2.9 折扣收益问题(DPP)

这个折扣收益问题(DPP)曾在[64,779-780页]描述过。这是一个有跨越的最优性问题，我们可以使用DP解决。这个模型中引入了金钱的时间价值，我们也通常把这类模型称作“折扣”DP问题。

假定有一个湖，在第一年开始时有b_1条鱼。记第t年开始时有b_t条鱼。在第t年售出x_t条鱼可以挣得$r(x_t)$ 的收入。捕捉这些鱼的费用是$c(x_t, b_t)$,这个费用依赖于湖中鱼的数目。这些鱼会繁殖，而且是以恒定的比率s进行繁殖—在[64,770-780页]中这个比率被假定为1.2。也就是说在每一年开始时鱼会比上一年多20%。我们需要对于1,...,T年进行规划，这里我们假定利率为常数y。决策变量x_t表示在第t年捕捉并售出的鱼的数目。我们的目标是使1到T年间总的纯利润达到最大。这类问题的特点是我们需要对当前的利益和过去的利益作出一定的权衡。

这个DP的状态是一个数对(t, b)，表示当前在第t年，且在这一年开始时有b条鱼。那么就有如下DP方程：

$$f(t,b) = \begin{cases} \max_{x_t \in 0,\dots,b} \{r(x_t) - c(x_t, b) + \frac{1}{1+y} f(t+1, \lfloor s(b-x_t) \rfloor)\} & if\ t \leqslant T \\ 0 & if\ t = T+1 \end{cases}$$

我们的目标是计算$f(1, b_1)$。

例如，令$T = 2, y = 0.05, s = 2$(为了简单起见，我们不取s=1.2而取s=2),并设一开始有$b_1 = 10$（千）条鱼。为简便，我们令收益函数$r(x_t) = 3x_t$并定义费用函数$c(x_t, b_t) = 2x_t$。那么最大的纯利润大约为$f(1, 10) \approx 19.05$，其决策为$x_1 = 0 x_2 = 20$（注：第一年不捕鱼，而第二年把所有的鱼捕完）。