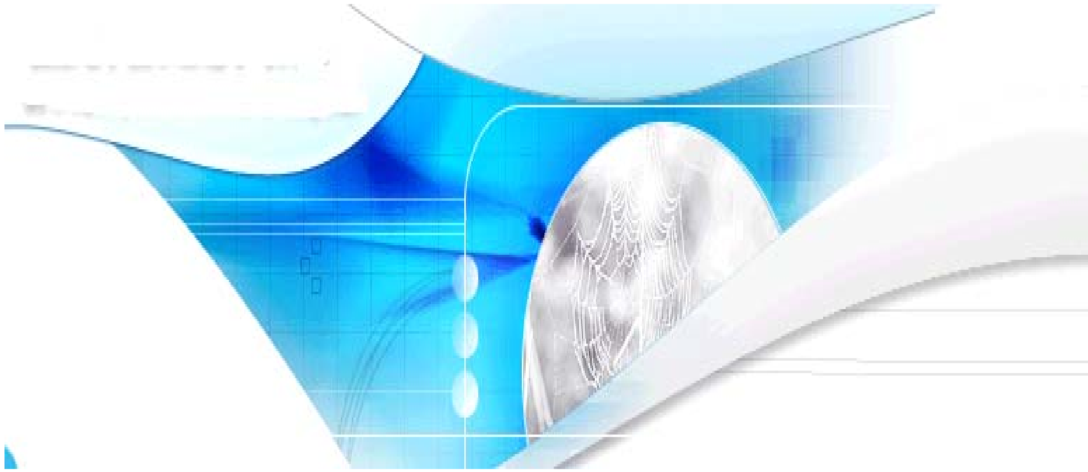
※ 逻辑代数的基本定理 ※



■ 代入定理

所谓代入定理，是指在任何一个包含变量A的逻辑等式中，若以另外一个逻辑式代入式中所有A的位置，则等式仍然成立。

例：试用代入定理证明De.Morgan定理也适用于多变量的情况。即：

$$\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} = \overline{A_1} \bullet \overline{A_2} \bullet \cdots \bullet \overline{A_n} \qquad (1)$$

$$\overline{A_1 \bullet A_2 \bullet \cdots \bullet A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + \cdots + \overline{A_n} (n \in Z, n \geq 2) \qquad (2)$$

【证明】在前一讲中，由真值表相等已证明两变量De. Morgan定理成立，即有：

$$\overline{A_1 + A_2} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \qquad (3)$$

$$\overline{A_1 \cdot A_2} = \overline{A_1} + \overline{A_2} \qquad (4)$$

令$B=A_2+A_3$，且将其代入式（3），依据代入定理，则有：

$$\overline{A_1 + B} = \overline{A_1 + (A_2 + A_3)} = \overline{A_1} \cdot \overline{(A_2 + A_3)} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} \qquad (5)$$

（5）式说明（1）式的三变量De. Morgan定理也成立，以此类推，可知（1）式成立。

同理可依据（4）式证明（2）式也成立。 【证毕】

■ 反演定理

所谓反演定理，是指对于任意一个逻辑式**Y**，若将其中所有的“·”换成“+”，“+”换成“·”，“0”换成“1”，“1”换成“0”，原变量换成反变量，反变量换成原变量，则得到的结果就是$\overline{Y}$。

例2：已知 $Y=A(\overline{B}+C)+\overline{C}D$，求 $\overline{Y}$ 。

解：依据反演定理的规则可得 $\overline{Y}$ 的表达式如下：

$$\overline{Y}=[\overline{A}+(B\cdot\overline{C})]\cdot(C+\overline{D})$$
$$=\overline{A}C+\overline{A}\cdot\overline{D}+B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$$

反演定理

例3： 已知 $Y=\overline{\overline{A\overline{B}+C}+D}+C$，求 $\overline{Y}$。

解： 依据反演定理规则可得Y的反演式如下：

$$\overline{Y}=\overline{\overline{(\overline{A}+B)\cdot\overline{C}}\cdot\overline{D}}\cdot\overline{C}$$

再用De. Morgan定理展开如下：

$$\overline{Y}=[(\overline{A}+B)\cdot\overline{C}+D]\cdot\overline{C}$$

$$=\overline{A}\cdot\overline{C}+B\overline{C}+\overline{C}D$$

此例说明使用反演定理求逻辑函数的反演式时，**不在单个变量上的非号应保留**。

■ 对偶定理

若两逻辑式相等，则它们的对偶式也相等，这就是对偶定理。

所谓对偶式，即：对于任何一个逻辑式Y，若将其中的“·”换成“+”，“+”换成“·”，“0”换成“1”，“1”换成“0”，则可得到一个新的逻辑式Y*， Y*即为Y的对偶式，或者Y与Y*互为对偶式。

逻辑代数基本定律中的对偶定理

定律名称	公	式
0—1律	$A\cdot 0=0$	$A+1=1$
自等律	$A\cdot 1=A$	$A+0=A$
重叠律	$A\cdot A=A$	$A+A=A$
互补律	$A\cdot \overline{A}=0$	$A+\overline{A}=1$
交换律	$A\cdot B=B\cdot A$	$A+B=B+A$
结合律	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	$A+(B+C)=(A+B)+C$
分配律	$A\cdot(B+C)=AB+AC$	$A+BC=(A+B)(A+C)$
还原律	$\overline{\overline{A}}=A$	$(A^*)^*=A$
反演律	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
吸收律（一）	$AB+A\overline{B}=A$	$(A+B)(A+\overline{B})=A$
吸收率（二）	$A+AB=A$	$A\cdot(A+B)=A$
吸收率（三）	$A+\overline{A}B=A+B$	$A\cdot(\overline{A}+B)=AB$
吸收率（四）	$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$	$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$

证明两个逻辑式相等，有时可通过证明它们的对偶式相等来完成，因为有些情况下证明其对偶式相等更加容易。

例4：证明该基本公式成立：

$$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C) \qquad (1)$$

【证明】由逻辑代数基本公式——吸收率（4）可知：

$$F_1=AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C=F_2 \qquad (2)$$

则依据求对偶式规则可知：

$$F_1^*=(A+B)\cdot(\overline{A}+C)\cdot(B+C); \qquad F_2^*=(A+B)\cdot(\overline{A+C})$$

则由对偶式定理可知（1）式成立. **【证毕】**