中学经典教材丛书

TEXTBOOK FOR MIDDLE SCHOOL CALCULUS

微积分初步 (甲种本)

全一册

人民教育出版社数学室 编

同济极客出版社

TEXTBOOK FOR MIDDLE SCHOOL CALCULUS

微积分初步 (甲种本)

人民教育出版社数学室编

献给:奔赴高考的莘莘学子

同济极客出版社

*** 内容简介 ***

本书供六年制中学高中三年级选用.本书内容包括极限;导数和微分;导数的应用;不定积分;定积分及其应用.学完这些内容,约需84课时.本书习题共分三类:练习、习题、复习参考题.练习主要供课堂练习用;习题主要供课内外作业用;复习参考题分A、B两组.A组供复习本章知识时使用;B组题略带综合性、灵活性,仅供学有余力的学生参考使用.练习、习题及复习参考题A组题的题量较多,教学时可根据情况选用.本书在编写过程中,曾参考了中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本(试用本)《数学》第四册的有关章节,大部分内容是以原来章节为基础编写的.本书由人民教育出版社数学室编写.参加编写的有方明一、刘远图、曾宪源、于琛等,全书由于琛校订.

责任编辑 张晨南

封面设计 张晨南

出版发行 同济极客出版社

网 址 http://www.tjad.cn

开 本 216 mm×279 mm

版 次 2024年12月12日发行 2025年1月7日印刷

定 价 58.00元

(本书只用于个人学习交流,严禁用于商业用途)

目录

| 第一章 | 极限 | | 1 |
|-----|-------|---------------------|---|
| | 1.0.1 | 数列的极限 | 1 |
| | 1.0.2 | 数列极限的四则运算 | 4 |
| | 1.0.3 | 函数的极限 | 5 |
| | 1.0.4 | 函数极限的四则运算法则 | 5 |
| | 1.0.5 | 函数的连续性 | 6 |
| | 1.0.6 | 两个重要的极限 | 6 |
| 第二章 | 导数和 | l微分 | 1 |
| 第一 | 节 导数 | 如概念 | 1 |
| | 2.1.1 | 瞬时速度 | 1 |
| | 2.1.2 | 导数 | 1 |
| | 2.1.3 | 导数的几何意义 切线方程和法线方程 1 | 1 |
| | 2.1.4 | 函数的可导性与连续性的关系 | 2 |
| 第二 | 节 求导 | 异方法 | 3 |
| | 2.2.1 | 几种常见函数的导数 | 3 |
| | 2.2.2 | 函数的和、差、积、商的导数 13 | 3 |
| | 2.2.3 | 复合函数的导数 13 | 3 |
| | 2.2.4 | 三角函数的导数 14 | 4 |
| | 2.2.5 | 反三角函数的导数 14 | 4 |
| | 2.2.6 | 对数函数的导数 18 | 5 |

| | 2.2.7 | 指数函数的导数 15 |
|-----|--------|-----------------|
| | 2.2.8 | 幂函数的导数 |
| | 2.2.9 | 隐函数的导数 |
| | 2.2.10 | 二阶导数 |
| 第三 | 节微分 | } 17 |
| | 2.3.1 | 微分概念 17 |
| | 2.3.2 | 微分的运算 17 |
| | 2.3.3 | 近似计算 17 |
| 第三章 | 导数的 | J 应用 21 |
| 第一 | 节 一隊 | ```导数的应用 |
| | 3.1.1 | 预备知识 21 |
| | 3.1.2 | 函数的单调性 |
| | 3.1.3 | 函数的极大值与极小值 22 |
| | 3.1.4 | 函数的最大值与最小值 22 |
| 第二 | 节 二阶 | 个导数的应用 |
| | 3.2.1 | 预备知识 24 |
| | 3.2.2 | 函数极值的判定 24 |
| | 3.2.3 | 曲线的凸向和拐点 24 |
| | 3.2.4 | 函数的图像 |
| 第四章 | 不定积 | 分 29 |
| | 4.0.1 | 原函数 |
| | 4.0.2 | 不定积分 |
| | 4.0.3 | 基本积分公式 |
| | 4.0.4 | 不定积分的运算法则 |
| | 4.0.5 | 直接积分法 |
| | 4.0.6 | 换元积分法 |
| | 4.0.7 | 分部积分法 |
| | 4.0.8 | 积分表的用法 |

| | | | E | 目录 │ iii |
|-----|-------|----------|---|----------|
| 第五章 | 定积分 | 及其应用 | | 35 |
| 第一 | 节 定积 | 只分的概念和计算 | | 35 |
| | 5.1.1 | 定积分的概念 | | 35 |
| | 5.1.2 | 微积分基本公式 | | 35 |
| 第二 | 节 定积 | 只分的应用 | | 36 |
| | 5.2.1 | 平面图形的面积 | | 36 |
| | 5.2.2 | 旋转体的体积 | | 36 |
| 附录一 | 简易积 | 分表 | | 43 |

第一章 极限

1.0.1 数列的极限

我们来考察下面两个数列:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$$
 (1.1)

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \dots, 1 - \frac{1}{2^n}, \dots$$
 (1.2)

为了直观起见, 我们把这两个数列中的前几项分别在数轴上表示出来(图 1.1):

(a)

(b)

图 1.1

容易看出,当项数 n 无限增大时,数列 (1.1) 中的项无限趋近于 0,数列 (1.2) 中的项无限趋近于 1.

事实上, 在数列 (1.1) 中, 各项与 0 的差的绝对值如表 1.1 所示.

我们看到,无论预先指定多么小的一个正数 ε ,总能在数列 (1.1) 中找到这样一项,使得这一项后面的所有项与 0 的差的绝对值都小于 ε . 例如,如果取 $\varepsilon=\frac{1}{5}$,那么数列 (1.1) 中第 5 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 ε . 如果取 $\varepsilon=\frac{1}{100}$,那么数列 (1.1) 中第 100 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 ε . 在这种情况下,我们就说数列 (1.1) 的极限是 0.

7

1

...

| 项号 | 项 | 这一项与 0 的差的绝对值 |
|----|---------------|--|
| 1 | 1 | 0-1 = 1 |
| 2 | $\frac{1}{2}$ | $\left 0 - \frac{1}{2}\right = \frac{1}{2}$ |
| 3 | $\frac{1}{3}$ | $\left 0 - \frac{1}{3}\right = \frac{1}{3}$ |
| 4 | $\frac{1}{4}$ | $\left 0 - \frac{1}{4}\right = \frac{1}{4}$ |
| 5 | $\frac{1}{5}$ | $\left 0 - \frac{1}{5}\right = \frac{1}{5}$ |
| 6 | $\frac{1}{6}$ | $\left 0 - \frac{1}{6}\right = \frac{1}{6}$ |

表 1.1 数列 (1.1) 各项与 0 的差的绝对值

表 1.2 数列 (1.2) 各项与 0 的差的绝对值

| 项号 | 项 | 这一项与 1 的差的绝对值 | |
|----|-------------------|--|--|
| 1 | $\frac{1}{2}$ | $\left \frac{1}{2} - 1 \right = \frac{1}{2} = 0.5$ | |
| 2 | $\frac{3}{4}$ | $\left \frac{3}{4} - 1 \right = \frac{1}{4} = 0.25$ | |
| 3 | $\frac{7}{8}$ | $\left \frac{7}{8} - 1 \right = \frac{1}{8} = 0.125$ | |
| 4 | $\frac{15}{16}$ | $\left \frac{15}{16} - 1\right = \frac{1}{16} = 0.0625$ | |
| 5 | $\frac{31}{32}$ | $\left \frac{31}{32} - 1 \right = \frac{1}{32} = 0.03125$ | |
| 6 | $\frac{63}{64}$ | $\left \frac{63}{64} - 1 \right = \frac{1}{64} = 0.015625$ | |
| 7 | $\frac{127}{128}$ | $\left \frac{127}{128} - 1 \right = \frac{1}{128} = 0.0078125$ | |
| | | | |

同样,对于数列 (1.2),我们也可以列成表 1.2.

可以看出,如果取 $\varepsilon = 0.1$,那么数列 (1.2) 中第 3 项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于 ε ;如果取 $\varepsilon = 0.01$,那么第 6 项后面所有的项与 1 的差的绝对值都小于 ε . 就是说,无论预先指定多么小的一个正数 ε ,总能在数列 (1.2) 中找到这样一项,使得这一项后面的所有项与 1 的差的绝对值都小于 ε . 这时,我们说数列 (1.2) 的极限是 1.

一般地,对于一个无穷数列 $\{a_n\}$,如果存在一个常数 A,无论预先指定多么小的正数 ε ,都能在数列中找到一项 a_N ,使得这一项后面所有的项与 A 的差的绝对值都小于 ε (即当 n>N 时, $|a_n-A|<\varepsilon$ 恒成立),就把常数 A 叫做**数列** $\{a_n\}$ 的极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.^{\textcircled{1}}$$

这个式子读作"当 n 趋向于无穷大时, a_n 的极限等于 A"." \rightarrow "表示"趋向于"," ∞ "表示"无穷大"," $n \rightarrow \infty$ "表示"n 趋向于无穷大",也就是 n 无限增大的意思.

 $\lim_{n \to \infty} a_n = A$ 有时也可记作

从数列极限的定义可以看出,数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限,是指当 n 无限增大时,数列 $\{a_n\}$ 中的项 a_n 无限趋近于常数 A.

例 1.1 已知数列

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots, (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, \cdots$$

- (1) 写出这个数列的各项与 0 的差的绝对值.
- (2) 第几项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 0.1 ? 都小于 0.001 ? 都小于 0.0003?
 - (3) 第几项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于任何预先指定的正数 ε ?

① lim 是拉丁文 limis(极限)一词的前三个字母,一般按英文 limit (极限)一词读音. $\lim_{n \to \infty} a_n = A$ 也可读作 "limit a_n 当 n 趋于无穷大时等于 A".

4 第一章 极限

(4) 0 是不是这个数列的极限?

解: 这个数列的项在数轴上的表示如图 1.2:

图 1.2

(1) 这个数列的各项与 0 的差的绝对值依次是

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$

(2) 要使 $\frac{1}{n} < 0.1$, 只要 n > 10 就行了. 这就是说,第 10 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 0.1.

要使 $\frac{1}{n}$ < 0.001,只要 n > 1000 就行了. 这就是说,第 1000 项后面所有的项与 0 的差的绝对值都小于 0.001.

要使 $\frac{1}{n}$ < 0.0003,只要 $n > 3333\frac{1}{3}$ 就行了. 这就是说,第 3333 项后面所有的 项与 0 的差的绝对值都小于 0.0003.

(3)

(4)

Q 练习一

1.

2.

1.0.2 数列极限的四则运算

Q 练习二

1.

2.

3.

☑ 习题一 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15.

1.0.3 函数的极限

1. 2. 3. 4. 5.

1.0.4 函数极限的四则运算法则

 Q 练习四

 1.

 2.

6 第一章 极限

| | ☑️习题二 |
|---------|----------------|
| 1. | 2 1/2 |
| 2. | |
| 3. | |
| 4. | |
| | |
| | |
| 1.0.5 選 | 函数的连续性 |
| Q 练习五 | |
| 1. | |
| 2. | |
| | |
| Q 练习六 | |
| 1. | |
| 2. | |
| 3. | |
| 4. | |
| | |
| | |
| 1.0.6 两 | 有个重要的极限 |
| Q练习七 | |
| 1. ; | |
| 2 | |
| | |
| | ☑️习题三 |
| 1. | |
| 2. | |
| 3. | |
| 4. | |
| 5. | |
| 6. | |
| 7. | |

小结

一、 二、 三、 四、

复习参考题一

A 组

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

Β组

1.

2.

3.

4.

5.

6.

10 第一章 极限

7.

8.

9.

第二章 导数和微分

第一节 导数概念

2.1.1 瞬时速度

| Q 练习一 |
|-------|
| |
| 1. |
| 2. |
| |

2.1.2 导数

Q 练习二 1. 2. 3.

2.1.3 导数的几何意义 切线方程和法线方程

| (| Q 练习三 |
|---|--------------|
| | 1. |
| | 2. |
| | 3. |

变化率举例

Q 练习四

- 1.
- 2.
- 3.

2.1.4 函数的可导性与连续性的关系

Q 练习五

🗹 习题四

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7. 8.
- 9.
- 10.
- 11.

第二节 求导方法

2.2.1 几种常见函数的导数

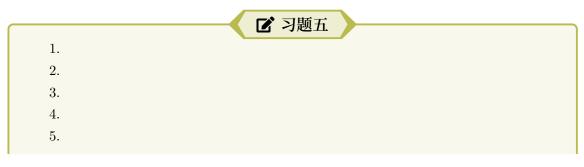
| Q 练习六 | | | |
|--------|-------------|----|----------------------|
| (口名 | 答)求下列函数的导数: | | |
| a) y = | $=x^5$; | b) | $y = x^6$; |
| c) x = | $=\sin t$; | d) | $u = \cos \varphi$. |

2.2.2 函数的和、差、积、商的导数

| Q 练习七 |
|-------|
| 1. |
| 2. |
| 3. |
| 4. |
| 5. |
| 6. |

2.2.3 复合函数的导数

```
Q 练习八
1.
2.
3.
4.
```



14 第二章 导数和微分

6.

7.

8.

9.

ο.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

2.2.4 三角函数的导数

Q 练习九

求下列函数的导数:

a) $f(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta};$

b) $y = \cos x^2 - \sin \sqrt{x}$;

c) $f(\theta) = \tan \theta - \theta$;

d) $y = \tan \frac{x}{2} - \cot \frac{x}{2}$.

2.2.5 反三角函数的导数

Q 练习十

求下列函数的导数:

a) $y = \arcsin \frac{x}{a}$;

b) $y = x \arcsin x$;

c) $y = 2 \arcsin x^2$;

d) $y = \arccos \frac{x}{2}$;

e) $y = \arctan \frac{x}{a}$;

f) $y = (\operatorname{arccot} x)^2$.

2.2.6 对数函数的导数

Q 练习十一

求下列函数的导数:

a)
$$y = x \ln x$$
;

b)
$$y = \ln \frac{1+3x^2}{2-x^2}$$

c)
$$y = \log_a(2x^3 + 3x^2);$$

b)
$$y = \ln \frac{1 + 3x^2}{2 - x^2}$$
;
d) $y = \ln \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$;

e)
$$y = \lg(1 + \cos x);$$

f)
$$y = \ln(\ln x)$$
.

2.2.7 指数函数的导数

Q 练习十二

求下列函数的导数:

a)
$$y = e^x \sin x$$
;

b)
$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$
;

c)
$$y = x^n e^{-x}$$
;

d)
$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}});$$

e)
$$y = x^3 + 3^x$$
;

f)
$$y = 2^x e^x$$
;

g)
$$y = e^{2x} \ln x$$
;

h)
$$y = e^{x^2 + 1}$$
.

2.2.8 幂函数的导数

Q 练习十三

求下列函数的导数:

a)
$$y = x^{\frac{2}{3}} - 2x^{-\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{7}{6}}$$
;

b)
$$y = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$$
;
d) $y = \sqrt[3]{\frac{x-a}{x+a}}$.

c)
$$y = \sqrt[3]{(4-3x^2)^2}$$
;

$$d) \quad y = \sqrt[3]{\frac{x-a}{x+a}}.$$

☑ 习题六

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

16 第二章 导数和微分

| 6. | | | |
|----|--|--|--|
| 7. | | | |
| 8. | | | |
| 9. | | | |

2.2.9 隐函数的导数

```
Q 练习十四
1.
2.
3.
4.
```

2.2.10 二阶导数

```
      Q 练习十五

      1.

      2.
```

```
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
```

第三节 微分

2.3.1 微分概念

2.3.2 微分的运算

```
Q 练习十六
   1.
   2.
   3.
   4.
   5.
```

2.3.3 近似计算

```
Q 练习十七
   1.
    2.
    3.
    4.
```

| | ☑ 习题八 |
|----|-------|
| 1. | |
| 2. | |
| 3. | |
| 4. | |
| 5. | |
| 6. | |
| 7. | |
| 8. | |
| 9. | |

小结

一、 二、 三、

四、

五、

复习参考题二

A 组

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.16.

17.

18.

19.

20.

20 第二章 导数和微分

- 21.
- 22.
- 23.
- 24.

B 组

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

第三章 导数的应用

第一节 一阶导数的应用

3.1.1 预备知识



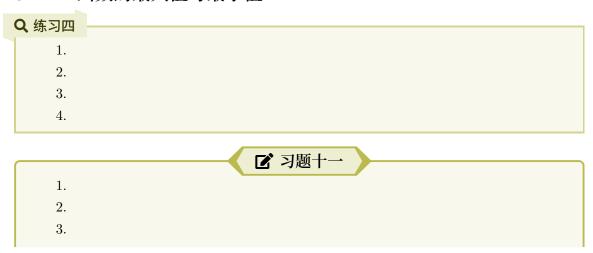
3.1.2 函数的单调性

| (| 2、练习二 |
|---|-------|
| | |
| | 1. |
| | 2. |
| | 3. |
| | 4. |
| | 5. |

3.1.3 函数的极大值与极小值

| Q 练习三 | |
|-------|-------|
| 1. | |
| 2. | |
| 3. | |
| 4. | |
| | ☑️习题十 |
| 1. | |
| 2. | |
| 3. | |
| 4. | |
| 5. | |
| 6. | |
| 7. | |
| 8. | |
| 9. | |
| 10. | |
| 11. | |

3.1.4 函数的最大值与最小值



| 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. |
|---|
| 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. |
| 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. |
| 7. 8. 9. 10. 11. |
| 8. 9. 10. 11. 12. |
| 9. 10. 11. 12. |
| 10. 11. 12. |
| 11. 12. |
| 12. |
| |
| 10. |
| 14. |
| 14. 15. |
| |
| 16. |
| 17. |
| 18. |
| 19. |
| 20. |
| 21. |
| 22. |
| 23. |
| 24. |
| 25. |

第二节 二阶导数的应用

3.2.1 预备知识

3.2.2 函数极值的判定

Q 练习五

应用二阶导数求下列函数的极值:

- a) $f(x) = x^3 + 3x^2 9x + 6$;
- b) $f(x) = x 2\sin x \ (0 \le x \le 2\pi);$
- c) $g(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

3.2.3 曲线的凸向和拐点

Q 练习六

- 1.
- 2.

3.2.4 函数的图像

☑ 习题十二

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

小结

_

三、

四、 五、

复习参考题三

A 组

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

Β组

1.

2.

3.

4.

5.

28 第三章 导数的应用

- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.

第四章 不定积分

| 4.0.1 | 原函数 |
|--------------|---------------|
| 4.0.2 | 不定积分 |
| Q 练习- | |
| 1. | |
| 2. | |
| 3. | |
| 4. | |
| | |
| 4.0.3 | 基本积分公式 |
| Q 练习二 | <u> </u> |
| 1. | |
| 2. | |
| | |
| 404 | 不定积分的运算法则 |
| | |
| Q 练习三 | |
| | 求不定积分: |
| a) | b) |
| c) | d) |
| e) | f) |
| g) | h) |

4.0.5 直接积分法

4.0.6 换元积分法

3. 4.

Q 练习五 1. 2. 3.

4.0.7 分部积分法

Q 练习六 用分部积分法求不定积分: a) b) c) d) e) f) g) h)

4.0.8 积分表的用法

Q 练习七

利用积分表求不定积分:

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)

☑ 习题十四

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.

小结

一、

三、

四、

复习参考题四

A 组

1.

2.

3.

B组

1.

2.

3.

4.

5.

第五章 定积分及其应用

第一节 定积分的概念和计算

5.1.1 定积分的概念

Q 练习一 1. 2.

5.1.2 微积分基本公式

| Q 练习二 | | |
|-------|----------------|--|
| 计算定积 |) : | |
| a) | b) | |
| c) | d) | |
| e) | f) | |
| g) | h) | |
| i) | $\mathbf{j})$ | |
| | | |

计算定积分: a) b) c) d) e) f)

| 9 | C |
|---|---|
| o | o |

| g) | h) |
|----------|----|
| g) i) | j) |
| k) | 1) |
| m) | n) |
| , | |

第二节 定积分的应用

5.2.1 平面图形的面积

Q 练习三

求下列曲线围成的图形的面积:

- a)
- b)
- c)
- d)
- e)

5.2.2 旋转体的体积

Q 练习四

- 1.
- 2.
- 3.

平面曲线的弧长

Q 练习五

- 1.
- 2.

旋转体的侧面积

Q 练习六

求曲线 $y^2 = x$, 直线 x = 0, x = 6 所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积.

☑ 习题十六

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5
- 6.
- 7.
- 8.

小结

- 一、 本章主要内容是定积分的概念、计算及其简单应用.
- 二、 定积分的概念是从求曲边梯形的面积、变速直线运动的路程等实际问题引入的. 解决这类问题都是通过分割,取近似,最后归结为求一种和式的极限:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x.$$

(其中 f(x) 为区间 [a,b] 上的连续函数,把区间 [a,b] n 等分后, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$,而 ξ_i 是第 i 个小区间上的任意一点).这个极限叫做函数 f(x) 在区间 [a,b] 上的定积分,记作

$$\int_{a}^{b} f(x) dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_{i}) \Delta x.$$

三、 微积分基本公式是

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

其中 F(x) 是函数 f(x) 的任一原函数,即 F'(x) = f(x),就是说,函数 f(x) 在区间 [a,b] 上的定积分 $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x$,等于它的任一原函数 F(x) 在区间 [a,b] 上的改变量 F(b) - F(a). 这个公式是定积分与原函数之问的关系式,它使定积分的计算大为简化.

四、 定积分的一些简单应用:

1. 求曲边梯形的面积, 公式是

$$S = \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x;$$

2. 求旋转体的体积,公式是

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x;$$

3. 求平面曲线弧长,公式是

$$l = \int_{a}^{b} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, \mathrm{d}x;$$

4. 求旋转体的侧面积, 公式是

$$S = 2\pi \int_{a}^{b} f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^{2}} \,\mathrm{d}x.$$

复习参考题五

A组

1. 计算定积分:

a)
$$\int_0^a (3x^2 - x + 1) \, \mathrm{d}x;$$

c)
$$\int_{2}^{4} \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{x^2} dx$$
;

e)
$$\int_{-1}^{1} x(x-3) \, dx$$
;

g)
$$\int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx$$
;

i)
$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{3-2x} \, dx$$
.

b) $\int_{1}^{2} \left(x^{2} + \frac{1}{x^{4}} \right) dx$;

d)
$$\int_{1}^{3} y^{2}(y-2) \, dy;$$

f)
$$\int_{-2}^{2} (6x^3 + x + 1) \, \mathrm{d}x;$$

h)
$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4 - 3x} \, \mathrm{d}x;$$

2. 计算定积分:

a)
$$\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, \mathrm{d}x;$$

c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 \theta \, d\theta;$$

e)
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi;$$

g)
$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) \, \mathrm{d}x$$
;

b)
$$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u \, \mathrm{d}u;$$

d)
$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} (2\sin x + \cos x) \, \mathrm{d}x;$$

f)
$$\int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} \, \mathrm{d}x;$$

h)
$$\int_0^1 xe^x dx$$
.

- 3. 求下列各曲线围成的图形的面积:
 - a) 曲线 $y = x^3$, $y = x^2$, 直线 x = 1, x = 2;

- b) 曲线 $y = \sin x$, $y = \cos x$, 直线 $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$;
- c) 曲线 $y = \frac{1}{x}$, 直线 y = x, x = 2, y = 0;
- d) 曲线 $y = x^2$, 直线 y = x, y = 2x;
- e) 曲线 $y = x^2 4x + 5$, 直线 x = 3, x = 5, y = 0;
- f) 曲线 $y = 3 2x x^2$, y = 0.
- 4. 求下列曲线所围图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积:
 - a) $y = x^3$, x = 2, y = 0;
 - b) $y = \cos x$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{4}$, y = 0;
 - c) xy = 4, x = 1, x = 4, y = 0;
 - d) $x^2 y^2 = a^2$, x = a + h, (a > 0, h > 0);
 - e) $y = 1 + \sqrt{x}$, y = 3, x = 0.
- 5. 求曲线 $y = \frac{x^2}{2} 2$ 与 x 轴交点间的曲线弧长.
- 6. 将立方抛物线 $a^2y = x^3$ 由 x = 0 到 x = a 的一段弧,绕 x 轴旋转一周,求 旋转面的面积.
- 7. 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 绕 x 轴旋转一周,求所得曲面面积.

В组

8. 计算定积分:

a)
$$\int_{0}^{2a} (x-a)^{3} dx$$
; b) $\int_{-2}^{0} x^{3} (x-a)^{2} dx$; c) $\int_{-a}^{0} \left(\frac{x+a}{a}\right)^{2} dx$; d) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 4x dx$.

- 9. 求抛物线 $y = -x^2 + 4x 3$ 及其在点 A(0, -3) 与点 B(3, 0) 处的切线所围图形的面积.
- 10. 如图, 已知曲线方程 $y^2 = x^2(1-x^2)$, 求图中阴影部分的面积.

第 10 题

11. 过椭圆 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的两个焦点作 x 轴的垂线,将椭圆的夹在这两条垂线间的部分与这两条垂线及 x 轴所围曲边梯形绕 x 轴旋转,求得到的旋转体的体积.

- 12. 求曲线 $9ay^2 = x(x 3a)^2$ 由 x = 0 到 x = 3a 的弧长.
- 13. 求 $x^2 + (y b)^2 = a^2$ (b > a) 绕 x 轴旋转所成的旋转体的表面积.

附录 一 简易积分表

基本积分公式

1.
$$\int \mathrm{d}x = x + C$$

$$2. \int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^n}{n+1} + C$$

$$3. \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$4. \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$5. \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

$$6. \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$$

8.
$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$

$$9. \int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$

10.
$$\int \sec^2 x \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C$$

11.
$$\int \csc^2 x \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + C$$

44 附录一 简易积分表

12.
$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos x} \, \mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

13.
$$\int \csc x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sin x} \, \mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C = \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$$

14.
$$\int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C$$

15.
$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$

16.
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$$

17.
$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

有理函数的积分

18.
$$\int \frac{1}{a+bx} dx = \frac{1}{b} \ln|a+bx| + C$$

19.
$$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C(n \neq -1)$$

20.
$$\int \frac{x}{(a+bx)^2} dx = \frac{1}{b^2} \left[\frac{a}{a+bx} + \ln|a+bx| \right] + C$$

21.
$$\int \frac{x^2}{(a+bx)^2} dx = \frac{1}{b^3} \left[a + bx - \frac{a^2}{a+bx} - 2a \ln|a+bx| \right] + C$$

22.
$$\int \frac{1}{x(a+bx)} dx = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| + C$$

23.
$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C$$

24.
$$\int \frac{1}{x^2(a+bx)} dx = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| + C$$

25.
$$\int \frac{1}{x(a+bx)^2} dx = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| + C$$

26.
$$\int \frac{1}{x^2(a+bx)^2} dx = -\frac{1}{a^3} \left[\frac{a+bx}{x} - 2b \ln \left| \frac{a+bx}{x} \right| - \frac{b^2x}{a+bx} \right] + C$$

27.
$$\int \frac{1}{a+bx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan \frac{x\sqrt{ab}}{a} + C \quad (a, b \ 同号)$$

28.
$$\int \frac{1}{a + bx^2} dx = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{a + \sqrt{-ab}x}{a - \sqrt{-ab}x} \right| + C \ (a, b 异号)$$

29.
$$\int \frac{x}{a + bx^2} dx = \frac{1}{2b} \ln |a + bx^2| + C$$

30.
$$\int \frac{x}{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{1}{+2b^2} \ln |a^2 \pm b^2 x^2| + C$$

31.
$$\int \frac{1}{a^2 + b^2 x^2} dx = \frac{1}{ab} \arctan \frac{bx}{a} + C$$

32.
$$\int \frac{1}{a^2 - b^2 x^2} dx = \frac{1}{2ab} \ln \left| \frac{a + bx}{a - bx} \right| + C$$

33.
$$\int \frac{1}{x(a^2 \pm b^2 x^2)} dx = \frac{1}{2a^2} \ln \left| \frac{x^2}{a^2 \pm b^2 x^2} \right| + C$$

34.
$$\int \frac{1}{x^2(a^2 + b^2x^2)} dx = -\frac{x}{a^2} - \frac{b}{a^3} \arctan \frac{bx}{a} + C$$

35.
$$\int \frac{1}{(a^2 + b^2 x^2)^2} dx = \frac{x}{2a^2(a^2 + b^2 x^2)} + \frac{1}{2a^3 b} \arctan \frac{bx}{a} + C$$

36.
$$\int \frac{1}{(a^2 - b^2 x^2)^2} dx = \frac{x}{2a^2(a^2 - b^2 x^2)} + \frac{1}{4a^3b} \ln \left| \frac{a + bx}{a - bx} \right| + C$$

37.
$$\int \frac{1}{a+bx+cx^2} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan\left(\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C \quad (b^2 < 4ac)$$

38.
$$\int \frac{1}{a+bx+cx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \left| \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} \right| + C \quad (b^2 > 4ac)$$

无理函数的积分

39.
$$\int x\sqrt{a+bx} \, dx = -\frac{2(2a-3bx)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{15b^2} + C$$

40.
$$\int x^2 \sqrt{a+bx} \, dx = -\frac{2(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{105b^3} + C$$

41.
$$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} \, dx = -\frac{2(2a-bx)\sqrt{a+bx}}{3b^2} + C$$

42.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx}} \, \mathrm{d}x = \frac{2(8a^2 - 4abx + 3b^2x^2)\sqrt{a+bx}}{15b^3} + C$$

43.
$$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right| + C \quad (a > 0)$$

44.
$$\int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} + C \quad (a < 0)$$

45.
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, \mathrm{d}x = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

46.
$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

47.
$$\int (x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8} (2x^2 \pm 5a^2) \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

48.
$$\int \frac{1}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{\pm a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}} + C$$

49.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} \mp \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$$

50.
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}} \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + C$$

51.
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{x} + C$$

52.
$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \, \mathrm{d}x = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^x} + C$$

53.
$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| + C$$

54.
$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{x} + C$$

55.
$$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^2} \, \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

56.
$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

57.
$$\int (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3}{8} a^4 \arcsin \frac{x}{a} + C$$

58.
$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

59.
$$\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C$$

60.
$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{8} (2x^2 - a^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

61.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

62.
$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = -\frac{1}{a} \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$$

63.
$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C$$

64.
$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| + C$$

65.
$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2} dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin \frac{x}{a} + C$$

66.
$$\int \sqrt{2ax - x^2} \, dx = \frac{x - a}{2} \sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^2}{2} \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$$

67.
$$\int x\sqrt{2ax - x^2} \, dx = -\frac{3a^2 + ax - 2x^2}{6}\sqrt{2ax - x^2} + \frac{a^3}{2}\arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$$

68.
$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x} dx = \sqrt{2ax - x^2} + a \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$$

69.
$$\int \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{x^2} dx = -\frac{2\sqrt{2ax - x^2}}{x} - \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$$

70.
$$\int \frac{1}{\sqrt{2ax-x^2}} dx = \arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C$$

71.
$$\int \frac{x}{\sqrt{2ax-x^2}} dx = -\sqrt{2ax-x^2} + a\arccos\left(1-\frac{x}{a}\right) + C$$

72.
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{2ax - x^2}} \, dx = -\frac{(x+3a)\sqrt{2ax - x^2}}{2} + \frac{3a^2}{2} \arccos\left(1 - \frac{x}{a}\right) + C$$

73.
$$\int \frac{1}{x\sqrt{2ax - x^2}} \, \mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{2ax - x^2}}{ax} + C$$

74.
$$\int \frac{1}{\sqrt{2ax+x^2}} \, dx = \ln \left| x + a + \sqrt{2ax+x^2} \right| + C$$

75.
$$\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}} \, dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b)\ln(\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x}) + C$$

76.
$$\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}} \, \mathrm{d}x = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C$$

77.
$$\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}} \, \mathrm{d}x = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C$$

78.
$$\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C$$

超越函数的积分

$$79. \int e^{ax} \, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a} + C$$

$$80. \int b^{ax} \, \mathrm{d}x = \frac{b^{ax}}{a \ln b} + C$$

81.
$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

82.
$$\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C$$

83.
$$\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

84.
$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

85.
$$\int \cos^n x \sin x \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C$$

86.
$$\int \sin^n x \cos x \, dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C$$

87.
$$\int \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

88.
$$\int \cos mx \cos nx \, dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

89.
$$\int \sin mx \cos nx \, dx = -\frac{\cos(m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos(m-n)x}{2(m-n)} + C$$

90.
$$\int \frac{1}{1 + \cos x} \, \mathrm{d}x = \tan \frac{x}{2} + C$$

91.
$$\int \frac{1}{1 - \cos x} \, \mathrm{d}x = -\cot \frac{x}{2} + C$$

92.
$$\int x \sin nx \, dx = \frac{1}{n^2} \sin nx - \frac{1}{n} x \cos nx + C$$

93.
$$\int x \cos nx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n^2} \cos nx + \frac{1}{n} x \sin nx + C$$

94.
$$\int x^2 \sin nx \, dx = \frac{x}{n^2} (2 \sin nx - nx \cos nx) + \frac{2}{n^3} \cos nx + C$$

95.
$$\int x^2 \cos nx \, dx = \frac{x}{n^2} (nx \sin nx + 2 \cos nx) - \frac{2}{n^3} \sin nx + C$$

96.
$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

97.
$$\int \arccos x \, \mathrm{d}x = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$$

98.
$$\int \arctan x \, \mathrm{d}x = x \arctan x - \ln \sqrt{1 + x^2} + C$$

99.
$$\int \operatorname{arccot} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arccot} x + \ln \sqrt{1 + x^2} + C$$

责任编辑: 张晨南

封面设计: 张晨南



定价: 58.00元