

## 2.7 最佳覆盖问题(COV)

这个最佳覆盖问题取自[54,17页]。给定 $k$ 个大小不同的灌木丛，它们因为霜冻需要保护。假定这些灌木丛按照大小排序，即灌木丛0是最小的，灌木丛 $k-1$ 是最大的。这里把为灌木丛 $i$ 制作覆盖层的花费记作 $c_i$ 。但是由于制造技术上的局限，最多只能制造 $n$ 种不同大小的保护层，这里 $n \leq k$ 。较大的覆盖层能够保护较小的灌木丛。我们的目标是决策 $n$ 个保护层的大小，使之能以最小的花费覆盖所有的灌木丛。

令 $j$ 表示尚未被决策的覆盖层大小的总数，且 $l$ 表示正在考虑中的灌木丛中最大的那个。这个问题的状态转移方程式可以表述如下：

$$f(j, l) = \begin{cases} \min_{d \in \{j-2, \dots, l-1\}} \{(l-d)c_l + f(j-1, d)\} & \text{if } j > 1 \\ (l+1)c_l & \text{if } j = 1 \end{cases}$$

目标是计算 $f(n, k-1)$ 。

我们来看这样一个例子：有 $k = 10$ 个灌木丛，每种大小的覆盖层的花费为 $(c_0, \dots, c_9) = (1, 4, 5, 7, 8, 12, 13, 18, 19, 21)$ ，且由于技术局限，只能制作 $n = 3$ 种大小的覆盖层。那么最佳的方案就是依次制造出大小为9,6,4的覆盖层(即使用大小为9的覆盖层保护灌木丛9,8,7，用大小为6的覆盖层保护灌木丛6和5，用大小为4的覆盖层保护灌木丛0至灌木丛4)，其总花费 $f(3, 9) = 129$