把所研究的多段决策过程恰当地划分为若干个相互独立又相互联系的部分，每一个部分就称为一个阶段。事实上一个阶段也就是需要作出一个决策的子问题部分。通常阶段是按照过程进行的时间和空间上的先后顺序划分的，并用阶段变量k表示。阶段数等于多段决策过程中从开始到结束所需要作出决策的数目，划分阶段的目的是便于求解。

2.　状态和状态变量

状态是描述系统状况所必须的信息。一般定义为某一个阶段的初始点、初始位置或初始情况。状态变量必须包含在给定的阶段上确定全部允许决策所需要的信息，阶段k的状态表示为x_k。比如：在最短路问题中，状态就是网络中的各个节点。

状态变量的取值有一定的允许范围，称为状态可能集。状态可能集可以是一个离散取值的集合，也可以是一个连续的区间，视所给问题而定。

状态可能集是关于状态的约束条件。状态可能集用相应阶段状态x_k的大写字母X_k表示，其中$x_k \in X_k$

3.　决策、决策变量和决策序列

决策就是决策者从本阶段出发对下一阶段状态的选择。

多段决策过程的发展是用各个阶段的状态演变来描述的。因为用状态描述的过程具有无后效性，因此在进行阶段决策时，只须根据当前的状态而无须考虑过去的历史。在阶段k如果给出了决策变量u_k随状态变量 x_k变化的函数，称为决策函数，表示为$u_k(x_k)$。

决策变量的允许取值范围，称为允许决策集合。允许决策集合是决策的约束条件。 u_k的允许决策集合表示为U_k，$u_k \in U_k$ 。U_k要根据相应的状态可能集X_k并结合具体问题来确定。

决策序列就叫策略。策略有**全过程策略**和**k-子策略**之分。全过程策略是整个n段决策过程中依次进行的n个阶段决策构成的决策序列，简称策略，表示为：

$$\left\{ u_1, u_2, \cdots, u_n \right\}$$

从阶段k到阶段n依次进行的阶段决策构成的决策序列称为k-子策略，表示为：

$$\left\{u_k, u_{k+1}, \cdots, u_n\right\}$$

当k=1时，k-子策略就是全过程策略。

在n段决策问题中，各阶段的状态可能集和决策允许集确定了决策的允许范围。

特别，过程的初始状态不同，决策和策略也就不同，即策略是初始状态的函数。

4.　状态转移方程

状态转移方程表示从阶段k到阶段k+1的状态转移规律的表达式。

多阶段过程的发展就是用阶段状态的相继演变来描述的。对具有无后效性的多段决策过程，系统由从阶段k到阶段k+1的状态转移方程表示为：

$$x_{k+1} = T_k(x_k, u_k(x_k))$$

意即阶段的状态完全由阶段的状态和决策确定，与系统过去的状态 $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$及其决策$u_1(x_1)$，$u_2(x_2)$，…，$u_{k-1}(x_{k-1})$无关。

$T_k(x_k, u_k)$称为**变换函数**或**变换算子**。变换函数可以分为确定型和随机型两种类型，据此形成确定型动态规划和随机型动态规划。

问：状态转移方程是否一定是数学意义上的方程?

5. 阶段效应和目标函数

多段决策过程中，在阶段k的状态x_k执行决策u_k ，不仅带来系统状态的转移，而且也必然带来对目标函数的影响。阶段效应就是执行阶段决策时所带来的目标函数的增量。

在具有无后效性的多段决策过程中，阶段效应完全由阶段k的状态x_k和决策u_k决定，与阶段以前的状态和决策无关，表示为

$$r_k(x_k, u_k)$$

多阶段决策过程关于目标函数的总效应是由各阶段的阶段效应累积形成。适于动态规划求解的问题的目标，必需具有关于阶段效应的可分离形式、递推性和对于变元R_{K+1}的严格单调性。k-子过程的目标函数可以表示为：

$$\begin{aligned} R_k &= R(x_k, u_k, x_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, x_n, u_n) \\ &= r_k(x_k, u_k) \otimes r_{k+1`}(x_{k+1}, u_{k+1}) \otimes \cdots \otimes r_n(x_n, u_n) \end{aligned}$$

其中 $\otimes$ 表示某种运算，可以是加、减、乘、除、开方等。经济管理领域中最常见的目标函数取阶段效应之和的形式，即：

$$R_k = R(x_k, u_k, x_{k+1}, u_{k+1}, \cdots, x_n, u_n) = \sum_{i=k}^{n} r_i(x_i, u_i)$$

今后要讨论的主要就是这种形式的目标函数。

二、多阶段决策过程的数学模型（DP的建模）

1．　构模条件：

- **一个大前提**：恰当地划分问题的阶段，把问题化为多阶段决策过程；
- **四个条件**　（详见下页）
- **一个方程**——动态规划基本方程

（DP基本方程）

四 个 条 件

- （1）正确地选择状态变量：
  - **能描述过程的演变特征；**
  - **满足无后效性**——指系统从某个阶段往后的发展，完全由本阶段所处的状态及其往后的决策决定，与系统以前的状态和决策无关。即过程过去的历史只能通过当前的状态去影响未来的发展，当前状态是未来过程的初始状态。

- 一个例子：负指数分布具有无记忆性

$$P\{\text{ß}>s+t \mid \text{ß}>s\}=P\{\text{ß}>t\}=e^{-\mu t}$$

- **可知性**——各阶段状态变量的值直接或间接均为已知。

- （2）能确定决策变量及各阶段的允许决策集合；
- （3）能写出状态转移方程；
- （4）能根据题意列出阶段效应和目标函数；

在明确四个条件（或称四个要素）的基础上，写出动态规划基本方程。DP模型的数学表达式一般形式：

$$\underset{u_1,\cdots u_n}{opt} \quad R = \bigoplus_{k=1}^{n} r_k(x_k, u_k)$$

$$s.t.\begin{cases} x_{k+1} = T_k(x_k, u_k) \\ x_k \in X_k \\ u_k \in U_k \\ k = 1,2,\cdots n \end{cases}$$

式中opt指最优化，根据具体问题要求取max或min。

问：动态规划模型由哪些部分构成？

具体的 **DP模型** 包括：

四个条件和一个方程（动态规划基本方程）的全体。

2. 求解要求：

- (逆序)求出**最优策略**，即最优决策序列；

$$\left\{u_1^*, u_2^*, \cdots, u_n^*\right\}$$

- (顺序)求出**最优路线**，即执行最优策略时的最优状态序列：$\left\{x_1^*, x_2^*, \cdots x_k^*, x, {}_{n+1}^*\right\}$

其中，$x_{k+1}^* = T_k(x_k^*, u_k^*)$，　$k = 1 \sim n;$

- 求出**最优目标函数值**：$R^* = \sum_{k=1}^{n} r_k(x_k^*, u_k^*)$

三、DP基本方程

1. Bellman函数（最优指数函数）亦称条件最优目标函数。

该函数是为了便于应用最优性原理，建立动态规划基本方程所定义的辅助函数 $f_k(x_k)$，是在阶段K从初始状态 x_k 出发，执行最优决策序列或策略到达过程终点时的目标函数取值。

对于目标函数是阶段效应之和的多段决策过程而言：

$$f_k(x_k) = \operatorname*{opt}_{u_k \sim u_n} \sum_{i=k}^{n} r_i(x_i, u_i) \quad (k = 1 \sim n)$$

为了将关于多段决策过程的任一阶段状态 的最优策略和最终的最优策略相区别，称前者为条件最优策略，意即x_k相对于状态 时的最优策略。构成条件最优策略的决策称为条件最优决策。阶段k处于状态 的条件最优决策表示x_k为 ，简记为 ，相应的条件最优策略表示为：

$$x_k$$

$$u_k'(x_k) \qquad u_k'$$

$$\left\{u_k', u_{k+1}', \cdots, u_n'\right\}$$

条件最优目标函数值亦称执行条件最优策略时的目标函数值，因此

$$f_k(x_k)=\sum_{i=k}^{n} r_i(x_i',u_i')$$

执行条件最优策略时的阶段状态序列称为条件最优路线，表示为

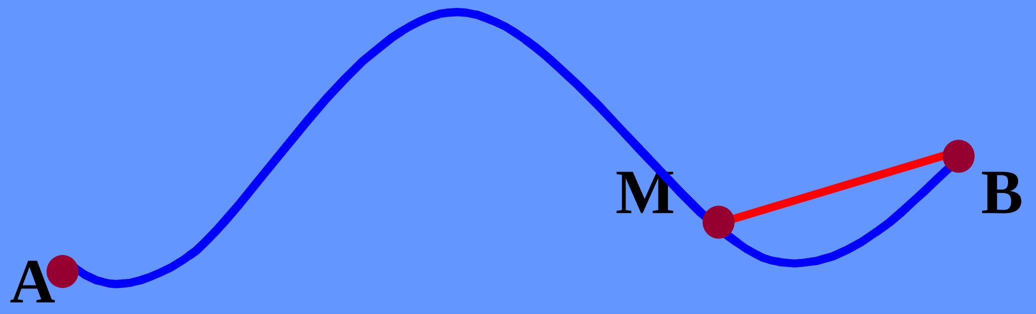
$$\left\{x_k',x_{k+1}',\cdots x_n',x_{n+1}'\right\}$$

其中，$x_{k+1}'=T_k(x_k',u_k'),k=1\sim n.$

2.　最优化原理

最优策略具有的基本性质是：**无论初始状态和初始决策如何，对于前面决策所造成的某一状态而言，下余的决策序列必构成最优策略。**

示意图解释：



3.　DP基本方程

$$\begin{cases} f_k(x_k) = \underset{u_k}{opt}\{r_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\} \\ f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \end{cases} \quad (k = n, n-1, \cdots 1)$$

包括主体部分和边界条件两个部分。特别，当目标函数为阶段效应求和形式时，基本方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{f_k(x_k) = opt\sum_{i=k}^{n} r_i(x_i, u_i)} \\ \boldsymbol{\quad = \quad Opt\{r_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}} \qquad \boldsymbol{k = n-1, \cdots, 2, 1} \\ \boldsymbol{f_{n+1}(x_{n+1}) = 0} \end{cases}$$

四、动态规划的分类

动态规划的表现形式随多段决策过程的特点不同而不同，据此可将动态规划作以下分类：

1、按决策的特性分

a、时间多段决策过程

b、空间多段决策过程

2、按允许决策集合的连续或不连续分

a 、连续多段决策过程

b、离散多段决策过程

3. 按构成决策序列的决策数目有限或无限分

- a、 有限多段决策过程
- b、 无限多段决策过程

4. 按状态变化的确定或随机性分

- a、 确定型多段决策过程
- b、 随机性多段决策过程

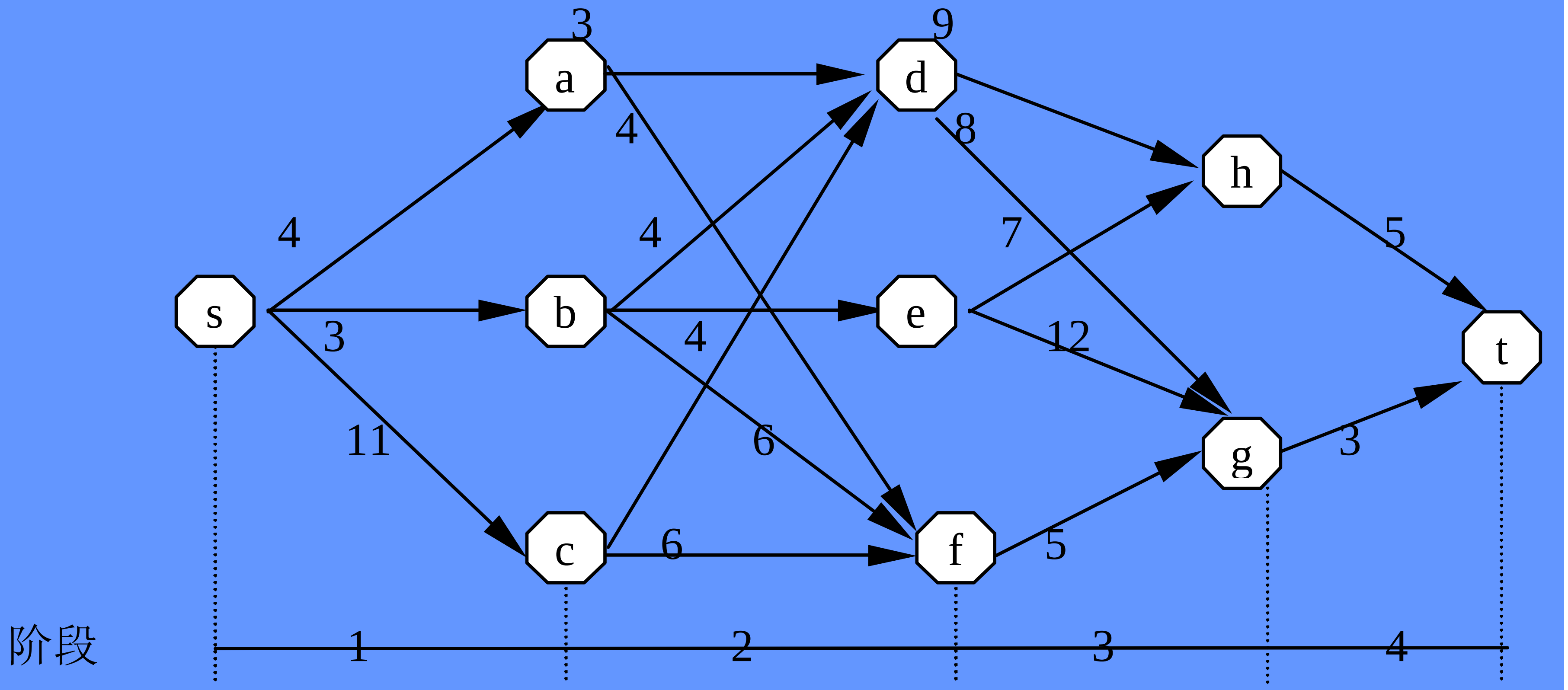
5. 按决策序列与时间起点的关系分

- a、定常(与时间起点无关)多段决策过程
- b、非定常多段决策过程

实际的多段决策问题，常常归结为它们的各种复合情况。

今后只限于**定常的，确定性的、有限的多段决策过程**的讨论。

以最短路问题为例
熟悉有关的五组概念



阶段——从起点到终点可以划分为4个阶段；

① $x_1 \in \{s\}$； $x_2 \in \{a,b,c\}$； $x_3 \in \{d,e,f\}$； $x_4 \in \{h,g\}$； $x_5 \in \{t$

②决策变量选为终止位置：$u_1 \in \overline{v_1} = \{a,b,c\}$； $\overline{v_2} = \{d,e,f\}$

③ $x_{k+1} = \Gamma(x_k, u_k)$； $x_{k+!} = u_k(x_k)$

④ $r_k(x_k,u_k) \longrightarrow$ 执行从 $x_k \longrightarrow u_k$ 所付出的代价（距离、费用等）

$$目标函数\ R = \sum_{k=1}^{4} r_k = \sum_{k=1}^{4} C_k(x_k,u_k) = \sum_{k=1}^{4} d_k(i_k, j_k)$$

4-3 动 态 规 划 应用(一)
建 模 练 习

一、工程路线问题

（也称最短路或最长路问题）

工程路线问题的一般提法：

从某地出发，途径若干个中间点最后到达目的地，试求距离最短或费用最省的路线。

具体有两种情况：

1. 从出发点到目的地的每条路线均由n条边（弧）组成，因此问题可以化为n个阶段的多阶段决策过程。由于可以明确地划分出固定的阶段数，所以称为定步数问题，亦称定期的多阶段决策过程。
2. 阶段数不固定则称为不定步数问题，或不定期的多阶段决策过程。

建模过程如表4-1。

表4-1 工程路线的建模过程

基本方程	
$\begin{cases} f_k(i) = \min\limits_{j}\{C_{ij} + f_{k+1}(j)\} \\ f_{n+1}(n+!) = 0 \end{cases} \qquad k = n, n-1, \cdots ,2,1$	
最短路问题	最长路问题
阶段：$k = 1,2,\cdots,n$	√
状态变量：各阶段初始位置 $x_k \in X_k$或$(i_k \in X_k)$	√
决策变量：各阶段终止位置 $u_k \in U_k$或$(j_k \in U_k)$	√
状态转移方程：$x_{k+1} = u_k(x_k)$或 $i_{k+1} = j_k(i_k)$	√
阶段效益 $r_k(x_k,u_k) = C_{ij}$ $(x_k \to u_k = x_{k+1}$的费用$)$	√
目标函数：$R = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k = \sum\limits_{k=1}^{n} C_{ij}(x_k,u_k)$ $\downarrow \quad \downarrow$ $i_k \quad j_k$	√
基本方程：$\begin{cases} f_k(i_k) = \min\limits_{j_k}\{C_k(i_k.j_k) + f_{k+1}(j_k)\} \\ f_{n+1}(j_{n+1}) = 0 \qquad k = n，n-1,\cdots 2,1 \end{cases}$	$\begin{cases} f_k(i_k) = \max\limits_{j_k}\{C_k(i_k.j_k) + f_{k+1}(j_k)\} \\ f_{n+1}(j_{n+1}) = 0 \qquad k = n，n-1,\cdots 2,1 \end{cases}$ $\begin{cases} f_k(i_k) = \max\limits_{j_k}\{C_k(i_k.j_k) + f_{k+1}(j_k)\} \\ f_{n+1}(j_{n+1}) = 0 \qquad k = n，n-1,\cdots 2,1 \end{cases}$
或简化为 $\begin{cases} f_k(i) = \min\limits_{j}\{C_{ij} + f_{k+1}(j)\} \\ f_{n+1}(i_{n+1}) = 0 \qquad k = n, n-1, \cdots ,1 \end{cases}$	或 $\begin{cases} f_k(i) = \max\limits_{j}\{C_{ij} + f_{k+1}(j)\} \\ f_{n+1}(i_{n+1}) = 0 \qquad k = n, n-1, \cdots ,1 \end{cases}$

若是不定步数问题，则基本方程呈函数方程的形式：

$$f(i) = \min_{j} \left\{ c_{ij} + f(j) \right\}$$

二、资源分配问题:

1. 资源的多元分配:

某种资源总量为M，用于进行n种生产活动，已知用于活动k的资源量为u_k时收益为$g_k(u_k)$，（ $g_k(u_k)$为u_k的非递减函数），问如何分配资源，才能使n种生产活动的总收益最大?

例4-2：某公司拟将5万元资金投放下属A、B、C三个企业，各企业在获得资金后的收益如下表所示，用动态规划方法求总收益最大的投资分配方案（投资数取整数）。

表4-2　　例4-2已知信息表

投放资金（万元）		0	1	2	3	4	5
收　益(万元)	A	0	2	2	3	3	3
	B	0	0	1	2	4	7
	C	0	1	2	3	4	5

该问题可以作为三阶段决策过程。

对A、B、C三个企业资金分配过程分别形成1、2、3三个阶段。

x_k表示给企业分配资金数时拥有的资金数。

u_k为给企业实际分配的资金数。

状态转移方程是$x_{k+1}=x_k-u_k$。

阶段效应$r_k(x_k,u_k)$如表4-2所示，记为$g_k(u_k)$。目

表函数

$$R=\sum_{k=1}^{3} g_k(u_k)$$

表4-3资源的多元分配问题建模过程

		一般问题	例 4-2
大前提	阶段 变量 k	把每一种活动作为一个阶段，n 种生产活动构成 n 个阶段。由于每个阶段都要确定对该项活动的资源投放量，从而构成多阶段决策问题	把资金分配给一个企业的过程看作一种生产活动，向三个企业的投资过程看作三个阶段
条件 1	状态与状态变量	k 阶段初拥有的资源量，即对第 k 阶段到第 n 阶段这 n-k 种活动中可进行分配的资源量　$0 \leqslant x_k \leqslant M$，$x_1 = M$	给企业 K 投资时所拥有的资金数(即初始的资源拥有量）x_k，$0 \leqslant x_k \leqslant 5$，$x_1 = 5$
条件 2	决策与决策变量	对第 k 种生产活动的资源投放量 $0 \leqslant u_k \leqslant x_k$	给企业 k 的投资数（阶段投放量） $0 \leqslant u_k \leqslant x_k$
条件 3	状态转移方程	$x_{k+1} = x_k - u_k$	$x_{k+1} = x_k - u_k$
条件 4	阶段效应	对活动投放资源 u_k 时的收益 $r_k(x_k, u_k) = g_k(u_k)$	$g_k(u_k)$　，$k=1，2，3$
	目标函数	$R = \sum_{k=1}^{n} r_k(x_k, u_k) = \sum_{k=1}^{n} g_k(u_k)$	$R = \sum_{k=1}^{3} g_k(x_k, u_k)$
一个方程	基本方程	$\begin{cases} f_k(x_k) = \max\limits_{u_k} \{g_k(u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\} \\ f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \qquad k = n,\ n-1, \cdots 2,1 \end{cases}$	$\begin{cases} f_k(x_k) = \max\limits_{u_k} \{g_k(u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\} \\ f_4(x_4) = 0 \qquad k = 3,2,1 \end{cases}$ 资金分配完毕，不再分配，收益为 0

2. 资源的多段分配—— 有消耗的资源

多阶段地在两种不同的生产活动中投放的问题

问题的提法：假定拥有某种资源，总量为M，计划在A、B两种生产过程（部门）中连续使用n个阶段，已知在两个部门中分别投入资源u_a、u_b后可分别获得阶段效益$g(u_a)$、$h(u_b)$，同时知道每生产一个阶段后资源的完好率分别为a和b，（0<a<1,0<b<1），**求n个阶段间总收益最大的资源分配计划。**

例4-3 今有1000台机床，要投放到A、B两个生产部门，计划连续使用5年。已知对A部门投入u_a台机器时的年收益是$g(u_a)=u_a^2$元，机器完好率$a=0.8$；相应地，B部门为$h(u_b)=2u_b^2$，$b=0.4$。

试建立5年间总收益最大的年度机器分配方案。

问题的建模过程如表4-4所示。

表4-4 资源的多段分配问题建模过程

一般问题		例 4-3
前提:	**n** 阶段决策，每个阶段均要决定 **A**、**B** 两个部门的资源投放量。 **K=1,2,⋯,n**	**5** 阶段决策问题，**(**机器连续使用五年**)** 一个年度作为一个阶段；k **=1，2，3，4，5**。
状态与状态变量	k 阶段初拥有的资源量 x_k $0 \le x_k \le M, \quad x_1 = M$	k 年初拥有的完好机器数 x_k $0 \le x_k \le 1000, \quad x_1 = 1000$
决策与决策变量	k 阶段对 **A** 部门的资源投放量 $u_k = u_A$ 则有：$u_B = x_k - u_k = x_k - u_A$ $0 \le u_k \le x_k$	k 年度投入 **A** 部门的机器台数 $u_k = u_A$ （$u_B = x_k - u_k$） $0 \le u_k \le x_k$
状态转移方程	$x_{k+1} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{阶段末 A 部门剩余资源}}}{au_k} + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{阶段末 B 部门剩余资源}}}{b(x_k - u_k)}$	$x_{k+1} = 0.8u_k + 0.4(x_k - u_k)$
阶段效益与目标函数	$r_k(x_k, u_k) = g(u_k) + h(x_k - u_k)$ $R = \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{k=1}^{n} [g(u_k) + h(x_k - u_k)]$	$r_k = g(u_k) + h(x_k - u_k) = u_k^2 + 2(x_k - u_k)^2$ $R = \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{k=1}^{n} \left[u_k^2 + 2(x_k - u_k)^2\right]$
基本方程	$\begin{cases} f_k(x_k) = \max\limits_{u_k}\{g(u_k) + h(x_k - u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\} \\ f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \qquad k = n, n-1, \cdots, 1 \end{cases}$	$\begin{cases} f_k(x_k) = \max\limits_{0 \le u_k \le x_k}\{u_k^2 + 2\times(x_k - u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\} \\ f_6(x_6) = 0 \qquad k = 5,4,3,2,1 \end{cases}$

三、生产—库存问题：

生产（或销售）部门已知生产成本、库存费用、各阶段的市场需求，需要决定各阶段产量（或采购量），使计划期内的费用总和最小。

问题的一般提法：设有一生产部门，生产计划周期分为n个阶段（即k=1~n）已知最初库存量为x_1，阶段产量需求为d_k，生产的固定成本为$\tilde{k}$，单位产品的消耗费用为L，单位产品的阶段库存费用为h，库存容量为M，阶段生产能力为B，问应如何安排各阶段的产量，使计划期内的费用总和最小。

例4-4 求解生产-库存问题：已知n=3，$\tilde{k}$=8，L=2，h=2，x_1=1，M=4，x_4=0（计划期末库存为0），B=6，d_1=3，d_2=4，d_3=3。

表4-5 生产-库存问题的建模过程

问题一般形式		例 4-4
阶段 （**k**）	计划期所划分的阶段即为 **DP** 模型的阶段 $k = 1, 2, \cdots, n$	$n = 3, \quad k = 1,2,3$
状态与状态变量	第 k 阶段初的库存量 x_k ， x_1 已知。若 x_{n+1} 已知，则为始、终端固定的问题，若 x_{n+1} =**0** 即计划期末无库存。这样， $0 \le x_k \le \min\left\{M, d_k + d_{k+1} + \cdots + d_n\right\}$	$x_1 = 1$（初始库存） $x_4 = 0$（计划期末库存为 **0**） $0 \le x_k \le \min\left\{M, d_k + \cdots + d_3\right\}$
决策与决策变量	k 阶段的产量 u_k $d_k - x_k \le u_k \le \min\left\{B, d_k + \cdots d_n - x_k\right\}$	$d_k - x_k \le u_k \le \min\left\{6, d_k + \cdots d_3 - x_k\right\}$
状态转移方程	$x_{k+1} = x_k + u_k - d_k$ **k=1，…，n**	$x_{k+1} = x_k + u_k - d_k$ ，**k=1，2，3**
阶段效益与目标函数	生产费用+库存费用 $r_k = \hat{k} + Lu_k + hx_{k+1}$ $= \hat{k} + Lu_k + h(x_k + u_k - d_k)$ $R = \sum_{k=1}^{h} r_k$	$r_k = 8 + 2u_k + 2x_{k+1}$ $= 8 + 2u_k + 2(x_k + u_k - d_k)$ $R = \sum_{k=1}^{3}\left[8 + 2u_k + 2(x_k + u_k - d_k)\right]$
基本方程	$\begin{cases} f_k(x_k) \\ = \min\limits_{u_k}\left\{\hat{k} + Lu_k + h(x_k + u_k - d_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\right\} \\ f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \qquad k = n, n-1, \cdots, 1 \end{cases}$	$\begin{cases} f_k(x_k) \\ = \min\limits_{u_k}\left\{8 + 2u_k + 2(x_k + u_k - d_k) f_{k+1}(x_{k+1})\right\} \\ f_4(x_4) = 0 \qquad k = 3,2,1 \end{cases}$

四、设备更新问题

问题的一般提法：已知n为计算设备回收额的总期数，t为某个阶段的设备役龄，r(t)为从役龄为t的设备得到的阶段效益，u(t)为役龄为t的设备的阶段使用费，s(t)是役龄为t的设备处理价格，p为新设备的购置价格。假定关于现值的折扣率为1，求n期内使回收额最大的设备更新策略。

例4-5 **假定设备的使用年限为10年，设备的处理价格与役龄无关为4万元，其它有关信息如表4-6所示，寻求设备更新的最优策略。**

表4-6 例4-5有关信息表 （单位：万元）

t 期数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r（t）	27	26	26	25	24	23	23	22	21	21	20
u(t)	15	15	16	16	16	17	18	18	19	20	20

表4-6 设备更新问题建模过程

问题的一般提法		例 4-5
阶 段	设备使用年限	**n=10**
状态变量	设备的役龄 t	√
决策变量	**K**——保留 **P**——更新	**k** 或 **p**
状态转移方程	$\begin{cases} t & (p\text{决策}) \\ t+1 & (k\text{决策}) \end{cases}$	√
阶段效应与目标函数	从役龄 t 为的设备得到的收益 回收额 $g_k = \begin{cases} \text{决策为k时：} r(t)-u(t) \\ \text{决策为p时：} s(t)-p+r(0)-u(0) \end{cases}$ 总回收额 $R = \sum_{k=1}^{n} g_k$	$\begin{cases} r(t)-u(t) & k\text{决策} \\ s(t)-p+r(0)-u(0)=4-13+27-15=3 & p\text{决策} \end{cases}$ √
基本方程	$\begin{cases} f_k(t)=\max\begin{cases} k: r(t)-u(t)+f_{k+1}(t+1) \\ p: s(t)-p+r(0)-u(0)+f_{k+1}(t+1) \end{cases} \\ f_{n+1}(t)=0 \end{cases}$	$\begin{cases} f_k(t)=\max\begin{cases} k: r(t)-u(t)+f_{k+1}(t+1) \\ p: 3+f_{k+1}(1) \end{cases} \\ f_{11}(t)=0 \end{cases}$

五、其它典型问题

1、串联系统可靠性问题：

在成本、重量、体积等一定的限制下，如何选择各部件的备用元件数，使整个系统的可靠性最大。

特点： 目标函数是阶段效应的乘积形式。

2、背包问题：

在旅行袋容积或载重量的限制条件下，如何选择装载物品，使总价值最大。

特点：

◆ 只有一个限制条件构成**一维背包**问题，有两个限制条件则构成**二维背包**问题；

◆ **二维背包**问题有两个状态变量：

第七次作业

P175~P177：

根据4-2，4-3，4-4三个题目的背景，分别建立动态规划模型

4-4节动态规划应用（二）
——求解方法讨论

动态规划求解方法讨论

求解的一般方法

逆序求解

逆序求解

核心

最优化原理的应用

一、工程路线问题

- 1、定步数问题（逆序求解）
  - 分步计算法
  - 表格法
  - 标号法

2、不定步数问题

- （1）无回路有向网络
  - 对节点排序，化为定步数问题
  - 对节点排序，用分步计算法或表格法逆序求解
  - 对节点排序，用二次标号法求解

- 函数迭代法
- 策略迭代法

(2)一般情况

定步数问题求解示例

- 1． 定步数问题（逆序求解）
- 例4-6 某运输公司拟将一批货物自s地运至t地，其间交通系统网络如图4-2所示。图中节点表示地点，边表示两地间的道路，边上的数字表示两地间的运输费用，求总运输费用最低的路线。

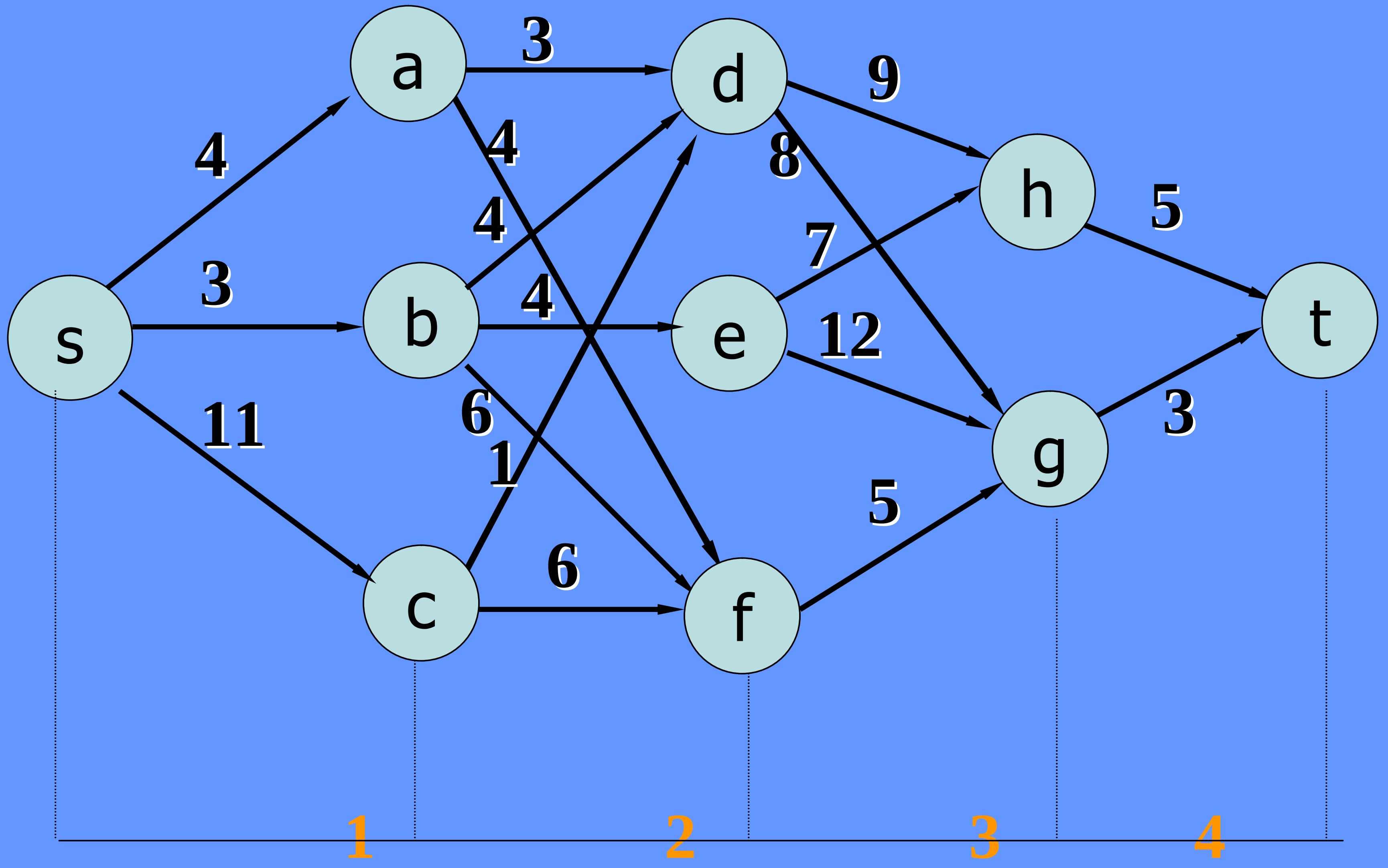


图 4-2

问题可归结为四阶段决策问题，用动态规划方法求解如下：

（解法一）分步计算法

（从第**4**阶段开始）

①当**k=4**时，**i=h**或**g**，**j=t**；$\mathbf{f_5(t)=0}$

若**i=h**，则

$$f_4(h)=\min_{j=t}\left\{c_{ij}+f_5(j)\right\}=c_{ht}+f_5(t)=5+0,\quad j_4^*(h)=t$$

若i=g，则

$$f_4(g)=\min_{j=t}\{c_{ij}+f_5(j)\}=c_{gt}+f_5(t)=3+0=0, j_4^*=t$$

②当**k=3**时，**i=d**或**e,f**；**j=h**或**g**

若i=d,则

$$f_3(d)=\min_{j=h,g}\{c_{ij}+f_4(j)\}=\min\begin{Bmatrix}c_{dh}+f_4(h)\\c_{dg}+f_4(g)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}9+5\\8+3\end{Bmatrix}=11, \qquad j_3^*(d)=g$$

若i=e,则

$$f_3(e)=\min_{j=h,g}\{c_{ij}+f_4(j)\}=\min\begin{Bmatrix}c_{eh}+f_4(h)\\c_{eg}+f_4(g)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}7+5\\12+3\end{Bmatrix}=12,\qquad j_3^*(e)=h$$

若i=f,则

$$f_3(f)=\min_{j=g}\{c_{ij}+f_4(j)\}=c_{fg}+f_4(g)$$

$$=5+3=8,\qquad j_3^*(f)=g$$

③当**k=2**时，**i=a**或**b**，**c**；**j=d**或**e**，**f**；

若**i=a**，则

$$f_2(a)=\min_{j=d,f}\{c_{ij}+f_3(j)\}=\min\begin{Bmatrix}c_{ad}+f_3(d)\\c_{af}+f_3(f)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}3+11\\4+8\end{Bmatrix}=12;\qquad j_2^*(a)=f$$

若i=b，则

$$f_2(b)=\min_{j=d,e,f}\left\{c_{ij}+f_3(j)\right\}=\min\left\{\begin{array}{l} c_{bd}+f_3(d) \\ c_{be}+f_3(e) \\ c_{bf}+f_3(f) \end{array}\right\}$$

$$=\min\left\{\begin{array}{c} 4+11 \\ 4+12 \\ 6+8 \end{array}\right\}=14; \qquad j_2^*(b)=f$$

若i=c，则

$$f_2(c)=\min_{j=d,f}\left\{c_{ij}+f_3(j)\right\}=\min\begin{Bmatrix}c_{cd}+f_3(d)\\c_{cf}+f_3(f)\end{Bmatrix}$$

$$=\min\begin{Bmatrix}1+11\\6+8\end{Bmatrix}=12; \qquad j_2^*(c)=d$$

④当k=1时，i=s; j=a或b，c;

$$f_1(s) = \min_{j=a,b,c}\{c_{ij} + f_2(j)\} = \min\begin{Bmatrix} c_{sa} + f_2(a) \\ c_{sb} + f_2(b) \\ c_{sc} + f_2(c) \end{Bmatrix}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 4+12 \\ 3+14 \\ 11+12 \end{Bmatrix} = 16; \qquad j_1^*(s) = a$$

于是：从s地到t地总运输费用最低的路线

（最优路线）是

$s \rightarrow a \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow t$，或

$\{s，a，f，g，t\}$；

最优策略是

$P^{*}=\{j_1{}^*(s)=a，j_2{}^*(a)=f，j_3{}^*(f)=g，j_4{}^*(g)=t\};$

目标函数最优值（最低总费用）

$R^*=f_1(s)=16$

（解法二）表格法 最终结果

最优路线：[redacted]

最小费用：[redacted]

最优策略：

[redacted]

阶段K	[redacted] j决策集 i状态集	t			[redacted]	[redacted]
4	h	5+0			5	t
	g	3+0			3	t
3		h	g		[redacted]	[redacted]
	d	9+5	8+3		11	g
	e	7+5	12+3		12	h
	f	---	5+3		8	g
2		d	e	f	[redacted]	[redacted]
	a	3+11	---	4+8	12	f
	b	4+11	4+12	6+8	14	f
	c	1+11	---	6+8	12	d
1		a	b	c	[redacted]	[redacted]
	s	4+12	3+14	**11+12**	16	a

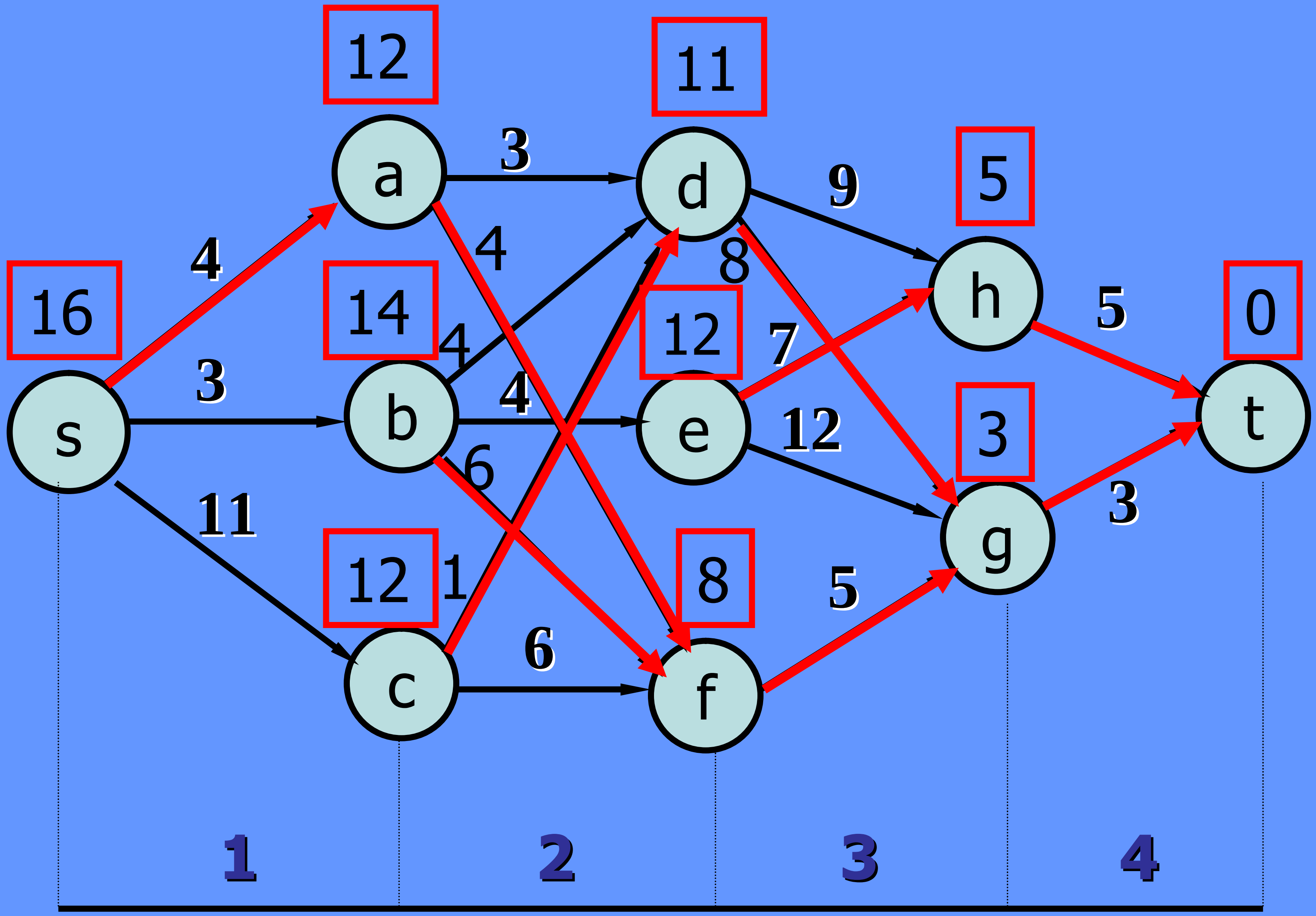
（解法三）标号法

具体步骤：

①给终点标号**0**，先标离终点最近的阶段状态，将距离数写在相应的节点上方方格内；

②方格内的标号=**min**｛欲标号点到已标号点的距离+已标号点方格内的数字｝；

③用直线段连接已标号点到终点的最短路线。


12
11
a
3
d
9
5
4
4
8
h
16
14
4
12
7
5
0
s
3
b
4
e
12
t
6
3
11
3
g
12
1
8
5
6
c
f
1
2
3
4

2、不定步数问题

（1） 对无回路的有向网络

方法1：先对节点排序，适当增加虚设节点，化为定步数问题，然后按前面的情况求解

例4-7 将图4-3化为定步数问题

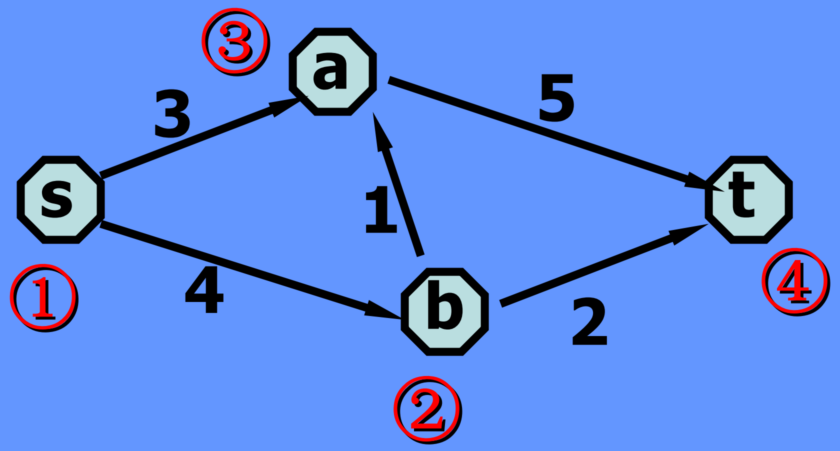
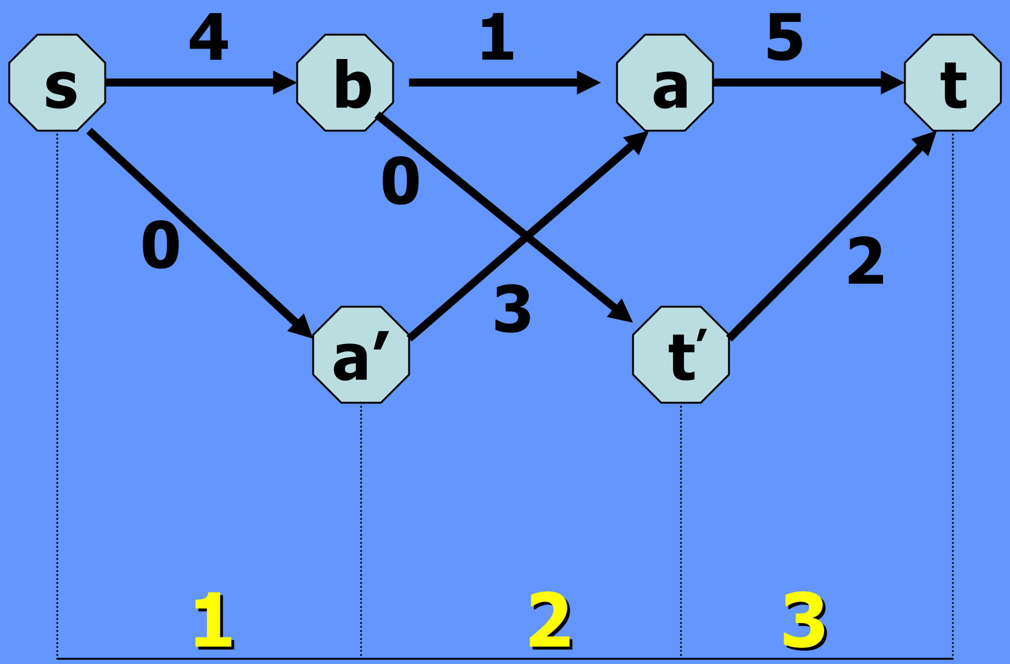


图4-3 例4-7网络图



- 增加虚设节点a′和t′
- 然后，按定步数问题求解

方法2　先对节点排序，然后采用分步计算法或表格法，根据最优化原理，逆序求解。

- 例4-8 求解图4-5所示从s到t点的网络最短路问题

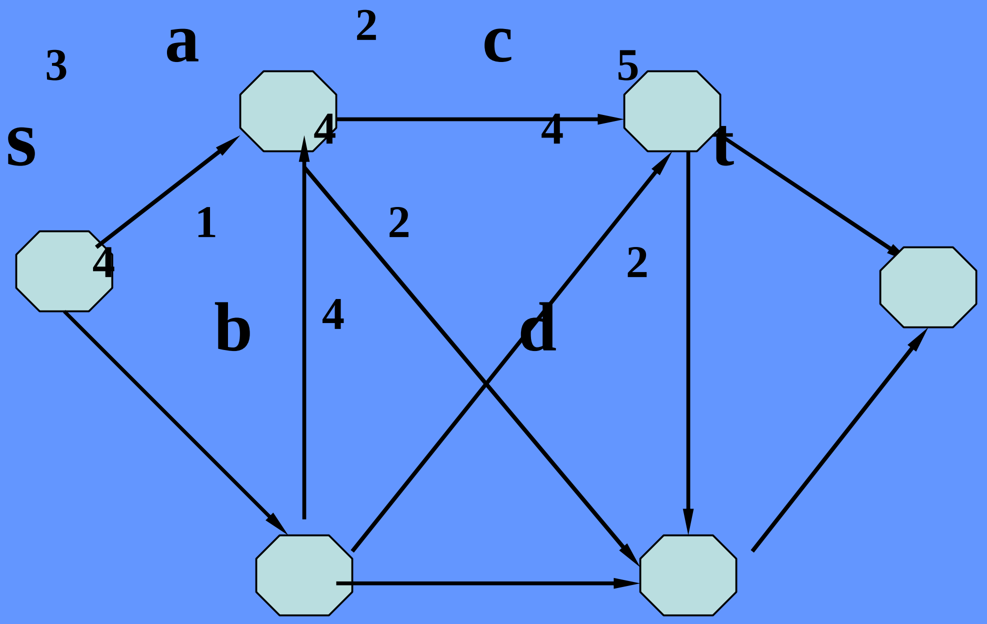
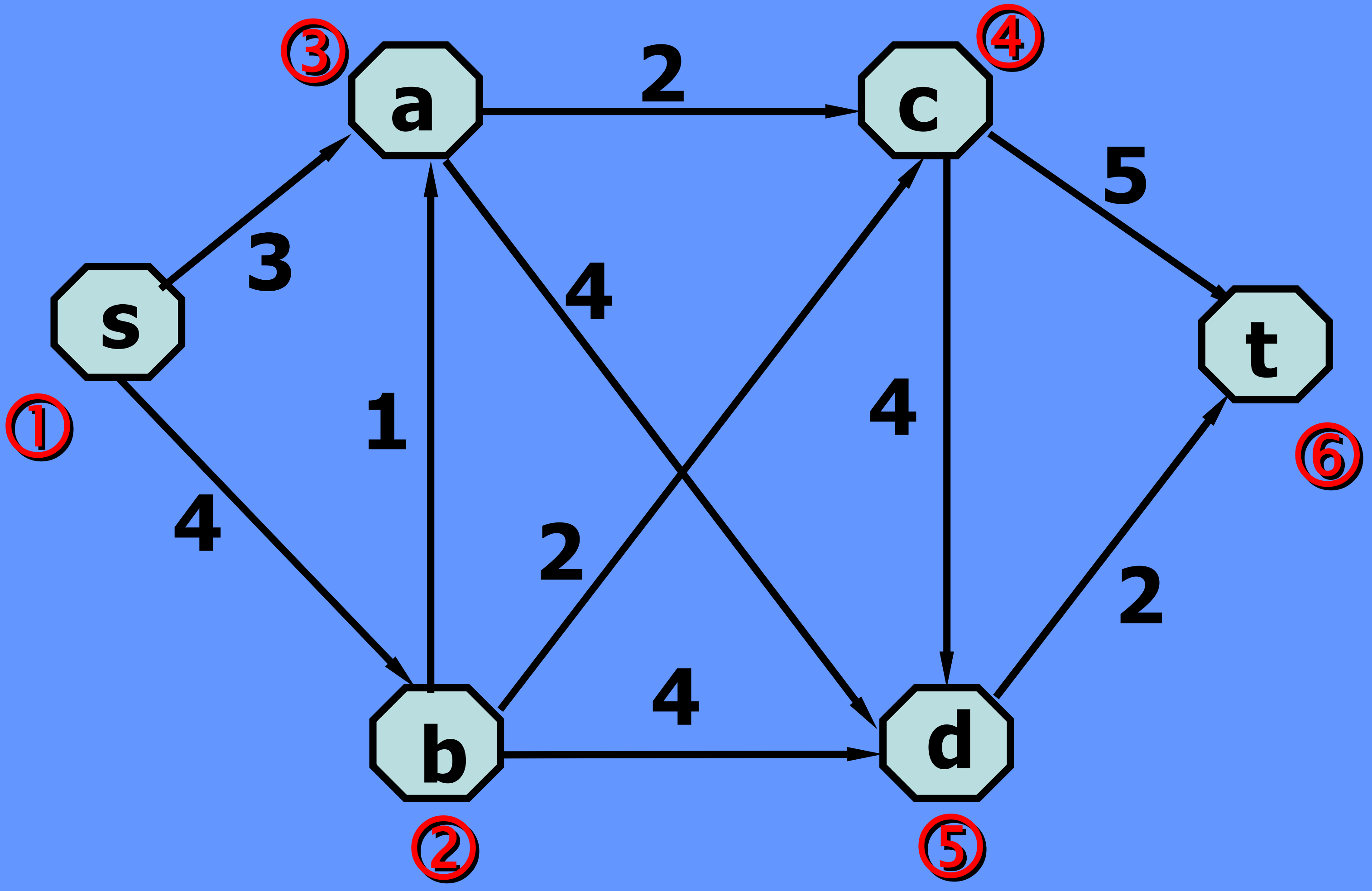


图4-5



用表格法逆序求解如下：

j $d_{ij}+f(j)$ i	t	d	c	a	b	$f(i)$	$\lambda^*(i)$
t						0	
d	2+0					2	t
c	5+0	4+2				5	t
a		4+2	2+5			6	d
b		4+2	2+5	1+6		6	d
s				3+6	4+6	9	a

最优策略为

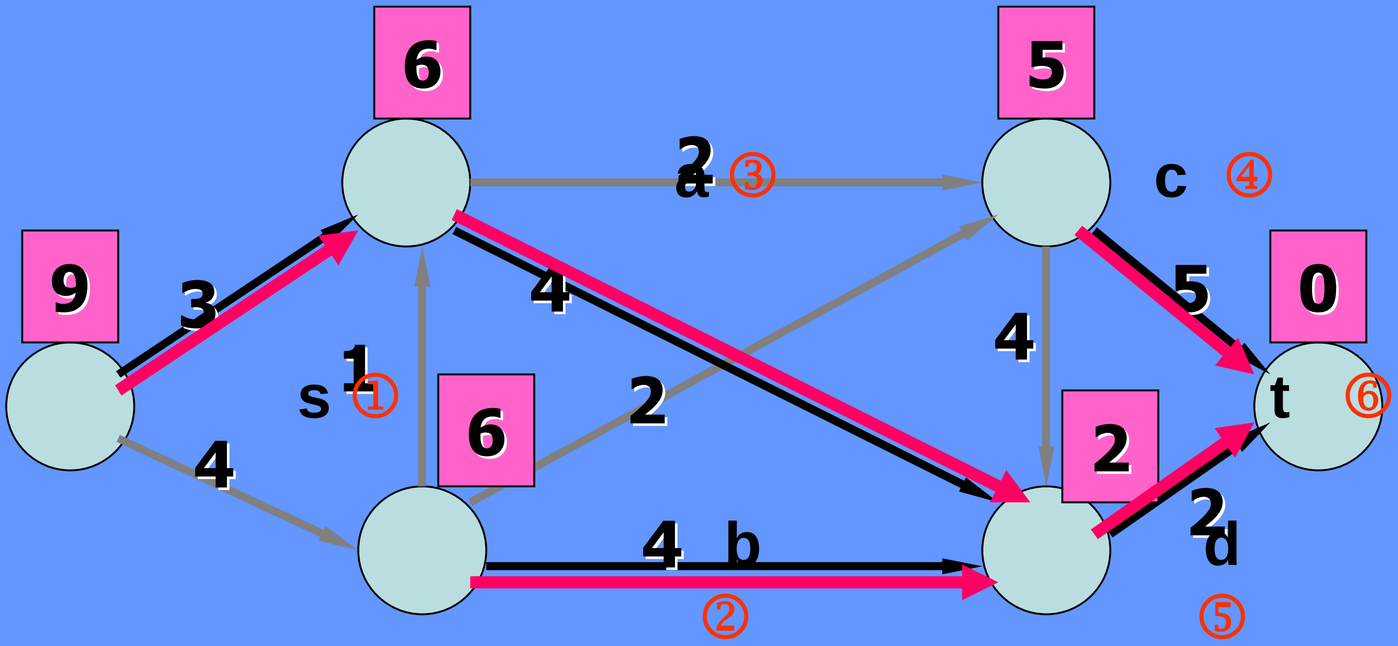
$$p^* = \left\{ j^*(s)=a, j^*(a)=d, j^*(d)=t \right\}$$

最优路线为 $\left\{ s, \quad a, \quad d, \quad t \right\}$

从s到t的最短距离是 $R^* = 9$

方法3 二次标号法

- 圆圈内数字为节点序（第一次标号）；
- 方框内数字为该点到终点的最短距离（第二次标号）；
- 红线指示出最短路线为{s，a，d，t}。



- 圆圈内数字为节点序（第一次标号）；
- 方框内数字为该点到终点的最短距离（第二次标号）；
- 红线指示出最短路线为{s，a，d，t}。

（1） 一般情况下的不定步数问题

- 方法1：函数迭代法

[redacted]

[redacted]

- **基本思想：** 段数作参数，分别求最优，优中再选优，随之定段数。

- **步骤：**

（1）选初始函数

$$\begin{cases} f_1(i) = C_{iN} & i = 1,2,\cdots,N-1 \\ 0 & i = \mathrm{N} \end{cases}$$

$f(i)$ 表示由**i**点出发向终点**N**走一步的最短距离。

（2）定义

$$\begin{cases} f_k(i)=\min\limits_j\left\{C_{ij}+f_{k-1}(j)\right\} & i=1,2,\cdots,N-1 \\ f\ (N)=0 & k>1 \end{cases}$$

按此递推关系求出 $\{f_k(i)\} \quad i=1,2,\cdots;N-1$

其中 $f_k(i)$ 表示由**i**出发朝固定点**N**走**k**步的最短长度。

当 $f_{n-1}(i)=f_n(i) \quad i=1,2,\cdots;N-1$时，迭代停止，可以证明**n≤N-1**。

$f_k(i)$ 就是**i**到**N**点的最短距离，**N**为阶段数.

例4-9 用函数迭代法求图4-6中各点到节点5的最短路。

- 先写出距离矩阵

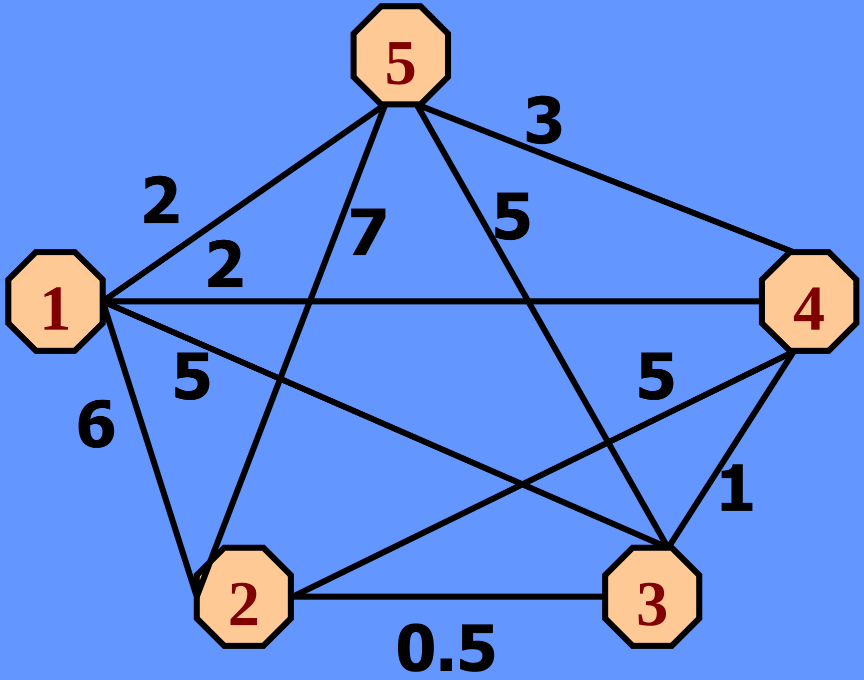


图4-6

用表格形式书写的距离矩阵

C_{ij} j i	1	2	3	4	5
1	0	6	5	2	2
2	6	0	0.5	5	7
3	5	0.5	0	1	5
4	2	5	1	0	3
5	2	7	5	3	0

根据 [redacted] 选初始函数为：

$f_1(1)=c_{15}=2,$ $f_1(2)=c_{25}=7,$ $f_1(3)=c_{35}=5,$ $f_1(4)=c_{45}=3$

迭代表格如下：

[redacted] j	1	2	3	4	5
1	2	7	5	3	0
2	2	5.5	4	3	0
3	2	4.5	4	3	0
4	2	4.5	4	3	0
j*	5	3	4	5	

函数迭代法计算过程

阶段 K	起始节点	最优指标函数值及其计算公式（用方框圈出）	相应的最优策略
K=1	1 2 3 4	$f_1(i)=c_{i5}$,$f_1(5)=0$ i=1，2，3，4 f_1（1）$=c_{15}=2$ f_1（2）$=c_{25}=7$ f_1（3）$=c_{35}=5$ f_1（4）$=c_{45}=3$	① → ⑤ ② → ⑤ ③ → ⑤ ④ → ⑤

阶段 **K**	起始节点	最优指标函数值及其计算公式 （用方框圈出）	相应的最优策略
K=2		**$f_2(i)=\min[c_{ij}+f_1(j)]$，$f_2$（5）=0**	
	1	**f_2（1）=** $\min_j [c_{1j}+f_1(j)]$ **=min（0+2，6+7，5+5，2+3，2+0）=2**	① ⑤
	2	**f_2（2）=** $\min_j [c_{2j}+f_1(j)]$ **=min（6+2，0+7，0.5+5，5+3，7+0）=5.5**	② ③ ⑤
	3	**f_2（3）=** $\min_j [c_{3j}+f_1(j)]$ **=min（5+2，0.5+7，0+5，1+3，5+0）=4**	③ ④ ⑤
	4	**f_2（4）=** $\min_j [c_{4j}+f_1(j)]$ **=min（2+2，5+7，1+5，0+3，3+0）=3**	④ ⑤

阶段 K	起始节点	最优指标函数值及其计算公式 （用方框圈出）	相应的最优策略
K=3		$f_3(i)=\min[c_{ij}+f_2(j)]$，$f_3(5)=0$	
	1	f_3（1）= $\min\limits_{j}[c_{1j}+f_2(j)]$ =min（0+2，6+5.5，5+4，2+3，2+0）=2	① → ⑤
	2	f_3（2）= $\min\limits_{j}[c_{2j}+f_2(j)]$ =min(6+2，0+5.5，0.5+4，5+3，7+0)=4.5	② → ③ ④ → ⑤
	3	f_3（3）= $\min\limits_{j}[c_{3j}+f_2(j)]$ =min（5+2，0.5+5.5，0+4，1+3，5+0）=4	③ ④ ⑤
	4	f_3（4）= $\min\limits_{j}[c_{4j}+f_2(j)]$ =min（2+2，5+5.5，1+4，0+3，3+0）=3	④ → ⑤

阶段 **K**	起 始 节 点	最优指标函数值及其计算公式（用方框圈出）	相 应 的 最 优策略
K=4	**1** **2** **3** **4**	**f_4（i）=min[c_{ij}+f_3（j）]，f_4（5）=0** **f_4（1）=** $\min_j[c_{1j}+f_3(j)]$ **=min(0+2，6+4.5，5+4，2+3，2+0)=2** **f_4（2）=** $\min_j[c_{2j}+f_3(j)]$ **=min(6+2，0+4.5，0.5+4，3+3，7+0)=4.5** **f_4（3）=** $\min_j[c_{3j}+f_3(j)]$ **=min（5+2，0.5+7，0+5，1+3，5+0）=4** **f_4（4）=** $\min_j[c_{4j}+f_3(j)]$ **=min（2+2，5+4.5，1+4，0+3，3+0）=3**	① ⑤ ② ③ ④ ⑤ ③ ④ ⑤ ④ ⑤

根据上面计算，得到如下最终结果:

最 优 策 略	最优路线	最短路长
$p^{*}=\{j^{*}(1)=5\}$	$\{1,5\}$	2
$p^{*}=\{j^{*}(2)=3,j^{*}(3)=4,j^{*}(4)=5\}$	$\{2,3,4,5\}$	4.5
$p^{*}=\{j^{*}(3)=4,j^{*}(4)=5\}$	$\{3,4,5\}$	4
$p^{*}=\{j^{*}(4)=5\}$	$\{4,5\}$	3

方法2：策略迭代法

- 给出初始策略$\{u_0(i)\}$;
- 由策略$\{u_k(i)\}$求最优指标函数$\{f_k(i)\}$;
- 由最优指标函数$\{f_k(i)\}$求策略$\{u_{k+1}(i)\}$;
- 反复迭代,直至$\{u_k(i)\}= \{u_{k+1}(i)\}$

二、资源分配问题

1、 资源的多元分配

- 例**4-10** 某公司将**5**万元资金投入下属**A**、**B**、**C**三个企业，投放收益见表**4-9**，试求总收益最大的投资方案。

接**word**文档

2、资源的多段分配

- 教材**156**页例**4 – 4**

三、生产库存问题

教材**P164**例**4-5**（接**word**文档）

四、背包问题

五、其他

小结：

- 深入理解最优化原理
- 掌握建模条件（大前提、条件、方程）
- 记住求解要求

诀窍

多看参考资料

积累一批例子