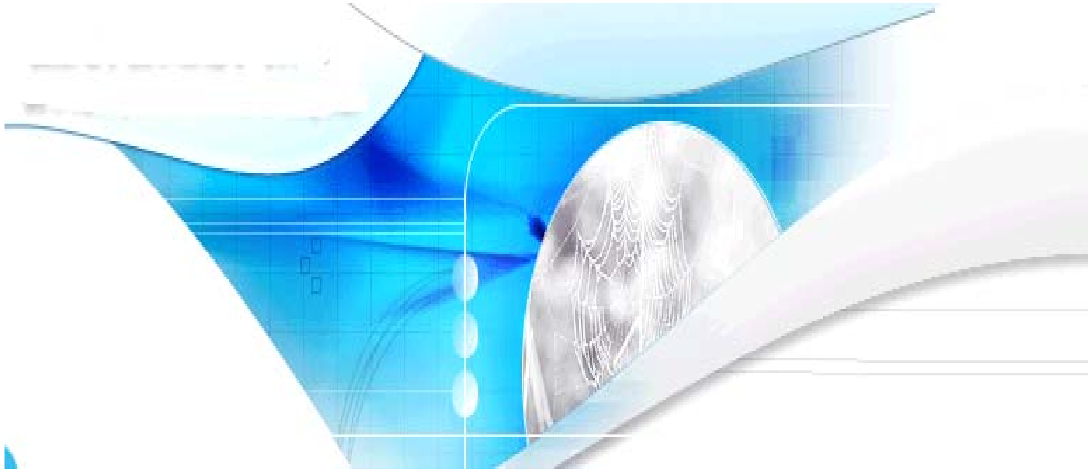
※ 逻辑代数基础 ※



逻辑代数的公理

(1)若$A \neq 0$则$A = 1$; 若A

$1 + A = 1; 0 + A = A;$

$1 \cdot A = A; 0 \cdot A = 0;$

$(2)\overline{1} = 0; \overline{0} = 1$

$(3) 1 \cdot 1 = 1; 0 + 0 = 0$

$(4) 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0; 0 + 1 = 1 + 0 = 1$

$(5) 0 \cdot 0 = 0; 1 + 1 = 1$

逻辑代数的基本公式

（1）交换律：$A \cdot B = B \cdot A$； $A + B = B + A$

（2）结合律：$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$；

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

（3）分配律：$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$；

$$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$$

（4）01定律：$1 \cdot A = A$； $0 + A = A$

$$0 \cdot A = 0; \quad 1 + A = 1$$

（5）互补律：$A\cdot\overline{A}=0; A+\overline{A}=1$

（6）重叠律：**A·A=A； A+A=A**

（7）还原律：$\overline{\overline{A}}=A$

（8）反演律（**De. Morgan定理):**

$$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B};\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$$

证明：

A	B	$\overline{A\cdot B}$	$\overline{A}+\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

$\Rightarrow$ $\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B};$

同理:$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$

注：

1、若两个逻辑函数具有完全相同的真值表，则这两个逻辑函数相等。证明以上定律的基本方法均采用真值表法。

2、逻辑代数与普通代数是不同的。

例： $\overline{A}B + A\overline{B} + \cancel{AB} = A + B + \cancel{AB},$

但当$A = B = 1$时：$\overline{A}B + A\overline{B} \neq A + B$

逻辑代数的常用公式（吸收律）

$$(1)A+AB=A; \qquad A(A+B)=A$$

【证】左=A+AB=A·(1+B)=A·1=A=右

左=A(A+B)=A·A+A·B=A+AB=A=右

$$(2)AB+A\overline{B}=A; \qquad (A+B)(A+\overline{B})=A$$

$$(3)A+\overline{A}B=A+B; \qquad A(\overline{A}+B)=AB$$

【证】左= $A+\overline{A}B=A(1+B)+\overline{A}B=A+AB+\overline{A}B$

$=A+B$ =右

■ 逻辑代数的常用公式（吸收律）

$$(4) AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

推论：$AB+\overline{A}C+BCDE\ldots=AB+\overline{A}C$

【证】左$=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})BCDE\ldots$

$=(AB+ABCDE\ldots)+(\overline{A}C+\overline{A}BCDE\ldots)$

$=AB+\overline{A}C$

=右

（5）$A\cdot\overline{A\cdot B}=A\cdot\overline{B}$;　　$\overline{A}\cdot\overline{A\cdot B}=\overline{A}$

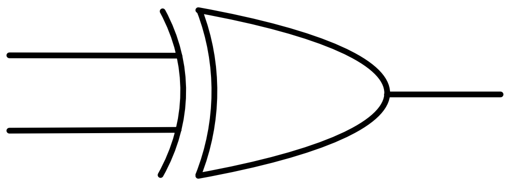
异或运算

1、异或运算定义：

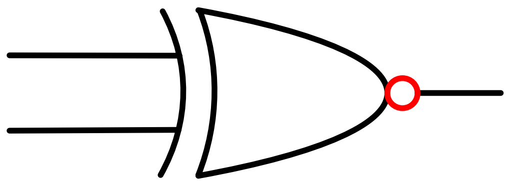
$A \oplus B = \overline{A}B + A\overline{B} \Rightarrow$ A、B相异为1，相同为0;

$A \odot B = \overline{A}\,\overline{B} + AB \Rightarrow$ A、B相同为1，相异为0;

可见：$\mathbf{A \odot B} = \overline{A \oplus B}$



异或门逻辑符号



同或门逻辑符号

■ 异或运算

思考： $A \odot B \odot C$ ？

$A \oplus B \oplus C$

A B C	$A \odot B \odot C$	$A \oplus B \oplus C$
0 0 0	0	0
0 0 1	1	1
0 1 0	1	1
0 1 1	0	0
1 0 0	1	1
1 0 1	0	0
1 1 0	0	0
1 1 1	1	1

解答：由真值表对比不难推出：

$$A \odot B \odot C = A \oplus B \oplus C$$

由归纳法可得出推论：偶数个变量同或的结果与异或的结果互非；奇数个变量同或的结果与异或的结果相等。

2、异或运算应用实例——数据加密：

加密数据输出端

明文：01001110101…1011101

⊕ 密钥：10100010101…0100110

密文：11101100000…1111011

加密数据接收端

密文：11101100000…1111011

⊕ 密钥：10100010101…0100110

明文：01001110101…1011101

3、异或运算的性质：

（1）交换律： $A \oplus B = B \oplus A$

（2）结合律： $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

（3）分配律： $A(B \oplus C) = AB \oplus AC$

【证】右= $\overline{AB} \cdot AC + AB \cdot \overline{AC}$

$$= (\overline{A} + \overline{B}) \cdot AC + AB \cdot (\overline{A} + \overline{C})$$

$$= \overline{B} \cdot AC + AB \cdot \overline{C}$$

$$= A \cdot (\overline{B}C + B\overline{C})$$

$$= A \cdot (B \oplus C)$$ =左

3、异或运算的性质：

（4） 常量与变量：

$$A \oplus 1 = \overline{A};\ A \oplus 0 = A;\ A \oplus A = 0;\ A \oplus \overline{A} = 1$$

（5） 因果互换关系：

若$A \oplus B = C$，则有$A \oplus C = B$，$B \oplus C = A$。

若$A \oplus B \oplus C \oplus D = 0$，则有$0 \oplus A \oplus B \oplus C = D$，

$A \oplus B \oplus D \oplus 0 = C$等。

【证】$\because A \oplus B = C, \therefore A \oplus (A \oplus B) = A \oplus C$

即$(A \oplus A) \oplus B = A \oplus C$

$$\therefore A \oplus C = (A \oplus A) \oplus B = 0 \oplus B = B$$

（6）多变量异或运算：

在多变量异或运算中，若变量为1的个数为奇数，异或运算结果为1，若变量为1的个数为偶数，异或运算结果为0，与变量为0 的个数无关。即：

$$\underbrace{A \oplus A \oplus \dots \oplus A}_{\text{偶数个A}} = 0 \qquad \underbrace{A \oplus A \oplus \dots \oplus A}_{\text{奇数个A}} = A$$

（7）多变量同或运算：

在多变量同或运算中，若变量为0的个数为偶数，同或运算结果为1，若变量为0的个数为奇数，同或运算结果为0，与变量为1 的个数无关。即：

$$\underbrace{A \odot A \odot \dots \odot A}_{\text{偶数个A}} = 1 \qquad \underbrace{A \odot A \odot \dots \odot A}_{\text{奇数个A}} = A$$

逻辑代数基本定律总结表

定律名称	公	式
0－1律	$A\cdot 0=0$	$A+1=1$
自等律	$A\cdot 1=A$	$A+0=A$
重叠律	$A\cdot A=A$	$A+A=A$
互补律	$A\cdot\overline{A}=0$	$A+\overline{A}=1$
交换律	$A\cdot B=B\cdot A$	$A+B=B+A$
结合律	$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$	$A+(B+C)=(A+B)+C$
分配律	$A\cdot(B+C)=AB+AC$	$A+BC=(A+B)(A+C)$
还原律	$\overline{\overline{A}}=A$	$(A^{*})^{*}=A$
反演律	$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$	$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$
吸收律（一）	$AB+A\overline{B}=A$	$(A+B)(A+\overline{B})=A$
吸收率（二）	$A+AB=A$	$A\cdot(A+B)=A$
吸收率（三）	$A+\overline{A}B=A+B$	$A\cdot(\overline{A}+B)=AB$
吸收率（四）	$AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$	$(A+B)(\overline{A}+C)(B+C)=(A+B)(\overline{A}+C)$