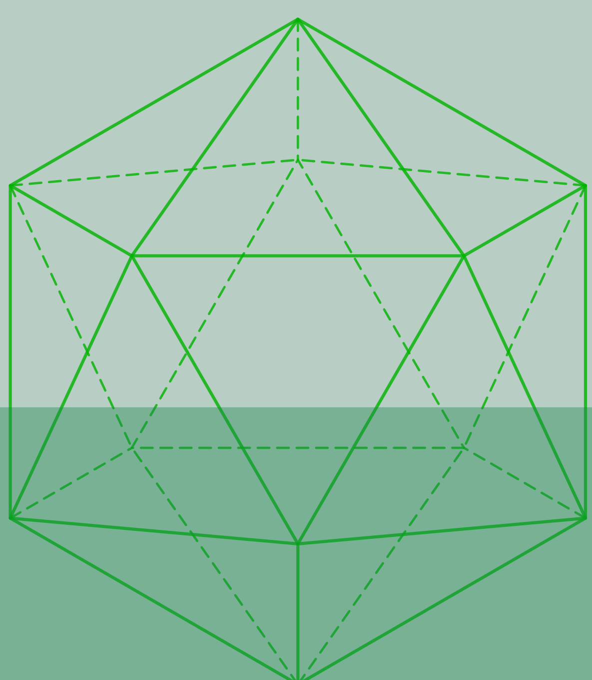
中学经典教材丛书

Textbook for Middle School Solid Geometry

立体几何（甲种本）

全一册



人民教育出版社数学室　编

同济极客出版社

Textbook for Middle School Solid Geometry

立体几何（甲种本）

人民教育出版社数学室　　编

献给：奔赴高考的莘莘学子

同济极客出版社

*** 内 容 简 介 ***

本书供六年制中学高中一年级选用，每周授课 2 课时．本书内容包括直线和平面、多面体和旋转体以及多面角和正多面体等三章．本书习题共分四类：练习、习题、复习参考题以及总复习参考题．练习主要供课堂练习用；习题主要供课内外作业用；复习参考题和总复习参考题都分 A、B 两组．复习参考题 A 组供复习本章知识时使用；总复习参考题 A 组供复习全书知识时使用；两类题中的 B 组综合性与灵活性较大，仅供学有余力的学生参考使用．习题及复习参考题、总复习参考题中的 A 组题的题量较多，约为学生通常所需题量的 1.5 倍，教学时可根据情况选用．本书是在中小学通用教材编写组编写的全日制十年制高中课本（试用本）《数学》第二册第五章“空间图形”的基础上编写的．初稿编出后，曾向各省、市、自治区的教研部门、部分师范院校征求了意见，并向部分中学教师征求了意见，有的省还进行了试教．他们都提出了许多宝贵的意见．本书由人民教育出版社数学室编写．参加编写的有鲍珑、李慧君、孙福元等，全书由孙福元校订．

责任编辑　张晨南
封面设计　张晨南
出版发行　同济极客出版社
网　　址　http://www.tjad.cn
开　　本　216 mm×279 mm
版　　次　2024年12月12日发行　　2026年1月28日印刷
定　　价　142.00元

引言

在初中，我们学习了平面几何，研究过一些平面图形（由同一个平面内的点、线所构成的图形）的形状、大小和位置关系，还有平面图形的画法和计算，以及它们的应用．可是，在解决实际问题中，只知道这些几何知识还是不够用的．例如，建造厂房、制造机器、修筑堤坝等，都需要进一步研究空间图形的问题．

空间图形是由空间的点、线、面所构成，也可看成是空间点的集合．以前我们学过的长方体、圆柱、圆锥等，都属于空间图形．平面图形是空间图形的一部分．

立体几何的研究对象是空间图形．我们将在平面几何知识的基础上，来研究空间图形的性质、画法、计算，以及它们的应用．

目录

第一章　直线和平面

第一节　平面

1.1.1　平面

常见的桌面、黑板面、平静的水面以及纸板等，都给我们以平面的形象．几何里所说的平面就是从这样的一些物体抽象出来的．但是，几何里的平面是无限延展的．

当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们都很像平行四边形．因此，在立体几何中，通常画平行四边形来表示平面 (图 1.1)．当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成等于邻边的两倍．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画 (图 1.2)．这样看起来立体感强一些．

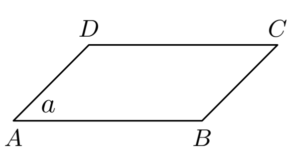


图 1.1

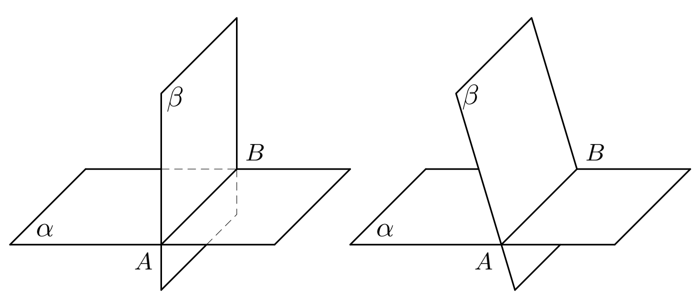
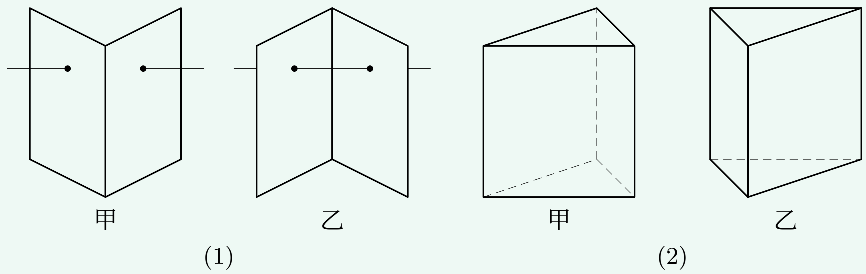


图 1.2

平面通常用一个希腊字母 α、β、γ 等来表示，如平面 α、平面 β、平面 γ 等，也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC（图 1.1）．

练习一

1. 能不能说一个平面长 4 m，宽 2 m？为什么？
2. 观察 (1)、(2) 中甲乙两个图形，用模型来说明它们的位置有什么不同．并用字母来表示各平面



（第 2 题）

1.1.2 平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质．我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础．

公理 1

如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（图 1.3）．

这时，我们说直线在平面内，或者说平面经过直线．

例如，把一根支持边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上．

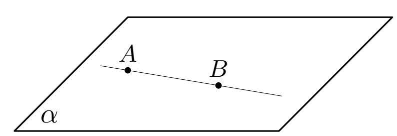


图 1.3

点 A 在直线 a 上，记作 $A \in a$；点 A 在直线 a 外，记作 $A \notin a$；点 A 在平面 α 内，记作 $A \in \alpha$；点 A 在平面 α 外，记作 $A \notin \alpha$；直线 a 在平面 α 内，记作 $a \subset \alpha$．

公理 2

如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线（图 1.4）.

例如，教室内相邻的墙角，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线.

如果两个平面 α 和 β 有一条公共直线 a，就说平面 α 和 β 相交，交线是 a，记作 $\alpha \cap \beta = a$.

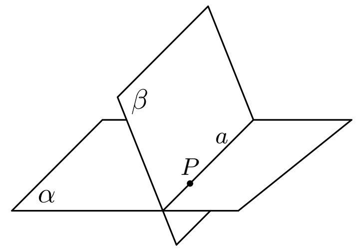


图 1.4

公理 3

经过不在同一直线上的三点，有且仅有一个平面（图 1.5）.

例如，一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了.

过 A、B、C 三点的平面又可记作“平面 ABC”.

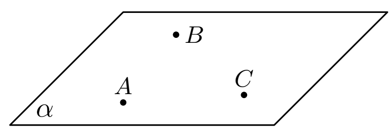


图 1.5

根据上述公理，可以得出下面的推论：

推论 1

经过不在同一直线上的三点，有且仅有一个平面（图 1.6a）.

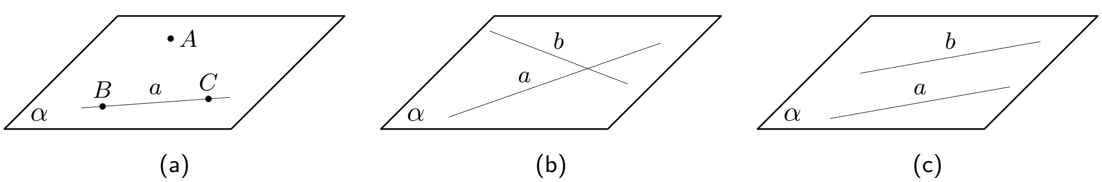


图 1.6

A 是直线 a 外的一点，在 a 上任取两点 B、C，根据公理 3，经过不共线的三

点 A、B、C 有一个平面 α. 因为 B、C 都在平面 α 内，所以根据公理 1，直线 a 在平面 α 内. 即平面 α 是经过直线 a 和点 A 的平面.

因为 B、C 在直线 a 上，所以经过直线 a 和点 A 的平面一定经过 A、B、C. 又根据公理 3，经过不共线的三点的平面只有一个，所以经过直线 a 和点 A 的平面只有一个.

类似地，可以得出下面两个推论：

推论 2

经过两条相交直线，有且仅有一个平面（图 1.6b）.

推论 3

经过两条平行直线，有且仅有一个平面（图 1.6c）.

“有且仅有一个平面”，我们也说“确定一个平面”

注意：在立体几何里，平面几何中的定义、公理、定理等，对于同一个平面内的图形仍然成立.

例 1.1 两两相交且不过同一个点的三条直线比在同一个平面内.

已知：直线 AB、BC、CA 两两相交，交点分别为 A、B、C（图 1.7）. 求证：直线 AB、BC、CA 共面[①].

证明： $\because$ 直线 AB 和 AC 相交于点 A，

$\therefore$ 直线 AB 和 AC 确定一个平面 α（推论 2）.

$\because$ $B \in AB$，$C \in AC$，

$\therefore$ $B \in \alpha$，$C \in \alpha$.

$\therefore$ $BC \subset \alpha$（公理 1）.

因此，直线 AB、BC、CA 都在平面 α 内，即它们共面.

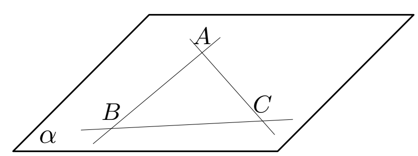


图 1.7

① 空间的几个点和几条直线，如果都在同一个平面内，可以简单地说它们“共面”，否则说它们“不共面”.

练习二

1. 填空
   (1) _____________的三点确定一个平面;
   (2) 两条______或______直线确定一个平面;
   (3) 有一个公共点的两个平面相交于__________一条直线.
2. 用符号表示下列语句:
   (1) 点 A 在平面 α 内，但在平面 β 外;
   (2) 直线 a 经过平面 α 外一点 M;
   (3) 直线 a 和 b 相交于平面 α 内一点 M;
   (4) 直线 a 在平面 α 内，又在平面 β 内，平面 α 和 β 相交于直线 a.
3. 将下列命题改写成语言叙述，判断它们是否正确，并说明理由.
   (1) 当 $A \in \alpha, B \notin \alpha$ 时, 线段 $AB \subset \alpha$;(2) $\left.\begin{array}{l} A \in \alpha \\ B \in \alpha \\ A \in AB \end{array}\right\} \Longrightarrow C \in \alpha$

1.1.3　水平放置的平面图形的直观图的画法

把空间图形画在纸上或黑板上，这就是用一个平面图形来表示空间图形．这样的平面图形不是空间图形的真实形状，而是它的直观图．如图 1.8 是正方体的一种直观图．正方体的各个面本来都是正方形，但是在直观图中，有一些面画成了平行四边形．虽然直观图是和空间图形不同的平面图形，但它有加强的立体感.

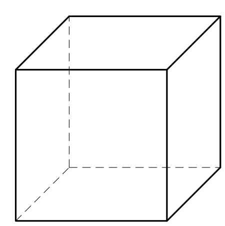


图 1.8

要画空间图形的直观图，首先要学会水平放置的平面图形的直观图的画法．下面举例说明一种常用的画法.

例 1.2　画水平放置的正六边形的直观图（图 1.9).

画法:

(1) 在已知正六边形 $ABCDEF$ 中，取对角线 AD 所在的直线为 x 轴，取对称轴 GH 为 y 轴．画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y' = 45°$.

(2) 以点 O' 为中点，在 x' 轴上取 $A'D'=AD$，在 y' 轴上取 $G'H'=\dfrac{1}{2}GH$. 以点 H' 为中点画 $F'E'$ 平行于 x' 轴，并等于 FE；再以 G' 为中点画 $B'C'$ 平行于 x' 轴，并等于 BC.

(3) 连结 $A'B'$、$C'D'$、$D'E'$、$F'A'$. 所得到的六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是 $ABCDEF$ 的直观图.

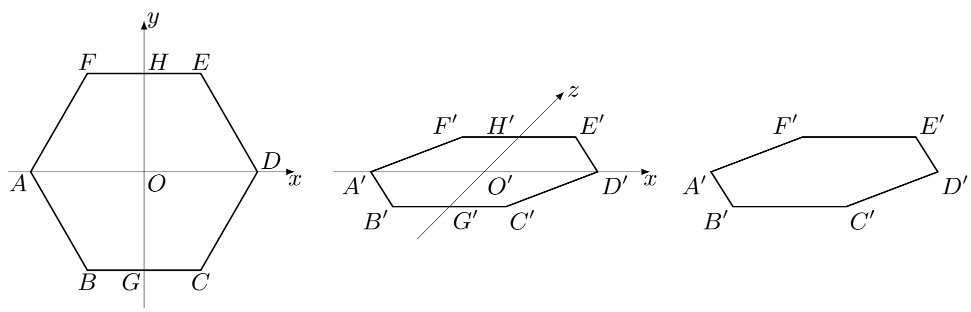


图 1.9

> 图画好后，要擦去辅助线[①].

上面画直观图的方法叫做**斜二测画法**，这种画法的规则是：

(1) 在已知图形中取互相垂直的轴 Ox、Oy. 画直观图时，把它化成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$（或 135°）. 它们确定的平面表示水平平面.

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段.

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持长度不变，平行于 x 轴的线段，长度为原来的一半.

例 1.3 画水平放置的正五边形的直观图（图 1.10）.

画法:

① 辅助线包括 x' 轴、y' 轴及为画图添加的线.

(1) 在已知正五边形 $ABCDE$ 中，取对角线 BE 所在的直线为 x 轴，取对称轴 AF 为 y 轴．分别过点 C、D 作 $CG \mathbin{/\!/} Oy$、$DH \mathbin{/\!/} Oy$，与 x 轴分别交于 G、H．画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y' = 135°$．

(2) 以点 O' 为中点，在 x' 轴上截取 $G'H' = GH$．在 x' 轴的同一侧画线段 $C'G' \mathbin{/\!/} O'y'$、$D'H' \mathbin{/\!/} O'y'$，并使 $C'G' = \dfrac{1}{2}CG$、$D'H' = \dfrac{1}{2}DH$；在 x' 轴的另一侧的 y' 轴上取一点 A'，使 $O'A' = \dfrac{1}{2}OA$；以点 O' 为中点，在 x' 轴上截取 $B'E' = BE$.

(3) 连结 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、$E'A'$．所得到的五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图.

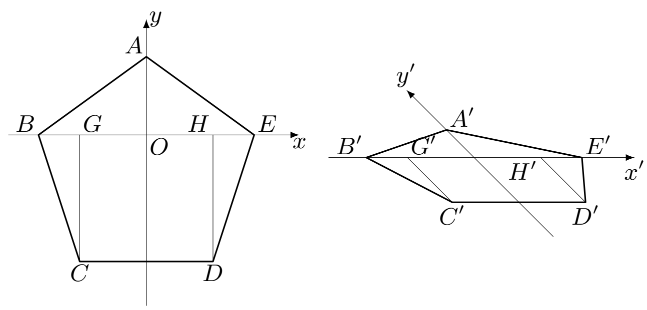
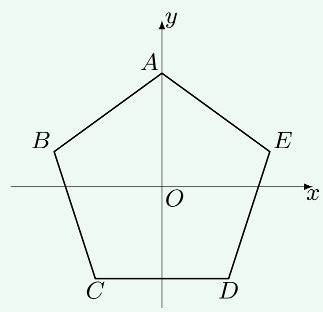


图 1.10

练习三

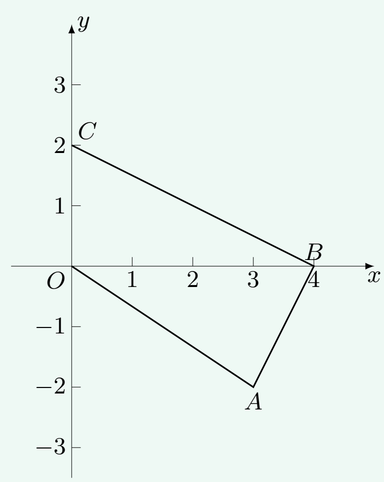
1. 画出水平放置的正方形、正三角形的直观图.
2. 图中所给出的 x 轴、y 轴经过正五边形中心，画这个正五边形的直观图.



（第 2 题图）

习题一

1. 下面的说法正确吗？为什么？
   (1) 线段 AB 在平面 α 内，直线 AB 不全在平面 α 内；
   (2) 平面 α 和 β 只有一个公共点.
2. 为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚？
3. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？
4. 解答：
   (1) 不共面的四点可以确定几个平面？
   (2) 三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定几个平面？
   (3) 共点的三条直线可以确定几个平面？
5. 一条直线经过平面内的一点与平面外的一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？
6. 一条直线与两条平行直线都相交，证明：这三条直线在同一个平面内.
7. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线，证明：这三条直线在同一个平面内.
8. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？
9. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿下端是否在同一个平面内？
10. 画出图中水平放置的四边形 $OABC$ 的直观图.



（第 10 题图）

11. 画水平放置的等腰梯形和平行四边形的直观图.

第二节　空间两条直线

1.2.1　两条直线的位置关系

我们知道，在同一个平面内的两条直线[①]的位置关系只有两种：平行或相交.

空间的两条直线之间，还有另外一种位置关系.

观察图 1.11 中的六角螺母的棱 AB 和 CD 所在的直线，或机械部件蜗轮和蜗杆的轴线，可以看出，它们不同在一个平面内.

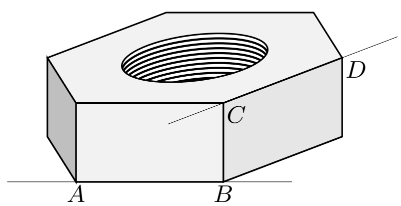


图 1.11

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线. 显然，两条异面直线是既不平行又不相交的.

空间的两条直线的位置关系有以下三种：

相交直线 在同一个平面内，有且只有一个公共点；

平行直线 在同一个平面内，没有公共点；

异面直线 不同在任何一个平面内，没有公共点.

画异面直线时，可以画出如图 1.12 那样，以显示出它们不共面的特点.

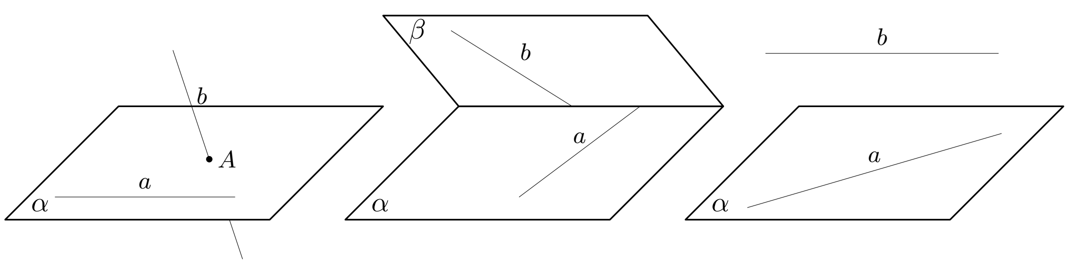


图 1.12

① 本书中没有特别说明的“两条直线（平面）”，均指不重合的两条直线（平面）.

直线 a, b 相交于点 A，我们规定记作 $a \cap b = A$.

例 1.4 平面内一点与平面外一点的连线，和平面内不仅过该点的直线是异面直线.

已知：$a \subset \alpha$，$A \notin \alpha$，$B \in \alpha$，$B \notin a$（图 1.13）.

求证：直线 AB 和 a 是异面直线.

证明: 假设直线 AB 与 a 在同一个平面内, 那么这个平面一定经过点 B 和直线 a.

$\because$ $B \notin a$，经过点 B 与直线 a 只能有一个平面 α，

$\therefore$ 直线 AB 与 a 应在平面 α 内.

$\therefore$ $A \in \alpha$，这与已知 $A \notin \alpha$ 矛盾.

$\therefore$ 直线 AB 和 a 是异面直线.

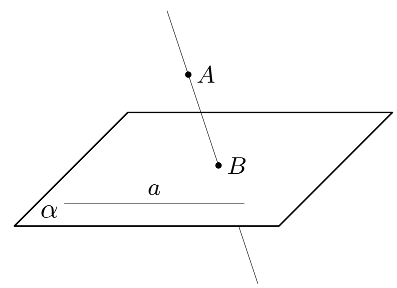
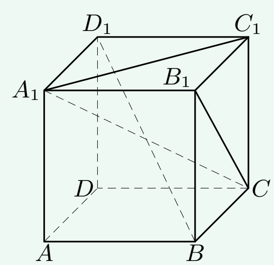


图 1.13

练习四

1. 在教室中找出几对异面直线的例子.
2. 解答:
   (1) 没有公共点的两条直线叫做平行直线，对吗?
   (2) 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线吗？为什么?
3. 说出正方体中各对线段的位置关系
   (1) AB 和 CC_1;
   (2) A_1C 和 BD_1;
   (3) A_1A 和 CB_1;
   (4) A_1C_1 和 CB_1;
   (5) A_1B_1 和 DC;
   (6) BD_1 和 DC.



（第 3 题图）

1.2.2 平行直线

在平面几何里，我们曾学过：“在同一个平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行”. 对于空间的三条直线，实际上也有这样的性质，我们把它作为公理.

公理 4

平行于同一条直线的两条直线互相平行.

例如, 图 1.14 里三棱镜的三条棱, 如果 $AA' \parallel BB'$、$CC' \parallel BB'$, 这时必有 $AA' \parallel CC'$.

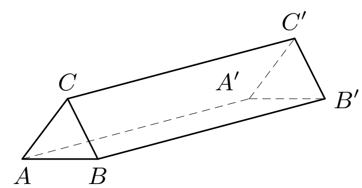


图 1.14

例 1.5 已知：四边形 $ABCD$ 是空间四边形（四个顶点不共面的四边形），E、H 分别是边 AB、AD 的中点，F、G 分别是边 CB、CD 上的点，且 $\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{2}{3}$. 求证：四边形 $EFGH$ 是梯形.

证明： 如图 1.15，连结 BD.

$\because$ EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore$ $EH \parallel BD$，$RH = \dfrac{1}{2}BD$.

又在 $\triangle BCD$ 中，$\dfrac{CF}{CB} = \dfrac{CG}{CD} = \dfrac{2}{3}$，

$\therefore$ $FG \parallel BD$，$FG = \dfrac{2}{3}BD$.

根据公理 4，$EH \parallel FG$.

又 $\because$ $FG > EH$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形.

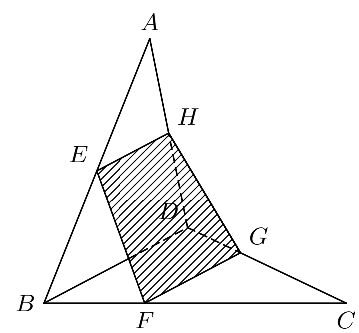


图 1.15

根据公理 4，我们可以证明下面的定理：

定理

如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.

已知：$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$，$AC \parallel A'C'$，并且方向相同.

求证：$\angle BAC = \angle B'A'C'$.

证明: 对于 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 都在同一平面内的情况，在平面几何中已经证明. 下面我们证明两个角不在同一平面内的情况.

如图 1.16，在 AB、$A'B'$、AC、$A'C'$ 上分别取 $AD = A'D'$、$AE = A'E'$，连结 AA'、DD'、EE'、DE、$D'E'$.

$\because$ $AB \parallel A'B'$，$AD = A'D'$，

$\therefore$ $AA'DD'$ 是平行四边形.

$\therefore$ $AA' \mathrel{\underline{\parallel}} DD'$.

同理 $AA' \mathrel{\underline{\parallel}} EE'$.

根据公理 4 得 $DD' \mathrel{\underline{\parallel}} EE'$.

又可得 $DD' = EE'$，

$\therefore$ 四边形 $EE'D'D$ 是平行四边形.

$\therefore$ $ED = E'D'$. 可得 $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$.

$\therefore$ $\angle BAC = \angle B'A'C'$.

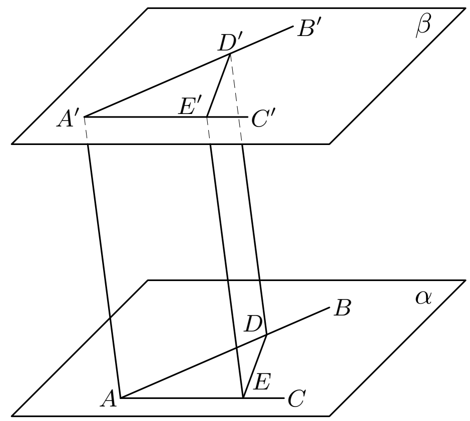


图 1.16

把上面两个角的两边反向延长，就得出下面的推论:

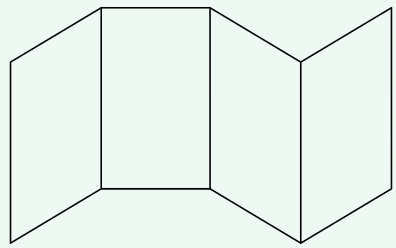
推论

如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.

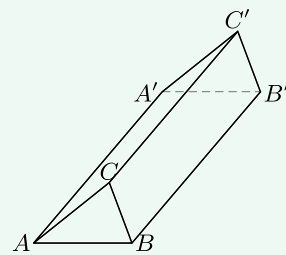
由上面的定理的证明可知：平面里的定义、定理等，对于非平面图形，需要经过证明才能应用.

练习五

1. 把一张长方形的纸对折两次，打开后如图那样，说明为什么这些折痕是互相平行的.
2. 已知：如图，AA'、BB'、CC' 不共面，且 $BB' \mathrel{\underline{\parallel}} AA'$，$CC' \mathrel{\underline{\parallel}} AA'$. 求证：$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



（第 1 题图）



（第 2 题图）

1.2.3　两条异面直线所成的角

直线 a,b 是异面直线．经过空间任意一点 O，分别引直线 $a' \parallel a, b' \parallel b$．因为两条相交直线和另外两条相交直线分别平行时，两组直线所成得锐角（或直角）相等，所以直线 a' 和 b' 所成得锐角（或直角）的大小，只由直线 a,b 的相互位置来确定，与点 O 的选择无关．我们把直线 a' 和 b' 所成的锐角（或直角）叫做**异面直线 a 和 b 所成的角**（图 1.17）．

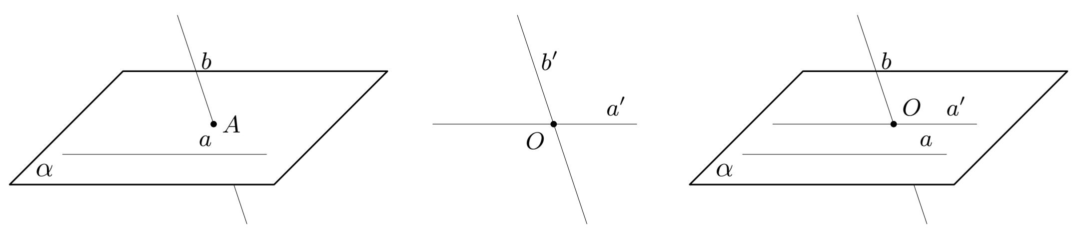


图 1.17

为了简便，点 O 常取在两条异面直线中的一条上．例如，取在直线 b 上，然后经过点 O 作直线 $a' \parallel a$（图 1.17），那么 a' 和 b 所成的角就是异面直线 a、b 所成的角．

如果两条异面直线所成的角是直角，我们就说这**两条异面直线互相垂直**．

例如，图 1.11 中，六角螺帽的两条棱 AB、CD 所在直线是成 60° 角的异面直线；蜗轮和蜗杆的轴线是互相垂直的异面直线，它表明由蜗杆到蜗轮的转动方向变了 90° 的角．

图 1.18 中，正方体的棱 AA' 和 $B'C'$ 所在的直线是两条异面直线，直线 $A'B'$ 和它们都垂直相交. 我们把和两条异面直线都垂直相交的直线叫做**两条异面直线的公垂线**.

两条异面直线的公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做**两条异面直线的距离**. 图 1.18 中线段 $A'B'$ 的长度就是异面直线 AA' 和 $B'C'$ 的距离.

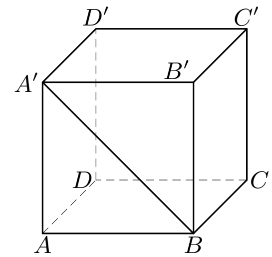


图 1.18

例 1.6 设图 1.18 中的正方体的棱长为 a.

(1) 图中哪些棱所在的直线与直线 BA' 成异面直线?

(2) 求直线 BA' 和 CC' 所成的角的大小;

(3) 求异面直线 BC 和 AA' 的距离.

解:

(1) $\because\quad A' \notin$ 平面BC'，而点 B、直线 CC' 都在平面 BC' 内，且 $B \notin CC'$.

$\therefore\quad$ 直线 BA' 与 CC' 是异面直线.

同理，直线 $C'D'$、$D'D$、DC、AD、$B'C'$ 都和直线 BA' 成异面直线.

(2) $\because\quad CC' \mathbin{/\mkern-5mu/} BB'$,

$\therefore\quad BA'$ 和 BB' 所成的锐角就是 BA' 和 CC' 所成的角.

$\because\quad \angle A'BB' = 45°$,

$\therefore\quad BA'$ 和 CC' 所成的角是 $45°$.

(3) $\because\quad AB \perp AA'$，$AB \cap AA' = A$,

又 $\because\quad AB \perp BC$，$AB \cap BC = B$,

$\therefore\quad AB$ 是 BC 和 AA' 的公垂线段.

$\because\quad AB = a$,

$\therefore\quad BC$ 和 AA' 的距离是 a.

练习六

1. 解答:

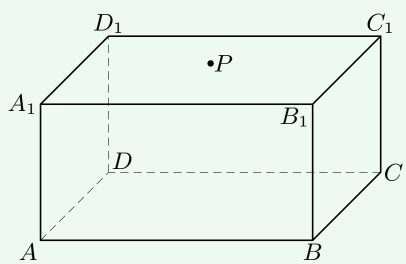
   (1) 两条直线互相垂直，它们一定相交吗?

   (2) 垂直于同一直线的两条直线，有几种位置关系?

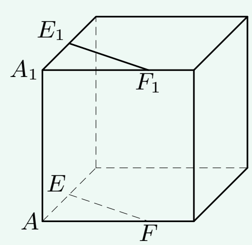
2. 举出互相垂直的异面直线和异面直线的公垂线的实际例子.
3. 画两个相交平面，在这两个平面内各画一条直线使它们成为
   (1)　平行直线；　　(2)　相交直线；　　(3)　异面直线.

习题二

1. 什么叫平行直线？什么叫异面直线，说出它们的共同点和区别.
2. 直线 a 和两条异面直线 b、c 都相交，画出每两条相交直线所确定的平面，并标上字母.
3. 有三条直线，每两条都成异面直线．画出这三条直线.
4. 在一块长方体形木块的 A_1C_1 面上有一点 P，过点 P 画一条直线和棱 CD 平行，说明应该怎样画.



（第 4 题图）



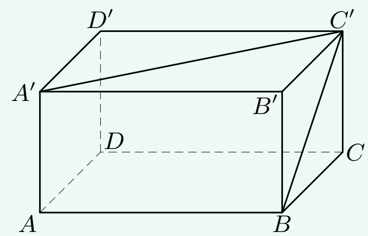
（第 5 题图）

5. 如图，在正方体中，$AE = A_1E_1$，$AF = A_1F_1$．求证：$EF \underline{\mathbin{/\!/}} E_1F_1$.
6. 已知：E、F、G、H 分别是空间四边形的四条边 AB、BC、CD、DA 的中点．求证：四边形 $EFGH$ 是平行四边形.
7. 已知：直线 a 和 b 是异面直线，直线 $c \mathbin{/\!/} a$，直线 b 与 c 不相交．求证：直线 b、c 是异面直线.
8. 分别和两条异面直线 AB、CD 同时相交的两条直线 AC、BC 一定是异面直线．为什么？
9. 什么角两条异面直线所成的角？两条异面直线在什么情况下互相垂直？
10. 解答：
    (1) 求证：如果一条直线和两条平行线中的一条垂直，那么也和另一条垂直.
    (2) 某一条直线与两条平行直线都不相交，且与其中一条所成的角等于 θ，则该直线与另一条直线所成的角也等于 θ.
11. 如图，已知长方体的长和宽都是 $4\,\text{cm}$，高是 $2\,\text{cm}$.

(1) BC 和 $A'C'$ 所成的角是多少度?

(2) AA' 和 BC' 所成的角是多少度?

(3) $A'B'$ 和 DD'; $B'C'$ 和 CD 的距离各是多少?



(第 11 题图)

第三节 空间直线和平面

1.3.1 直线和平面的位置关系

我们观察教室的墙面和地面，它们的相交线在地面上；两墙面的相交线和地面只相交于一点；墙面和天花板的相交线和地面没有交点. 它反映出直线和平面之间存在着不同的位置关系.

如果一条直线和一个平面没有公共点，那么我们说**这条直线和这个平面平行**.

一条直线和一个平面的位置关系有且只有以下三种:

直线在平面内 有无数个公共点;

直线和平面相交 有且只有一个公共点;

直线和平面平行 没有公共点.

我们把直线和平面相交或平行的情况统称为**直线在平面外**.

图 1.19 是表示这三种位置关系的图形. 一般地，直线 a 在平面 α 内时，应把直线 a 画在表示平面 α 的平行四边形内；直线 a 在平面 α 外时，表示直线的线段要有一部分或全部画在表示平面 α 的平行四边形外.

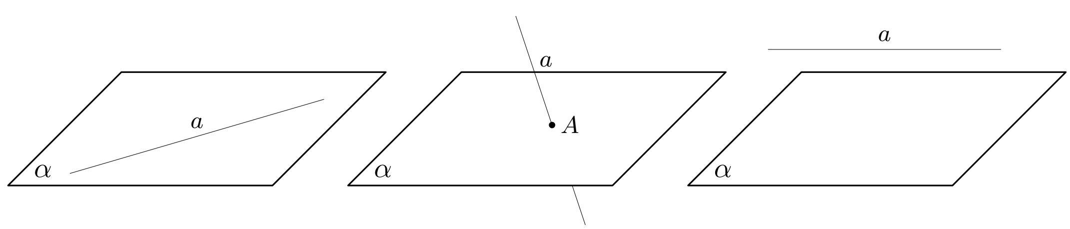


图 1.19

直线 a 与平面 α 相交于点 A，规定记作 $a\cap\alpha=A$；直线 a 与平面 α 平行，记作 $a\mathbin{/\!/}\alpha$；直线 a 在平面 α 外，记作 $a\not\subset\alpha$.

练习七

1. 观察图中的吊桥，说出立柱和桥面、水面，铁轨和桥面、水面的位置关系.

（第 1 题图）

2. 举出直线和平面三种位置关系的实例.

1.3.2　直线和平面平行的判定与性质

直线和平面平行，除可根据定义判定外，还有以下的判定定理：

定理　直线和平面平行的判定定理

如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

已知：$a\not\subset\alpha$，$b\subset\alpha$，$a\mathbin{/\!/}b$（图 1.20）. 求证：$a\mathbin{/\!/}\alpha$.

证明： $\because$　$a\not\subset\alpha$，

$\therefore$　$a\mathbin{/\!/}\alpha$ 或 $a\cap\alpha=A$.

下面证明 $a\cap\alpha=A$ 不可能.

假设 $a\cap\alpha=A$.

$\because$　$a\mathbin{/\!/}b$，

$\therefore$　$A\notin b$.

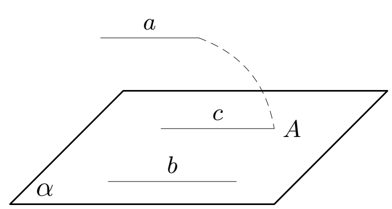


图 1.20

在平面 α 内过点 A 作直线 $c\mathbin{/\!/}b$. 根据公理 4，$a\mathbin{/\!/}c$. 这和 $a\cap c=A$ 矛盾，所以 $a\cap\alpha=A$ 不可能.

$\therefore$　$a\mathbin{/\!/}\alpha$.

例 1.7 空间四边形相邻两边中点的连线，平行于经过另外两边的平面.

已知：空间四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别是 AB、AD 的中点（图 1.21）.

求证：$EF \parallel$ 平面BCD.

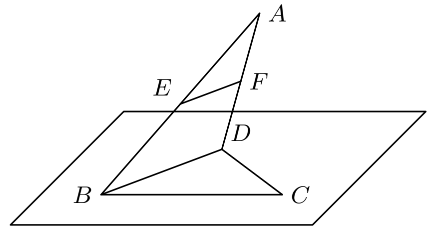


图 1.21

证明： 连结 BD.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}AE=EB\\ AF=FD\end{array}\right\}\Longrightarrow EF\parallel BD\\ BD\subset \text{平面}BCD\\ EF\not\subset \text{平面}BCD\end{array}\right\}\Longrightarrow EF\parallel \text{平面}BCD.$$

定理　直线和平面平行的性质定理

如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

已知：$a \parallel \alpha$，$a \subset \beta$，$\alpha \cap \beta = b$（图 1.22）. 求证：$a \parallel b$.

证明： $\because$　$a \parallel \alpha$,

$\therefore$　a 和 α 没有公共点.

又 $\because$　$b \subset \alpha$,

$\therefore$　a 和 b 没有公共点.

a 和 b 同在平面 β 内，又没有公共点,

$\therefore$　$a \parallel b$.

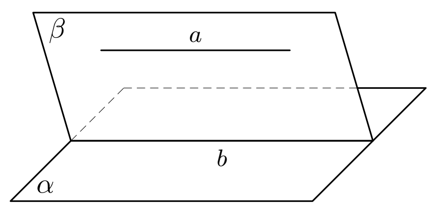


图 1.22

例 1.8 有一块木料如图 1.23，已知棱 BC 平行于面 $A'C'$. 要经过木料表面 $A'B'C'D'$ 内的一点 P 和棱 BC 将木料锯开，应怎样画线？所画的线和面 AC 有什么关系？

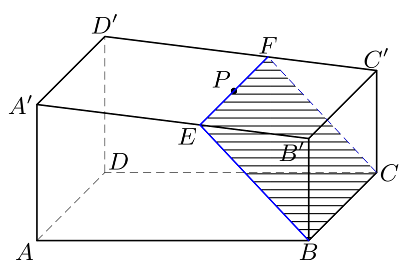


图 1.23

解：

(1) $\because$ $BC \parallel$ 面 $A'C'$，面 BC' 经过 BC 和面 $A'C'$ 交于 $B'C'$，

$\therefore$ $BC \parallel B'C'$.

经过点 P，在面 $A'C'$ 上画线段 $EF \parallel B'C'$，根据公理 4，$EF \parallel BC$.

$\therefore$ $EF \subset$ 平面 BF，$BC \subset$ 平面 BF. 连结 BE 和 CF，BE、CF 和 EF 就是所要画的线.

(2) $\because$ $EF \parallel BC$，根据判定定理，则 $EF \parallel$ 面 AC；BE、CF 显然都和面 AC 相交.

练习八

1. 使一块矩形木板 $ABCD$ 的一边 AB 紧靠桌面 α，并绕 AB 转动. AB 的对边 CD 在各个位置时，是不是都和桌面 α 平行？为什么？
2. 长方体的各个面都是矩形，说明长方体每一个面的各边及对角线为什么都和相对的面平行.
3. 图 1.23 中，如果 $AD \parallel BC$，$BC \parallel$ 面$A'C'$，那么，AD 和面 BC'、面 BF、面 $A'C'$ 都有怎样的位置关系. 为什么？

习题三

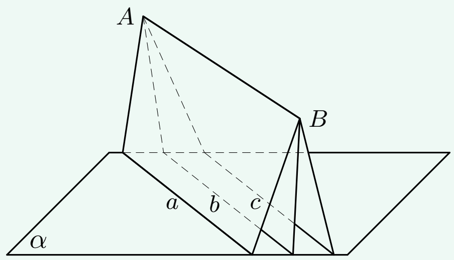
1. 画两个相交平面，在一个平面内画一条直线和另一平面平行.
2. 解答：

   (1) 一条直线和另一条直线平行，它就和经过另一条直线的任何平面平行. 这是否正确？

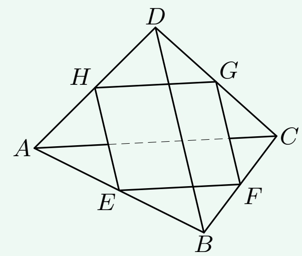
   (2) 一条直线和一个平面平行，它就和这个平面内的任何直线平行. 这是否正确？

   (3) 平行于同一平面的两条直线互相平行. 这是否正确？
3. 求证：如果一条直线与两个相交的平面都平行，那么这条直线与这两个平面的交线平行.
4. 求证：经过两条异面直线中的一条，有一个平面与另一条直线平行.
5. 求证：如果一条直线与一个平面平行，那么夹在这条直线和平面间的平行线段相等.
6. 求证：如果两条平行线中的一条和一个平面相交，那么另一条也和这个平面相交.
7. 如果一条直线与一个平面平行，那么过这个平面内的一点与这条直线平行的直线，必在这个平面内.

8. 直线 AB 平行于平面 α，经过 AB 的一组平面和平面 α 相交．求证：它们的交线 $a, b, c, \ldots$ 是一组平行线．



（第 8 题图）



（第 9 题图）

9. 已知：空间四边形 $ABCD$，E、F、G 分别是 AB、BC、CD 的中点．求证：平面 $EFG \parallel BD$，平面 $EFG \parallel AC$．
10. 求证：如果两个相交平面分别经过两条平行直线中的一条，那么它们的交线和这两条直线平行．

1.3.3 直线和平面垂直的判定与性质

如图 1.24，将书打开直立在桌面 α 上．观察书的书脊 AB 和各页与桌面的交线的位置关系，显然，它们都是垂直的．AB 和桌面 α 的位置关系，给我们以直线和平面垂直的形象．

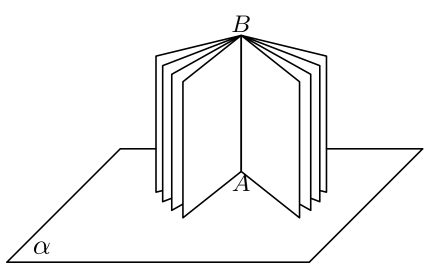


图 1.24

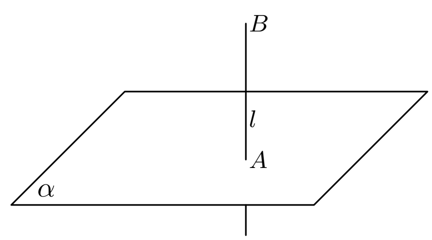


图 1.25

如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，我们说**这条直线和这个平面互相垂直**，直线叫做**平面的垂线**，平面叫做**直线的垂面**．过一点有且只有一条

直线和一个平面垂直；过一点有且只有一个平面和一条直线垂直. 平面的垂线和平面一定相交，交点叫做**垂足**.

画直线和水平平面垂直时，要把直线画成和表示平面的平行四边形的横边垂直，如图 1.25 中的 AB.

直线 l 和平面 α 互相垂直，记作 $l \perp \alpha$.

判定直线和平面垂直，除根据定义外，还有下面的定理:

定理 直线和平面垂直的判定定理

如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

已知: $m \subset \alpha$，$n \subset \alpha$，$m \cap n = B$，$l \perp m$，$l \perp n$. 求证: $l \perp \alpha$.

证明: 设 g 是平面 α 内的任意一条直线. 要证明 $l \perp \alpha$，根据定义，只要证明 $l \perp g$ 就可以了.

先证明 l、g 都通过点 B 的情况（图 1.26）.

在直线 l 上点 B 的两侧分别取点 A、A'，使 $AB = A'B$. 那么直线 m、n 都是线段 AA' 的垂直平分线，为了证明 $l \perp g$，可证明直线 g 也是线段 AA' 的垂直平分线.

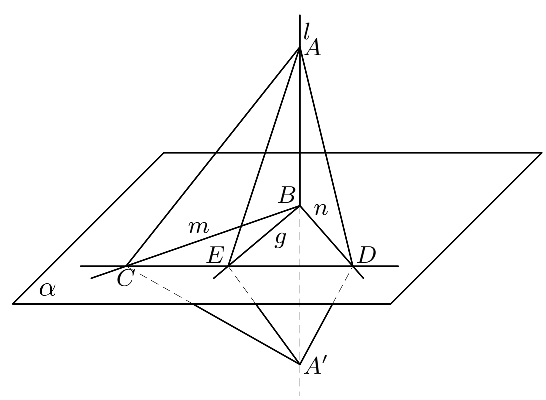


图 1.26

当 g 与 m（或 n）重合时，根据已知 $l \perp m$（或 n），可知 $l \perp g$ 成立. 当 g 与 m、n 都不重合时，在平面 α 内作一条直线 CD，与直线 m、n、g 分别交于点 C、D、E. 连结 AC、$A'C$、AD、$A'D$、AE、$A'E$. 则有

$$AC = A'C, \quad AD = A'D,$$

$$\therefore \quad \triangle ACD \cong \triangle A'CD,$$

得

$$\angle ACE = \angle A'CE.$$

$$\therefore \quad \triangle ACE \cong \triangle A'CE,$$

得

$$AE = A'E.$$

$$\therefore \quad g \text{ 是 } AA' \text{ 的垂直平分线.}$$

$$\therefore \quad l \perp g.$$

如果直线 l、g 中有一条或两条不经过点 B, 那么可过点 B 引它们的平行直线, 由于过点 B 的这样两条直线所成的角就是直线 l 与 g 所成的角, 同理可证这两条直线垂直. 因而 $l \perp g$.

综上所述可得

$$l \perp \alpha.$$

例 1.9 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面, 那么另一条也垂直于同一个平面.

已知: $a \parallel b$, $a \perp \alpha$ (图 1.27). 求证: $b \perp \alpha$.

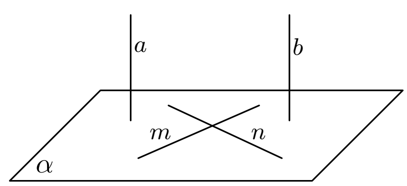


图 1.27

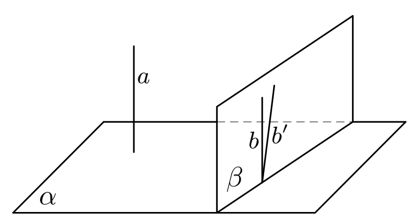


图 1.28

证明: 在平面 α 内做两条相交直线 m、n.

$$a \perp \alpha \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a \perp m \\ a \perp n \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ b \parallel a \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b \perp m \\ b \perp n \end{array}\right\} \Longrightarrow b \perp \alpha.$$

下面研究直线和平面垂直的性质.

设 $a\perp\alpha$，$b\perp\alpha$，我们来研究直线 a 和 b 是否平行（图 1.28）.

假定 b 与 a 不平行.

设 $b\cap\alpha=O$，b' 是经过点 O 与直线 a 平行的直线，平面 β 经过直线 b 与 b'，$\alpha\cap\beta=c$.

这样在平面 β 内，经过直线 c 上同一点 O 就有两条直线 b、b' 与 c 垂直，这是不可能的.

因此，$b\parallel a$.

由此，我们得到:

定理 直线和平面垂直的性质定理

如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行.

从平面外一点引一个平面的垂线，这个点和垂足间的距离叫做**这个点到这个平面的距离**.

例 1.10 已知一条直线 l 和一个平面 α 平行. 求证：直线 l 上各点到平面 α 的距离相等（图 1.29）.

证明: 过直线 l 上任意两点 A、B 分别引平面 α 的垂线 AA'、BB'，垂足分别为 A'、B'.

$\because\quad AA'\perp\alpha$，$BB'\perp\alpha$，

$\therefore AA'\parallel BB'$.

设经过直线 AA' 和 BB' 的平面为 β, $\beta\cap\alpha=A'B'$.

$\because\quad l\parallel\alpha$,

$\therefore\quad l\parallel A'B'$.

$\therefore\quad AA'=BB'$.

即直线 l 上各点到平面的距离相等.

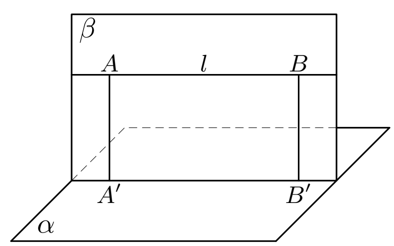


图 1.29

一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，叫做**这条直线和平面的距离**.

练习九

1. 一条直线垂直于平面内的两条直线，这条直线垂直于这个平面吗?
2. 求证：如果三条共点直线两两垂直，那么其中一条直线垂直于另两条直线确定的平面.
3. 求证：平面外一点与平面内各点连结的线段中，垂直平面的线段最短.
4. 安装日光灯时，怎样才能使灯管和天棚、地板平行?

1.3.4 斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角

自一点向平面引垂线，垂足叫做**这点在这个平面上的射影**. 这个点与垂足间的线段叫做**这点到这个平面的垂线段**.

一条直线和一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫做**这个平面的斜线**，斜线和平面的交点叫做**斜足**. 斜线上一点与斜足间的线段叫做**这点到这个平面的斜线段**.

过斜线上的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫做**斜线在这个平面上的射影**，垂足与斜足间的线段叫做这点到平面的**斜线段在这个平面上的射影**. 斜线上任意一点在平面上的射影，一定在斜线的射影上.

如图 1.30，对于平面 α，直线 AB 是垂线，垂足 B 是点 A 的射影；直线 AC 是斜线，C 是斜足，直线 BC 是斜线 AC 的射影；线段 AB 是垂线段，线段 AC 是斜线段，线段 BC 是斜线段 AC 的射影.

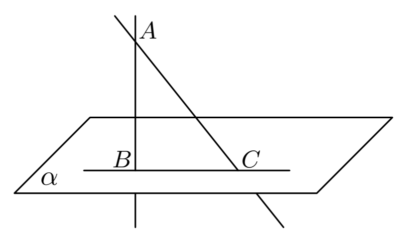


图 1.30

根据直角三角形性质，我们很容易得到：

定理

从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中，

(1) 射影相等的两条斜线段相等，射影较长的斜线段也较长；

(2) 相等的斜线段的射影相等，较长的斜线段的射影也较长；

(3) 垂线段比任何一条斜线段都短.

如图 1.31，AO 是平面 α 的垂线段，AB、AC 是平面 α 的斜线段，OB、OC 分别是 AB、AC 在平面 α 上的射影．这时有：

(1) $OB = OC \Longrightarrow AB = AC$,
$OB > OC \Longrightarrow AB > AC$;
(2) $AB = AC \Longrightarrow OB = OC$,
$AB > AC \Longrightarrow OB > OC$
(3) $AO < AB$，$AO < AC$.

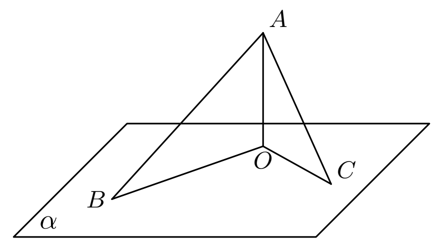


图 1.31

下面研究直线与平面所成的角．例如，发射炮弹时，炮筒和地平面所成的角．

平面的一条斜线和它在平面上的射影所成的锐角，叫做**这条直线和这个平面所成的角**（图 1.32）．

一条直线垂直于平面, 我们说它们**所成的角是直角**; 一条直线和平面平行, 或在平面内, 我们说它们**所成的角是** $0°$ **的角**.

可以证明，斜线和平面所成的角，是这条斜线和平面内经过斜足的直线所成的一切角中的最小的角．

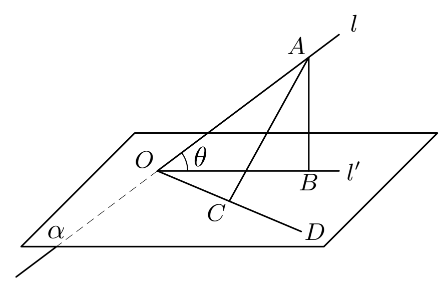


图 1.32

如图 1.32，l 是平面 α 的斜线，A 是 l 上任意一点，AB 是平面 α 的垂线，B 是垂足，所以直线 OB 是斜线 l 的射影，$\angle\theta$ 是斜线 l 与平面 α 所成的角．设 OD 是平面 α 内与 OB 不同的任意一条直线，AC 垂直于 OD，垂足为 C．因为垂线段 AB 小于斜线段 AC，所以在有公共斜边 OA 的直角三角形 OAB、OAC 中，$\sin\theta < \sin AOC$．因此 $\angle\theta < \angle AOC$.

例 1.11　两条斜线段 PA、PB 和平面 α 所成的角相等的充要条件是 $PA = PB$.

已知：PA、PB 是平面 α 的两条斜线段，PO 是垂线段（图 1.33）.

求证：$\angle PAO = \angle PBO \Longleftrightarrow PA = PB$.

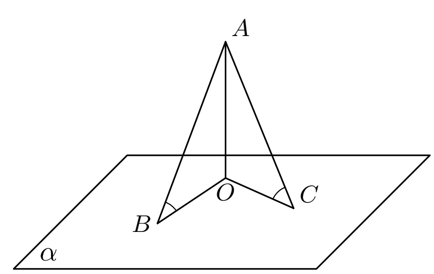


图 1.33

证明:

(1) 先证 $\angle PAO=\angle PBO \Longrightarrow PA=PB$.

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}PO\perp\alpha\\ OA\subset\alpha\\ OB\subset\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}PO\perp OA\\ PO\perp OB\end{array}\right.\\ PO=PO\\ \angle PAO=\angle PBO\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathrm{Rt}\triangle PAO\cong\mathrm{Rt}\triangle PBO\Longrightarrow PA=PB.$$

(2) 再证 $PA=PB\Longrightarrow\angle PAO=\angle PBO$.

类似地，由 $PA=PB$ 可证 $\mathrm{Rt}\triangle PAO\cong\mathrm{Rt}\triangle PBO$，于是得

$$\angle PAO=\angle PBO.$$

$\therefore\quad \angle PAO=\angle PBO\Longleftrightarrow PA=PB.$

练习十

1. 将本节的定理中的 (1)、(2) 改为用充要条件来叙述.
2. 已知斜线段的长是它在平面 α 上射影的 2 倍，求斜线和平面 α 所成的角.
3. 两条直线和一个平面所成的角相等，它们平行吗?

1.3.5 三垂线定理

定理 三垂线定理

在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直.

已知：PA、PO 分别是平面 α 的垂线、斜线，AO 是 PO 在平面 α 上的射影. $a\subset\alpha$，$a\perp AO$（图 1.34）.

求证：$a\perp PO$.

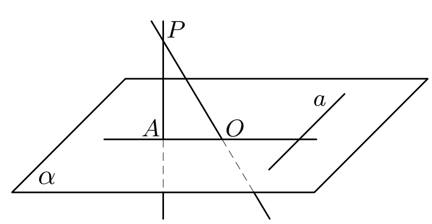


图 1.34

证明:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}PA\perp\alpha\\ a\subset\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow PA\perp a\\ AO\perp a\end{array}\right\}\Longrightarrow a\perp \text{平面 } PAO \quad\left.\begin{array}{r}\\ \\ PO\subset\text{平面 } PAO\end{array}\right\}\Longrightarrow a\perp PO.$$

三垂线定理实质上是平面的一条斜线和平面内的一条直线垂直的判定定理. 这两条直线可以是相交直线，也可以是异面直线.

类似地可以证明:

定理 三垂线定理的逆定理

在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直.

三垂线定理及其逆定理，可以改写成：平面内的一条直线和这个平面的一条斜线垂直的充要条件是它和斜线在平面上的射影垂直.

例 1.12 如果一个角所在平面外一点到角的两边距离相等，那么这一点在平面上的射影在这个角的平分线上.

已知: $\angle BAC$ 在平面 α 内, 点 $P\notin\alpha$, $PE\perp AB$，$PF\perp AC$，$PO\perp\alpha$，垂足分别是 E、F、O，$PE=PF$（图 1.35）.

求证：$\angle BAO=\angle CAO$.

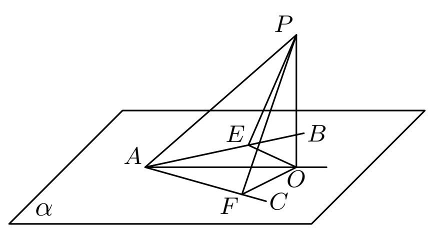


图 1.35

证明:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}PE=PF\\ PO\perp\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow OE=OF\\ \left.\begin{array}{r}PO\perp\alpha\\ PE\perp AB\\ PF\perp AC\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}OE\perp AB\\ OF\perp AC\end{array}\right.\end{array}\right\}\Longrightarrow\angle BAO=\angle CAO.$$

例 1.13 道旁有一条河，彼岸有电塔 AB，高 15 m．只有测角器和皮尺作测量工具，能否求出电塔顶与道路的距离？

解： 如图 1.36，在道边取一点 C，使 BC 与道边所成的水平角等于 90°．再在道边取一点 D，使水平角 CDB 等于 45°．测得 C、D 的距离等于 20 m．

$\because$ BC 是 AC 的射影，

且 $CD \perp BC$，

$\therefore$ $CD \perp AC$.

因此斜线 AC 的长度就是电塔顶与道路的距离．

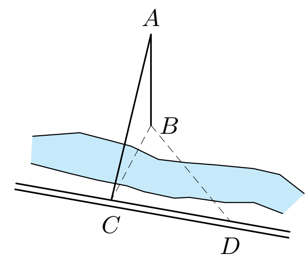


图 1.36

$\because$ $\angle CDB = 45°$，$CD \perp BC$，$CD = 20\,\text{m}$，

$\therefore$ $BC = 20\,\text{m}$．由直角三角形 ABC：

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \quad AC = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25\,(\text{m})$$

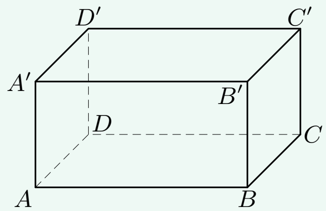
答：电塔顶与道路的距离是 25 m．

练习十一

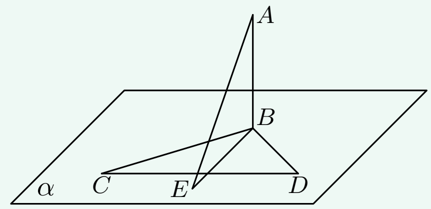
1. 已知：点 O 是 $\triangle ABC$ 的垂心，$OP \perp$ 平面 ABC．求证：$PA \perp BC$.
2. 在图 1.32 中，如果 $\theta = 45°$，$\angle BOC = 45°$．求 $\angle AOC$．并验证 $\angle AOC > \angle\theta$.

习题四

1. 求证：和三角形两边同时垂直的直线，也和第三边垂直．
2. 求证：如果一条直线平行于一个平面，那么这个平面的任何垂线都和这条直线垂直．
3. 直角三角形 ABC 在平面 α 内，D 是斜边 AB 的中点．$AC = 6\,\text{cm}$，$BC = 8\,\text{cm}$，$EC \perp \alpha$，$EC = 12\,\text{cm}$．求 EA、EB、ED 的长．
4. 如图，钳工检查长方块工件的棱 BB' 是否和底面 $A'C'$ 垂直，只要检查 $\angle BB'A'$ 和 $\angle BB'C'$ 是不是直角就可以了，为什么？
5. 如图，$AB = 5\,\text{cm}$，$BC \perp AB$，$BD \perp AB$，在 BC、BD 所在的平面 α 内有一点 E，$BE = 7\,\text{cm}$.
   (1) EB 和 AB，CD 和 AB 成多少度角？
   (2) AE 的长是多少？

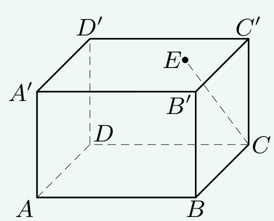


（第 4 题图）



（第 5 题图）

6. 证明：斜线上的所有的点在平面上的射影，必在同一条直线上.
7. 有一旗竿高 8 m，它的顶点挂一条长 10 m 的绳子，拉紧绳子并把它的下端放在地面上两点（和旗竿脚不在同一直线上）. 如果这两点都和旗竿脚距离 6 m，那么旗竿就和地面垂直，为什么？
8. 在一个工件上同时钻很多孔时，常用多头钻，多头钻杆都是互相平行的. 在工作时，只要调整工件表面和一个钻杆垂直，工件表面就和其他钻杆都垂直，为什么？
9. 已知：$\alpha \cap \beta = CD$，$EA \perp \alpha$，$EB \perp \beta$. 求证：$CD \perp AB$.
10. 求证：两条平行线和同一个平面所成的角相等.
11. 用反证法证明：
    (1) 过一点和一个平面垂直的直线只有一条；
    (2) 过一点和一条直线垂直的平面只有一个.
12. 经过一个角的顶点引这个角所在平面的斜线. 如果斜线和这个角两边的夹角相等，那么斜线在平面上的射影是这个角的平分线所在的直线.
13. 从平面外一点 D 向平面引垂线段 DA 及斜线段 DB、DC. 已知：$DA = a$，$\angle BDA = \angle CDA = 60°$，$\angle BDC = 90°$. 求 BC 的长.
14. 有一方木料如图，上底面上有一点 E，要经过点 E 在上底面上画一条直线和 C、E 的连线垂直，应怎样画？



（第 14 题图）

15. 平面 α 内有一个正六边形，它的中心是 O，边长是 2 cm，$OH \perp \alpha$，$OH = 4$ cm. 求点 H 到这个正六边形顶点和边的距离.

第四节 空间两个平面

1.4.1 两个平面的位置关系

图 1.37 是一座高层建筑，它的正面和背面无论怎样延展都不会相交，也就是，它的正面和背面没有公共点；它的正面和侧面则有一条公共直线. 这些面的位置关系，反映出两个不重合的平面的不同位置关系.

图 1.37

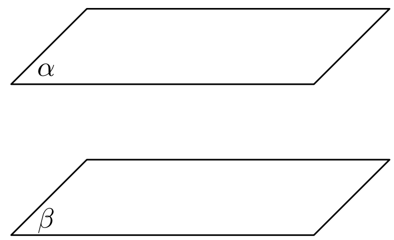


图 1.38

如果两个平面没有公共点，我们说这**两个平面互相平行**.

两个平面的位置关系只有：

两平面平行 没有公共点；

两平面相交 有一条公共直线.

画两个互相平行的平面时，要注意使表示平面的两个平行四边形的对应边平行（图 1.38）.

平面 α 与 β 平行，记作 $\alpha \parallel \beta$.

练习十二

1. 举出两个平面平行和相交的一些实例.
2. 画两个平行平面和分别在这两个平面内的两条平行直线，再画一个经过这两条平行直线的平面.

1.4.2 两个平面平行的判定和性质

判定两个平面平行，除根据定义外，有下面的定理：

定理 两个平面平行的判定定理

如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

已知：在平面 β 内，有两条相交直线 a、b 和平面 α 平行（图 1.39）．求证：$\beta \parallel \alpha$.

证明： 假设 $\alpha \cap \beta = c$.

$\because \quad a \parallel \alpha$，$a \subset \beta$，

$\therefore \quad a \parallel c$.

同理 $b \parallel c$.

$\therefore \quad a \parallel b$.

这与题设 a 与 b 是相交直线矛盾，

$\therefore \quad \alpha \parallel \beta$.

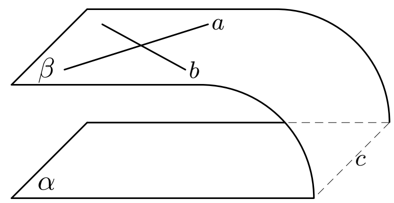


图 1.39

在判断一个平面是否水平时，把水准器在这个平面上交叉地放两次，如果水准器的气泡都是居中的，就可以判定这个平面和水平面平行，它的根据就是这个判定定理.

例 1.14 垂直于同一条直线的两个平面平行.

已知：$\alpha \perp AA'$，$\beta \perp AA'$（图 1.40）．求证：$\alpha \parallel \beta$.

证明： 设经过直线 AA' 的两个平面 γ、δ 分别与平面 α、β 交于直线 a、a' 和 b、b'.

$\because \quad AA' \perp \alpha$，$AA' \perp \beta$，

$\therefore \quad AA' \perp a$，$AA' \perp a'$.

$\therefore \quad a \parallel a'$.

则 $a' \parallel \alpha$.

同理，$b' \parallel \alpha$.

又 $\because \quad a' \cap b' = A'$，

$\therefore \quad \alpha \parallel \beta$.

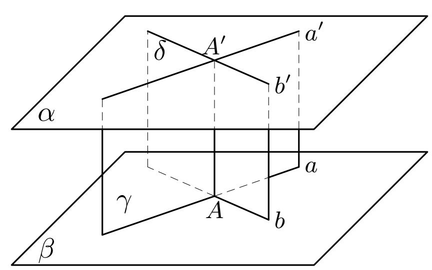


图 1.40

下面研究两个平面平行的性质.

根据两个平面平行及直线和平面平行的定义可知，**两个平面平行，其中一个平面内的直线必平行于另一个平面.**

如果两个平行平面 α、β 与另一个平面 γ 相交，现在我们来研究两条交线 a、b 的位置关系（图 1.41）.

因为 $\alpha /\!/ \beta$，所以平面 α 与 β 没有公共点．因而交线 a、b 也没有公共点．又因为直线 a、b 都在平面 γ 内，所以 $a /\!/ b$.

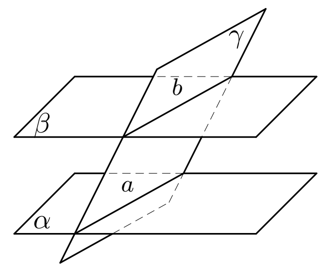


图 1.41

由此我们得到下面的定理:

定理 两个平面平行的性质定理

如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行.

例 1.15 一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面.

已知: $\alpha /\!/ \beta$，$l \perp \alpha$，$l \cap \alpha = A$（图 1.42）．求证: $l \perp \beta$.

证明: 在平面 β 内任取一条直线 b，平面 γ 是经过点 A 与直线 b 的平面．设 $\gamma \cap \alpha = a$.

$$\left.\begin{aligned}\left.\begin{aligned}\alpha /\!/ \beta\\ \alpha\cap\gamma=a\\ \beta\cap\gamma=b\end{aligned}\right\}\Longrightarrow a /\!/ b\\ \left.\begin{aligned}a\subset\alpha\\ l\perp\alpha\end{aligned}\right\}\Longrightarrow l\perp a\end{aligned}\right\}\Longrightarrow l\perp b$$

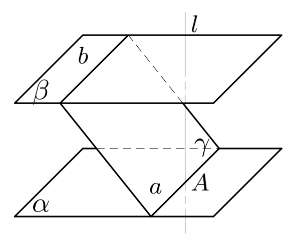


图 1.42

因为直线 b 是平面 β 内的任意一条直线，所以 $l \perp \beta$.

和两个平行平面同时垂直的直线，叫做这**两个平行平面的公垂线**，它夹在这两个平行平面间的部分，叫做这**两个平行平面的公垂线段**.

如图 1.43，$\alpha /\!/ \beta$，如果 AA'、BB' 都是它们的公垂线段，那么 $AA' /\!/ BB'$．根据两个平面平行的性质定理有 $A'B' /\!/ AB$，所以四边形 $ABB'A'$ 是平行四边形，$AA' = BB'$.

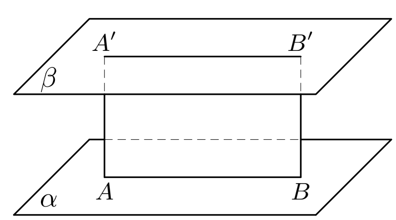


图 1.43

由此我们得到，两个平行平面的公垂线段都相等．我们把公垂线段的长度叫做**两个平行平面的距离**．

练习十三

1. 能不能说分别在两个平行平面内的两条直线都平行．
2. 下面说法是否正确：

   (1) 如果一个平面内的两条直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行；

   (2) 如果一个平面内的任何一条直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行．
3. 求证：夹在两个平行平面间的平行线段相等．

习题五

1. 用刻度曲尺检查长方体形工件的相对两个面是否平行，你能想出几种方法？
2. 三个平面有公共点，说这些平面有公共直线对吗？当这些平面两两相交时，可以得到几条交线．
3. 解答：

   (1) 以已知平面内不在同一条直线上的三点为端点，在平面的同一侧分别引三条平行且相等的线段．求证：过另外三个端点的平面与已知平面平行．

   (2) 在共点 O 的三条不共面直线 a、b、c 上，在点 O 的两侧分别取点 A 和 A'、B 和 B'、C 和 C'，且 $AO = A'O$、$BO = B'O$、$CO = C'O$．求证：平面 $ABC \parallel$ 平面 $A'B'C'$．
4. 经过平面外一点只有一个平面和已知平面平行．
5. 解答：

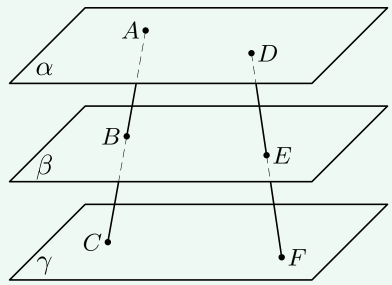
   (1) 如果一条直线和两个平行平面中的一个相交，那么它和另一个也相交；

   (2) 如果一个平面和两个平行平面中的一个相交，那么它和另一个也相交；

   (3) 平行于同一个平面的两个平面平行．
6. 一条直线和两个平行平面相交，求证：它和两个平面所成的角相等．
7. 两个平行平面的距离等于 $12\,\text{cm}$，一条直线和它们相交成 60° 角，求这条直线上夹在这两个平面间的线段的长．
8. a 和 b 是两条异面直线．求证：过 a 且平行于 b 的平面必平行于过 b 且平行于 a 的平面．

9. 如图，直线 AC、DF 被三个平行平面 α、β、γ 所截．求证：

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$$



（第 9 题图）

10. 过已知平面外一点且平行于该平面的直线，都在过已知点平行于该平面的平面内．

1.4.3　二面角

修筑水坝时，为了使水坝坚固耐久，必须使水坝面和水平面成适当的角度；发射人造地球卫星时，也要根据需要，使卫星的轨道平面和地球赤道平面成一定的角度（图 1.44）．下面，我们来研究两个平面所成的角．

一个平面内的一条直线，把这个平面分成两部分，其中的每一部分都叫做**半平面**．从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做**二面角**（图 1.45a）．这条直线叫做**二面角的棱**．这两个半平面叫做**二面角的面**．

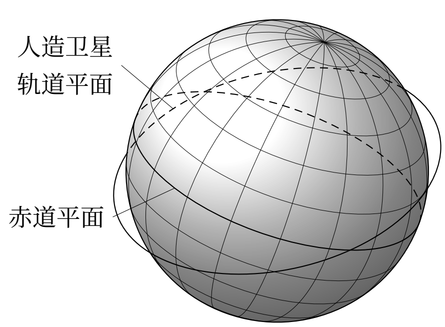
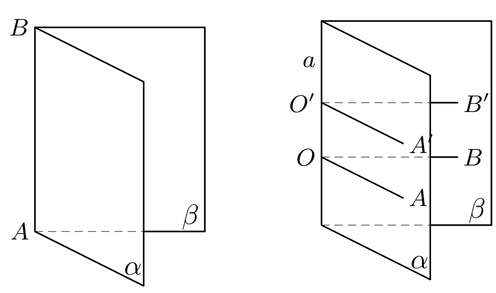


图 1.44



(a)　(b)

图 1.45

棱为 AB、面为 α、β 的二面角，记作二面角 α-AB-β，如果棱用 a 表示，则记作二面角 α-a-β.

如图 1.45b，在二面角 α-a-β 的棱 a 上任取一点 O，在半平面 α 和 β 内，从点 O 分别作垂直于棱 a 的射线 OA、OB，射线 OA 和 OB 组成 $\angle AOB$．在棱 a 上另取任意一点 O'，按同样方法作 $\angle A'O'B'$．因为 OA 和 $O'A'$、OB 和 $O'B'$ 都垂直于棱 a，所以 $\angle AOB = \angle A'O'B'$．可见，$\angle AOB$ 的大小与点 O 在棱上的位置无关.

以二面角的棱上任意一点为端点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做**二面角的平面角**.

二面角的大小，可以用它的平面角来度量，二面角的平面角是几度，就说这个二面角是几度.

平面角是直角的二面角叫做**直二面角**.

木工用活动角尺测量工件的两个面所成的角时，实际上就是测量这两个面所成二面角的平面角（图 1.46）．我国发射的第一颗人造地球卫星的倾角是 68.5°，就是说卫星轨道平面与地球赤道平面所成的二面角的平面角是 68.5°.

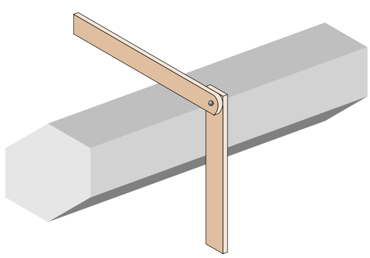


图 1.46

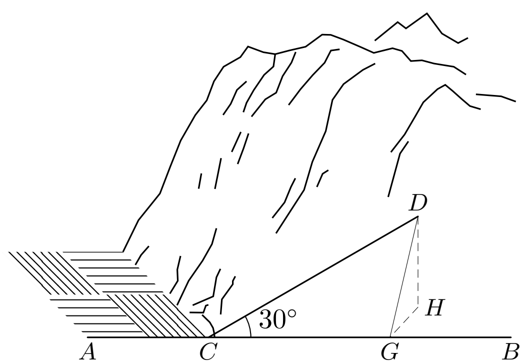


图 1.47

例 1.16　如图 1.47，山坡的倾斜度（坡面与水平面所成二面角的度数）是 60°，山坡上有一条直道 CD，它和坡脚的水平线 AB 的夹角是 30°，沿这条路上山，行走 $100\,\mathrm{m}$ 后升高多少米?

解：已知 $CD = 100\,\mathrm{m}$，设 DH 垂直于过 BC 的水平平面，垂足为 H，线段 DH

的长度就是所求的高度，在平面 DBC 内，过点 D 作 $DG \perp BC$，垂足是 G，连结 GH.

$\because \quad DH \perp$ 平面 BCH，$DG \perp BC$，

$\therefore \quad GH \perp BC$.

因此，$\angle DGH$ 就是坡面 DGC 和水平平面 BCH 所成的二面角的平面角，$\angle DGH = 60°$. 由此得

$$\begin{aligned} DH &= DG \sin 60° = CD \sin 30° \sin 60 \\ &= 100 \sin 30° \sin 60° = 25\sqrt{3} \\ &\approx 43.3\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

答：沿直道前进 100 m，升高约 43.3 m.

练习十四

1. 拿一张正三角形的纸片 ABC，以它的高 AD 为折痕，折成一个二面角，指出这个二面角的面、棱、平面角.
2. 一个平面垂直于二面角的棱，它和二面角的两个面的交线所成的角就是二面角的平面角. 为什么?
3. 教室相邻两面墙和天花板两两所成的二面角各有多少度?
4. 在 30° 二面角的一个面内有一个点，它到另一个面的距离是 10 cm，求它到棱的距离.

1.4.4 两个平面垂直的判定和性质

两个平面相交，如果所成的二面角是直二面角，就说这**两个平面互相垂直**.

两个互相垂直的平面，画成如图 1.48 那样. 把直立平面的竖边化成和水平平面的横边垂直. 平面 α 和 β 垂直，记作 $\alpha \perp \beta$.

判定两个平面垂直，有下面的定理:

定理 两个平面垂直的判定定理

如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

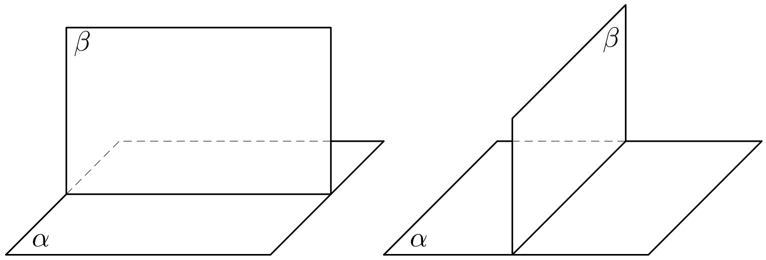


图 1.48

已知：$AB \perp \beta$，$AB \cap \beta = B$，$AB \subset \alpha$（图 1.49）.

求证：$\alpha \perp \beta$.

证明： 设 $\alpha \cap \beta = CD$，则 $B \in CD$.

∵　$AB \perp \beta$，$CD \subset \beta$，

∴　$AB \perp CD$.

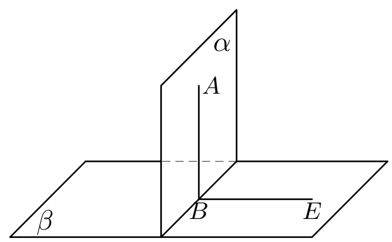


图 1.49

在平面 β 内过点 B 作直线 $BE \perp CD$．则 $\angle ABE$ 是二面角 α-CD-β 的平面角，又 $AB \perp BE$．即，二面角 α-CD-β 是直二面角.

∴　$\alpha \perp \beta$.

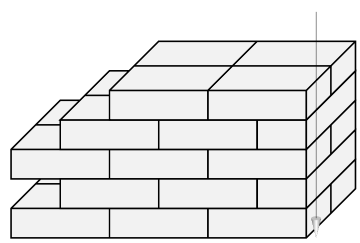


图 1.50

建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线来检查所砌的墙面是否和水平面垂直（图 1.50）．实际上，就是依据这个定理.

下面我们研究两个平面垂直的性质.

设平面 α 和 β 垂直，它们交于直线 CD，平面 α 内的直线 AB 垂直于 CD（图 1.49）．我们看 AB 是否垂直于平面 β.

在平面 β 上引直线 $BE \perp CD$．则 $\angle ABE$ 是二面角 α-CD-β 的平面角.

∵　$\alpha \perp \beta$，

∴　$AB \perp BE$.

又 ∵　$AB \perp CD$，

∴　$AB \perp \beta$.

由此我们得到下面的定理：

定理 两个平面垂直的性质定理

如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.

例 1.17 如果两个平面互相垂直，那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线，在第一个平面内.

已知：$\alpha \perp \beta$，$P \in \alpha$，$P \in a$，$a \perp \beta$（图 1.51）．求证：$a \subset \alpha$.

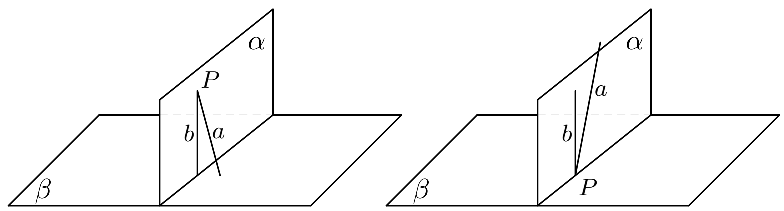


图 1.51

证明： 设 $\alpha \cap \beta = c$．过点 P 在平面 α 内作直线 $b \perp c$，根据上面的定理有 $b \perp \beta$.

因为经过一点只能有一条直线与平面 β 垂直，所以直线 a 应与直线 b 重合.

即 $a \subset \alpha$.

例 1.18 已知两条异面直线 a、b 所成的角为 θ，它们的公垂线段 AA' 的长度为 d. 在直线 a、b 上分别取点 E、F，设 $A'E = m$，$AF = n$，求 EF.

解： 设经过 b 与 a 平行的平面为 α，经过 a 和 AA' 的平面为 β，$\alpha \cap \beta = c$，则 $c \parallel a$．因而 b、c 所成的角等于 θ，且 $AA' \perp c$（图 1.52）.

又 $\because$ $AA' \perp b$，$\therefore$ $AA' \perp \alpha$.

根据两个平面垂直的判定定理，$\beta \perp \alpha$. 在平面 β 内作 $EG \perp c$，则 $EG = AA'$．并且根据两个平面垂直的性质定理，$EG \perp \alpha$．连结 FG，则 $EG \perp FG$．在直角三角形 FEG 中，

$$EF^2 = EG^2 + FG^2.$$

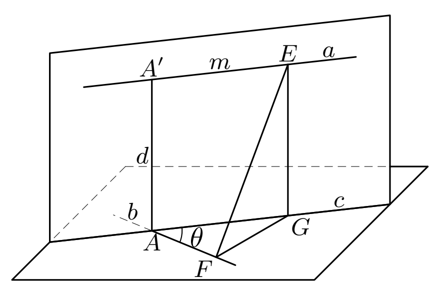


图 1.52

$\because\quad AG = m,$

$\therefore\quad$ 在 $\triangle AFG$ 中,

$$FG^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta.$$

又 $\because\quad EG^2 = d^2,$

$\therefore\quad EF^2 = d^2 + m^2 + n^2 - 2mn\cos\theta.$

如果点 F（或 E）在点 A（或 A'）的另一侧，则

$$EF^2 = d^2 + m^2 + n^2 + 2mn\cos\theta.$$

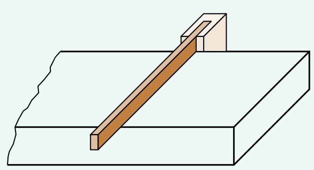
因此，$EF = \sqrt{d^2 + m^2 + n^2 \pm 2mn\cos\theta}.$

在上例中，我们注意到，$AA' = EG$．它们都是平面 α 的垂线，而 EF 是斜线，$AA' < EF$．所以，两条异面直线的距离，是分别在两条异面直线上的两点间的距离中最小的.

在实际中，两条交叉的高压电线如果放电时，火花正是通过它们的最短距离.

练习十五

1. 画互相垂直的两个平面、两两垂直的三个平面.
2. 如图，检查工件的相邻两个面是否垂直时，只要用曲尺的一边紧靠在工件的一个面上，另一边在工件的另一个面上转动一下，观察尺边是否和这个面密合就可以了．为什么？如果不转动呢？

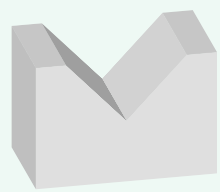


（第 2 题图）

3. 在 60° 二面角的棱上，有两个点 A、B，AC、BD 分别是在这个二面角的两个面内垂直于 AB 的线段．已知：$AB = 4\,\text{cm}$，$AC = 6\,\text{cm}$，$BD = 8\,\text{cm}$．利用异面直线上两点间距离公式求 CD.

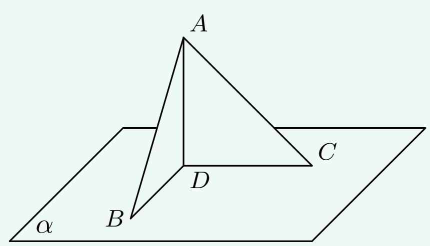
习题六

1. 在一个斜坡上，沿着与坡脚的水平线成 $45°$ 角的直道上坡．如果行走 $40\,\mathrm{m}$ 后升高了 $14.14\,\mathrm{m}$，求坡面的倾斜度．
2. 有两个二面角，它们的面对应平行．求证：它们的棱互相平行．这两个二面角的大小有怎样的关系？
3. 在一个二面角的第一个面内有一点，它到棱的距离等于到另一个面的距离的 2 倍．求二面角的度数．
4. 要铣一个 V 形铁，V 形面成直二面角，上口宽 $40\,\mathrm{mm}$．求切削深度．



（第 4 题图）

5. 在 $45°$ 二面角的一个面内有一点 A，它到另一个面的距离是 a，求点 A 到棱的距离．
6. 自二面角内一点分别向两个面引垂线．求证：它们所成的角与二面角的平面角互补．
7. 求证：在已知二面角内，从二面角的棱出发的一个半平面内的任意一点，到二面角两个面的距离的比是一个常数．
8. 如图，以等腰三角形斜边 BC 上的高 AD 为折痕，使 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 折成相垂直的两个面，求证：$BD \perp CD$，$\angle BAC = 60°$．



（第 8 题图）

9. 求证：如果一个平面与另一个平面的平行线垂直，那么这两个平面互相垂直．
10. 证明：

 (1) 求证：如果三条共点直线两两互相垂直，那么它们中每两条确定的三个平面也两两互相垂直．

(2) 求证：三个两两垂直的平面的交线两两垂直.

11. 求证：如果平面 α 和不在这个平面内的直线 a 都垂直于平面 β，那么 $a \parallel \alpha$.

12. 如果 $\beta \perp \alpha$，$\gamma \perp \alpha$，$\beta \cap \gamma = a$，那么 $a \perp \alpha$.

13. 设两条电线所在的直线是异面直线，它们的距离是 $1\,\mathrm{m}$，所成的角是 60°. 这两条电线上各有一点，距离公垂线的垂足都是 $10\,\mathrm{m}$. 求这两点间的距离.

小结

一、　本章的主要内容是有关空间的直线与直线、直线与平面以及平面与平面的位置关系和有关图形的画法. 着重研究的是它们之间的平行与垂直关系.

二、　本章的四个公理是这一章内容的基础. 此外，平面几何里的定义、定理等，对于空间的任何平面内的平面图形仍然适用；但对于非平面图形，则需要经过证明才能应用. 在解决立体几何的问题时，常把它转化为平面几何的问题来解决.

三、　空间两条之间的位置关系由“平行”、“相交”、“异面”三种；空间一条直线和一个平面的位置关系有“直线在平面内”、“平行”、“相交”三种；两个平面的位置关系有“平行”、“相交”两种.

四、　关于空间的直线与直线，直线与平面、平面与平面的平行与垂直关系的性质定理与判定定理是本章的中心问题. 应用这些定理时，要弄清定理的题设和结论. 判定定理的题设是结论成立的充分条件，性质定理的结论是题设成立的必要条件. 学完全章后，判定上述的平行和垂直关系的途径就更为广泛. 例如，也可以用“垂直于同一个平面的两条直线必平行”去判定两条直线平行；用“如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面”去判定一条直线与一个平面垂直.

五、　两条异面直线所成的角、直线与平面所成的角以及二面角都是通过平面几何中的角来定义的，因而，它们都可以看作是平面几何中角的概念在空间的拓广.

两条异面直线所成的角和二面角的定义都以定理“两边分别平行且方向相同的两个角相等”为基础. 而斜线和平面所成的角实际是用这条斜线和平面内的直线所成的角中最小的角来定义的.

两条异面直线的距离、直线和平面间的距离以及两个平行平面间的距离，都分别是它们的两点的距离中最小.

复习参考题一

A 组

1. 下面的说法正确吗？为什么？

   (1) 两条直线确定一个平面；

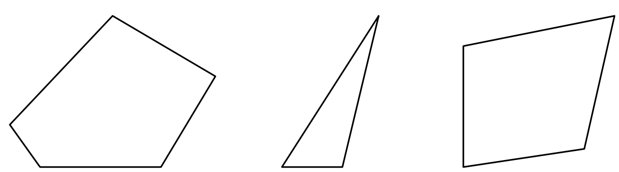
   (2) 如果两个平面有三个公共点，那么这两个平面重合.

2. 解答：

   (1) 求证：两两相交且不共点的四条直线共面；

   (2) 已知四个点不共面，证明它们中任何三点都不在同一条直线上，逆命题正确吗？

3. 用斜二测画法画出下列水平放置的图形的直观图.



（第 3 题图）

4. 解答：

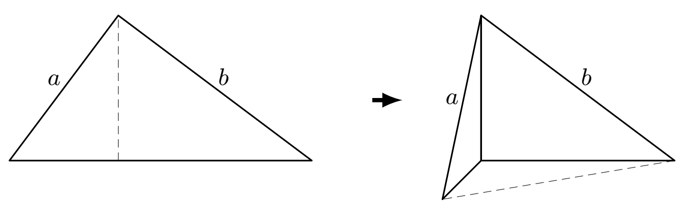
   (1) 已知 a 和 b 是异面直线，a 和 c 是异面直线，那么 b 和 c 也是异面直线吗？

   (2) 在一个平面内，经过一条直线外一点有几条直线和这条直线垂直？在空间呢？

   (3) 在一个平面内，经过一条直线外一点有几条直线和这条直线平行？在空间呢？

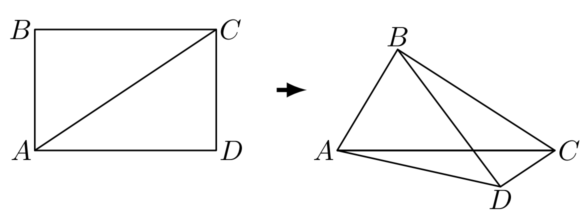
5. 求证：过两条平行线中一条直线的所有平面，与另一条直线平行或经过另一条直线.
6. 如果一条直线上的两点在一个平面的同侧，并且和这个平面的距离相等，那么这条直线和平面平行.
7. 一条直线和一组平行平面中每一个平面所成的角都相等.
8. Rt$\triangle ABC$ 所在平面外一点 P 到直角顶点 C 的距离为 $24\,\mathrm{cm}$，到两直角边的距离为 $6\sqrt{10}\,\mathrm{cm}$．求：

   (1) 点 P 到平面 ABC 的距离；　　(2) PC 与平面所成的角.
9. 正方形的边长为 a，中心是 O，OA 垂直于正方形所在的平面，OA 的长是 b. 求点 A 到正方形各边的距离.
10. 三个平面两两相交，有三条交线．求证：这三条交线交于一点或互相平行.
11. 夹在两个平行平面之间的两条线段 AB、CD 相交于点 S, 已知: $AS = 18.9\,\mathrm{cm}$, $BS = 29.4\,\mathrm{cm}$，$CD = 57.5\,\mathrm{cm}$．求线段 CS、DS 的长.
12. 在直二面角的棱上有两点 A、B，AC 和 BD 各在这个二面角的一个面内，并且都垂直于棱 AB．设 $AB = 8\,\mathrm{cm}$，$AC = 6\,\mathrm{cm}$，$BD = 24\,\mathrm{cm}$．求 CD 的长.
13. 已知一个直角三角形的两直角边长为 a、b，把这个三角形沿斜边上的高折成直二面角．求两直角边夹角的余弦.



（第 13 题图）

14. 把长、宽各为 4、3 的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角．求顶点 B 和 D 的距离.



（第 14 题图）

B 组

15. a、b 是异面直线，平面 α 经过直线 b 与直线 a 平行，平面 β 经过直线 a 与平面 α 相交于直线 c．求证：
   (1) 直线 b、c 所夹的不大于直角的角就是异面直线 a、b 所成的角；
   (2) 如果 $\alpha \perp \beta$，$b \cap c = A$，在平面 β 内，作 $AB \perp c$ 交直线 a 于点 B，那么线段 AB 就是异面直线 a、b 的公垂线，直线 a 与平面 α 的距离就是异面直线 a、b 的距离．
16. 两个不全等的三角形不在同一平面内，它们的边两两对应平行．证明：
   (1) 三条对应顶点的连线交于一点；
   (2) 这两个三角形相似．
17. 直线 a 与 b 不平行，如果 $\alpha \perp a$，$\beta \perp b$，那么平面 α 与 β 必定相交，并且交线必垂直于直线 a、b．
18. 解答：
   (1) 由平面 α 外一点 P 引平面的三条相等的斜线段，斜足分别为 A、B、C，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，求证：$OP \perp \alpha$．
   (2) 平面 ABC 外一点 P 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等，O 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $OP \perp$ 平面ABC．求证：O 是 $\triangle ABC$ 的内心．
19. 夹在互相垂直的两个平面之间长为 $2a$ 的线段，和这两个平面所成的叫分别为 $45°$、$30°$，过这条线段的两个端点分别在这两个平面内作交线的垂线，求两垂足的距离．
20. 平面 α 过 $\triangle ABC$ 的重心 G．求证：在平面 α 同侧的两个顶点到平面 α 的距离的和，等于另一顶点到平面的距离．
21. 已知：平面 α 和空间两点 A、B．在平面 α 内找一点 C，使 $AC + BC$ 最小．

第二章　多面体和旋转体

第一节　多面体

2.1.1　棱柱

1　棱柱的概念和性质

我们常见的一些物体，例如三棱镜、方砖以及螺杆的头部，它们都呈棱柱的形状（图 2.1）.

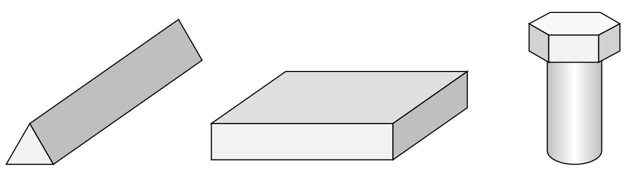


图 2.1

有两个面互相平行，其余各面都是四边形[①]，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做**棱柱**（图 2.2），两个互相平行的面叫做**棱柱的底面**，其余各面叫做**棱柱的侧面**．两个侧面的公共边叫做棱柱的侧棱，侧面与底面的公共顶点叫做棱柱的顶点，不在同一个面上的两个顶点的连线叫做棱柱的对角线，两个底面间的距离叫做棱柱的高．如图 2.2 中的棱柱，多边形 $ABCDE$ 和 $A'B'C'D'E'$ 是底面，四边形 $ABB'A'$、$BCC'B'$ 等是侧面，$A'A$、$B'B$ 等是侧棱，$H'H$ 是高.

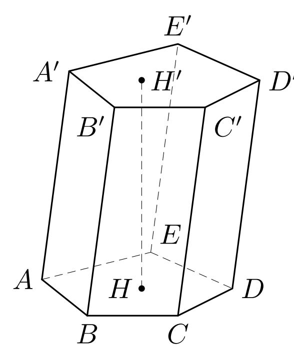
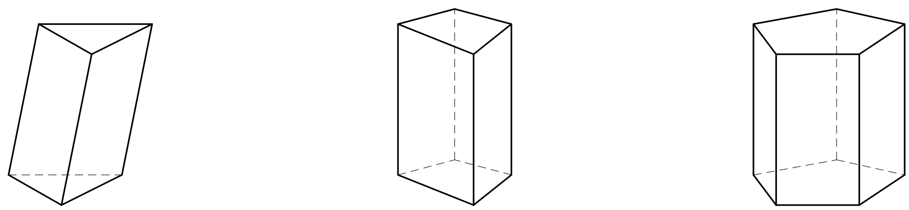


图 2.2

① 本章所说的多边形，一般包括它内部的平面部分.

棱柱用表示底面各顶点的字母来表示, 如图 2.2 中的棱柱, 记作棱柱 $ABCDE$-$A'B'C'D'E'$，或者用表示一条对角线端点的两个字母来表示，例如，棱柱 AC'.

侧棱不垂直于底面的棱柱叫做**斜棱柱**（图 2.3a）；侧棱垂直于底面的棱柱叫做**直棱柱**（图 2.3b）. 底面是正多边形的直棱柱叫做**正棱柱**（图 2.3c）.



(a) (b) (c)

图 2.3

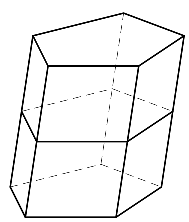
棱柱的底面可以是三角形、四边形、五边形、……，我们把这样的棱柱分别叫做**三棱柱**（图 2.3a）、**四棱柱**（图 2.3b）、**五棱柱**（图 2.3c）、…….

根据棱柱的定义，容易得到棱柱的一些性质:

(1) 侧棱都相等，侧面是平行四边形;

(2) 两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形（图 2.4a）;

(3) 过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形（图 2.4b）.



(a) (b)

图 2.4

练习一

1. 求证：直棱柱的侧棱长与高相等，侧面及经过不相邻的两条侧棱的截面都是矩形.
2. 有一个侧面是矩形的棱柱是不是直棱柱？有两个相邻侧面是矩形的棱柱呢？为什么？

3. 斜棱柱、直棱柱和正棱柱的底面、侧面各有什么特点?

2　长方体

现在研究四棱柱的特殊情形.

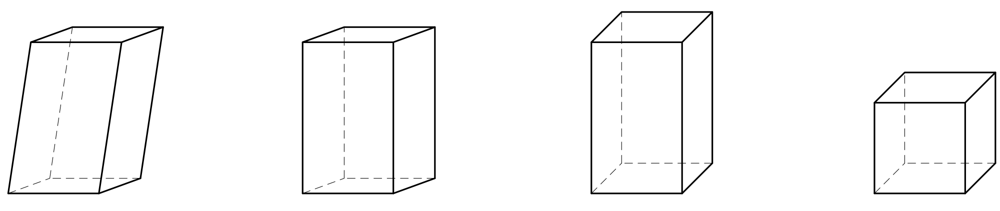


图 2.5

底面是平行四边形的四棱柱叫做**平行六面体**（图 2.5a）. 侧棱与底面垂直的平行六面体叫做**直平行六面体**（图 2.5b）. 底面是矩形的直平行六面体叫做**长方体**（图 2.5c）. 棱长都相等的长方体叫做**正方体**（图 2.5d）.

长方体的对角线有下面的性质:

定理

长方体一条对角线长的平方等于一个定点上三条棱的长的平方和.

已知：长方体 AC' 中，$B'D$ 是一条对角线（图 2.6）.

求证：$B'D^2 = AB^2 + BC^2 + BB'^2$.

证明： 连结 BD.

$$\because \quad B'B \perp BD,$$
$$\therefore \quad B'D^2 = BD^2 + BB'^2.$$
$$又 \ \because \quad BD^2 = AB^2 + AD^2 = AB^2 + BC^2,$$
$$\therefore \quad B'D^2 = AB^2 + BC^2 + BB'^2.$$

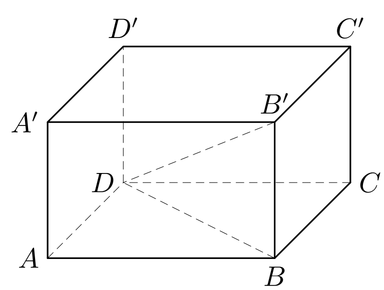


图 2.6

例 2.1 长方体的一条对角线与一个顶点上的三条棱所成的角分别是 α、β、γ. 求证:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

证明: 连结 AB'、CB'、DB', 则 $\triangle B'DA$、$\triangle B'DC$、$\triangle B'DD'$ 都是直角三角形（图 2.7）. 因此

$$\cos\alpha=\frac{DA}{DB'},\ \cos\beta=\frac{DC}{DB'},\ \cos\gamma=\frac{DD'}{DB'}.$$

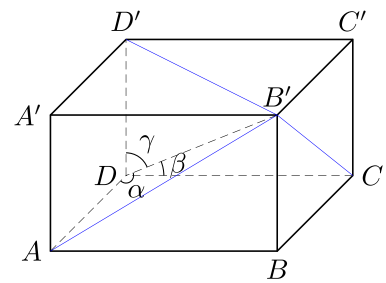


图 2.7

将上面三个等式的两边平方后相加，得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{DA^2+DC^2+DD'^2}{DB'^2}.$$

又 $\because\quad DB'^2=DA^2+DC^2+DD'^2$,

$\therefore\quad \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$

练习二

1. 平行六面体的各个面是什么样的四边形？直平行六面体、长方体、正方体呢?
2. 解答:
   (1) 长方体是直四棱柱，直四棱柱是不是长方体?
   (2) 正方体是正四棱柱，正四棱柱是不是正方体?
3. 四棱柱集合、平行六面体集合、直平行六面体集合、长方体集合、正方体集合之间有怎样的包含关系？用图表示出来.

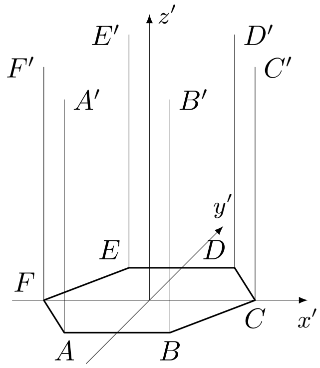
3 直棱柱直观图的画法

前面已经研究过水平放置的平面图形的直观图的画法. 几何体的直观图的画法规则，与平面图形的画法相比，知识多画一个与 x 轴、y 轴都垂直的 z 轴，并且平行于 z 轴的线段的平行性和长度都不变. 在直观图上，平面 $x'O'y'$ 表示水平平面，平面 $y'O'z'$ 和 $z'O'x'$ 表示直立平面.

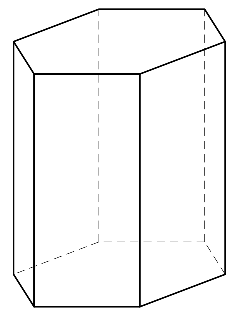
我们以正六棱柱为例，说明直棱柱的直观图的画法.

画法:

(1) 画轴 画 x' 轴、y' 轴、z' 轴，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$（或 135°），$\angle x'O'z'=90^\circ$（图 2.8a）.



(a)



(b)

图 2.8

(2) 画底面 按 x' 轴、y' 轴，画正六边形的直观图 $ABCDEF$.

(3) 画侧棱 过 A、B、C、D、E、F 各点分别作 z' 轴的平行线，并在这些平行线上分别截取 AA'、BB'、CC'、DD'、EE'、FF' 都等于侧棱长.

(4) 成图 顺次连结 A'、B'、C'、D'、E'、F'，并加以整理（去掉辅助线，将被遮挡的部分改为虚线），就得到正六棱柱的直观图（图 2.8b）.

4 直棱柱的侧面积

把棱柱的侧面沿一条侧棱剪开后展在一个平面上，展开图的面积就是棱柱的侧面积.

直棱柱的侧面展开图是矩形（图 2.9），这个矩形的长等于直棱柱底面周长 c，宽等于直棱柱的高 h，由此我们得到下面的定理:

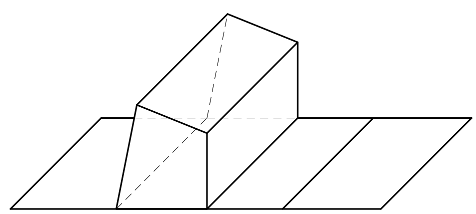


图 2.9

定理

如果直棱柱的底面周长是 c，高是 h，那么它的侧面积是

$$\boxed{S_{\text{直棱柱侧}} = ch.}$$

棱柱的全面积等于侧面积与两底面面积的和.

例 2.2 求证：斜棱柱的侧面积等于它的直截面（垂直于侧棱的截面）的周长与侧棱长的乘积.

已知：如图 2.10，斜棱柱 AC' 的侧棱长是 l，直截面 $HKLMN$ 的周长是 c_1.

求证：$S_{\text{斜棱柱侧}} = c_1 l$.

证明： 延长侧棱 AA' 到 H'，使 $A'H' = AH$. 设过 H' 平行于直截面 $HKLMN$ 的平面，与各侧棱的延长线交于 $K'L'M'N'$. 这样，就得到一个以斜棱柱的直截面为底，侧棱长为高的直棱柱 HL'（图 2.10）.

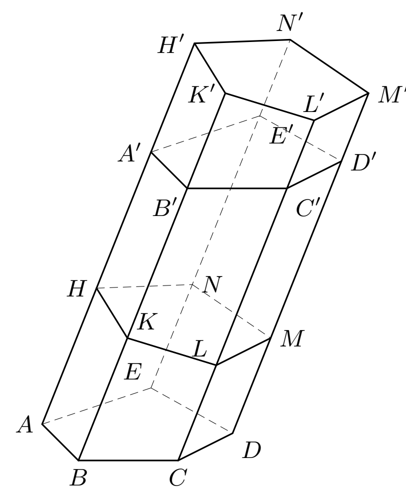


图 2.10

因为底面 $H'L'$ // 底面 HL，它们的公垂线段 $HH' = KK' = LL' = \cdots = NN' = AA' = l$，所以，斜棱柱 AC' 的各侧面的面积与直棱柱 HL' 中对应的侧面面积相等. 因此

$$S_{\text{斜棱柱侧}} = S_{\text{直棱柱侧}} = c_1 \cdot HH'.$$

即 $S_{\text{斜棱柱侧}} = c_1 l$.

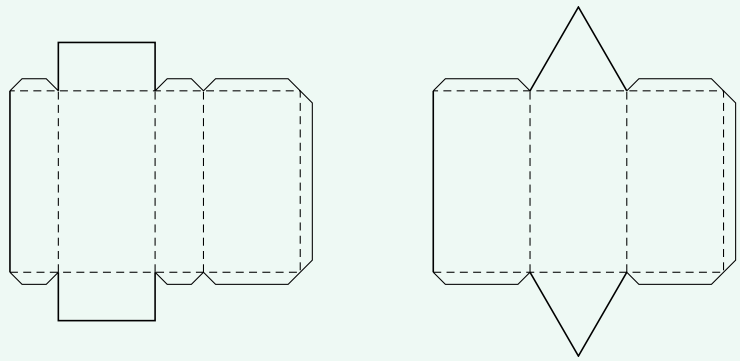
实际上，在本题的证明中，是把斜棱柱 AC' 的直截面下面的一部分，移动一下位置，与另一部分组成直棱柱 HL'.

练习三

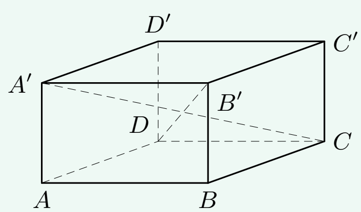
1. 画一个底面边长是 3 cm，高是 4.5 cm 的正三棱柱的直观图（不写画法）.
2. 已知正六棱柱的高为 h，底面边长为 a，求全面积.

习题七

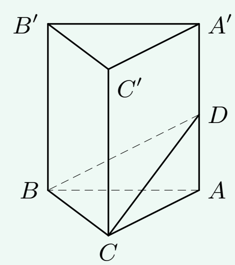
1. 用较厚的纸按照图的样子画好剪下，再把它折起来粘好，做成棱柱的模型（选做其中一个）.
2. 底面是菱形的直棱柱，对角线 $B'D$ 和 $A'C$ 的长分别是 9 cm 和 15 cm，侧棱 AA' 的长是 5 cm. 求它的底面边长.



（第 1 题图）



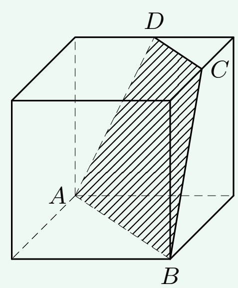
（第 2 题图）



（第 3 题图）

3. 如图，正三棱柱的底面边长是 $4\,\mathrm{cm}$，过 BC 的一个平面与底面成 30° 的二面角，交侧棱 AA' 于 D．求 AD 的长和截面 $\triangle BCD$ 的面积.
4. 求证：
   (1) 平行六面体的各对角线交于一点，并且在这一点互相平分；
   (2) 对角线相等的平行六面体是长方体.
5. 有一个长方体，它的三个面的对角线长分别是 a, b, c．求它的对角线长.
6. 长方体的一条对角线与各个面所成的角分别是 α, β, γ．求证：$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.
7. 已知一个正五棱柱的高是 $4\,\mathrm{cm}$，底面外接圆的半径是 $2.5\,\mathrm{cm}$，画它的直观图（不写画法）.
8. 求证：直三棱柱的两个侧面的面积的和，大于第三个侧面的面积.
9. 直平行六面体的底面是菱形，过不相邻的两对侧棱的截面的面积是 Q_1 和 Q_2，求它的侧面积.
10. 一个长方体的三条棱长的比是 $1:2:3$，全面积是 $88\,\mathrm{cm}^2$．求这三条棱的长.

11. 除锈滚筒是正六棱柱形（两端是封闭的），筒长 $1.6\,\mathrm{m}$，底面外接圆半径是 $0.46\,\mathrm{m}$，制造这个滚筒需要多少平方米铁板？（精确到 $0.1\,\mathrm{m}^2$）
12. 在正三棱柱的一条侧棱上，取距离等于 a 的两点，过这两点作两个与所有的侧棱都相交的互相平行的截面，如果正三棱柱的底面边长为 b，求棱柱的侧面夹在这两个平行截面间的部分的面积.
13. 如图，正方体的棱长为 a，C, D 分别是两条棱的中点.
    (1) 试证 A, B, C, D 在同一平面内；
    (2) 求截面 $ABCD$ 的面积.



（第 13 题图）

2.1.2 棱锥

1 棱锥的概念和性质

帆布帐篷、金字塔（图 2.11）等物体，都给我们以棱锥的形象.

图 2.11

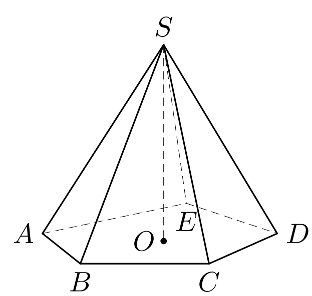


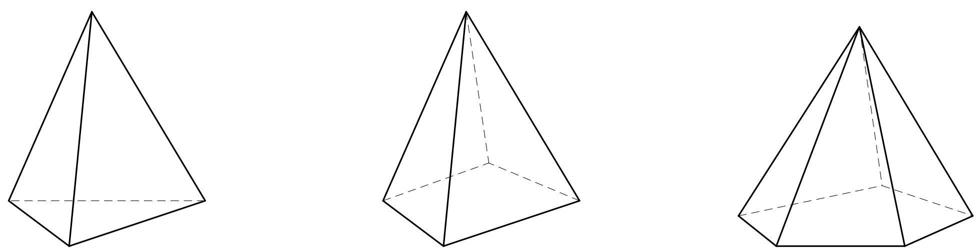
图 2.12

有一个面是多边形，其余各面是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的

几何体叫做**棱锥**（图 2.12），这个多边形叫做**棱锥的底面**，其余各面叫做**棱锥的侧面**．相邻侧面的公共边叫做**棱锥的侧棱**，各侧面的公共顶点叫做**棱锥的顶点**，顶点到底面的距离叫做**棱锥的高**．如图 2.12 中的棱锥，多边形 $ABCDE$ 是底面，三角形 SAB、SBC 等是侧面，SA、SB 等是侧棱，S 是顶点，SO 是高．

棱锥用表示顶点和底面各顶点，或者底面一条对角线端点的字母来表示．例如棱锥 $S\text{-}ABCDE$，或者棱锥 $S\text{-}AC$．

棱锥的底面可以是三角形、四边形、五边形、……，因此我们把这样的棱锥分别叫做三棱锥（图 2.13a）、四棱锥（图 2.13b）、五棱锥（图 2.13c）、……．



(a)　(b)　(c)

图 2.13

如果一个棱锥的底面是正多边形，并且顶点在底面的射影是底面中心，这样的棱锥叫做**正棱锥**．

正棱锥有下面一些性质：

(1) 各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰三角形．各等腰三角形底边上的高相等，它叫做**正棱锥的斜高**；

(2) 棱锥的高、斜高和斜高在底面上的射影组成一个直角三角形；棱锥的高、侧棱和侧棱在底面上的射影也组成一个直角三角形（图 2.14）．

关于一般棱锥，有下面一个重要的性质：

定理

如果棱锥被平行于底面的平面所截，那么截面和底面相似，并且它们面积的比等于截得的棱锥的高和已知棱锥的高的平方比．

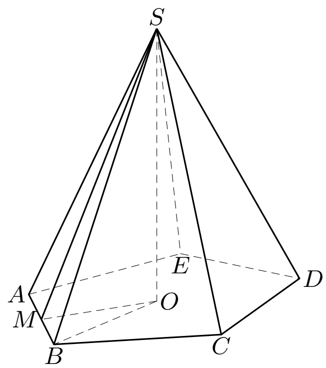


图 2.14

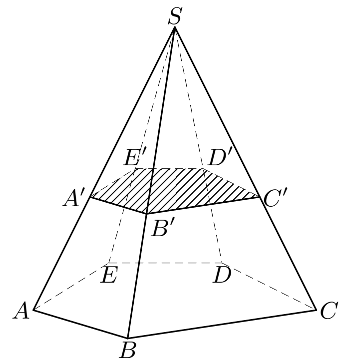


图 2.15

已知：如图 2.15，在棱锥 S-AC 中，SH 是高，截面 $A'B'C'D'E'$ 平行于底面，并与 SH 交于 H'.

求证：截面 $A'B'C'D'E' \backsim$ 底面 $ABCDE$，并且

$$\frac{S_{A'B'C'D'E'}}{S_{ABCDE}} = \frac{SH'^2}{SH^2}$$

证明: 因为截面平行于底面，所以 $A'B' \parallel AB$，$B'C' \parallel BC$，$C'D' \parallel CD$，…….因而 $\angle A'B'C' = \angle ABC$，$\angle B'C'D' = \angle BCD$，……. 又因为过 SA、SH 的平面与截面和底面分别交于 $A'H'$ 和 AH，

$\therefore \quad A'H' \parallel AH$，得

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SH'}{SH}.$$

同理

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{SH'}{SH}, \cdots.$$

$\therefore \quad \dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = \cdots = \dfrac{SH'}{SH}$

因此，截面 $A'B'C'D'E' \backsim$ 底面 $ABCDE$.

$$\therefore \quad \frac{S_{A'B'C'D'E'}}{S_{ABCDE}} = \frac{A'B'^2}{AB^2} = \frac{SH'^2}{SH^2}$$

例 2.3 如图 2.16，已知正三棱锥 $S\text{-}ABC$ 的高 $SO=h$，斜高 $SM=l$. 求经过 SO 的中点平行于底面的截面[①] $\triangle A'B'C'$ 的面积.

解： 连结 OM、OA. 在 $\mathrm{Rt}\triangle SOM$ 中，$OM=\sqrt{l^2-h^2}$.

因为棱锥 $S\text{-}ABC$ 是正棱锥，所以点 O 是正三角形 ABC 的中心.

$$\begin{aligned}AB&=2AM=2\cdot OM\cdot\tan 60^\circ\\&=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{l^2-h^2},\\S_{\triangle ABC}&=\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4\times 3(l^2-h^2)\\&=3\sqrt{3}(l^2-h^2).\end{aligned}$$

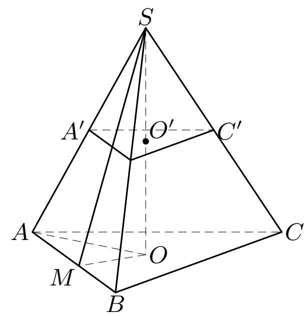


图 2.16

根据一般棱锥截面的性质，有

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{h'^2}{h^2}=\frac{1}{4}$$

$$S_{\triangle A'B'C'}=\frac{3\sqrt{3}}{4}(l^2-h^2).$$

练习四

1. 底面是正多边形的棱锥是正棱锥吗?
2. 求证：正棱锥各侧面与底面所成的二面角都相等.

2　正棱锥的直观图的画法

正棱锥的直观图由底面和顶点所决定. 正棱锥底面的画法与直棱柱的底面画法相同，顶点和底面中心的距离，等于它的高. 下面以正五棱锥为例，说明正棱锥的直观图的画法.

例 2.4 画一个底面边长为 5 cm，高为 11.5 cm 的正五棱锥的直观图. 比例尺是 $\frac{1}{5}$.

① 象这样过高的中点平行于底面的截面叫做中截面.

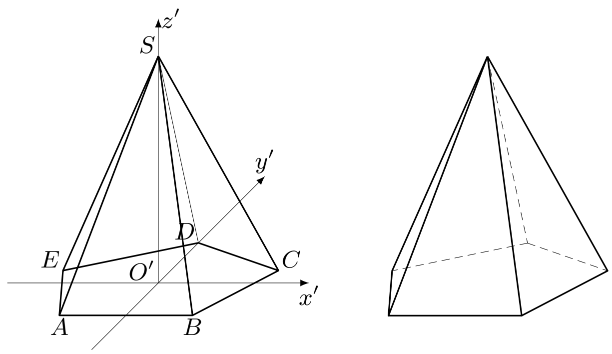
画法:

(1) 画轴　画 x' 轴、y' 轴、z' 轴, 使 $\angle x'O'y' = 45°$, $\angle x'O'z' = 95°$ (图 2.17a).

(2) 画底面　按 x' 轴、y' 轴画正五边形的直观图 $ABCDE$, 按比例尺, 取边长等于 $5 \div 5 = 1\,(\mathrm{cm})$, 并使正五边形的中心对应于点 O'.

(3) 画高线　在 z' 轴上, 取 $O'S = 11.5 \div 5 = 2.3\,(\mathrm{cm})$.

(4) 成图　连结 SA、SB、SC、SD、SE, 并加以整理, 就得到所要画的正五棱锥的直观图（图 2.17b）.



(a)　　(b)

图 2.17

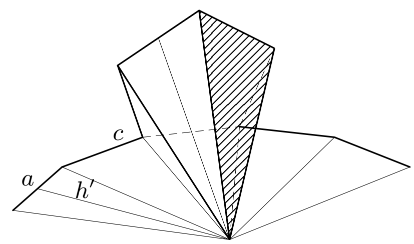


图 2.18

3　正棱锥的侧面积

棱锥的侧面展开图是由各个侧面组成的, 展开图的面积就是棱锥的侧面积. 设正棱锥的底面边长为 a, 周长为 c, 斜高为 h', 则展开图（图 2.18）的面积等于 $n \cdot \dfrac{1}{2}ah' = \dfrac{1}{2}ch'$. 由此得到下面的定理:

定理

如果正棱锥的底面周长是 c, 斜高是 h', 那么它的侧面积是

$$\boxed{S_{\text{正棱锥侧}} = \frac{1}{2}ch'.}$$

棱锥的全面积等于侧面积与底面积的和.

例 2.5 设计一个正四棱锥形冷水塔塔顶，高是 0.85 m，底的边长是 1.5 m，制造这种塔顶需要多少平方米铁板（保留两位有效数字）？

解： 如图 2.19，S 表示塔顶的顶点，O 表示底的中心，则 SO 是高，设 SE 是斜高.

在直角三角形 SOE 中，根据勾股定理得

$$\begin{aligned} SE &= \sqrt{\left(\frac{1.5}{2}\right)^2 + 0.85^2} \\ &\approx 1.13\,\mathrm{m}. \\ \therefore \quad S_{\text{正棱锥侧}} &= \frac{1}{2}ch' \\ &= \frac{1}{2}(1.5 \times 4) \times 1.13 \\ &\approx 3.4\,\mathrm{m}^2. \end{aligned}$$

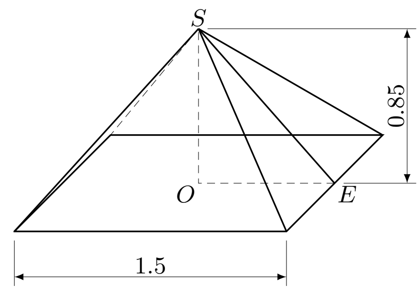


图 2.19

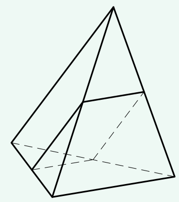
答：制造这种塔顶需要铁板约 $3.4\,\mathrm{m}^2$.

练习五

1. 已知正六棱锥的底面边长为 6 cm，高为 15 cm．画它的直观图，比例尺为 $\frac{1}{3}$.
2. 一个正三棱锥的侧面都是直角三角形，底面边长是 a．求它的全面积.

习题八

1. 用厚纸做一个正三棱锥或正四棱锥的模型.
2. 已知底面边长是 a，高是 h．求下列棱锥的侧棱长和斜高：
   (1)　正三棱锥；　　(2)　正四棱锥；　　(3)　正六棱锥.
3. 已知正六棱锥的底面边长是 4 cm，侧棱长是 8 cm．求它的侧面和底面所成的二面角.
4. 已知正三棱锥的底面边长为 a，求过各侧棱中点的截面面积.
5. 求证：平行于三棱锥的两条相对棱的平面截三棱锥所得的截面是平行四边形.



（第 5 题图）

6. 棱锥的底面积是 $150\,\mathrm{cm}^2$，平行于底面的一个截面面积是 $54\,\mathrm{cm}^2$，底面和这个截面的距离是 $12\,\mathrm{cm}$，求棱锥的高.
7. 画一个底面边长是 $4\,\mathrm{cm}$，高是 $8\,\mathrm{cm}$ 的正六棱锥的直观图（选择适当比例尺）.
8. 正三棱锥的底面边长是 a，高是 $2a$，计算它的全面积.
9. 一座仓库的屋顶呈正四棱锥形，底面的边长 $2.7\,\mathrm{m}$，侧棱长 $2.3\,\mathrm{m}$，如果要在屋顶上铺一层油毡纸，需要油毡纸多少平方米?
10. 要做一个正六棱锥形的铁烟囱帽，底口边长 $40\,\mathrm{cm}$，高是 $50\,\mathrm{cm}$，需要多少平方米铁皮?
11. 一个棱锥所有的侧面与底面所成的二面角都等于 α，那么

$$S_{\text{侧}} = \frac{S_{\text{底}}}{\cos\alpha}.$$

2.1.3 棱台

1 棱台的概念和性质

用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面和截面之间的部分叫做**棱台**. 原棱锥的底面和截面叫做**棱台的下底面**和**上底面**，其他各面叫做**棱台的侧面**. 相邻侧面的公共边叫做**棱台的侧棱**，上、下底面之间的距离叫做**棱台的高**. 如图 2.20 中的棱台，多边形 $A'B'C'D'$ 和 $ABCD$ 是上、下底面，四边形 $ABB'A'$、$BCC'B'$ 等是侧面，AA'、BB' 等是侧棱，OO' 是它的高.

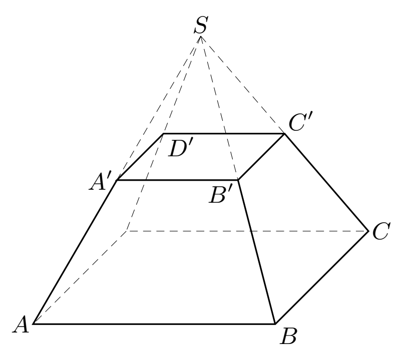


图 2.20

棱台用表示上、下底面各顶点的字母来表示，例如，棱台 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$．或者用它的对角线端点字母表示，如棱台 AC'．

由三棱锥、四棱锥、五棱锥、……截得的棱台，分别叫做**三棱台**、**四棱台**、**五棱台**、…….

由正棱锥截得的棱台叫做**正棱台**.

正棱台有下面性质：

(1) 正棱台的侧棱相等，侧面是全等的等腰梯形．各等腰梯形的高相等，它叫做**正棱台的斜高**；

(2) 正棱台的两底面以及平行于底面的截面是**相似正多边形**；

(3) 正棱台的两底面中心连线、相应的边心距和斜高组成一个直角梯形；两底面中心连线、侧棱和两底面相应的半径也组成一个直角梯形（图 2.21）.

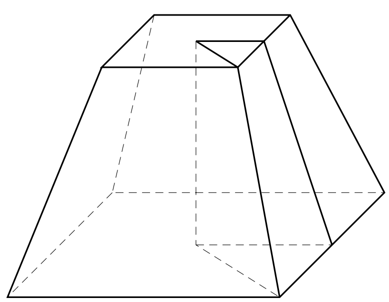


图 2.21

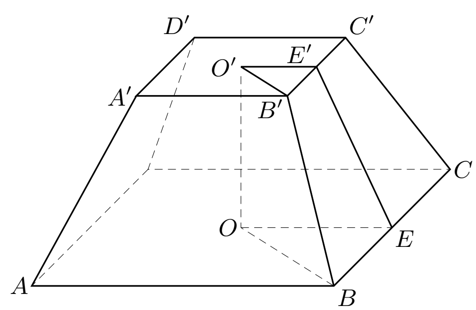


图 2.22

例 2.6 正四棱台 AC' 的高是 $17\,\text{cm}$，两底面的边长分别是 $4\,\text{cm}$ 和 $16\,\text{cm}$．求这个棱台的侧棱的长和斜高（图 2.22）.

解： 解：设棱台两底面的中心分别是 O' 和 O，$B'C'$ 和 BC 的中点分别是 E' 和 E．连结 $O'O$、$E'E$、$O'B'$、OB、$O'E'$、OE，则 $OBB'O'$ 和 $OEE'O'$ 都是直角梯形（图 2.22）.

$$\because \quad A'B' = 4\,\text{cm}, \qquad AB = 16\,\text{cm},$$
$$\therefore \quad O'E' = 2\,\text{cm}, \qquad OE = 8\,\text{cm},$$
$$\therefore \quad O'B' = 2\sqrt{2}\,\text{cm}, \qquad OE = 8\sqrt{2}\,\text{cm},$$

因此 $B'B=\sqrt{17^2+(8\sqrt{2}-2\sqrt{2})^2}=19\,\text{cm}$,

$E'E=\sqrt{17^2+(8-2)^2}=5\sqrt{13}\,\text{cm}$. 即，这个棱台的侧棱长是 $19\,\text{cm}$，斜高是 $5\sqrt{13}\,\text{cm}$.

例 2.7 设棱台的两底面积分别是 S、S'，它的中截面的面积是 S_0. 求证：$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$（图 2.23）.

证明: 因为棱台的中截面与两底面平行，所以多边形 $ABCDE$、$A_0B_0C_0D_0E_0$、$A'B'C'D'E'$ 相似. 因此

$$\frac{S}{S_0}=\frac{AB^2}{A_0B_0^2},\quad \frac{S'}{S_0}=\frac{A'B'^2}{A_0B_0^2},$$

也就是

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_0}}=\frac{AB}{A_0B_0},\quad \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S_0}}=\frac{A'B'}{A_0B_0}.$$

将上面等式两边分别相加，因为 A_0B_0 是梯形 $ABB'A'$ 的中位线，

$$\therefore\quad \frac{\sqrt{S}+\sqrt{S'}}{\sqrt{S_0}}=\frac{AB+A'B'}{A_0B_0}=\frac{2A_0B_0}{A_0B_0}=2.$$

由此得到

$$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}.$$

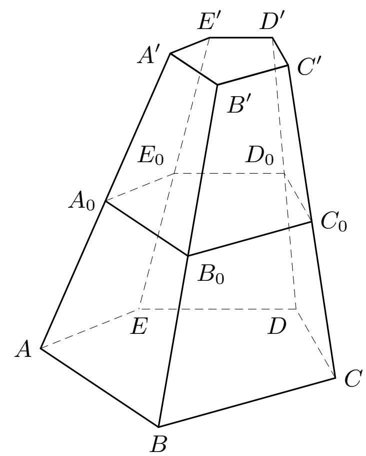
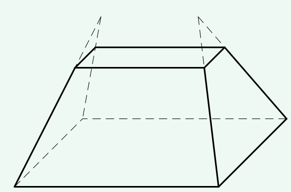


图 2.23

练习六

1. 图中的几何体是不是棱台？为什么？



（第 1 题图）

2. 一个正四棱台上、下底面的边长分别是 a 和 b，高是 h. 求经过相对的两条侧棱的截面面积.

2　正棱台的直观图的画法

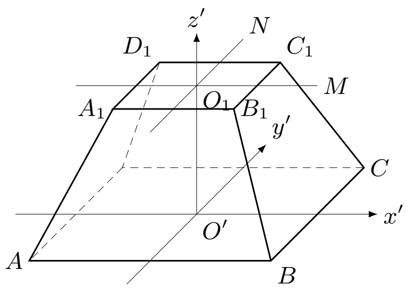
以正四棱台为例，说明正棱台的画法.

画法:

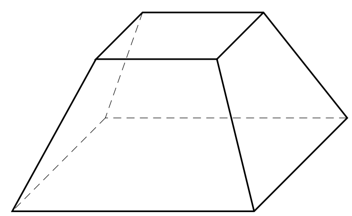
(1) 画轴　画 x' 轴、y' 轴、z' 轴, 使 $\angle x'Oy' = 45°$, $\angle x'O'z' = 90°$（图 2.24a）.

(2) 画底图　以 O' 为中心，按 x' 轴、y' 轴画正四棱台下底面正方形的直观图 $ABCD$. 在 z' 轴上取线段 $O'O_1$ 等于正四棱台的高. 过 O_1 画 O_1M、O_1N 分别平行于 $O'x'$、$O'y'$，再以 O_1 为中心，按 O_1M、O_1N 画正四棱台上底面正方形的直观图 $A_1B_1C_1D_1$.

(3) 成图　连结 AA_1、BB_1、CC_1、DD_1，并加以整理，就得到正四棱台的直观图（图 2.24b）.



(a)



(b)

图 2.24

3　正棱台的侧面积

棱台的侧面展开图是由各个侧面组成的. 展开图的面积就是棱台的侧面积. 正棱台的侧面展开图如图 2.25 所示. 设它的上、下底面边长是 a'、a, 边数是 n, 斜高是 h', 那么它的侧面积是 $n \cdot \dfrac{1}{2}(a+a')h' = \dfrac{1}{2}(na+na')h'$, 由于 na'、na 分别是上、下底面的周长 c'、c, 我们得到下面的定理:

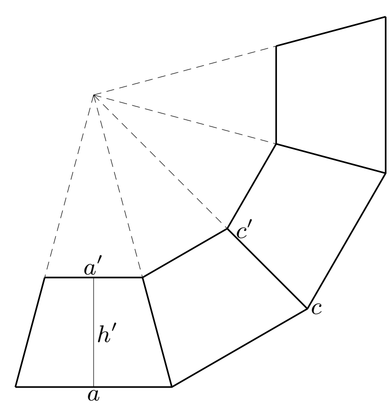


图 2.25

定理

如果正棱台的上、下底面的周长是 c'、c，斜高是 h'，那么它的侧面积是

$$\boxed{S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')h'.}$$

棱台的全面积等于它的侧面积于上、下底面积的和.

例 2.8 粉碎机上的下料斗是正四棱台形（图 2.26），它的两底面边长分别是 80 mm 和 440 mm，高是 200 mm. 计算制造这样一个下料斗所需铁板的面积（保留两位有效数字）.

解： 上底面周长 $c'=4\times 80=320\,\text{mm}$,

下底面周长 $c=4\times 440=1760\,\text{mm}$,

$$\text{斜高 } h'=\sqrt{200^2+\left(\frac{440-80}{2}\right)^2}\approx 269\,\text{mm},$$

$$\therefore\quad S_{\text{正棱台侧}}=\frac{1}{2}(c+c')h'=\frac{1}{2}(320+1760)\times 269$$

$$\approx 2.8\times 10^5\,\text{mm}^2.$$

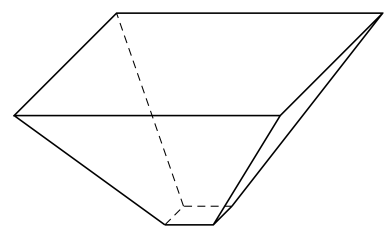
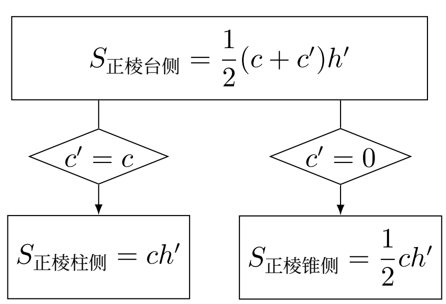


图 2.26

答：制造这样一个下料斗需铁板约 $2.8\times 10^5\,\text{mm}^2$.

在正棱台的侧面积公式中，如果设 $c'=c$，就可以得到正棱柱的侧面积公式：$S_{\text{正棱柱侧}}=ch'$（这里 h' 是高）. 如果设 $c'=0$，就得到正棱锥的侧面积公式：$S_{\text{正棱锥侧}}=\frac{1}{2}ch'$. 这样，正棱柱、正棱锥、正棱台的侧面积公式之间的关系可表示如下图.



练习七

1. 画出上、下底面边长分别是 2 cm 和 8 cm，斜高是 4 cm 的正四棱台的直观图.
2. 一个正三棱台的两个底面的边长分别等于 8 cm 和 18 cm，侧棱长等于 13 cm．求它的侧面积.

4　多面体

前面，我们研究过的棱柱、棱锥、棱台，它们都是由一些多边形围成的几何体．由若干个多边形所围成的几何体，叫做**多面体**．围成多面体的各个多边形叫做**多面体的面**，两个面的公共边叫做**多面体的棱**，若干个面的公共顶点叫做**多面体的顶点**．许多矿物结晶体，例如食盐、明矾、石膏等都是呈多面体形的（图 2.27）.

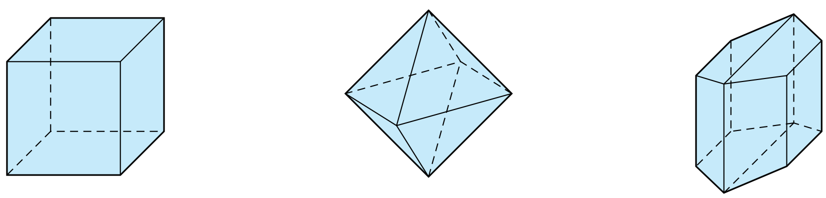


图 2.27

把多面体的任何一个面伸展为平面，如果所有其他各面都在这个平面的同侧，这样的多面体叫做**凸多面体**（图 2.28）.

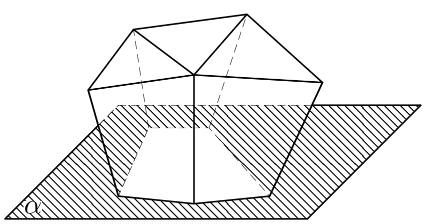


图 2.28

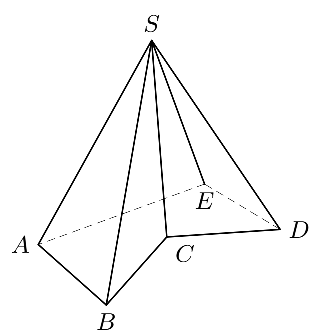


图 2.29

前面研究过的所有的棱柱、棱锥、棱台指的都是凸多面体．图 2.29 中的多面体不是凸多面体.

一个多面体至少有四个面．多面体依照它的面数分别叫做**四面体**、**五面体**、**六面体**等．例如，三棱锥是四面体，三棱柱是五面体，正方体是六面体等．

练习八

1. 图示多面体、凸多面体、棱柱、棱锥、棱台、平行六面体各集合的包含关系．
2. 在学过的一些多面体中，举出五面体、六面体、七面体的例子．除三棱锥外，还有四面体吗？

习题九

1. 用厚纸做一个正四棱台的模型．
2. 已知上、下底面的边长和侧棱的长分别是 a、b、c．求下面各棱台的高和斜高：

   (1)　正三棱台；　　(2)　正四棱台；　　(3)　正六棱台．
3. 正四棱台上下底面的边长分别是 a 和 b，侧面和底面成 45° 的二面角．求它的斜高和侧棱长．
4. 棱台的上、下底面的面积各是 Q' 和 Q．求证：这个棱台的高和截得这个棱台的原棱锥的高的比是 $\dfrac{Q-\sqrt{QQ'}}{Q}$．
5. 一个正三棱锥底面边长是 $10\,\text{cm}$，高是 $15\,\text{cm}$．中截面把棱锥分成一个小棱锥和一个棱台．选择适当的比例尺，画出它们的直观图．
6. 一个正三棱台的上、下底面的边长分别是 $3\,\text{cm}$ 和 $6\,\text{cm}$，侧面与底面成 60° 的二面角．求它的全面积．
7. 正四棱台的高是 $12\,\text{cm}$，两底面的边长相差 $10\,\text{cm}$，全面积是 $512\,\text{cm}^2$．求两底面的边长．
8. 已知正六棱台的两底边长分别是 a、$2a$，高是 a．求这个正六棱台的侧面积以及过相对侧棱的截面面积．
9. 正四棱台的上、下底面的边长各为 a、b，侧面积等于两底面积的和．它的高是多少？
10. 把一个棱锥用平行于底面的平面截成棱台，使棱台上、下底面积的比为 $1:2$，求截平面的位置．
11. 棱锥的中截面把它截成两部分．求这两部分的侧面积的比．
12. 在一个正四棱台内有一个以它的上底面为底面，下底面中心为顶点的棱锥．如果棱台的上、下底面边长分别为 $3\,\text{cm}$ 和 $4\,\text{cm}$，棱锥与棱台的侧面积相等，求棱台的高．

第二节　旋转体

2.2.1　圆柱、圆锥、圆台

1　圆柱、圆锥、圆台的概念和性质

圆钢呈圆柱形，铅锤呈圆锥形，粮囤呈圆台形（图 2.30），这样形状的物体是很多的.

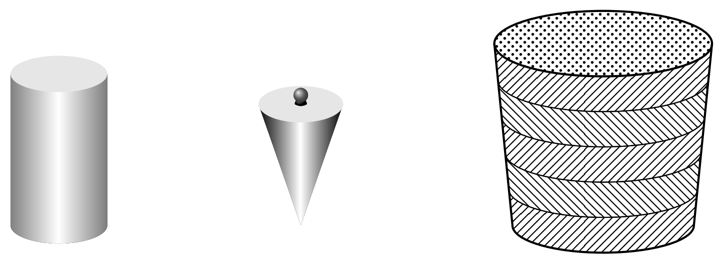


图 2.30

分别以矩形、直角三角形、直角梯形的一边、一直角边、垂直于底边的腰所在的直线为旋转轴，其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体分别叫做**圆柱**、**圆锥**、**圆台**（图 2.31）. 旋转轴叫做它们的**轴**，在轴上这条边的长度叫做它们的**高**，垂直于轴的边旋转而成的圆面叫做它们的**底面**，不垂直于轴的边旋转而成的曲面叫做它们的**侧面**，无论旋转到什么位置，这条边都叫做**侧面的母线**. 如图 2.31 中，直线 $O'O$、SO 是轴，线段 $O'O$、SO 是高，AA'、BB'、SA、SB 等是母线.

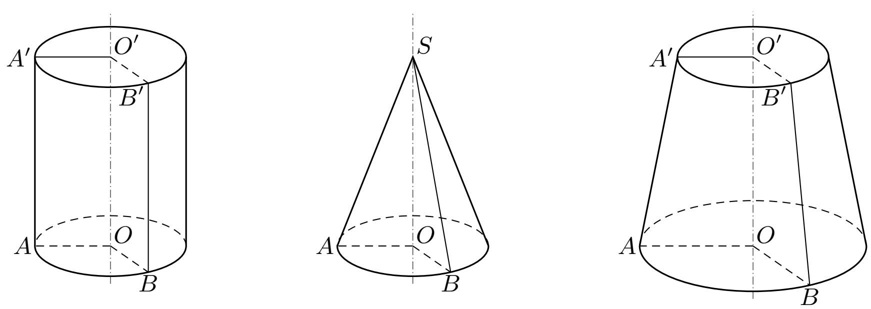


图 2.31

很明显，圆台也可以看做是用平行于圆锥底面的平面截这个圆锥而得到的.

圆柱、圆锥、圆台用表示它的轴的字母来表示，如圆柱 OO'、圆锥 SO、圆台 $O'O$.

圆柱、圆锥、圆台有下面的性质：

(1) 平行于底面的截面都是圆；

(2) 过轴的截面（轴截面）分别是全等的矩形、等腰三角形、等腰梯形.

例 2.9 把一个圆锥截成圆台，已知圆台的上、下底面半径的比是 $1:4$，母线长是 $10\,\text{cm}$，求圆锥的母线长.

解： 设圆锥的母线长为 y，圆台上、下底面半径分别是 x、$4x$（图 2.32），根据相似三角形的比例关系，得

$$(y-10):y=x:4x$$

也就是

$$4(y-10)=y$$

$$3y=40,$$

$$\therefore\quad y=\frac{40}{3}\,(\text{cm}).$$

因此，圆锥得母线长为 $\dfrac{40}{3}$ cm.

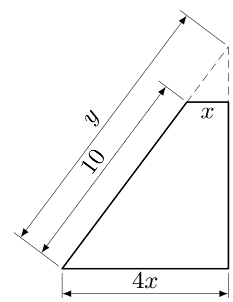


图 2.32

练习九

1. 用一张 4×8（cm^2）的矩形硬纸卷成圆柱的侧面. 求轴截面的面积（接头忽略不计）.
2. 求证：平行于圆锥底面的截面与底面的面积的比，等于顶点到截面的距离与圆锥的高的平方比.
3. 圆台侧面的母线长为 $2a$，母线与轴的夹角为 $30°$，一个底面半径是另一个底面半径的 2 倍. 求两底面的半径.

2 圆柱、圆锥、圆台的直观图的画法

圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆，圆的直观图，一般不用斜二测画法，而用正等测画法. 它的规则是：

(1) 在已知图形 $\odot O$ 中取互相垂直的轴 Ox、Oy. 画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y' = 120°$（或 $60°$）. 它们确定的平面表示水平平面.

(2) 已知图形上平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中，分别画成平行于 x' 轴或 y' 轴的线段.

(3) 平行于 x 轴或 y 轴的线段，长度都不变.

下面举例说明这种画法.

例 2.10 画水平放置的圆的直观图.

画法:

(1) 如图 2.33，在 $\odot O$ 上取一对互相垂直的直径 AB、CD，分别以它们所在的直线作为 x 轴、y 轴. 画对应的 x' 轴、y' 轴，使 $\angle x'O'y' = 120°$.

(2) 将 $\odot O$ 的直径 AB 分成 n 等分，过分点画平行于 y 轴的弦 CD、EF、……. 在 x' 轴上以 O' 为中点画线段 $A'B'$，使 $A'B' = AB$，将 $A'B'$ 分成 n 等分，以分点为中点画 y' 轴的平行线段 $C'D'$、$E'F'$、……，使 $C'D' = CD, E'F' = EF$，…….

(3) 用平滑曲线顺次连结 $A', D', F', B', E', C', \ldots, A'$，就得到圆的直观图，它是一个椭圆.

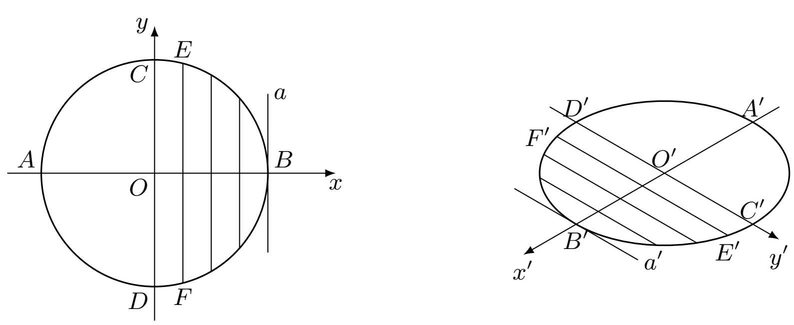


图 2.33

我们看到，在这种画法中，圆的中心 O，变为椭圆的中心 O'，圆的任意一对互相垂直的直径（如 AB、CD）变为椭圆的一对直径（如 $A'B'$、$C'D'$），它们叫做椭圆的**共轭直径**. 圆的切线（如 a）变为椭圆的切线（如 a'）.

由于椭圆的这种画法比较麻烦，所以实际上通常不用这种画法，而是经过椭圆的一对共轭直径的端点（或再加一点，如 E'）用椭圆模板（图 2.34）来画，或用初中学过的方法画近似椭圆（图 2.35）.

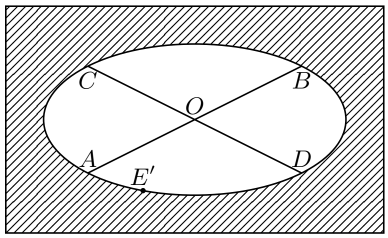


图 2.34

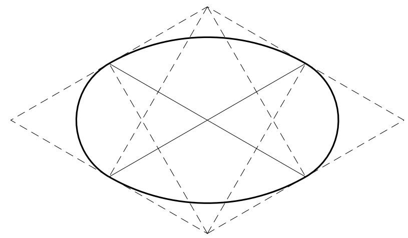


图 2.35

画圆柱、圆锥、圆台的直观图时，先用上述方法画出底面，其余部分与棱柱、棱锥、棱台直观图的画法类似．下面举例说明它们的画法.

例 2.11 一个圆锥的底面半径是 1.6 cm，在它的内部有一个底面半径为 0.7 cm，高为 1.5 cm 的内接圆柱[①]．画出它们的直观图.

画法：

(1) 画轴 取 x 轴、y 轴、z 轴，使它们两两相交成 $120°$ 角（图 2.36a）.

(2) 画底面 以 O 为中心，按 x 轴、y 轴画半径等于 1.6 cm 的圆的直观图.

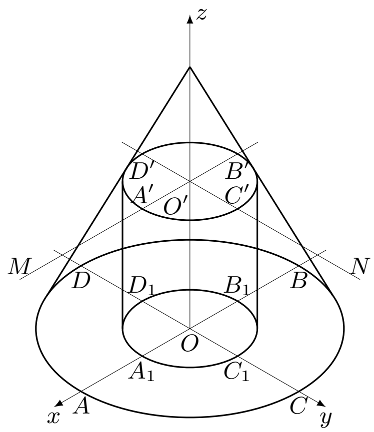
(3) 画内接圆柱 以 O 为中心，按 x 轴、y 轴画一个半径等于 0.7 cm 的圆的直观图，然后在 z 轴上，取线段 $OO' = 1.5\,\text{cm}$，过点 O' 作 $O'M \parallel x$ 轴，$O'N \parallel y$ 轴，再以 O' 为中心，按 $O'M$、$O'N$ 画一个半径相同的圆的直观图．画圆柱的两条母线，使它们与这两个椭圆相切.

(4) 成图 画圆锥的两条母线与椭圆 ACB 和 $A'C'B'$ 相切，再加以整理，就得到所要画的直观图（图 2.36b）.

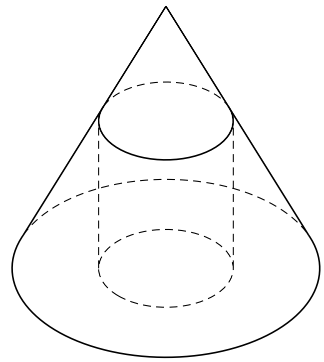
练习十

画一个上底半径为 1.5 cm，下底半径为 2.5 cm，高为 4 cm 的圆台的直观图（比例尺取 $\frac{1}{2}$，不写画法）.

① 圆柱的下底在圆锥的底面上，上底的圆周在圆锥的侧面上.



(a)



(b)

图 2.36

3　圆柱、圆锥、圆台的侧面积

把圆柱、圆锥、圆台的侧面沿着它们的一条母线剪开后展在平面上，展开图的面积就是它们的侧面积.

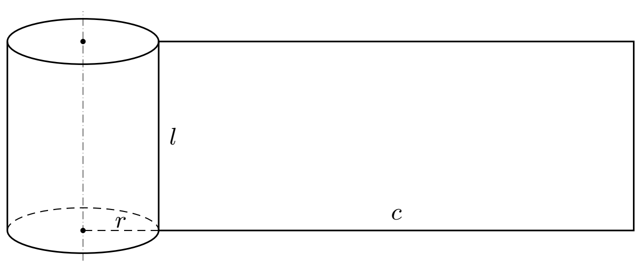


图 2.37

图 2.37 是圆柱的侧面展开图，它是一个矩形．这个矩形的长等于圆柱底面周长 c，宽等于圆柱侧面的母线长 l（也是高）．由此可得：

定理

如果圆柱底面半径是 r，周长是 c，侧面母线长是 l，那么它的侧面积是

$$\boxed{S_{\text{圆柱侧}} = cl = 2\pi rl.}$$

图 2.38 是圆锥的侧面展开图，它是一个扇形．这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长 c，半径等于圆锥侧面的母线长 l，由此可得：

定理

如果圆锥底面半径是 r，周长是 c，侧面母线长是 l，那么它的侧面积是

$$\boxed{S_{\text{圆锥侧}}=\frac{1}{2}cl=\pi rl.}$$

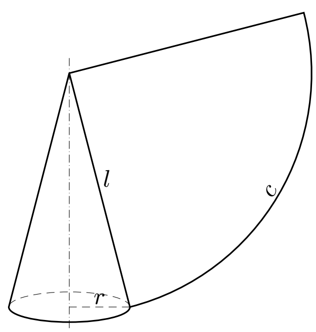


图 2.38

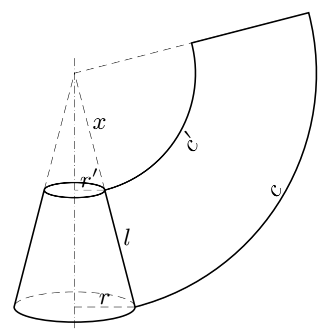


图 2.39

图 2.39 是圆台的侧面展开图，通常把这样的图形叫做扇环．由扇环可以求出圆台的侧面积．

设圆台侧面的母线长为 l，上、下底面周长分别是 c'、c，半径分别是 r'、r，于是

$$S_{\text{圆台侧}}=\frac{1}{2}c(l+x)-\frac{1}{2}c'x=\frac{1}{2}[cl+(c-c')x]. \tag{2.1}$$

$$\because\quad \frac{c'}{c}=\frac{x}{x+l},$$

$$\therefore\quad x=\frac{c'l}{c-c'}.$$

代入式 (2.1)，得

$$\begin{aligned} S_{\text{圆台侧}} &= \frac{1}{2}\left[cl + (c-c')\frac{c'l}{c-c'}\right] \\ &= \frac{1}{2}(c+c')l \\ &= \pi(r+r')l. \end{aligned}$$

由此我们得到下面的定理:

定理

如果圆台的上、下底面半径是 r'、r，周长是 c'、c，侧面母线长是 l，那么它的侧面积是

$$\boxed{S_{\text{圆台侧}} = \frac{1}{2}(c+c')l = \pi(r+r')l.}$$

圆柱、圆锥、圆台的全面积，分别等于它们的侧面积与底面积的和.

例 2.12　已知一个圆锥的底面半径为 R，高为 H. 在其中有一个高为 x 的内接圆柱.

(1) 求圆柱的侧面积;

(2) x 为何值时，圆柱的侧面积最大?

解:

(1) 画圆锥及内接圆柱的轴截面（图 2.40）. 设所求的圆柱的底面半径为 r，它的侧面积

$$S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi rx.$$

$$\because \quad \frac{r}{R} = \frac{H-x}{H},\ \text{（为什么?）}$$

$$\therefore \quad r = R - \frac{R}{H}\cdot x.$$

$$\therefore \quad S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi Rx - \frac{2\pi R}{H}\cdot x^2.$$

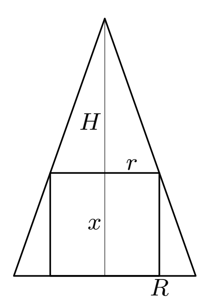


图 2.40

(2) 因为 $S_{圆柱侧}$ 的表达式中 x^2 的系数小于零，所以这个二次函数有最大值．这时圆柱的高是

$$x=-\frac{2\pi R}{-2\cdot\dfrac{2\pi R}{H}}=\frac{H}{2}.$$

当圆柱的高是已知圆锥的高的一半时，它的侧面积最大．

例 2.13 圆锥的底面半径为 r，侧面母线长为 l，侧面展开图扇形的圆心角为 $\theta°$．求证：$\theta=\dfrac{r}{l}\cdot 360°$．

证明： 图 2.41 是圆锥侧面展开图．因为扇形的弧长等于圆锥底面的周长，即

$$\frac{\pi l\theta}{180}=2\pi r,$$

所以

$$\theta=\frac{r}{l}\cdot 360°.$$

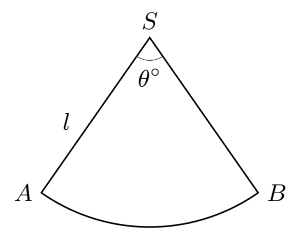
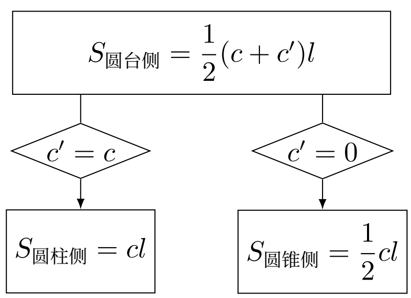


图 2.41

在圆台的侧面积公式中，如果设 $c'=c$，就得到圆柱侧面积公式：$S_{圆柱侧}=cl$．如果设 $c'=0$，就得到圆锥侧面积公式：$S_{圆锥侧}=\dfrac{1}{2}cl$．这样，圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式之间的关系可表示如下图．



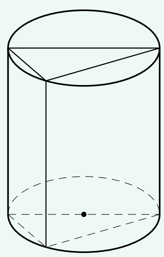
练习十一

1. 将半径为 r 的薄铁圆板沿三条半径截成全等的三个扇形，做成三个圆锥筒，求圆锥筒的高（不计接头）．
2. 一个直角梯形的上、下底和高的比为 $1:2:\sqrt{3}$．求它旋转而成的圆台的上底面积、下底面积和侧面积的比．

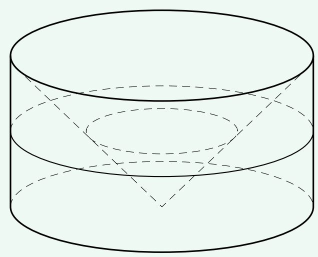
3. 把圆柱、圆锥、圆台的侧面积用中截面周长及母线长表示出来.

习题十

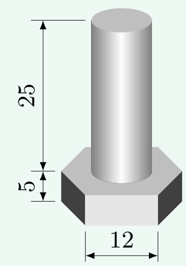
1. 圆锥底面半径为 r，轴截面是直角三角形，求轴截面面积.
2. 如图，圆柱的一个内接直三棱柱的一个侧面经过圆柱的轴，求证，这个棱柱其他两个侧面互相垂直.
3. 经过高为 20 cm 的圆锥的顶点，与底面成 45° 二面角的平面把圆锥底面周长截去 $\frac{1}{4}$. 求截面面积.
4. 从一个底面半径和高都是 R 的圆柱中，挖去一个以圆柱上底面为底，下底面中心为顶点的圆锥，得到一个如图的几何体. 如果用一个与圆柱下底面距离等于 l 并且平行于底面的平面去截它，求截面面积.



（第 2 题图）

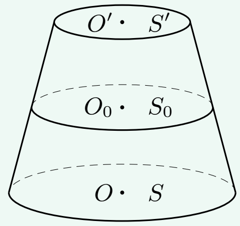


（第 4 题图）

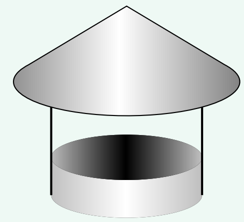


（第 7 题图）

5. 圆台的一个底面周长是另一个底面周长的 3 倍，轴截面的面积等于 $392\,\text{cm}^2$，母线与底面的夹角是 45°，求这个圆台的高、母线长和两底面半径.
6. 已知圆柱的底面直径是 12 cm，高是 16 cm，内有一个以圆柱的底为底，另一个底的中心为顶点的圆锥. 选择适当的比例尺，画出它们的直观图（不写画法）.
7. 要电镀螺杆（尺寸如图，单位：mm）. 如果每平方米用锌 0.11 kg，电镀 100 个这样的螺杆需要多少锌？
8. 一个圆锥的高是 10 cm，侧面展开图是半圆，求圆锥的侧面积.
9. 用油漆涂 100 个圆台形水桶，桶口直径为 30 cm，桶底直径为 25 cm，母线长是 27.5 cm；已知每平方米需要油漆 150 g. 共需油漆多少 kg？
10. 圆锥的轴截面是正三角形. 求证：它的侧面积是底面面积的 2 倍.
11. 已知：圆台上下底面面积是 S'、S，中截面面积为 S_0. 求证：$2\sqrt{S_0} = \sqrt{S} + \sqrt{S'}$.
12. 已知圆台的上、下底面半径是 r'、r，它的侧面积等于两底面面积的和. 求圆台的母线长.



（第 11 题图）


（第 13 题图）

13. 如图，圆锥形烟囱帽的底的半径是 40 cm，高是 30 cm．计算它的侧面展开图的圆心角和面积.
14. 设圆台的上、下底面半径分别是 r'、r，母线长是 l．圆台侧面展开后所得的扇环的圆心角是 θ．求证：

$$\theta = \frac{r-r'}{l}\cdot 360^\circ.$$

2.2.2　球

1　球的概念和性质

常见的排球、足球及滚珠等物体，都呈球形.

半圆以它的直径为旋转轴，旋转所成的曲面叫做**球面**．球面所围成的几何体叫做**球体**，简称**球**．半圆的圆心叫做**球心**．连结球心和球面上任意一点的线段叫做**球的半径**．连结球面上两点并且经过球心的线段叫做**球的直径**．如图 2.42 的球中，点 O 是球心，线段 OC 是球的半径，线段 AB 是球的直径.

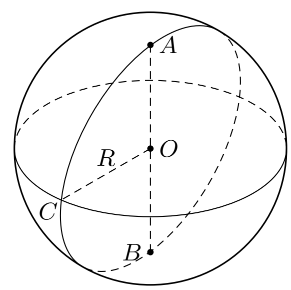


图 2.42

球面也可以看作与定点（球心）的距离等于定长（半径）的所有点的集合（轨迹）.

一个球用表示它的球心的字母来表示，例如球 O.

用一个平面去截一个球，截面是圆面．球的截面有下面的性质：

(1) 球心和截面圆心的连线垂直于截面（图 2.43a）；

(2) 球心到截面的距离 d 与球的半径 R 及截面的半径 r，有下面的关系：

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

当 $d=0$ 时，截面经过球心，$r=R$. 这时，球面被截得的圆最大（图 2.43b），这个圆叫**球的大圆**. 不经过球心的截面所截得的圆叫做**球的小圆**.

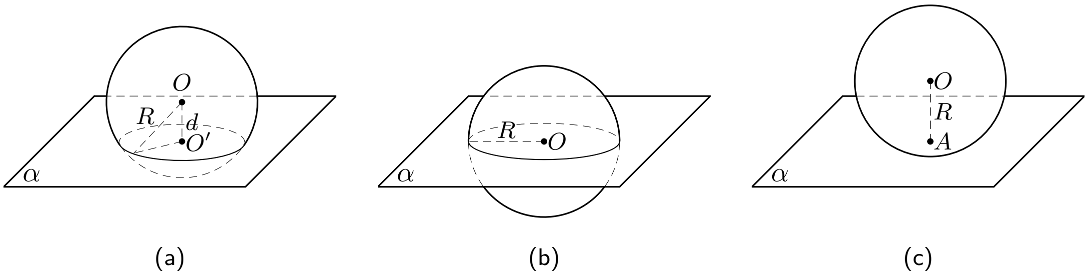


图 2.43

当 $d=R$ 时 $r=0$，截面缩成一点. 这个点是截平面与球的唯一公共点. 和球只有一个公共点的平面叫做**球的切面**（图 2.43c）. 球与它的切面的公共点叫做**切点**.

当我们把地球看作一个球时，经线就是球面上从北极到南极的半个大圆. 赤道是一个大圆，其余的纬线都是小圆（图 2.44）.

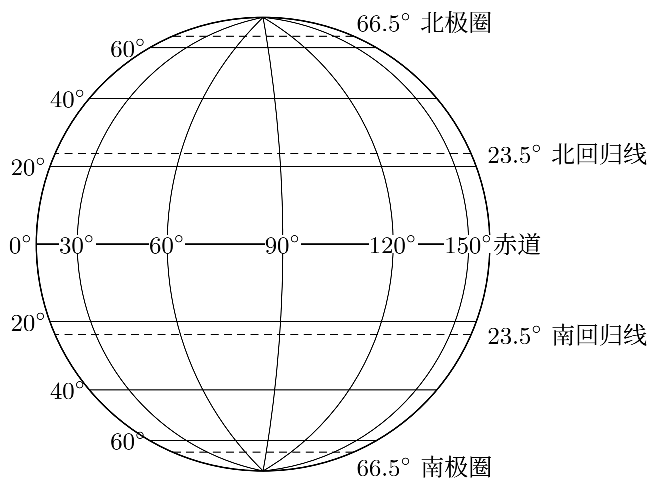


图 2.44

在球面上，两点之间的最短距离，就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度. 我们把这个弧长叫做**两点间的球面距离**. 例如，图 2.45 中的 $\overset{\frown}{PQ}$ 的长度就是 P、Q 两点间的球面距离. 飞机、轮船都是尽可能以大圆弧为航线航行.

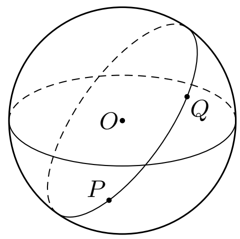


图 2.45

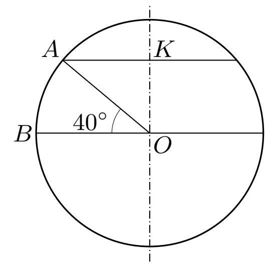


图 2.46

例 2.14 我国首都北京靠近北纬 40°．求北纬 40° 纬线的长度约为多少 km（地球半径约 6370 km）．

解： 如图 2.46，A 是北纬 40° 圈上的一点，AK 是它的半径，所以 $OK \perp AK$．设 c 是北纬 40° 的纬线长．因为 $\angle AOB = \angle OAK = 40°$，所以

$$\begin{aligned} c &= 2\pi \cdot AK \\ &= 2\pi \cdot OA \cos OAK \\ &= 2\pi \cdot OA \cos 40° \\ &\approx 2 \times 3.142 \times 6370 \times 0.7660 \\ &\approx 3.066 \times 10^4\,\mathrm{km} \end{aligned}$$

答：北纬 40° 纬线的长度约为 3.066×10^4 km．

2 球的直观图的画法

球的直观图，一般采用正等测画法．这时球的轮廓是一个圆．

例 2.15 画半径为 R 的球的直观图．

画法：

(1) 画轴 经过点 O 画 x 轴、y 轴、z 轴，轴间角为 120°（图 2.47）．

(2) 画大圆 以 O 为中心，分别按 x 轴、y 轴，y 轴、z 轴，z 轴、x 轴画半径为 R 的圆的直观图（三个椭圆）．

(3) 成图 以点 O 为圆心画一个圆与三个椭圆都相切．最后经过整理就得到球的直观图．

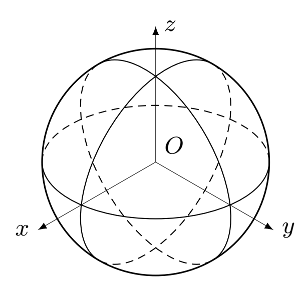


图 2.47

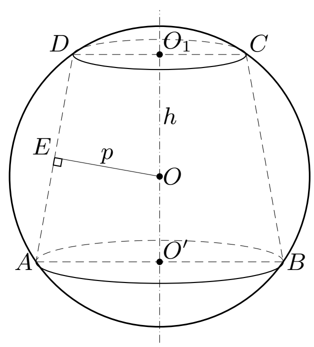
3 球的表面积

圆柱、圆锥、圆台的表面积公式，都是利用它们的展开图求出的．由于球面不能展开成平面图形，所以球的表面积公式无法用展开图求出．为了求得球的表面积公式，我们来证明一个预备定理：

定理

球面内接圆台（圆台上、下底面是球的两个平行截面）的高为 h，球心到母线的距离为 p，那么圆台的侧面积为 $2\pi ph$.

已知：球面 O 的内接圆台的高 $OO' = h$，球心 O 到母线 AD 的距离 $OE = p$（图 2.48a）．求证：$S_{\text{圆台侧}} = 2\pi ph$.



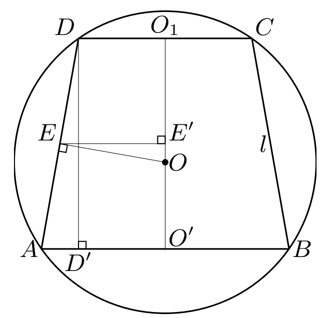


图 2.48

证明：过圆台的轴的平面截圆台和球分别得轴截面 $ABCD$ 和球的大圆 $\odot O$．这时 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接等腰梯形（图 2.48b）．

作 $OE \perp AD$, 垂足 E 是 AD 的中点, $OE = p$. 再作 $DD' \perp AB$, $EE' \perp O_1O'$, 垂足分别是 D'，E'，那么 $DD' = h$.

设圆台上、下底面半径为 r、r'，母线长为 l，则

$$EE' = \frac{1}{2}(r' + r).$$

由于两个直角三角形 ADD' 和 OEE' 的对应角相等，（为什么？）所以

$\triangle ADD' \backsim \triangle OEE'$.

$$\therefore \quad l : h = p : \frac{1}{2}(r + r'), \quad l(r + r') = 2ph.$$

代入圆台侧面积公式，得到

$$S_{\text{圆台侧}} = \pi(r + r')l = 2\pi ph.$$

这个结果对于球的内接圆柱、圆锥同样成立.

现在，我们来求半径为 R 的球的表面积.

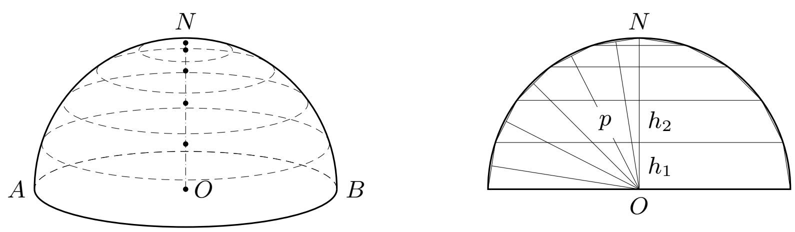


图 2.49

如图 2.49，将半球面上的半大圆 ANB 分成 $2n$ 等分，用过各分点平行于半球大圆面的平面将半球分为 n 部分，以截得的圆为底作圆台、圆锥，设它们的高分别是 $h_1, h_2, \dots, h_n$. 球心到它们的母线的距离都为 p. 根据上面的预备定理，这些圆台、圆锥的侧面积的和为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi ph_1 + 2\pi ph_2 + \cdots + 2\pi ph_n \\ &= 2\pi p(h_1 + h_2 + \cdots + h_n) \\ &= 2\pi p \cdot ON \\ &= 2\pi pR. \end{aligned}$$

如果分点无限增加，侧面就无限地接近于半球面，同时 p 也无限地接近于 R. 当 p 变为 R 时，侧面积的和 S 变为 $2\pi R^2$，我们把这个和作为半球面的面积. 由此得到下面的定理:

定理

球面面积等于它的大圆面积的 4 倍. 即

$$\boxed{S_{球面} = 4\pi R^2.}$$

例 2.16 已知: 圆柱的底面直径与高都等于球的直径. 求证: (1) 球的表面积等于圆柱的侧面积; (2) 球的表面积等于圆柱全面积的 $\frac{2}{3}$.

证明:

(1) 设球的半径为 R, 则圆柱的底面半径为 R, 高为 $2R$, 得

$$S_{球} = 4\pi R^2,$$
$$S_{圆柱侧} = 2\pi R \cdot 2R = 4\pi R^2.$$
$$\therefore \quad S_{球} = S_{圆柱侧}.$$

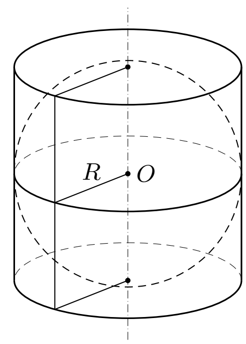


图 2.50

(2)

$$\because S_{圆柱全} = 4\pi R^2 + 2\pi R^2 = 6\pi R^2,$$
$$S_{球} = 4\pi R^2,$$
$$\therefore \quad S_{球} = \frac{2}{3} S_{圆柱全}.$$

练习十二

1. 海面上, 地球球心角 $1'$ 所对的大圆弧长约为 1 海里, 1 海里约是多少千米?
2. 计算地球表面积是多少 km^2.

2.2.3 球冠

1 球冠

观察天象的天文台的屋顶（图 2.51）, 光学透镜和反射镜的凹、凸面, 都是球面的一部分.

图 2.51

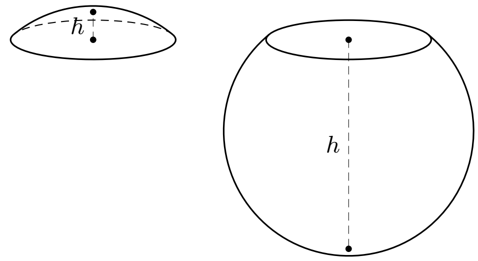


图 2.52

球被平面所截得的一部分叫做**球冠**，截得的圆叫做**球冠的底**．垂直于截面的直径被截得的一段叫做**球冠的高**（图 2.52）．

球冠也可以看作一段圆弧绕经过它的一个端点的直径旋转所成的曲面．

我们完全可以仿照求半球面面积的方法，求出球冠的面积．将图 2.49 看作是由半径为 R 的球截得的球冠，那么 ON 就是球冠的高，用 h 表示．这样就得到下面的定理:

定理

球冠的面积等于截成它的球面上大圆周长与球冠的高的积．即

$$\boxed{S_{\text{球冠}} = 2\pi Rh.}$$

这个公式，对于小于半球面的球冠，半球面，大于半球面的球冠及整个球面都是适用的．当 $h = 2R$ 时，就是球面的面积 $4\pi R^2$.

例 2.17 运油车的油罐是由一个圆筒与两个相同的球冠形部分组成的．油罐的尺寸如图 2.53 (单位: m)．求制造这样一个油罐需要多少平方米钢板 (精确到 $0.1\,\text{m}^2$)．

解: 设圆筒半径为 r，它也是球冠的底的半径．由平面几何知识可得

$$r^2 = 0.3(2 \times 1.5 - 0.3)$$
$$\therefore \quad r = 0.9\,\text{m}.$$

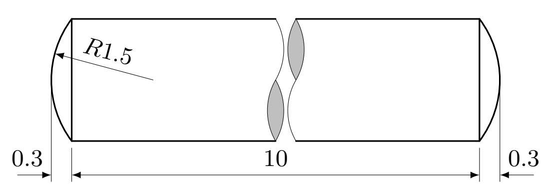


图 2.53

油罐圆筒部分面积:

$$S_1 = 2\pi r h_1 = 2\pi \times 0.9 \times 10 \approx 56.52\,\mathrm{m}^2;$$

两个球冠部分的面积:

$$2S_2 = 2 \times 2\pi R h_2 = 2 \times 2\pi \times 1.5 \times 0.3 \approx 5.65\,\mathrm{m}^2$$

油罐的总面积:

$$S = S_1 + 2S_2 = 56.52 + 5.65 \approx 62.2\,\mathrm{m}^2$$

答: 制造这样一个油罐要用钢板约 $62.2\,\mathrm{m}^2$.

例 2.18 我国土地面积约为 $9.60 \times 10^6\,\mathrm{km}^2$，大部分位于地球北温带. 求我国领土是北温带面积的百分之几.

解: 图 2.54 表示经过地球南、北极的一个截面. N 是北极，点 G 在赤道上，点 A, B 在北回归线上，C, D 在北极圈上. $CD \parallel AB$，$ON \perp AB$，$ON \perp CD$.

北温带的面积

$$\begin{aligned} S_{\text{北温带}} &= S_{\text{球冠}ABN} - S_{\text{球冠}CDN} \\ &= 2\pi R \cdot EN - 2\pi R \cdot FN \\ &= 2\pi R(EN - FN) \\ &= 2\pi R(OF - OE). \end{aligned}$$

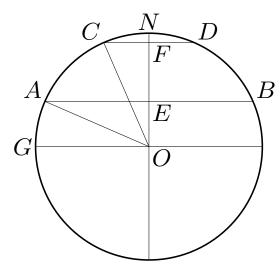


图 2.54

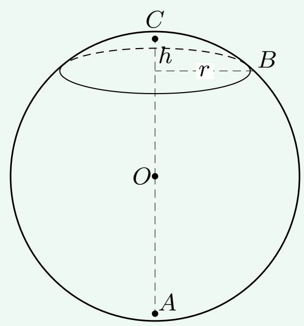
$$\begin{aligned} \because\quad OF - OE &= OC \sin OCF - OA \sin OAE \\ &= 6.37 \times 10^3(\sin 66.5^\circ - \sin 23.5^\circ) \\ &= 6.37 \times 10^3(0.9171 - 0.3987) \\ &\approx 3.302 \times 10^3\,\mathrm{km} \\ \therefore\quad S_{\text{北温带}} &= 2 \times 3.1427 \times 6.37 \times 10^3 \times 3.302 \times 10^3 \\ &\approx 1.32 \times 10^8\,\mathrm{km}^2. \end{aligned}$$

$$\frac{9.60\times10^6\times100}{1.32\times10^8\times100}\approx7.27\%$$

答：我国领土约是北温带面积的 7.27%.

练习十三

1. 求证：$S_{球冠}=\pi(r^2+h^2)$，其中 r 是球冠的底的半径，h 是球冠的高.



（第 1 题图）

2. 有一条半径为 R 的弧，度数是 120°，它绕经过弧的中点的直径旋转得到一个球冠．求这个球冠的面积.

2 旋转面和旋转体

前面我们学过的圆柱、圆锥、圆台的侧面，球面及球冠等，都是平面内的一条曲线绕一条定直线旋转而成的.

一条平面曲线（包括直线）绕它所在的平面内的一条定直线旋转所形成的曲面叫做**旋转面**．这条定直线叫做**旋转轴**．无论旋转到什么位置，这条曲线都叫做旋转面的**母线**．图 2.55 中，直线 a 是旋转轴，曲线 l（不论旋转到什么位置）是母线.

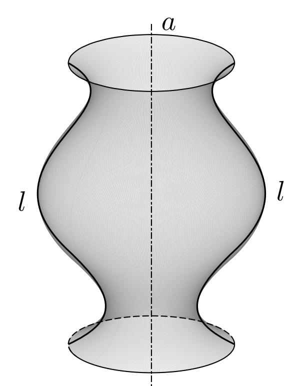


图 2.55

如果母线是与旋转轴平行的直线，那么形成的旋转面叫做**圆柱面**（图 2.56a）．如果母线是和旋转轴斜交的直线，那么形成的旋转面叫做**圆锥面**（图 2.56b），这时，母线和轴的交点叫做**圆锥面的顶点**．以前学过的

的圆柱、圆锥、圆台的侧面可分别看成是圆柱面、圆锥面被垂直于轴的平面截得的一部分.

如果一个圆，绕同一平面内与它不相交的一条直线旋转，那么形成的旋转面叫做**环面**（图 2.56c）.

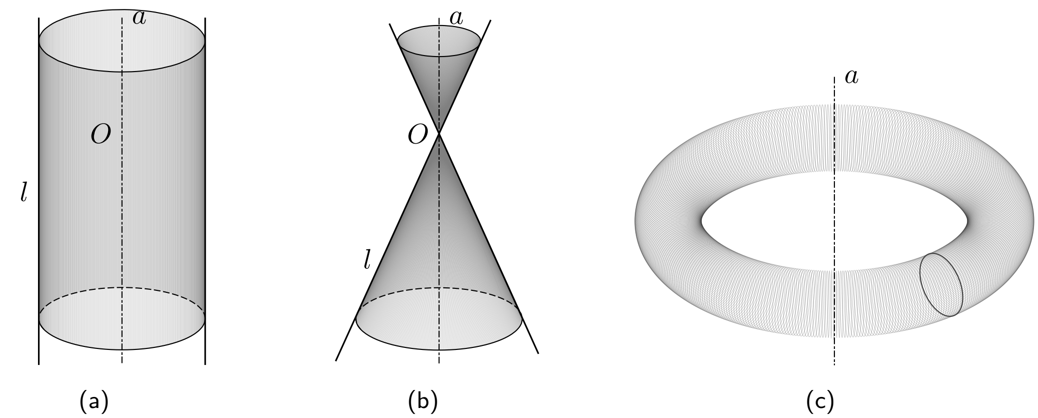


图 2.56

封闭的旋转面围成的几何体，叫做**旋转体**．这时，旋转面的轴也叫**旋转体的轴**.圆柱、圆锥、圆台、球都是旋转体．环面所围成的几何体也是旋转体，它叫做**环体**，简称**环**．例如充气的车轮内胎就呈环体形.

练习十四

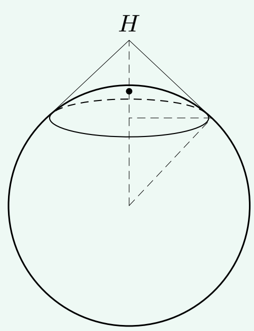
1. 举出一些旋转面和旋转体的实例.
2. 圆柱和圆柱面、圆锥和圆锥面有何区别?

习题十一

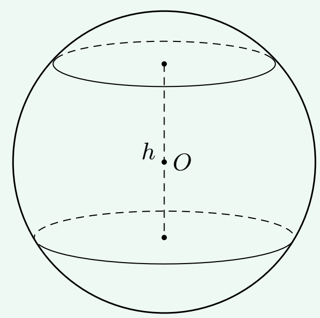
1. 求证：球的任意两个大圆互相平分.
2. 在半径是 $13\,\text{cm}$ 的球面上有 A, B, C 三点，$AB = 6\,\text{cm}$，$BC = 8\,\text{cm}$，$CA = 10\,\text{cm}$. 求经过这三点的截面和球心 O 的距离.
3. 在半径是 r 的球面上有两点 A, B，半径 OA 和 OB 的夹角是 n°（$n < 180$）．求 A, B 两点间的球面距离.
4. 在北纬 30° 圈上有甲、乙两地，它们的经度相差 120°，计算这两地间的纬度线长.
5. 在赤道上，东经 140° 与西经 130° 的海面上有两点 A, B．求 A, B 两点的球面距

离是多少海里?

6. 已知球的大圆的周长是 80 cm. 求这个球的表面积.
7. 在球心的同一侧有相距 9 cm 的两个平行截面, 它们的面积各为 $49\pi\ \text{cm}^2$ 和 $400\pi\ \text{cm}^2$. 求球的表面积.
8. 水箱用的胶质浮球, 是由两个半球面和一个圆柱筒贴合而成. 已知球的半径是 3 cm, 圆柱筒长 2 cm. 要在这样 2500 个浮球上涂一层胶质. 如果每平方米需要涂胶 100 g, 共需胶多少?
9. 半径是 4 cm 的球面, 被一个平面截得的截面半径是 2 cm, 求所截得的球冠的面积.
10. 我国第一颗人造地球卫星的远地点距地面 2384 km, 在这时约有多少平方公里上的人能看到这颗卫星?



(第 10 题图)



(第 12 题图)

11. 有直径为 10 cm 的球, 以它的一条直径为轴, 钻一个直径为 6 cm 的圆孔, 求这个球的球面剩余部分的面积.
12. 球面夹在两个平行截面间的部分叫做**球带**, 两个平行截面间的距离叫做**球带的高**. 如果球的半径是 R, 球带的高是 h, 求证: $S_{\text{球带}} = 2\pi Rh$.
13. 利用上题结果, 计算地球上热带的面积.

第三节 多面体和旋转体的体积

2.3.1 体积的概念与公理

在生产建设和科学实验中, 经常会遇到关于物体体积的问题, 这些问题与各种几何体的体积有关. 这一节我们就来研究这些几何体的体积问题.

几何体占有空间部分的大小叫做它的**体积**.

同度量长度、面积一样，要度量一个几何体的体积,首先要选取一个单位体积作为标准,然后求出几何体的体积是单位体积的多少倍,这个倍数就是这个几何体的体积的数值. 通常取棱长等于单位长度（例如 1 cm、1 m 等）的正方体的体积作为**体积单位**（图 2.57）.

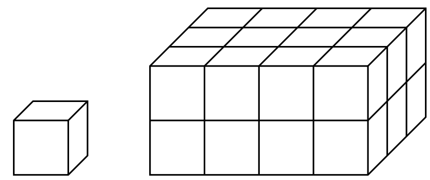


图 2.57

作为推算体积的基础，我们把下面的两个事实当作公理.

公理 5

长方体的体积等于它的长、宽、高的积.

$$\boxed{V_{\text{长方体}} = abc.}$$

从这个公理，可以直接得到下面的推论：

推论 1

长方体的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积.

$$V_{\text{长方体}} = Sh.$$

推论 2

正方体的体积等于它的棱长 a 的立方.

$$V_{\text{正方体}} = a^3.$$

公理 6

夹在两个平行平面间的两个几何体, 被平行于这两个平面的任意平面所截, 如果截得的两个截面的面积总相等，那么这两个几何体的体积相等.

图 2.58 表示夹在平行平面 α, β 之间的两个形状不同的几何体，被平行于平面

α, β 的任意一个平面所截，如果截面 P 和 Q 的面积总相等，那么它们的体积一定相等.

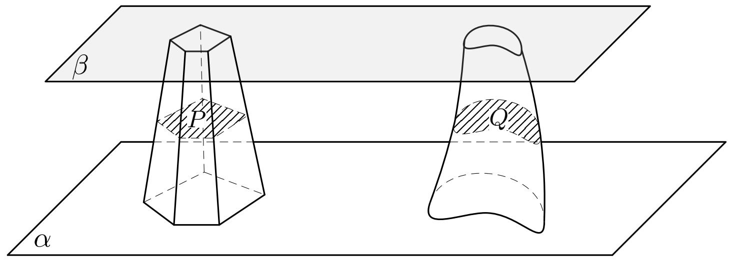


图 2.58

例如，取一摞书或一摞纸张堆放在桌面上，将它如图 2.59 那样改变一下形状，这时高度没有改变，每页纸的面积也没有改变，因而这摞书或纸张的体积于变形前相等.

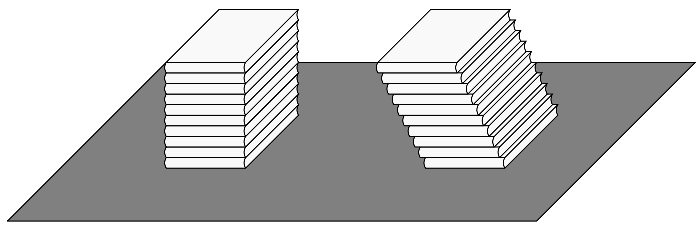


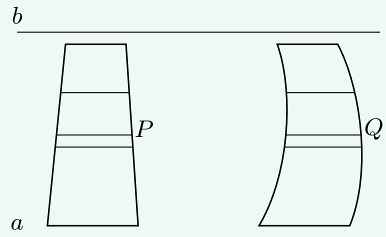
图 2.59

我国古代数学家祖暅，早在公元五世纪，就在实践的基础上，总结出这个公理，并首先使用这个公理证明了球的体积公式，因而我们把它叫做**祖暅原理**. 在欧洲直到十七世纪，才有意大利的卡发雷利提出这个事实.

用以上两个公理作基础，我们就可以求出柱、锥、台、球等的体积.

练习十五

1. 用棱长为 1 的正方体的体积作为体积单位，图 2.57 中长方体体积的数值为 24. 假如将体积单位改用棱长为 2 的正方体的体积，这个长方体的体积变为多少？为什么？
2. 把夹在两条平行线间的两个平面图形的面积先等的条件，用祖暅原理的形式叙述出来. 并根据矩形面积公式，求平行四边形的面积公式.



（第 2 题图）

2.3.2　棱柱、圆柱的体积

设有底面积都等于 S，高都等于 h 的任意一个棱柱和一个圆柱，取一个与它们底面积相等、高也相等的长方体，使它们的下底面在同一个平面 α 上．因为它们的上底面和下底面平行，并且高都相等，所以它们的上底面都在和平面 α 平行的同一个平面内（图 2.60）．

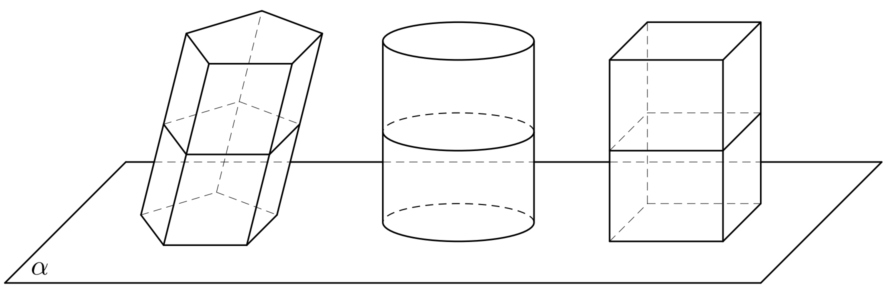


图 2.60

用和平面 α 平行的任意平面去截它们时，所得的截面都和它们的底面分别全等，因而这些截面的面积都等于 S．根据祖暅原理，它们的体积相等．由于长方体的体积等于它的底面积和高的乘积，于是我们得到下面的定理:

定理

柱体（棱柱、圆柱）的体积等于它的底面积 S 和高 h 的积．即

$$\boxed{V_{柱体} = Sh.}$$

推论

底面半径是 r，高是 h 的圆柱的体积是

$$V_{圆柱} = \pi r^2 h.$$

例 2.19 有一堆相同规格的六角螺帽毛坯（图 2.61）共重 5.8 kg．已知底面六边形的边长是 12 mm，高是 10 mm，内孔直径是 10 mm．问约有毛坯多少个（铁的比重是 7.8 g/cm^3）．

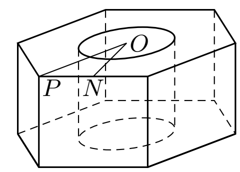


图 2.61

解： 六角螺帽毛坯的体积是一个正六棱柱的体积与一个圆柱的体积的差.

$$V_{正六棱柱} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 \times 6 \times 10 \approx 3.74 \times 10^3\,\mathrm{mm}^3$$
$$V_{圆柱} = 3.14 \times \left(\frac{10}{2}\right)^2 \times 10 \approx 0.785 \times 10^3\,\mathrm{mm}^3.$$

毛坯的体积

$$V = 3.74 \times 10^3 - 0.785 \times 10^3 \approx 2.96 \times 10^3\,\mathrm{mm}^3 = 2.96\,\mathrm{cm}^3.$$
$$5.8 \times 10^3 \div (7.8 \times 2.96) \approx 2.5 \times 10^2（个）.$$

答：这堆毛坯约有 250 个.

例 2.20 三棱柱的底面是 $\triangle ABC$，$AB = 13\,\mathrm{cm}$，$BC = 5\,\mathrm{cm}$，$CA = 12\,\mathrm{cm}$，侧棱 AA' 的长是 20 cm．如果侧棱 AA' 与底面所成的角是 60°，求这个三棱柱的体积.

解： 设 A' 在平面 ABC 上的射影为 H．则 $A'H$ 是棱柱的高，$\angle A'AH = 60°$（图 2.62）.

在 Rt$\triangle A'AH$ 中，

$\because\quad AA' = 20,$

$\therefore\quad A'H = AA'\sin 60^\circ = 10\sqrt{3}.$

在 $\triangle ABC$ 中，$AB = 13$，$BC = 5$，$CA = 12$，

$\because\quad AB^2 = BC^2 + CA^2,$

$\therefore\quad \angle C = 90^\circ.$

$\therefore\quad S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}BC \cdot CA = 30\,\text{cm}^2$．根据柱体的体积公式，得

$$V = Sh = 30 \times 10\sqrt{3} = 300\sqrt{3}\,\text{cm}^3.$$

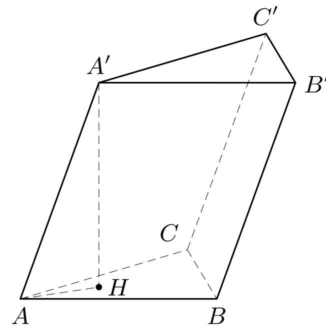


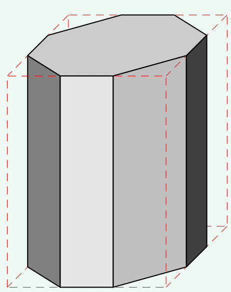
图 2.62

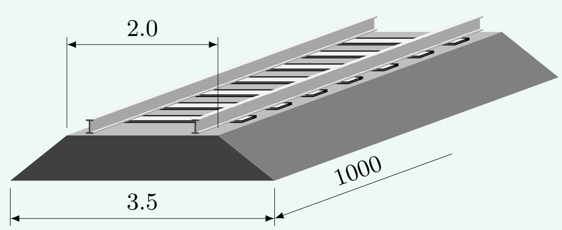
练习十六

1. 一个正方体和一个圆柱等高，并且侧面积相等．比较它们的体积哪个大？大多少？
2. 一个直平行六面体的侧棱长 9 cm，底面两条相邻边的长是 7 cm 和 11 cm，夹角为 45°．求它的体积．

习题十二

1. 已知长方体形的铜块长、宽、高分别是 2 cm、4 cm、8 cm，将它熔化后铸成一个正方体形的铜块．求铸成的铜块的棱长（不计损耗）．
2. 一个长方体的长、宽、高的比为 1 : 2 : 3，对角线长是 $2\sqrt{14}$ cm．求它的体积．
3. 如图，将四棱柱底面的边三等分，过三等分点用平行于侧棱的平面截去四个三棱柱，得到一个八棱柱．这个八棱柱的体积是原四棱柱体积的几分之几？


（第 3 题图）



（第 6 题图）

4. 将一个正三棱柱形的木块，旋成与它等高并且尽可能大的圆柱形．旋去的部分是三棱柱体积的几分之几？

5. 求证：经过长方体相对的两个面的中心的任意平面，把长方体分成体积相等的两个柱体.
6. 要修建铁路，路基如图（单位：m），修建每 1 km 铁路需要碎石多少方（m^3）?
7. 在一块平地上，计划修建一条水渠，渠道长 1.5 km，渠道断面是梯形，梯形两底分别是 1.8 m、0.8 m，高是 0.6 m. 如果每人一天挖土 2 m^3，完成这条渠道需要多少个工?
8. 拟修建堤坝 1.5 km. 坝的断面是梯形，上底宽 4 m，迎水坡宽 20 m，迎水坡、背水坡与水平面分别成 30°、45° 的二面角. 一台推土机每天推土 80 m^3，用 5 台推土机几天完成?
9. 我国万吨水压机上，有四根圆筒形钢柱，高 18 m，内径 0.4 m，外径 1 m. 求这四根钢柱的重量（钢的比重是 7.8 $\mathrm{g/cm}^3$）.
10. 求证：底面是梯形的直棱柱的体积，等于两个平行侧面面积的和与这两个侧面间距离的积的一半.
11. 已知正六棱柱较长的一条对角线长是 13 cm，侧面积是 180 cm^2. 求这个棱柱的体积.
12. 一根圆木料，长 3.0 m，直径 0.8 m，距圆木的轴 0.2 m 且平行于轴锯去一片，求剩余木料有多少立方米.

2.3.3 棱锥、圆锥的体积

前一节，我们用祖暅原理求出了柱体（棱柱、圆柱）的体积. 为了求出锥体的体积公式，我们首先研究等底面积等高的任意两个锥体体积之间的关系.

取任意两个锥体，设它们的底面积都是 S，高都是 h（图 2.63）.

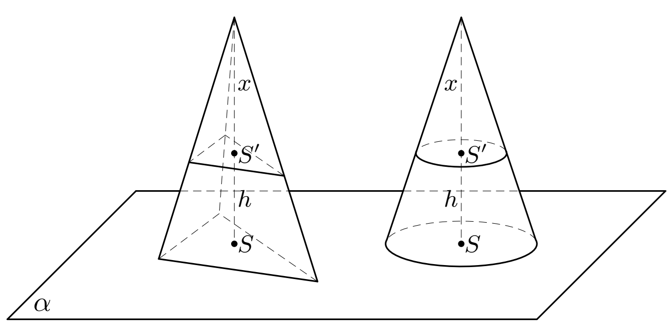


图 2.63

把这两个锥体放在同一平面 α 上，这时它们的顶点都在和平面 α 平行的同一个平面内．用平行于平面 α 的任意平面去截它们，截面分别与底面相似．设截面和顶点的距离是 h_1，截面面积分别是 S_1、S_2，那么

$$\because \quad \frac{S_1}{S}=\frac{h_1^2}{h^2}, \qquad \frac{S_2}{S}=\frac{h_1^2}{h^2}$$

$$\therefore \quad \frac{S_1}{S}=\frac{S_2}{S}, \qquad S_1=S_2.$$

根据祖暅原理，这两个锥体的体积相等．由此我们得到下面的定理：

定理

等底面积等高的两个锥体的体积相等.

现在，我们来证明三棱锥的体积公式.

定理

如果三棱锥的底面积是 S，高是 h，那么它的体积是

$$\boxed{V_{\text{三棱锥}}=\frac{1}{3}Sh.}$$

已知：三棱锥 1（A'-ABC）的底面积是 S，高是 h．求证：$V_{\text{三棱锥}}=\dfrac{1}{3}Sh$.

证明: 把三棱锥 1（A'-ABC）以 $\triangle ABC$ 为底面、AA' 为侧棱补成一个三棱柱，然后再把这个三棱柱分割成三个三棱锥，就是三棱锥 1 和另两个三棱锥 2、3（图 2.64）.

三棱锥 1、2 的底 $\triangle ABA'$、$\triangle B'A'B$ 的面积相等，高也相等（顶点都是 C）；三棱锥 2、3 的底 $\triangle BCB'$、$\triangle C'B'C$ 的面积相等，高也相等（顶点都是 A'），

$$\therefore \quad V_1=V_2=V_3=\frac{1}{3}V_{\text{三棱柱}}.$$

$$\because \quad V_{\text{三棱柱}}=Sh,$$

$$\therefore \quad V_{\text{三棱锥}}=\frac{1}{3}Sh.$$

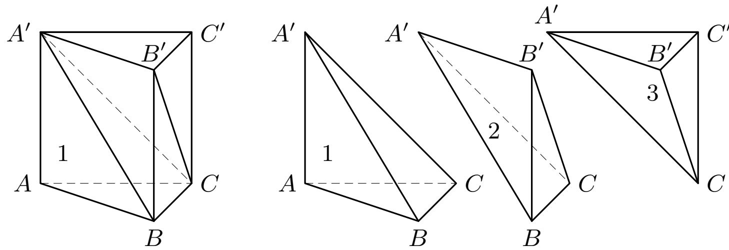


图 2.64

最后，因为和一个三棱锥等底面积等高的任何锥体都和这个三棱锥的体积相等，所以我们得到下面的定理:

定理

如果一个锥体（棱锥、圆锥）的底面积是 S，高是 h，那么它的体积是

$$\boxed{V_{\text{锥体}} = \frac{1}{3}Sh.}$$

推论

如果圆锥的底面半径是 r，高是 h，那么它的体积是

$$V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

例 2.21 如图 2.65，已知：三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的侧棱 AD 垂直于底面 BCD，侧面 ABC 与底面所成的角为 θ.

求证：$V_{\text{三棱锥}} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot AD\cos\theta$.

证明: 在平面 BCD 内，作 $DE \perp BC$，垂足为 E，连结 AE，DE 就是 AE 在平面 BCD 上的射影．根据三垂线定理，$AE \perp BC$.

$\therefore \quad \angle AED = \theta.$

$$
\begin{aligned}
V_{\text{三棱锥}} &= \frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot AD\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}BC\cdot ED\cdot AD\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}BC\cdot AE\cos\theta\cdot AD\\
&= \frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot AD\cos\theta.
\end{aligned}
$$

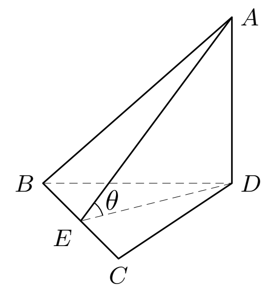


图 2.65

例 2.22　一块正方形薄铁板的边长是 22 cm，以它的一个顶点为圆心，边长为半径画弧，沿弧剪下一个扇形．用这块扇形铁板围成一个圆锥筒，求它的容积（保留两位有效数字）．

解: 如图 2.66, 扇形弧长是 $\frac{1}{4}\cdot 44\pi = 11\pi$. 因此, 所作的圆锥筒底的周长 $2\pi r = 11\pi$. 解得 $r = 5.5$.

因为母线长是 22 cm，所以圆锥的高

$$h = \sqrt{22^2 - 5.5^2} \approx 21.3.$$

$$
\begin{aligned}
V_{\text{圆锥}} &= \frac{1}{3}\pi\times 5.5^2\times 21.3.\\
&\approx 6.7\times 10^2\,\mathrm{cm}^3.
\end{aligned}
$$

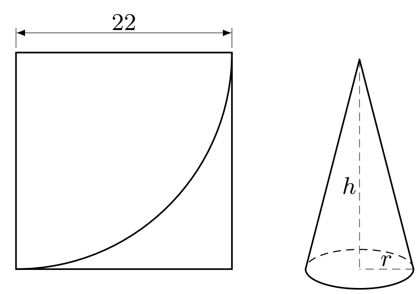
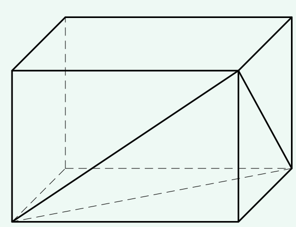


图 2.66

答：所求圆锥筒的容积约为 $670\,\mathrm{cm}^3$．

练习十七

1. 如图，将长方体沿相邻三个面的对角线截去一个三棱锥．这个三棱锥的体积是长方体体积的几分之几？

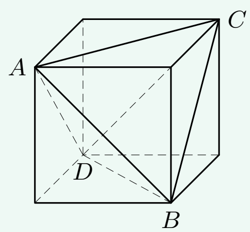


（第 1 题图）

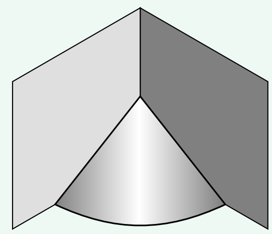
2. 已知：圆锥的底面周长是 c，高是 h．求证：这个圆锥的体积 V 可以近似地表示为 $V \approx \left(\frac{c}{6}\right)^2 h$．

习题十三

1. 从一个正方体中，如图那样截去四个三棱锥后，得到一个正三棱锥 $A\text{-}BCD$．求它的体积是正方体体积的几分之几？



（第 1 题图）



（第 4 题图）

2. 在下列情况下，正棱锥的体积有什么变化？
   (1) 高和底面的边长都增为原来的 n 倍；
   (2) 高增为原来的 n 倍，底面边长缩为原来的 $\frac{1}{n}$．
3. 已知下列各正棱锥的底面边长是 a，侧棱长是 b，求它的体积：
   (1) 正三棱锥；　(2) 正四棱锥；　(3) 正六棱锥．
4. 在仓库一角有谷一堆，呈 $\frac{1}{4}$ 圆锥形（如图）．量得底面弧长为 2.8 m，母线长为 2.2 m，这堆谷重约多少（谷的比重：720 kg/m^3）？
5. 有一铜制工件，它的下部呈正四棱柱形，顶部是一个以正四棱柱的上底为底的正四棱锥形．柱的底面边长是 50 mm，高是 40 mm，锥的侧面呈正三角形．求这个工件的重量（铜的比重是 8.9 g/cm^3）
6. 三棱锥的三个侧面互相垂直，它们的面积分别为 6 m^2、4 m^2 和 3 m^2．求它的体积．
7. 从一块薄铁板上，裁下一个半径为 24 cm，圆心角为 $120°$ 的扇形，再围成一个圆锥筒，求这个圆锥筒的容积（保留两位有效数字）．
8. 圆锥的体积是 22.4 cm^3，轴和母线所成的角是 $48°15'$．求它的高（保留三位有效数字）．
9. 求证：棱锥被平行于底面的平面截得的小棱锥的体积和原来棱锥的体积的比，等于它们的高的立方比．

2.3.4　棱台、圆台的体积

我们已知，棱台、圆台分别是棱锥、圆锥用平行于底面的平面截去一个锥体得到的．因此，台体的体积可以用两个锥体的差来计算．

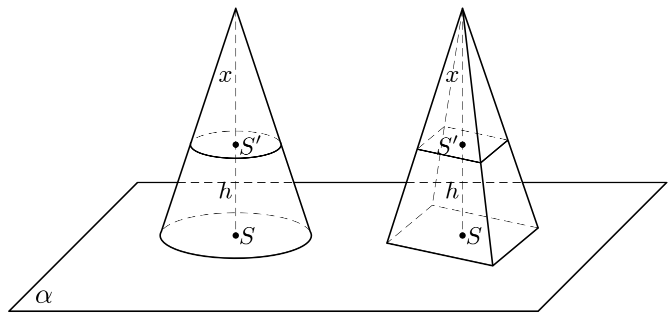


图 2.67

设任意台体（棱台或圆台）的上、下底面的面积分别是 S'、S，高是 h．截得台体时去掉的锥体的高是 x，去掉的锥体和原来的锥体的体积分别是 V'、V（图 2.67）．这时，

$$V' = \frac{1}{3}S'x, \quad V = \frac{1}{3}S(h+x),$$

所以台体的体积

$$\begin{aligned} V_{\text{台体}} &= V - V' = \frac{1}{3}S(h+x) - \frac{1}{3}S'x \\ &= \frac{1}{3}[Sh + (S-S')x]. \end{aligned}$$

因为台体上、下底面相似，所以

$$\frac{S'}{S} = \frac{x^2}{(h+x)^2}, \quad \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}} = \frac{x}{h+x}.$$

$$x = \frac{\sqrt{S'}h}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}.$$

代入上式，得

$$
\begin{aligned}
V_{\text{台体}} &= \frac{1}{3}h\left[S+(S-S')\frac{\sqrt{S'}}{\sqrt{S}-\sqrt{S'}}\right] \\
&= \frac{1}{3}h\left[S+\sqrt{S'}(\sqrt{S}+\sqrt{S'})\right] \\
&= \frac{1}{3}h\left[S+\sqrt{SS'}+S'\right].
\end{aligned}
$$

由此我们得到下面的定理:

定理

如果台体（棱台、圆台）的上、下底面的面积分别是 S'、S，高是 h，那么它的体积是

$$\boxed{V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S').}$$

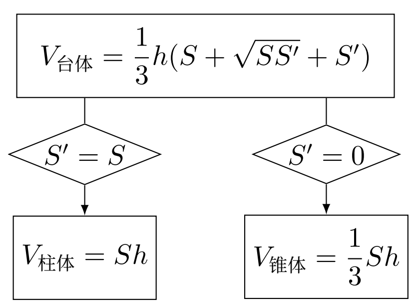
推论

如果圆台的上、下底面半径分别是 r'、r，高是 h，那么它的体积是

$$V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2).$$

最后，我们注意到，在台体的体积公式重，如果设 $S'=S$，就得到柱体的体积公式 $V_{\text{柱体}}=Sh$；如果设 $S'=0$，就得到锥体的体积公式 $V_{\text{锥体}}=\frac{1}{3}Sh$.

这样，柱体、锥体、台体的体积公式之间的关系，可表示如下图:



例 2.23　有一个正四棱台形油槽，可以装煤油 190 L，假如它的两底面边长分别等于 60 cm 和 40 cm．求它的深度．

解：

$$\begin{aligned}\because\quad &\text{上底面面积}S' = 40^2 = 1600,\\ &\text{下底面面积}S' = 60^2 = 3600,\\ &\sqrt{S\cdot S'} = \sqrt{40^2\times 60^2} = 2400,\\ \therefore\quad & V = \frac{1}{3}h(3600+2400+1600) = \frac{7600}{3}h.\end{aligned}$$

由已知 $V = 190\,\mathrm{L} = 190\,000\,\mathrm{cm}^3$,

$$\therefore h = \frac{3\times 190000}{7600} = 75\,\mathrm{cm}.$$

答：油槽深度是 75 cm．

练习十八

已知上、下地面边长分别是 a、b，高是 h．求下列正棱台的体积：

(1)　正四棱台；　　(2)　正六棱台．

2.3.5　拟柱体及其体积

我们经常遇到堆放整齐的沙石堆、粪堆等体积的计算问题．虽然它们有两个面平行，但一般不是棱台．

所有的顶点都在两个平行平面内的多面体叫**拟柱体**．它在这两个平面内的面叫做**拟柱体的底面**，其余各面叫做**拟柱体的侧面**．两底面之间的距离叫做**拟柱体的高**（图 2.68）．

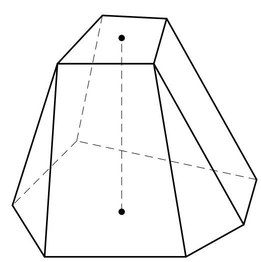
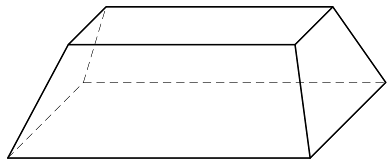


图 2.68

显然，拟柱体的侧面是三角形、梯形或平行四边形．

两底面是矩形，并且它们的对应边平行，这样的拟柱体叫**长方台**（图 2.69a）．如果拟柱体的下底面是梯形或平行四边形，上底面变成了与下底面的平行边的线段，这样的拟柱体叫做**楔体**（图 2.69b）．


(a)

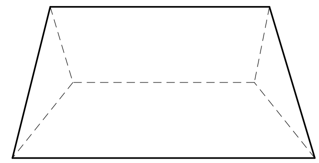

(b)

图 2.69

利用棱锥体积公式，可以求出拟柱体的体积.

定理

如果拟柱体的上、下底面的面积为 S'、S，中截面的面积为 S_0，高为 h，那么它的体积是

$$\boxed{V_{\text{拟柱体}}=\frac{1}{6}h(S+4S_0+S').}$$

证明： 如图 2.70，在拟柱体 $ABCDEF\text{-}A'B'C'D'$ 的中截面 A_1D_1 内任取一点 P，并且把它和这个拟柱体的各个顶点分别连结起来. 这样，把拟柱体分成若干个以 P 为顶点的棱锥，拟柱体的体积等于这些棱锥体积的和.

我们把这些棱锥分成两类：一类是以拟柱体的底面为底的，一类是以拟柱体的侧面为底的.

第一类的棱锥有两个，棱锥 $P\text{-}AC$ 和棱锥 $P\text{-}A'C'$. 它们的体积分别是：

$$V_{P\text{-}AC}=\frac{1}{3}S\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{6}hS,$$
$$V_{P\text{-}A'C'}=\frac{1}{3}S'\cdot\frac{1}{2}h=\frac{1}{6}hS'.$$

在第二类棱锥中，我们先求其中的一个，例如棱锥 $P\text{-}CC'$ 的体积. 因为棱锥 $P\text{-}C_1D_1B'$ 和棱锥 $P\text{-}CC'$ 的底面在同一个平面上，顶点相同，所以它们的高相等. 又因为梯形 $CDC'B'$ 的面积等于 $\triangle C_1D_1B'$ 的面积的 4 倍，（为什么?）所以

$$V_{P\text{-}CC'}=4V_{P\text{-}C_1D_1B'}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} V_{P\text{-}C_1D_1B'} &= V_{B'\text{-}PC_1D_1} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{h}{2}\cdot S_{\triangle PC_1D_1} \\ &= \frac{1}{6}hS_{\triangle PC_1D_1}, \\ \therefore\quad V_{P\text{-}CC'} &= \frac{1}{6}h\cdot 4S_{\triangle PC_1D_1}. \end{aligned}$$

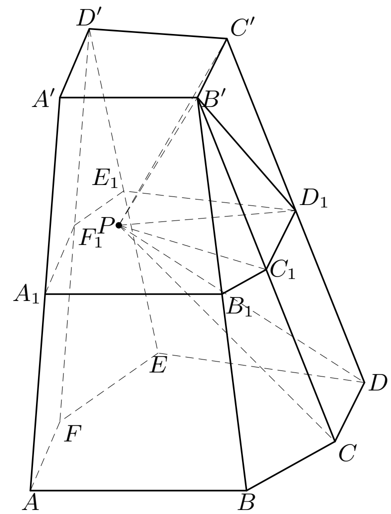


图 2.70

同样可以证明:

$$V_{P\text{-}DD'} = \frac{1}{6}h\cdot 4S_{\triangle PD_1E_1},$$

$$\cdots\cdots$$

把第二类棱锥的体积相加，得

$$\frac{1}{6}h(4S_{\triangle PC_1D_1}+4S_{\triangle PD_1E_1}+\cdots)=\frac{1}{6}h\cdot 4S_0.$$

$$\begin{aligned} V_{\text{拟柱体}} &= \frac{1}{6}hS+\frac{1}{6}h\cdot 4S_0+\frac{1}{6}hS' \\ &= \frac{1}{6}h(S+4S_0+S'). \end{aligned}$$

棱柱、棱锥、棱台是特殊的拟柱体，它们的体积公式有下面的关系.

当拟柱体的上、下底面是对应边平行的全等多边形时, 它就是棱柱, 这时, $S'=S_0=S$，公式变为 $V=Sh$;

当拟柱体的上底面退缩成一点时，它就是棱锥，这时，$S'=0, S_0=\dfrac{1}{4}S$，公式变为 $V=\dfrac{1}{3}Sh$;

当拟柱体上、下底面是对应边平行的相似多边形时,它就是棱台.根据第 2.1.3 节例 2.7 可知,$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'}$,即 $4S_0=S+2\sqrt{SS'}+S'$,得 $V=\dfrac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$.

因此棱柱、棱锥、棱台得体积公式也都可写成

$$V=\frac{1}{6}h(s'+4S_0+S).$$

例 2.24 一草垛下部是倒长方台形, 上部是以长方台的上底为底的楔体形. 已知长方台上底面边长约为 8.4 m 和 4.2 m, 下底面边长约为 7.6 m 和 3.0 m, 高是 2.2 m. 楔体形上面的棱长约为 5.8 m, 高约为 1.5 m. 求这垛草的重量约多少千克 (每立方米的草重约 150 kg).

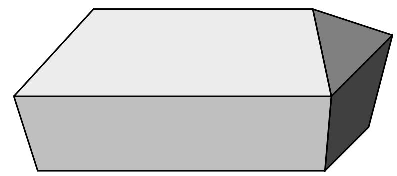


图 2.71

解: 长方台的中截面的边长分别是 $\frac{1}{2}(8.4+7.6)\,\mathrm{m}$ 和 $\frac{1}{2}(4.2+3.0)\,\mathrm{m}$.

$$\therefore\quad S_0=\frac{1}{2}(8.4+7.6)\times\frac{1}{2}(4.2+3.0)\approx 28.8\,(\mathrm{m}^2),$$
$$V_{\text{长方台}}=\frac{1}{6}\times 2.2\times(8.4\times 4.2+4\times 28.8+7.6\times 3.0)\approx 63.5\,(\mathrm{m}^3).$$

楔体是上底面面积为零的拟柱体, 它的中截面边长是 $\frac{1}{2}(8.4+5.8)\,\mathrm{m}$ 和 $\frac{1}{2}\times 4.2\,\mathrm{m}$,

$$\therefore\quad S_0=\frac{1}{2}(8.4+5.8)\times\frac{1}{2}\times 4.2\approx 14.9\,(\mathrm{m}^2),$$
$$V_{\text{楔体}}=\frac{1}{6}\times 1.5\times(4\times 14.9+8.4\times 4.2)\approx 23.7\,(\mathrm{m}^3).$$

草垛体积 $V=63.5+23.7\approx 87\,(\mathrm{m}^3)$.

重量 $W=150\times 87\approx 1.3\times 10^4\,\mathrm{kg}$.

答: 这垛草重约 $1.3\times 10^4\,\mathrm{kg}$.

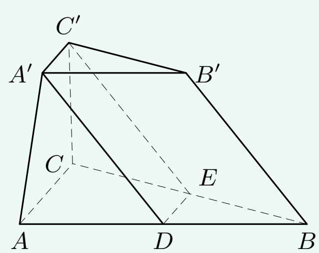
练习十九

已知拟柱体的下底面积为 $20\,\mathrm{cm}^2$, 上底面积为 $6\,\mathrm{cm}^2$, 中截面面积为 $12\,\mathrm{cm}^2$, 高为 $15\,\mathrm{cm}$. 求这个拟柱体的体积.

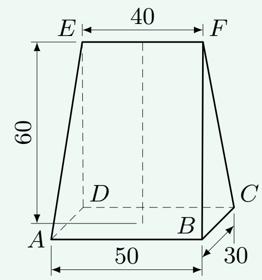
习题十四

1. 已知棱台两底面的面积分别为 $245\,\mathrm{cm}^2$, $80\,\mathrm{cm}^2$, 截得这个棱台的棱锥的高是 $35\,\mathrm{cm}$. 求这个棱台的体积.
2. 两底面边长分别是 15 m、10 m 的正三棱台, 它的侧面积等于两底面面积的和. 求这个三棱台的体积.

3. 已知棱台的体积是 $76\,\mathrm{cm}^3$，高是 $6\,\mathrm{cm}$，一个底面面积是 $18\,\mathrm{cm}^2$．求这个棱台的另一个底面面积.
4. 棱台的高为 $20\,\mathrm{cm}$，体积为 $1720\,\mathrm{cm}^3$，两底面对应边的比值是 $5:8$．求两底面面积.
5. 已知过三棱台上底面的一边与一条侧棱平行的一个截面，它的两个顶点是下底面两边的中点．求棱台被分成两部分的体积的比.



（第 5 题图）



（第 12 题图）

6. 圆台的高为 3，一个底面半径是另一个底面半径的 2 倍，母线与下底面所成的角为 $45°$．求它的体积.
7. 圆台的体积是 $234\sqrt{3}\pi\,\mathrm{cm}^3$，侧面展开图是半圆环，它的大半径等于小半径的 3 倍．求这个圆台的上底面半径.
8. 证明：当上、下底面半径的大小相近时，圆台的体积可近似地表示为 $V \approx \dfrac{1}{12}c^2h$，其中 c 是中截面周长，h 是高.
9. 有一草垛，上部是圆锥形，下部是圆台形．圆锥高 $0.7\,\mathrm{m}$，底面周长是 $5.1\,\mathrm{m}$；圆台高 $1.5\,\mathrm{m}$；下底面周长是 $4\,\mathrm{m}$．如果每立方米草重 $150\,\mathrm{kg}$，利用上题结果，估算这个草垛地重量（保留一位有效数字）.
10. 有一沙堆，它的上底面和下底面是互相平行的两个矩形，各侧面都是梯形，上底面的边长约是 $5.2\,\mathrm{m}$ 和 $3.4\,\mathrm{m}$，下底面的边长约是 $7.3\,\mathrm{m}$ 和 $4.2\,\mathrm{m}$，上下底面距离约是 $2.5\,\mathrm{m}$．求这堆沙有多少立方米?
11. 有一碴石堆，它的下底呈矩形，长宽分别是 $a\,\mathrm{m}$ 和 $b\,\mathrm{m}$，上下底面互相平行，各侧面与地面成 $45°$ 角，碴石堆高 $h\,\mathrm{m}$．求它的体积.
12. 楔体的底面 $ABCD$ 是边长为 $50\,\mathrm{cm}$ 和 $30\,\mathrm{cm}$ 的矩形，棱 EF 平行于 AB，与底面距离是 $60\,\mathrm{cm}$，长是 $40\,\mathrm{cm}$．求这个楔体的体积.
13. 长方台的上底面边长是 a、b，下底面与它们平行的边长是 a'、b'，高是 h．求证:

长方台的体积是

$$V = \frac{1}{6}h[2(ab + a'b') + ab' + a'b].$$

2.3.6 球的体积

和柱体、锥体一样，也可以应用祖暅原理推出球体的体积公式.

我们先研究半径为 R 的半球，为了应用祖暅原理，需要找到一个能够求体积的几何体，使它和半球可夹在两个平行平面之间，当用平行于这两个平面的任意一个平面去截它们时，截得的截面面积总相等.

为此，我们取一个底面半径和高都等于 R 的圆柱，从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面，下底面圆心为顶点的圆锥，把所得的几何体和半球放在同一个平面 α 上（图 2.72）. 因为圆柱的高等于 R，所以这个几何体和半球都夹在两个平行平面之间.

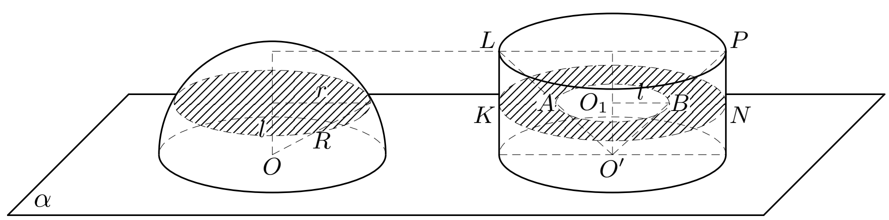


图 2.72

用平行于平面 α 的任意一个平面去截这两个几何体，截面分别是圆面和圆环面. 如果截平面与平面 α 的距离为 l，那么圆面半径 $r = \sqrt{R^2 - l^2}$，圆环面的大圆半径为 R，小圆半径为 l（因为 $\triangle O'O_1B$ 是等腰三角形）. 因此

$$S_{圆} = \pi r^2 = \pi(R^2 - l^2),$$
$$S_{圆环} = \pi R^2 - \pi l^2 = \pi(R^2 - l^2),$$
$$\therefore \quad S_{圆} = S_{圆环}.$$

根据祖暅原理，这两个几何体的体积相等，即

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}V_{球} &= \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot R\\ &= \frac{2}{3}\pi R^3.\\ \therefore\quad V_{球} &= \frac{4}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

由此，我们得到下面定理：

定理

如果球的半径是 R，那么它的体积是

$$\boxed{V_{球} = \frac{4}{3}\pi R^3.}$$

例 2.25 有一种空心钢球，重 142 g，测得外径等于 5.0 cm．求它的内径（钢比重是 7.9 g/cm^3）．

解： 设空心钢球的内径为 $2x$ cm，那么钢球的重量是

$$7.9 \cdot \left[\frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi x^3\right] = 142,$$

$$x^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \frac{142 \times 3}{7.9 \times 4\pi} \approx 11.3.$$

$$\therefore\quad x \approx 2.24,$$

$$2x \approx 4.5\,(\mathrm{cm}).$$

答：空心钢球的内径约为 4.5 cm．

练习二十

1. 球面面积膨胀为原来的二倍，计算体积变为原来的几倍．
2. 一个正方体的顶点都在球面上，它的棱长是 4 cm．求这个球的体积．

2.3.7　球缺的体积

我们常见到钢桥、轮船、锅炉上有圆头的铆钉，铆钉的圆头具有球缺的形象. 一个球被平面截下的一部分叫做**球缺**. 截面叫做**球缺的底面**，垂直于截面的直径被截下的线段长叫做**球缺的高**（图 2.73）.

显然，球缺也可以看作是球冠和截面所围成的几何体. 球缺的体积公式，可仿球的体积求法推出. 设求得半径是 R，球缺的高是 h. 利用第 2.3.6 节的图 2.72，因为已证明了平行于平面 α 的任意截面面积都分别相等，所以根据祖暅原理，球缺的体积

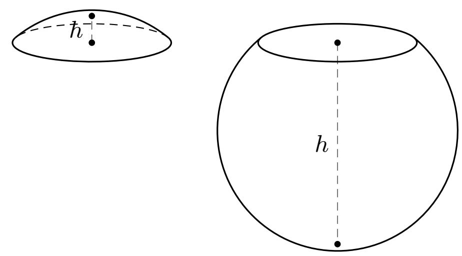


图 2.73

$$\begin{aligned}
V_{\text{球缺}} &= V_{\text{圆柱}LKNP} - V_{\text{圆柱}LABP} \\
&= \pi Rh^2 - \frac{1}{3}\pi h[R^2 + R(R-h) + (R-h)^2] \\
&= \pi Rh^2 - \frac{1}{3}\pi h^3 \\
&= \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h).
\end{aligned}$$

由此我们得到下面的定理:

定理

如果球的半径是 R，球缺的高是 h，那么球缺的体积是

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h).}$$

这个公式对于求半球，大于半球的球缺，整个球的体积都适用，例如，用 R 代 h，就得到半球的体积 $\frac{2}{3}\pi R^3$.

例 2.26　钢铆钉钉头呈球缺形，钉身呈圆柱形，尺寸如图 2.74（单位：mm）. 已知钢的比重是 $7.8\,\text{g/cm}^3$，求铆钉的重量（精确到 1 g）.

解：钉头的体积是

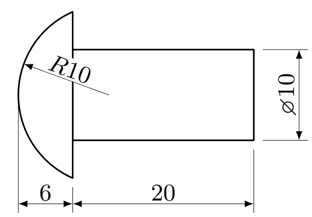


图 2.74

$$
\begin{aligned}
V_{球缺} &= \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)\\
&= \frac{1}{3}\times 3.14\times 6^2\times(3\times 10-6)\\
&\approx 904\,(\mathrm{mm}^3).
\end{aligned}
$$

钉身的体积是

$$
\begin{aligned}
V_{圆柱} &= \pi R_1^2 h_1\\
&= 3.14\times 5^2\times 20\\
&\approx 1570\,(\mathrm{mm}^3).
\end{aligned}
$$

所以铆钉的重量是 $7.8\times\dfrac{904+1570}{1000}\approx 19\,(\mathrm{g})$.

答：铆钉的重量约 19 g.

例 2.27 已知：球缺底面半径是 r，高是 h．求证：球缺的体积是

$$V_{球缺}=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2).$$

证明：设截得球缺的球的半径是 R，由直角三角形 OAH（图 2.75），

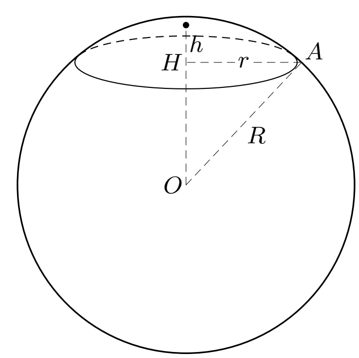


图 2.75

$$
r^2=R^2-(R-h)^2=2hR-h^2,
$$
$$
R=\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2}.
$$

代入球缺体积公式，得

$$
\begin{aligned}
V_{球缺} &= \pi h^2\left(\frac{r^2}{2h}+\frac{h}{2}-\frac{h}{3}\right)\\
&= \frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2).
\end{aligned}
$$

在生产和生活中所遇到的物体，形状虽然比较复杂，但是很多都可以看作是由柱体、锥体、台体、球体、球缺等组合（例如铆钉）或切割（例如螺帽）而成的．所

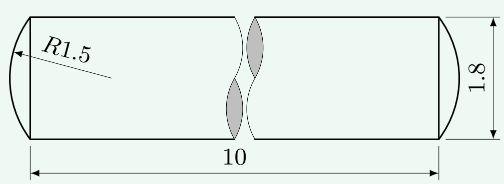
以，我们能求这些几何体的体积，就能求那些形状比较复杂的物体的体积．然而，更复杂的体积，例如环体的体积，还要在以后用积分法去解决．

练习二十一

1. 球缺的高是球的直径的 $\dfrac{1}{10}$．求它们体积的比．
2. 球缺的底面半径是球的半径的 $\dfrac{1}{2}$．体积是球的几分之几？

习题十五

1. 如果球的大圆面积增为原来的 100 倍，球的体积有什么变化？
2. 铜球由于热膨胀而使半径增加 $\dfrac{1}{1000}$，它的体积增加几分之几（精确到 0.001）？
3. 三个球的半径的比是 $1:2:3$．求证：其中最大的一个球的体积是另两个球的体积和的 3 倍．
4. 火星的直径约是地球的一半．地球体积是火星体积的几倍？地球半径约是 6370 km，地球和火星的体积各是多少？
5. 木星表面积约是地球的 120 倍．它的体积约是地球的多少倍？
6. 如果一个圆柱和一个圆锥的底面直径和高都与球的直径相等．求证：圆柱、球、圆锥体积的比是 $3:2:1$．
7. 一个多面体的各面都与一个球相切．求证：多面体的体积等于它的表面积与球的半径的积的 $\dfrac{1}{3}$．
8. 球缺的体积是 $\dfrac{\pi}{3}\,\text{cm}^3$，它的高是 $\dfrac{1}{2}\,\text{cm}$．求截得球缺的球的半径．
9. 运油车的油罐如图（单位：m），油罐能装油多少吨（油的比重是 $0.85\,\text{g/cm}^3$）



（第 9 题图）

10. 球的半径为 3 cm，在其正中钻一个半径为 1 cm 的圆孔，求剩余部分的体积．
11. 一个木球浮于水中，在水面上的球缺高为 2 cm，底面半径为 8 cm．求这个木球的重量．

小结

一、　本章的主要内容是多面体和旋转体中常见的柱、锥、台、球的概念、性质、直观图的画法以及面积、体积的计算．重点研究了应用比较广泛的直棱柱、正棱锥、正棱台、圆柱、圆锥、圆台、球和球缺．

二、　这些几何体的性质都是在第一章线面关系的基础上由定义推出来的．这些性质包括：它们的棱、面的性质；平行于底面的截面的性质；经过侧棱（或高线、轴线）的截面（或它的一部分）的性质．通过这样的研究，我们对这些几何体就有了一个比较全面的认识．

三、　本章介绍了两种直观图的画法：斜二测和正等测．画图时，可以根据情况任选一种．画多面体时，常用斜二测，画旋转体时，常用正等测．画多面体和旋转体组合图形时，多用正等测．这时，要注意不要两种方法混用．

四、　几种多面体和旋转体的表面积，除球面和球冠外，都是通过它们的展开图求得的．这些公式不但互相区别，而且互相联系．除前面讲过的关系外，直棱柱、正棱锥、正棱台、圆柱、圆锥、圆台的侧面积公式，还可以统一写成 $S_{侧} = c_0 l$，其中 c_0 是中截面周长，l 分别是侧棱、斜高或母线长．球面、球冠、球带的面积，可以统一写成 $S = 2\pi Rh$，其中 R 是球的半径，h 是高（或直径）．

五、　几种多面体和旋转体的体积公式是在两个体积公理的基础上推导出来的．在这一章里，我们是把柱体、锥体、台体当作不同的几何体定义的．如果把柱体、锥体当作台体的特殊形式，那么它们，甚至包括球体的体积公式，都可以统一写成 $V = \dfrac{1}{6}h(S + 4S_0 + S')$，其中 S、S' 是上、下底面积，S_0 是中截面面积，h 是高．

六、　本章公式较多，为了便于记忆和应用，把它们列成公式表，放在本书的附录中．

复习参考题二

A 组

1. 求证：正 n 棱柱每相邻两个侧面所成的二面角等于

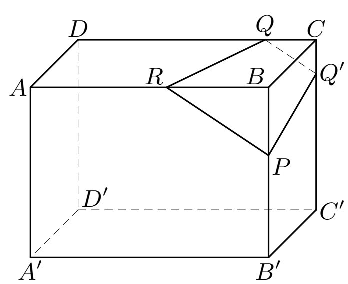
$$\frac{(n-2)\times 180^\circ}{n}.$$

2. 经过正四棱柱 AC' 的底面的一条对角线 AC 引一个平面，平行于对角线 BD'，交棱 DD' 于 P. 如果这个正四棱柱底面的边长为 a，对角线 BD' 与底面所成的角是 θ，求截面 ACP 的面积.
3. 棱锥的底面是正方形，有相邻的两个侧面垂直于底面，另外两个侧面与底面成 45° 角，最长的侧棱长为 $15\,\mathrm{cm}$. 求这个棱锥的高.
4. 一个正四棱台的斜高是 $12\,\mathrm{cm}$，侧棱的长是 $13\,\mathrm{cm}$，侧面积是 $720\,\mathrm{cm}^2$. 求它的上、下底面的边长.
5. 一个正四棱台，它的下底面边长是 $8\,\mathrm{cm}$，斜高是 $6\,\mathrm{cm}$，侧面和底面成 60° 的二面角. 画出它的直观图.
6. 已知：圆柱侧面的展开图是一个正方形. 求证：这个圆柱的侧面积等于两底面积和的 2π 倍.
7. 圆锥的母线长为 l，它和底面所成的角为 θ. 求这个圆锥的内接正方体的棱长.
8. 圆台的母线长是 l，母线和下底面所成的角是 θ. 轴截面的对角线垂直于母线. 求证：这个圆台的侧面积是 $\pi l^2\sin\theta\tan\theta$.
9. 一个球冠形凹面镜，底的直径是 $180\,\mathrm{mm}$，高是 $12\,\mathrm{mm}$. 求截得球冠的球的半径和凹面镜的面积.

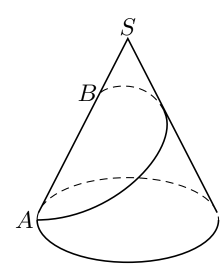
10. 在北纬 $60°$ 圈上有甲、乙两地，它们的纬度圈上的弧长等于 $\frac{\pi}{2}R$（R 是地球半径）. 求这两地间的球面距离.
11. 一个长方体 AC' 的对角线 $A'C$ 长为 l，这条对角线与一个面 AC 所成的角为 $30°$，与另一个面 AD' 所成的角为 $45°$. 求这个长方体的体积.
12. 在一个平行六面体中，一个顶点上的三条棱长分别是 a、b、c，这三条棱中每两条所成的角是 $60°$. 求平行六面体的体积.
13. 一个圆台的母线长为 $5\,\text{cm}$，两底面半径的比为 $2:5$，侧面展开图的圆心角为 $216°$. 求这个圆台的侧面积与体积.
14. 一个直角三角形的两条直角边为 $15\,\text{cm}$ 和 $20\,\text{cm}$，以斜边为轴旋转，求这个旋转体的体积.
15. 一个正方体所有的顶点都在球面上. 如果这个球的体积是 V，求正方体的棱长.
16. 一个球的半径为 $7\,\text{cm}$，用两个平行平面截去两个高为 $3\,\text{cm}$ 的球缺. 求剩余部分（球台）的体积.

B 组

17. 斜三棱柱的一个侧面的面积等于 S, 这个侧面与它所对的棱的距离等于 a. 求证：这个楞住的体积等于 $\frac{1}{2}Sa$.
18. 图中长方体 AC' 表示一个封闭的水箱. 已知：$BB' = 50\,\text{cm}$，$AB = 70\,\text{cm}$，$BC = 40\,\text{cm}$. 因为使用过久，在 BB'、CC' 和 AB 棱上各有一个小孔 P、Q、R，已量得 $BR = 30\,\text{cm}$，$BP = 20\,\text{cm}$，$CQ' = 10\,\text{cm}$. 如果水箱可以任意放置，那么最多能盛多少水?



（第 18 题图）



（第 20 题图）

19. 一个棱锥的体积是 V，把棱锥的高三等分，过两个分点的平行于底面的截面将这个棱锥分成三部分．求中间一部分的体积.
20. 有一个圆锥如图．它的底面半径为 r，母线长为 l，且 $l > 2r$，在母线 SA 上有一点 B，$AB = a$．求由 A 绕圆锥一周到 B 的最短距离是多少?
21. 如果真四棱锥的侧面是正三角形, 求证: 它的相邻两个侧面所成的二面角, 是侧面和底面所成的二面角的二倍.
22. 一个外径是 $12\,\mathrm{cm}$，壁厚为 $0.2\,\mathrm{cm}$ 的钢球，能否浮在水面上（钢的比重是 $7.8\,\mathrm{g/cm^3}$）?
23. 边长为 a 的正六边形，以它的一边为轴旋转，求旋转体的全面积和体积.

第三章　多面角和正多面体

第一节　多面角

3.1.1　多面角

相邻的两面墙壁和天花板所成的屋角，一些塔的塔顶都给我们以多面角的形象.

有公共端点并且不在同一平面内的几条射线，以及相邻两条射线间的平面部分所组成的图形，叫做**多面角**.

如图 3.1 和 3.2，都是多面角. 组成多面角的射线 SA、SB、⋯⋯叫做**多面角的棱**，这些射线的公共端点 S 叫做**多面角的顶点**，相邻两棱间的平面部分叫做**多面角的面**，相邻两棱组成的角 $\angle ASB$、$\angle BSC$、⋯⋯叫做**多面角的面角**，相邻两个面组成的二面角 E-SA-B、A-SB-C、⋯⋯叫做**多面角的二面角**.

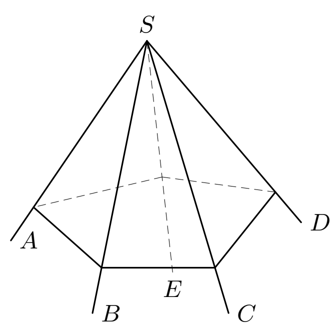


图 3.1

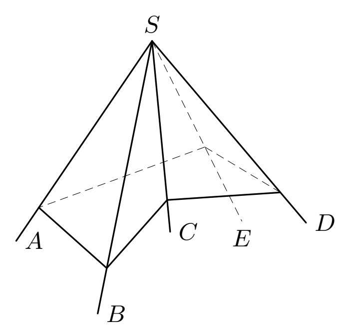


图 3.2

一个多面角的面数等于它的棱数、面角数、二面角数. 多面角最少应有三个面. 多面角依照它的面数分别叫做三面角、四面角、五面角、⋯⋯.

多面角可以用表示它的顶点和冷的字母来表示，如图 3.1 中的多面角记作多面角 $S\text{-}ABCDE$；有时也用表示顶点的一个字母表示，记作多面角 S.

将多面角的任何一个面伸展成为平面，如果其他各面都在这个平面的同侧，这样的多面角叫做**凸多面角**．图 3.1 中的多面角就是一个凸多面角，图 3.2 中的多面角不是凸多面角.

用一个平面截凸多面角的所有面和棱，一定得到一个凸多边形，如图 3.1．用平面截图 3.2 中的多面角就不能得到凸多边形.

本章只研究凸多面角．凸多面角中，最简单的是三面角，三个面角都是直角的三角形叫做**直三面角**．例如屋角、箱角、砖角，都给我们以直三面角的形象.

直三面角 $O\text{-}XYZ$ 的一般画法如图 3.3.

例 3.1 求证：直三面角的各个二面角都是直二面角.

已知：直三面角 $O\text{-}XYZ$（图 3.3）.

求证：二面角 $\beta\text{-}OX\text{-}\gamma$、$\gamma\text{-}OY\text{-}\alpha$、$\alpha\text{-}OX\text{-}\beta$ 都是直二面角.

证明： $\because$ $O\text{-}XYZ$ 是直三面角，

$\therefore$ $\angle XOY=\angle YOZ=\angle ZOX=\text{Rt}\angle$，

$OZ\perp OX$，$OY\perp OX$.

$\therefore$ $\angle YOZ$ 是二面角 $\beta\text{-}OX\text{-}\gamma$ 的平面角.

$\because$ $\angle YOZ=\text{Rt}\angle$，

$\therefore$ 二面角 $\beta\text{-}OX\text{-}\gamma$ 是直二面角.

同理，$\gamma\text{-}OY\text{-}\alpha$、$\alpha\text{-}OX\text{-}\beta$ 也是直二面角.

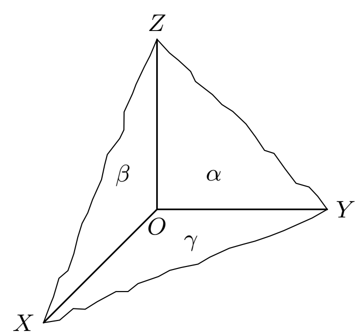


图 3.3

练习一

1. 二面角是不是多面角？多面角是不是棱锥？它们各有什么区别和联系？
2. 求证：三个二面角都是直二面角的三面角是直三面角.

3.1.2 多面角的性质

在研究多面角的性质之前，先研究三面角的一个性质：

定理

三面角的任意两个面角的和大于第三个面角.

已知：三面角 $S\text{–}ABC$（图 3.4）.

求证：$\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC$.

证明： 当 $\angle ASC \leqslant \angle ASB$ 时，显然 $\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC$.

现在设 $\angle ASC > \angle ASB$. 在面 ASC 上作线段 SD'，使 $\angle ASD' = \angle ASB$，过 D' 引与各棱都相交的平面 $A'B'C'$，使 $SB' = SD'$. 这时，

$$\triangle A'SB' \cong \triangle A'SD',$$

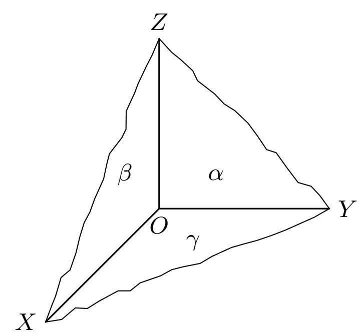


图 3.4

$\therefore\quad A'B' = A'D'$.

在 $\triangle A'B'C'$ 中，$A'B' + B'C' > A'C'$，同时，$A'D' + D'C' = A'C'$，由此得到 $B'C' > D'C'$.

在 $\triangle B'SC'$ 和 $\triangle D'SC'$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle B'SC' < \cos\angle D'SC'$.

所以，$\angle B'SC' > \angle D'SC'$，即 $\angle BSC > \angle D'SC$.

因此，$\angle ASB + \angle BSC > \angle ASD' + \angle D'SC$,

就是，$\angle ASB + \angle BSC > \angle ASC$.

这里我们注意到，如果使三面角的面与三角形的边对应，三面角的二面角与三角形的内角对应，那么三面角的一些性质与三角形类似. 因此，有些三面角的问题，常归结为三角形的问题来研究.

多面角有下面的性质:

定理

凸多面角所有面角的和小于四直角.

已知：凸 n 面角 $S\text{-}ABC\cdots E$（图 3.5）.

求证：$\angle ASB + \angle BSC + \cdots + \angle ESA < 4\cdot\mathrm{Rt}\angle$.

证明: 用平面截已知多面角的所有面和棱, 得到凸 n 边形 $A'B'C'\cdots E'$. 根据前面的定理, 以 A'、B'、C'、$\cdots$、E' 为顶点的各三面角的面角有下面的关系:

$$\angle SA'E' + \angle SA'B' > \angle E'A'B',$$
$$\angle SB'A' + \angle SB'C' > \angle A'B'C',$$
$$\angle SC'B' + \angle SC'D' > \angle B'C'D'.$$
$$\cdots\cdots$$

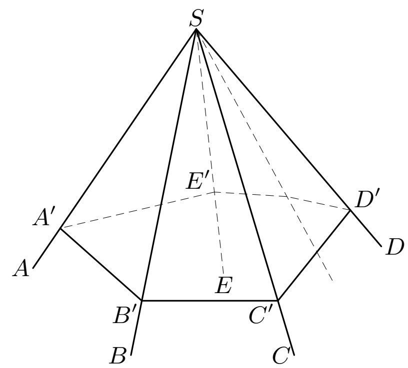


图 3.5

用 Σ 表示已知多面角的所有面角的和,

$$\Sigma = \angle ASB + \angle BSC + \cdots + \angle ESA.$$

将上面各不等式两边分别相加, 左边是 n 个三角形: $\triangle A'SB'$、$\triangle B'SC'$、$\cdots$、$\triangle E'SA'$ 内角的和 $2n\cdot \mathrm{Rt}\angle$ 减去已知多面角的和 Σ; 右边是凸多边形 $A'B'C'\cdots E'$ 所有内角的和, 它等于 $2(n-2)\cdot \mathrm{Rt}\angle$, 因此,

$$2n\cdot \mathrm{Rt}\angle - \Sigma > 2(n-2)\cdot \mathrm{Rt}\angle,$$

即

$$\Sigma < 4\cdot \mathrm{Rt}\angle.$$

这个定理表明, 如果沿凸多面角的一个棱剪开, 把它展在平面上, 那么它不能铺满一个周角, 而是缺少一部分 (图 3.6).

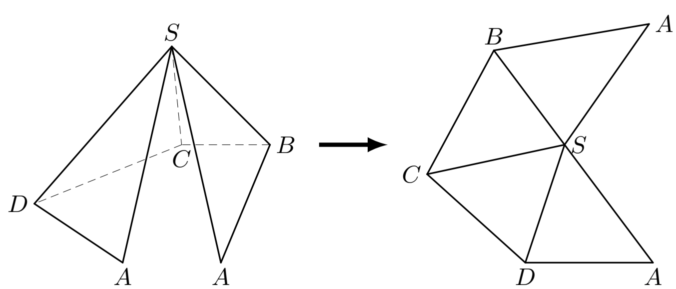


图 3.6

练习二

1. 下面各组面角能否构成三面角？为什么？

    (1)　45°、65°、120°；　　　　(2)　100°、90°、150°.

2. 下面各组面角能否构成四面角？为什么？

    (1)　45°、65°、120°、95°；　　　　(2)　175°、105°、120°、60°.

3. 证明：三面角的任何一个面角大于其他两个面角的差.

习题十六

1. 在三面角中，如果有两个二面角是直二面角，那么它们所对的两个面角都是直角. 为什么？
2. 直三面角内有一点 P，它到各面的距离分别是 x、y、z. 用 x、y、z 表示点 P 到三面角顶点 O 的距离.
3. 直三面角 O-XYZ 内有一点 P，OP 在三面角三个面上的射影长分别是 a、b、c. 求证：$OP=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.
4. 在三面角 S-ABC 中，$\angle BSC=90°$，$\angle ASB=\angle ASC=60°$.

    (1)　设 $SA=SB=SC$. 求证：经过三点 A、B、C 的平面垂直于 $\angle BSC$ 所在的平面；

    (2)　求证：SA 与 $\angle BSC$ 所在的平面成 45° 的角.

5. 下面各组面角能否构成三面角？为什么？

    (1)　75°、45°、90°；　　(2)　82°、56°、26°；　　(3)　130°、85°、36°.

6. 求证：空间四边形每相邻两边所成的四个角的和小于四直角.
7. 求证：凸多面角的任何一个面角小于其他面角的和.
8. 下面各组面角能够构成四面角？为什么？

    (1)　50°、70°、100°、150°；　　　　(2)　150°、30°、70°、40°.

第二节　正多面体、多面体变形

3.2.1　正多面体

常见的食盐的结晶（图 3.7）、明矾的结晶（图 3.8）都呈正多面体的形状.

每个面都是由同数边的正多边形，在每个顶点都有同数棱的凸多面体，叫做**正**

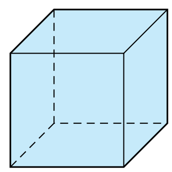


图 3.7

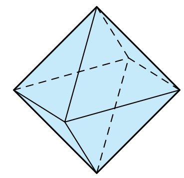


图 3.8

多面体. 例如，正方体的所有面都是正方形，在各个顶点都有三条棱，而且是凸多面体，所以正方体就是一种正多面体.

我们知道，正多边形有无限种，那么正多面体能有多少种呢？现在来研究这个问题.

设正多面体的所有面都是正 n 边形，在每个顶点的棱数都是 m，也就是说，每个顶点都是一个 m 面角的顶点.

由于凸 m 面角的面角都是正 n 边形的内角，而正 n 边形的内角和等于 $\dfrac{2(n-2)\cdot\mathrm{Rt}\angle}{n}$，所以凸 m 面角所有面角的和等于 $\dfrac{[2(n-2)\cdot\mathrm{Rt}\angle]\cdot m}{n}$. 根据凸多面角的性质定理，下面不等式成立：

$$\frac{[2(n-2)\cdot\mathrm{Rt}\angle]\cdot m}{n} < 4\cdot\mathrm{Rt}\angle.$$

化简得

$$m(n-2) < 2n,$$

也就是

$$m < \frac{2n}{n-2}\,(m\text{、}n \text{ 都是不小于 } 3 \text{ 的正整数}).$$

解这个不等式，

因为 $n>5$ 时，$m<3$ 不合题意，所以 n 不能大于 5.

因此，我们只能得到关于 m、n 的如下五个数对：

$$(3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,3),\ (5,3).$$

这就是说，正多面体只能有五种：用正三角形做面的正四面体、正八面体、正二十面体，在它们每个顶点的棱数分别是 3、4、5；用正方形做面的正六面体，在它每

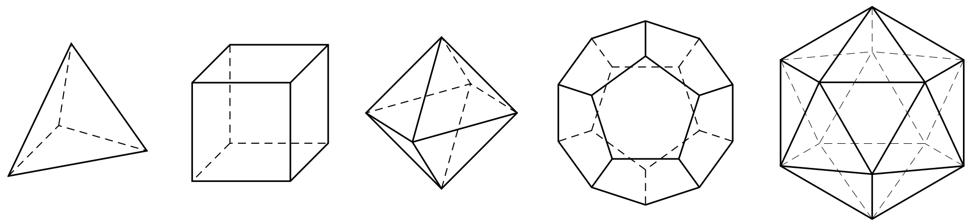


图 3.9

个顶点的棱数是 3；用正五边形做面的正十二面体，在它每个顶点的棱数是 3．这五种正多面体如图 3.9 所示.

五种正多面体的表面展开图如图 3.10．作为课外研究，可画它 10 倍大的展开图，然后粘成正多面体模型，加以观察.

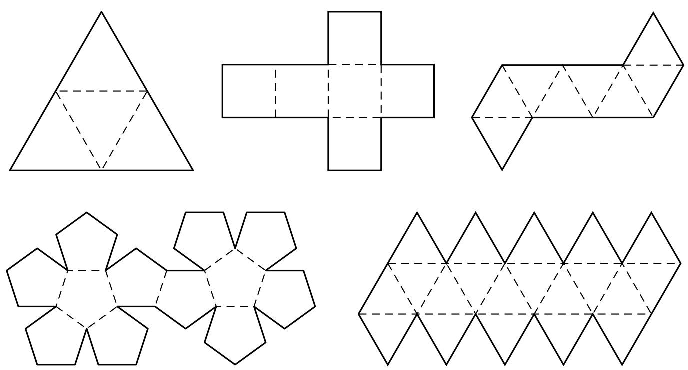


图 3.10

数一数每种正多面体的顶点数、面数、棱数，分别填在下面表格内，研究每种正多面体的顶点数、面数与棱数，能否发现它们之间有什么共同关系？

正多面体	顶点数	面数	棱数
正四面体			
正六面体			
正八面体			
正十二面体			
正二十面体			

练习三

1. 以正多面体的各面中心为顶点的多面体都是几面体？参照模型看它们是不是正多面体？
2. 设正十二面体的棱长为 a，求它的表面积.

3.2.2 多面体的变形

我们考虑任意一个多面体，例如正六面体，假定它的面是用橡胶薄膜做成的. 如果充以气体，那么它就会连续（不破裂）变形，最后可以变为一个球面（图 3.11）.

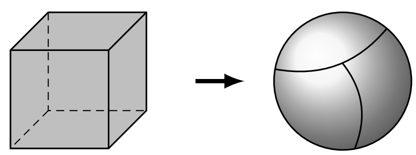


图 3.11

像这样，表面连续变形，可变形为球面的多面体叫做**简单多面体**. 棱柱、棱锥、棱台、正多面体、凸多面体都是简单多面体.

除简单多面体外，还有不是简单多面体的几何体，例如将正方体挖去一个洞所得的几何体（图 3.12）. 这样的几何题的表面连续变形后就不能变为一个球面，而能变为一个环面.

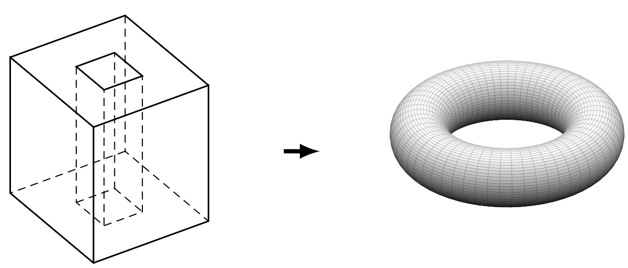


图 3.12

我们曾研究过五种正多面体，发现它们的顶点数 V、棱数 E 和面数 F 有下面关系：

$$V + F - E = 2.$$

现在用连续变形的方法研究简单多面体，看它的顶点数 V、棱数 E 和面数 F 是否也有这种关系．以四面体 $ABCD$ 为例，将它的一个面 BCD 去掉，再使它变形为平面图形（图 3.13）．这时，四面体的顶点数 V、棱数 E 与剩下的面数 F_1，变形后都没有变．因此，要研究 V、E、F 之间的关系，研究平面图形即可．我们来研究

$$V + F_1 - E$$

的数值．可按下面两步进行:

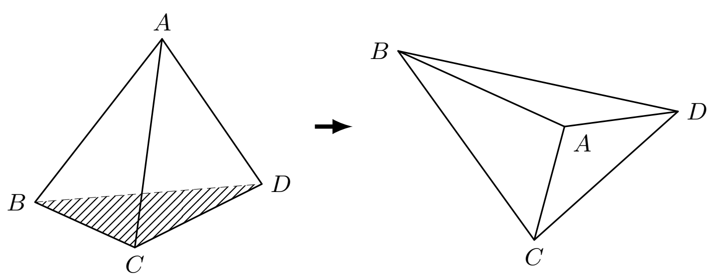


图 3.13

(1) 去掉一条棱，就减少一个面．例如去掉 BC，就减少一个面 ABC．同理，去掉棱 CD、BD 时，也都随着各减少一个面 ACD、ABD（图 3.14），由于 $F_1 - E$、V 的值都不变，因此，$V + F_1 - E$ 的值不变.

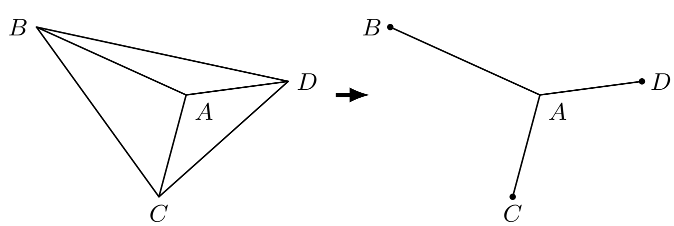


图 3.14

(2) 再从剩下的树枝形，去掉一条棱，就减少一个顶点．例如去掉 CA，则减少一个顶点 C．同理，去掉棱 DA 随着减少一个顶点 D，最后剩下 AB（图 3.15）．在此过程中 $V - E$ 的值都不变．但此时因为面数 F_1 都是 0，所以 $V + F_1 - E$ 的值也不变．由于最后只剩下 AB，因此

$$V + F_1 - E = 2 + 0 - 1 = 1.$$

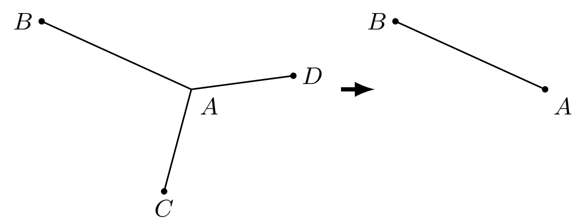


图 3.15

最后，加上最初去掉的一个面，得到

$$V+F-E=2.$$

因为对任意的简单多面体，应用这样的方法，最后都是只剩下一条线段，因而都得到上面的结果，所以可把它写成下面的定理:

定理 欧拉定理

简单多面体的顶点数 V、棱数 E、面数 F，有下面的关系

$$\boxed{V+F-E=2.}$$

这个定理叫做**欧拉定理**. 它表明 2 这个数是简单多面体表面在连续变形下不变的数.

例 3.2 一个简单多面体的面都是三角形. 求证：$F=2V-4$.

证明: 因为已知多面体的每个面有三条边，每相邻两个面的两条边重合为一条棱，所以棱数 $E=\dfrac{3F}{2}$，代入公式 $V+F-E=2$，得

$$V+F-\frac{3F}{2}=2.$$

化简得

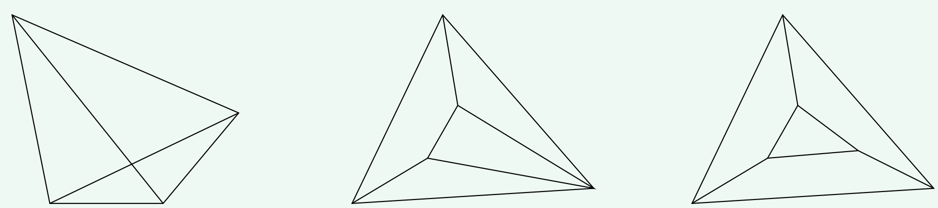
$$F=2V-4.$$

练习四

1. 检查六棱柱、五棱锥、四棱台，看它们的顶点数、棱数、面数是否适合欧拉定理.
2. 简单多面体，凸多面体、正多面体、棱柱、棱锥、棱台的包含关系如何？用图表示.

习题十七

1. 求棱长为 a 的正八面体的对角线长.
2. 以四面体的高和棱为一边分别作正方形．求证：这两个正方形的面积比是 $2:3$.
3. 正六面体各面中心是一个正八面体的顶点．求这个正六面体和正八面体的表面积的比.
4. 正 n（$n=4,8,20$）面体的棱长为 a，求它们表面积的共同公式.
5. 正二十面体的棱长为 a，连结相对顶点的对角线为 b，求它的体积.
6. 求证：平行于正四面体的相对棱的平面，截这个正四面体的截面是一个矩形.
7. 就下面平面图形验证 $V+F-E=1$.



（第 7 题图）

8. 已知：凸多面体的各面都是四边形，求证：$F=V-2$.

小结

一、　本章的主要内容是多面角的概念及其主要性质，在此基础上研究正多面体，并用连续变形（也叫“拓扑变形”）的方法证明关于简单多面体的欧拉定理.

二、　作为多面角的特殊情形，定义了凸多面角的概念，并指出三面角和直三面角又是凸多面角的特殊情形．然后研究三面角的性质，并在此基础上推出凸多面角的性质.

三、　定义正多面体的概念，并根据多面角的性质推出正多面体只有物种：正四面体、正六面体（正方体）、正八面体、正十二面体、正二十面体.

四、　研究简单多面体，推出它的表面在连续变形下的不变性质：欧拉定理

$(V+F-E=2)$. 因为简单多面体包括凸多面体因而也包括正多面体，所以欧拉定理对于这些多面体也同样适用.

复习参考题三

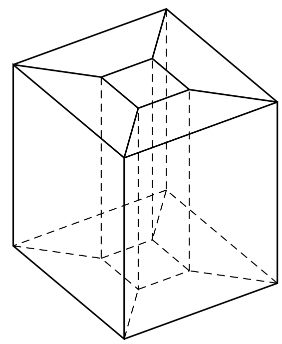
A 组

1. 解答:
   (1) 用正三角形做面可以组成几种多面角? 为什么?
   (2) 用正方形做面可以组成几种多面角? 为什么?
   (3) 用正五边形做面可以组成几种多面角? 为什么?
   (4) 能否用正六边形做面组成三面角? 为什么?
2. 在直三面角 $S\text{-}ABC$ 的三个棱上，取 $SA = SB = SC = a$.
   (1) 求直线 AB 与 SC 的距离;
   (2) 求点 C 与直线 AB 的距离;
   (3) 求以 SAB、CAB 为面的二面角的大小.
3. 已知正四面体所有面的中心，是一个正四面体的顶点，画出这个正四面体.
4. 线段 AC、BD、EF 相等，并且两两互相垂直平分于点 O. 求证: A、B、C、D、E、F 是正八面体的六个顶点.
5. 已知: 一个简单多面体的各个顶点都有三条棱. 求证: $V = 2F - 4$.

B 组

6. 在三面角 $S\text{-}ABC$ 中，$\angle ASB = \angle ASC = 45°$，$\angle BSC = 60°$. 求证: $\angle BSC$ 所对的二面角是直二面角.
7. 直三面角的三个面被任意平面所截. 求证: 截得的三角形的垂心是三面角的顶点在截面上的射影.

8. 已知正十二面体的十二个面的中心是一个正二十面体的顶点，画出这个正二十面体.
9. 对于图中多面体，求 $V+F-E$ 的值.

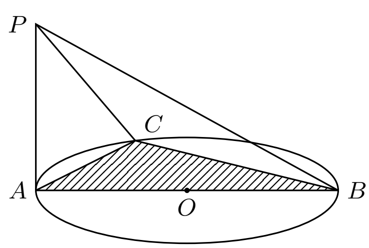


（第 9 题图）

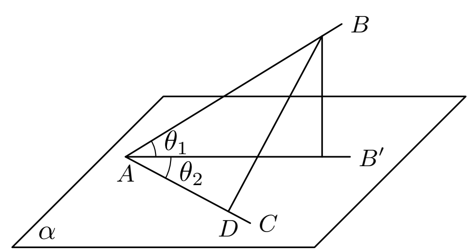
总复习参考题

A 组

1. AB、BC、CD 是不在同一平面内的线段．求证：经过它们中点的平面和 AC 平行，也和 BD 平行.
2. 如图，AB 是圆 O 的直径，PA 垂直于圆 O 所在的平面，C 是圆周上的任意点．求证：$\triangle PAC$ 所在的平面垂直于 $\triangle PBC$ 所在的平面.



（第 2 题图）



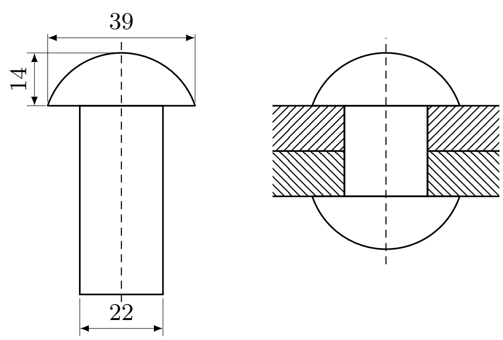
（第 3 题图）

3. 如图，AB 和平面 α 所成的角是 θ_1，AC 在平面 α 内，AC 和 AB 的射影 AB' 成角 θ_2，设 $\angle BAC = \theta$．求证：

$$\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \cos\theta.$$

4. 在 $60°$ 的二面角 α-AB-β 中，$AC \subset \alpha$，$BD \subset \beta$，且 $AC \perp AB$，$BD \perp AB$. 已知 $AB = AC = BD = \alpha$，求 CD 的长.
5. 将正方体截去一个角．求证：截面是锐角三角形.
6. 已知圆锥底面半径是 r，母线长是 $2r$，用平行于底面的平面把这个圆锥表面截成相等的两部分．求截下的圆锥的母线长.

7. 要使电视卫星的电波，能直射到地球表面积的 $\frac{1}{3}$，卫星要发射到多高?
8. 三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，侧棱 SA、SB、SC 的长分别是 a、b、c，又 $\angle ASB = 60°$，$\angle ASC = \angle BSC = 90°$，求这个棱锥的体积.
9. 圆柱的底面半径是 10 cm，高是 15 cm，平行于轴的截面在底面上截得的弦等于底面半径. 求圆柱被截去部分的体积.
10. 圆台的两底面半径分别是 a 和 b ($a > b$)，求这个圆台的体积与截得它的圆锥的体积的比.
11. 面积为 $2512\,\text{cm}^2$ 的铝板，经冲压制成圆柱形铝桶，如果铝桶的面积和铝板面积相等，高是 10 cm. 求这种铝桶的容积.
12. 长江大桥的钢梁结构使用铆钉铆合的（如图，单位：mm）. 铆钉头是球缺形，钉身是圆柱形，铆钉插入两块钢板铆合后，两侧钉头大小相等. 已知每块钢板厚 12 mm，求钉身长度.



（第 12 题图）

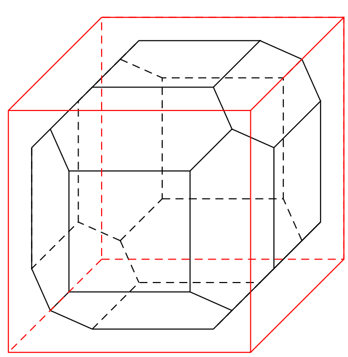
13. 分别以直角三角形的斜边、两直角边所在直线为轴，旋转这个直角三角形所得的三个旋转体体积为 V、V_1、V_2. 求证:

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}.$$

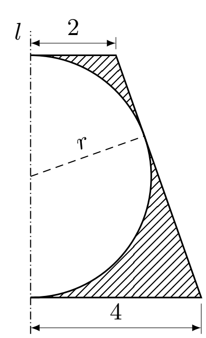
14. 正方体、等边圆柱（即底面直径与母线相等)、球的体积相等时，哪一个全面积最小?
15. 从平面外一点像平面引两条斜线，其中一条与平面成 70° 角，另一条与平面成 15° 角. 求这两条斜线组成的最大角、最小角各为多少度.

B 组

16. 求证：过一点和一条直线垂直的所有直线都在一个平面内.
17. 在120° 角的二面角 α-a-β 中，$A \in \alpha$，$B \in \beta$.
18. 空气中有一气球，它和地面的距离是 h. 在气球的东南 A 处看气球时，仰角是 θ_1；同时在气球的西南 B 处看气球时，仰角是 θ_2. A、B 两地的距离是 a. 求证：
$$h = \frac{a}{\sqrt{\cot^2\theta_1 + \cot^2\theta_2}}.$$
19. 将半径为 R 的四个球，两两相切地放在桌面上，求上面一个球的球心到桌面的距离.
20. 要从半径为 210 cm 的圆形铁皮上剪下一些扇环做成漏斗. 漏斗一端的直径是 40 cm，另一端直径是 140 cm，母线长 150 cm. 计算这块铁皮能做几个漏斗，怎样剪法?
21. 测定某些材料的硬度，可用标准钢球（直径 10 mm）放在材料上，加上一定的压力 P kg，将材料表面压成球冠形凹痕. 设凹痕的面积是 $S\,\text{mm}^2$，这时材料的硬度是 $P/S\,\text{kg/mm}^2$. 如果所加压力是 3×10^3 kg，凹痕直径是 4.1 mm，计算这材料的硬度.
22. 如图，将正方体的棱分成 4 等分，在 $\frac{1}{4}$ 处截取各棱角的到一个多面体，正方体体积减少几分之几（不证)?



（第 22 题图）

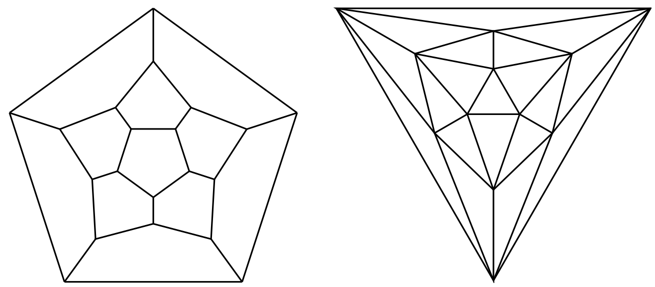


（第 23 题图）

23. 求图中阴影部分绕轴 l 旋转所成的旋转体的全面积和体积.

24. 一个圆锥侧面的母线和底面直径相等（等边圆锥），有一内切球．已知圆锥底面直径为 $2r$，求球的体积．

25. 下图是正十二面体、正二十面体的表面去掉一个面后，连续变形所成的平面图形．数出它们的顶点数 V、棱数 E 及面数 F 来验证 $V+F-E=1$.



（第 25 题图）

26. 求证：如果简单多面体的所有面都是奇数边的多边形，那么面数是偶数．

附录　公式表

第一章 异面直线上两点间距离公式

$$EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}.$$

第二章

<table>
<tr><th>图形</th><th>侧面积公式</th><th>体积公式</th></tr>
<tr><td rowspan="4">多面体</td><td>$S_{直棱柱侧}=ch$</td><td>$V_{棱柱}=Sh$</td></tr>
<tr><td>$S_{正棱锥侧}=\frac{1}{2}ch'$</td><td>$V_{棱锥}=\frac{1}{3}Sh$</td></tr>
<tr><td>$S_{正棱台侧}=\frac{1}{2}(c+c')h'$</td><td>$V_{棱台}=\frac{1}{3}h(S+\sqrt{SS'}+S')$</td></tr>
<tr><td></td><td>$V_{拟柱体}=\frac{1}{6}h(S+4S_0+S')$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">旋转体</td><td>$S_{圆柱}=cl=2\pi rl$</td><td>$V_{圆柱}=\pi r^2h$</td></tr>
<tr><td>$S_{圆锥}=\frac{1}{2}cl=\pi rl$</td><td>$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi r^2h$</td></tr>
<tr><td>$S_{圆台}=\frac{1}{2}(c+c')l=\pi(r+r')l$</td><td>$V_{圆台}=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rr'+r'^2)$</td></tr>
<tr><td>$S_{球}=4\pi R^2$</td><td>$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$</td></tr>
<tr><td>$S_{球冠}=2\pi Rh=\pi(r^2+h^2)$</td><td>$V_{球缺}=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)=\frac{1}{6}\pi h(3r^2+h^2)$</td></tr>
</table>

第三章 欧拉公式

$$V+F-E=2.$$

责任编辑：张晨南

封面设计：张晨南

定价：142.00元