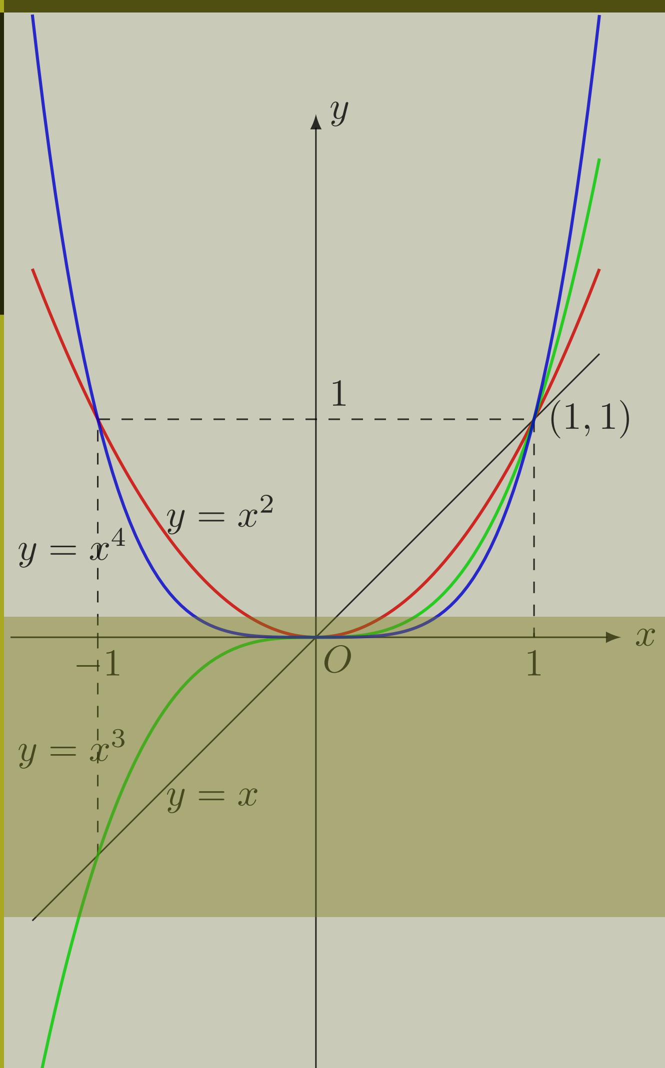
中学经典教材丛书

Volume 4A

Experimental Textbook for Middle School Mathematics

中学数学实验教材

第四册（上）



中学数学实验教材编写组　编

LaTeX工作室出版社

Experimental Textbook for Middle School Mathematics

中学数学实验教材

中学数学实验教材编写组　　编

献给：奔赴高考的莘莘学子

LaTeX 工作室出版社

*** 内 容 简 介 ***

责任编辑　张晨南
封面设计　张晨南
出版发行　LaTeX 工作室出版社
网　　址　https://www.latexstudio.net
开　　本　216 mm×279 mm
版　　次　2025年1月16日发行　　2025年1月16日印刷
定　　价　66.00元

前言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用.

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要.

本教材的教学目的是：使学生切实学好从事现代生产、特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观.

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法．比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识．对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减.

全套教材共分六册．第一册是代数．在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系．灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式．第二册是几何．由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入

欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容．第三册是函数．数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等．第四册是代数．把数扩充到复数系，进一步加强多项式理论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识．第五册是几何．引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识．第六册是微积分初步．突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分．

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系．教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排．

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章．突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用．这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性．

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的．第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校、北京师院附中、上海大同中学、天津南开中学、天津十六中学、广东省实验中学、华南师院附中、长春市实验中学等校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，内部发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物．在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见．

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教

科书．在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好．

中学数学实验教材编写组
一九八一年三月

目录

第一章　两角和与差的三角函数

我们已经学习了任意角的三角函数及其性质、图象，这一章我们将要进一步学习两角和、差以及倍角、半角的三角函数，并将学习三角式的和差化积、积化和差变形和简单的三角方程.

第一节　两角和与差的三角函数

1.1.1　两角的和与差

设 α、β 为两个任意实数，它们分别表示两个角的数量．那么实数$\alpha+\beta$ 就表示这两个角的和角的数量．两个角的和角可以做加法得到，即，以角α 的终边为始边，再旋转出一个角 β（若 $\beta>0$, 按逆时针方向旋转；若 $\beta<0$, 按顺时针方向旋转），这时，以 α 角的始边为始边，以 β 角的终边为终边的角，就是角$\alpha+\beta$．两个角的差角可以由减法得出，角的减法是加法的逆运算，即 $(\alpha-\beta)+\beta=\alpha$.

两个角的差角，也可以表示成和角的形式，如 $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$.

两个弧的和与差可按它们所对应的圆心角的和与差的法则来完成.

练习

试画图表示出以下的和角、差角：

$$\alpha=30^\circ,\quad \beta=45^\circ;\qquad \alpha=\frac{\pi}{3},\quad \beta=-\frac{3\pi}{4}$$

1.1.2 两角和与差的余弦

两角和与差的余弦函数，可以利用每个单角的三角函数来表示.

定理1

两个任意角α, β的和（或差）的余弦，等于这两个角的余弦的乘积减去（或加上）这两个角的正弦的乘积. 即

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \tag{1.1}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{1.2}$$

证明： 我们先来证公式(1.2).

设α,β为任意两个给定的角（不论大小及正负），把它们的始边都放在x轴正半轴，而终边与单位圆的交点分别为P_1, P_2(图1.1).

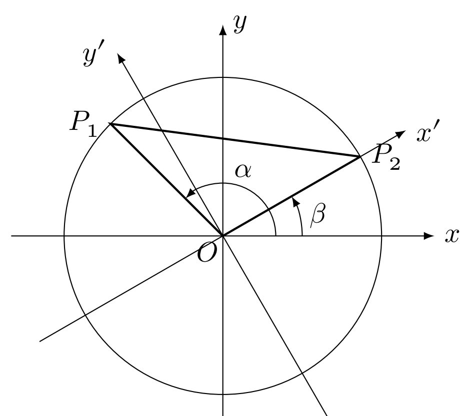


图 1.1

把Ox轴旋转到β的终边位置而成Ox'轴，Oy轴旋转同样的角而成Oy'轴，我们用两种方法计算弦长P_1, P_2.

在$x'Oy'$坐标系中，P_1, P_2的坐标是

$$P_1\ \left(\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)\right), \qquad P_2\ (1,0)$$

利用两点间距离公式，得:

$$
\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= [\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)-0]^2 \\
&= \cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\sin^2(\alpha-\beta) \\
&= 2-2\cos(\alpha-\beta)
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

在xOy坐标系中，P_1, P_2的坐标是

$$P_1\ (\cos\alpha,\ \sin\alpha),\qquad P_2\ (\cos\beta,\ \sin\beta)$$

利用两点间距离公式，得:

$$
\begin{aligned}
|P_1P_2|^2 &= (\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 \\
&= \cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta \\
&= 2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

在两个坐标系下，弦长是不变的，比较(1.3)式和(1.4)式，即得

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

这就是我们所要证明的.

既然公式(1.2)对任意α, β都成立，则以$-\beta$代替β, 也必成立

$$\cos[\alpha-(-\beta)]=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)$$

再注意三角函数的奇偶性，就得到

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

这就是我们所要证明的公式(1.1).

例 1.1 不查表，求$\cos 15^\circ$, $\cos 75^\circ$的值.

解: 由于: $15^\circ=45^\circ-30^\circ,\qquad 75^\circ=45^\circ+30^\circ$

$$\cos 45^\circ=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

所以:

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx 0.9659\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \approx \frac{2.4495-1.4142}{4} \\ &\approx 0.2588\end{aligned}$$

例 1.2 已知$\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{3}{4}$, 并且α是第二象限的角，β是第三象限的角，求$\cos(\alpha-\beta)$的值（准确到0.01）.

解: 因为α是第二象限的角，所以

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

因为β是第三象限的角，所以

$$\sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

因此:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}{12} \\ &\approx \frac{3\times 2.236 - 2\times 2.646}{12} \approx 0.12\end{aligned}$$

例 1.3 证明对于任何角α，以下公式成立

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

证明：利用公式(1.2)，可得：

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\alpha$$

但是

$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\qquad \sin\frac{\pi}{2}=1$$

所以$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

又因为上式中的α为任意角，所以，若把公式中的$\left(\frac{\pi}{2}\right)$换成$\alpha$，就可得

$$\cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

即：$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$

练习

(1) 等式$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha+\cos\beta$成立吗？为什么？试举例说明

(2) 不查表，求下列各式的值：

a) $\cos 135^\circ$　　b) $\cos\left(\frac{-61\pi}{12}\right)$

c) $\cos 1950^\circ$　　d) $\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}$

e) $\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$

(3) 已知$\cos\theta=-\frac{5}{13}$, θ为II象限角，试求$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$, $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$的值.

(4) 证明：α为任意角时，下式成立.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

1.1.3　两角和与差的正弦

定理2

两个任意角α和β的和（差）的正弦等于第一个角的正弦乘以第二个角的余弦的积加上（减去）第一角的余弦乘以第二个角的正弦的乘积．即

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \tag{1.5}$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \tag{1.6}$$

证明： 因为已经知道

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha,\qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$$

所以

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=-\cos\left[\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right]\\&=-\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\beta\right]\\&=-\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\beta-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\beta\right]\\&=-(-\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

以$(-\beta)$替换公式(1.5)中的β，得到

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

例 1.4　求$\sin 15^\circ$和$\sin 75^\circ$．（不查表）

解:

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(这就是$\cos 75^\circ$的值).

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

(这就是$\cos 15^\circ$的值).

例 1.5　已知$\cos\phi = \frac{3}{5}$，且ϕ是第四象限角，试求$\sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right)$的值.

解: 因为ϕ为第四象限角，所以

$$\sin\phi = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

于是

$$\begin{aligned}\sin\left(\phi - \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\phi\cos\frac{\pi}{6} - \cos\phi\sin\frac{\pi}{6}\\ &= -\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\\ &= -\frac{4\sqrt{3}+3}{10}\end{aligned}$$

例 1.6　求证: $\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta} = \cot^2\beta - \cot^2\alpha$

证明:

$$
\begin{aligned}
\text{等式左边} &= \frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta} \\
&= \frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta} \\
&= \cot^2\beta-\cot^2\alpha=\text{等式右边}
\end{aligned}
$$

例 1.7 求证$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

证明: 可用不同方法证之.

证法1:

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\text{右边}
\end{aligned}
$$

证法2:

$$
\begin{aligned}
\text{右边} &= \sqrt{2}\left(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right) \\
&= \sin\theta+\cos\theta=\text{左边}
\end{aligned}
$$

练习

(1) 你能知道当α,β取何值时，等式 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$能够成立呢?

(2) 不查表，求下式的值

(a) $\sin 105^\circ$

(b) $\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

(c) $\tan 15^\circ$

(d) $\sin 14^\circ \cdot \cos 16^\circ + \cos 14^\circ \cdot \sin 16^\circ$

(e) $\sin 79^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \cdot \sin 25^\circ$

(3) 已知$\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{3}{4}$，且α, β都是第二象限角

试求 $\sin(\alpha+\beta)$与$\cos(\alpha-\beta)$的值.

(4) 求证:

(a) $\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \phi\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \phi\right) = \cos\phi$

(b) $2\cos(60^\circ - \alpha) - \sqrt{3}\sin\alpha = \cos\alpha$

1.1.4　两角和与差的正切

定理 3

两个角α与β的和（或差）的正切，等于一个分式，其分子为这两角正切的和（或整），其分母为1与这两个角的正切乘积的差（或和）．即

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \tag{1.7}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \tag{1.8}$$

注意: 在这两个公式中，必须保证$\tan\alpha$, $\tan\beta$及$\tan(\alpha\pm\beta)$都有意义，因而，当且仅当$\alpha, \beta, \alpha\pm\beta$, 都不等于$\frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$时，公式才能成立.

证明: 对于公式(1.7)利用公式$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$，和关于正弦函数与余弦函数的加法定理，得:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

用$\cos\alpha\cos\beta$除右端的分子和分母，得：

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\ &= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\ &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

对于公式(1.8)，

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \tan[\alpha+(-\beta)]\\ &= \frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}\\ &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

例 1.8 求$\tan 15^\circ$和$\tan 75^\circ$的值.

解:

$$\begin{aligned}\tan 15^\circ &= \tan(60^\circ-45^\circ)\\ &= \frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2}\\ &= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \tan(45^\circ+30^\circ)\\ &= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\\ &= \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

例 1.9 求两角和及差的余切公式.

解： 因为余切是正切的倒数，则用$\tan\alpha$和$\tan\beta$表示$\cot(\alpha+\beta)$和$\cot(\alpha-\beta)$的公式，可以从(1.7)和(1.8)中交换第一个分子和分母的位置而得，我们得出公式：

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}$$

等式右边的分子、分母同除以$\tan\alpha\cdot\tan\beta\neq 0$得到

$$\cot(\alpha+\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta-1}{\cot\alpha+\cot\beta} \tag{1.9}$$

以$(-\beta)$替换上面等式中的β，得到

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot(-\beta)-1}{\cot\alpha+\cot(-\beta)}=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha}$$

所以

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta+1}{\cot\beta-\cot\alpha} \tag{1.10}$$

式中$\alpha,\beta,\alpha\pm\beta$都不等于$k\pi$.（$k$为任何整数）

例 1.10 已知$\tan\alpha=\frac{1}{3}, \cot\beta=-\frac{1}{2}$，试求：

(1) $\cot(\alpha-\beta)$的值.

(2) $\alpha+\beta$的值，其中$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$，　$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

解：

(1) 因为$\tan\alpha=\frac{1}{3}, \tan\beta=\frac{1}{\cot\beta}=-2$，以及

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{1}{\tan(\alpha-\beta)}=\frac{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$$

所以

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}+2}=\frac{1}{7}$$

(2) 由于$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-1$，而且$0<\alpha<\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，因而可得$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}$

在$\frac{\pi}{2}$与$\frac{3\pi}{2}$之间，只有$\tan\frac{3\pi}{4}=-1$，所以

$$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$$

例 1.11　求证 $\frac{1+\tan 75^\circ}{1-\tan 75^\circ} = -\sqrt{3}$

分析： 如果利用 $\tan 45^\circ = 1$ 这个等式，再考虑等式左边可变形为

$$\frac{\tan 45^\circ + \tan 75^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 75^\circ}$$

这样，利用两角和的正切公式经过化简，正好是一个特殊角 120° 的正切，它的值可求得.

证明： 注意 $1 = \tan 45^\circ$，所以

$$\text{左边} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 75^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 75^\circ} = \tan 120^\circ = -\sqrt{3} = \text{右边}$$

例 1.12　已知：$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = m$，求 $\tan\alpha$ 的值.

解： **解法1：** 由已知，$\alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$. 不然的话，$\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{pi}{2} + k\pi$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ 就没有意义了.

所以 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = m$

由于 $1 - \tan\alpha \neq 0$，所以由上式可得

$$1 + \tan\alpha = m - m\tan\alpha$$

即：$(m+1)\tan\alpha = m - 1$ 所以：$\tan\alpha = \frac{m-1}{m+1}$，$\quad (m \neq -1)$

解法2： 因为 $\alpha = \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \frac{\pi}{4}$，所以

$$\begin{aligned}\tan\alpha &= \tan\left[\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \frac{\pi}{4}\right] \\ &= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \cdot \tan\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{m-1}{m+1} \quad (m \neq -1)\end{aligned}$$

例 1.13　设 $\cot\alpha, \cot\beta$ 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq c \neq 0)$ 的两个根，试求 $\tan(\alpha + \beta)$ 的值.

解： 由韦达定理知

$$\cot\alpha+\cot\beta=-\frac{b}{a},\qquad \cot\alpha\cdot\cot\beta=\frac{c}{a}$$

即:

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-\frac{b}{a},\qquad \frac{1}{\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{c}{a}$$

由此两式可以求得

$$\tan\alpha+\tan\beta=-\frac{b}{c},\qquad \tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{a}{c}$$

所以:

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=\frac{-\frac{b}{c}}{1-\frac{a}{c}}=\frac{b}{a-c}$$

练习

(1) 不查表，求值:

a) $\tan 435^\circ$

b) $\cot 105^\circ$

c) $\frac{\tan 17^\circ+\tan 28^\circ}{1+\tan 17^\circ\cdot\tan 152^\circ}$

d) $\frac{1+\tan 15^\circ}{\tan 15^\circ-1}$

(2) 已知$\tan\alpha=2$，且$\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$，试求$\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$的值.

(3) 若α,β都是锐角，且$\tan\alpha=2$, $\cot\beta=\frac{1}{3}$. 求证：$\alpha+\beta=135^\circ$.

习题1.1

(1) 已知$\sin\alpha=\frac{15}{17}$, $\cos\beta=-\frac{5}{13}$, 且α, β都是第二象限角，试求$\cos(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$的值.

(2) 在$\triangle ABC$中，$\cos A=\frac{4}{5}$, $\cos B=\frac{12}{13}$, 试求 $\cos C$的值.

(3) 求证:

(a) $\cos(\alpha+60^\circ)+\cos(\alpha-60^\circ)=\cos\alpha$

(b) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)=\cos\alpha$

(c) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1$

(4) 化简下列各式:

(a) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

(b) $\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$

(c) $\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}$

(d) $\cos 25^\circ\cdot\cos 29^\circ-\sin 24^\circ\cdot\sin 29^\circ$

(e) $\cos(36^\circ+x)\cdot\cos(54^\circ-x)\sin(36^\circ+x)\cdot\sin(54^\circ-x)$

(5) 已知$\cos\alpha=\cos\beta=m$, $\sin\alpha=\sin\beta=n$, 试求$\cos(\alpha+\beta)$及$\cos(\alpha-\beta)$的值，并求出m与n的关系式.

(6) 求下列各函数的值（不查表）:

$$\sin 150^\circ,\qquad \sin 195^\circ,\qquad -\tan 195^\circ$$

(7) 已知$\cos\alpha=-\frac{8}{17}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$, 且α是第二象限角，β 是第四象限角，试求$\sin(\alpha+\beta)$

(8) 若$\cos\alpha=-\frac{3}{15}$, $\sin\beta=\frac{8}{17}$, 且$a\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$, $\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$, 试求$\sin(\alpha-\beta)$.

(9) 若$\cos\alpha=\frac{1}{7}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$, 且$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 试求角$\beta$的值.

(10) 化简下列各式:

(a) $\sin 13^\circ\cdot\cos 17^\circ+\cos 13^\circ\cdot\sin 163^\circ$

(b) $\sin 70^\circ\cdot\sin 65^\circ-cos70^\circ\cdot\sin 25^\circ$

(c) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$

(d) $\frac{\sin(\beta-\gamma)+\sin(\beta+\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)-\sin(\beta-\gamma)}$

(e) $\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}+\frac{\sin(\gamma-\alpha)}{\cos\gamma\cdot\cos\alpha}+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

(11) 已知$\sin\alpha=\frac{3}{4}$, 且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求$\tan\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$

(12) (a) 已知$\tan x=\frac{1}{4}$, $\tan y=-3$, 求$\tan(x+y)$的值;

(b) 已知$\tan\alpha=2k+1$, $\tan\beta=2k-1$, 求$\cot(\alpha-\beta)$的值.

(13) 求证:

(a) $\tan(x+y)\cdot\tan(x-y)=\frac{\tan^2 x-\tan^2 y}{1-\tan^2 x\cdot\tan^2 y}$

(b) $\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\cot\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

(c) $\frac{\tan x+\tan y}{\tan x-\tan y}=\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)}$

(14) 已知θ,ϕ都是锐角，且$\tan\theta=\frac{1}{2}$, $\tan\phi=\frac{1}{3}$, 求证：$\theta+\phi=45^\circ$.

(15) 如图1.2，矩形$ABCD$被划分成三个全等的正方形. 求证:

(a) $\angle\theta=\angle\gamma$

(b) $\alpha+\beta+\gamma=90^\circ$

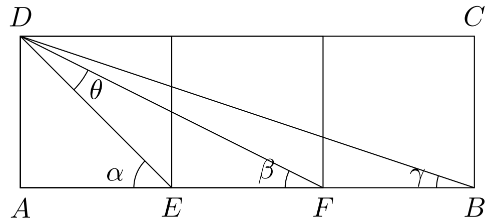


图 1.2

(16) 若$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\tan\beta=-\frac{1}{2}$. $90^\circ<\alpha<180^\circ$, $90^\circ<\beta<180^\circ$，求证:

(a) $\tan(\alpha+\beta)=-1$

(b) $\alpha+\beta=315^\circ$

(17) 已知$\cot\alpha=\frac{3}{4}$, $\cot\beta=\frac{1}{7}$, 且α,β都是锐角,

求证：$1+\beta=135^\circ$.

(18) 已知$\tan\alpha$与$\tan\beta$是方程$x^2+6x+7=0$的两个根.

求证：$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$

(19) 已知 $a\cdot\sin(\theta+x)=b\sin(\theta+y)$, 求证:

$$\tan\theta=\frac{b\sin y-a\sin x}{a\cos x-b\cos y}$$

第二节　二倍角的正弦、余弦和正切

1.2.1　二倍角的正弦、余弦和正切

在两角和的正弦、余弦和正切的公式中，令$\beta=\alpha$，则得到

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

即

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \tag{1.11}$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

即

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \tag{1.12}$$

若在公式(1.12)中, 用$1-sin^2\alpha$代换$\cos^2\alpha$, 或用$1-\cos^2\alpha$代换$\sin^2\alpha$, 则对于$\cos 2\alpha$又得到两个公式

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \tag{1.13}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \tag{1.14}$$

$$\tan(\alpha+\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

即:

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \tag{1.15}$$

注意:

(1) 二倍角的三角函数的公式是把任意角的三角函数与小一半的角的三角函数联系起来，它们可以写成下面的各种形式的等式. 例如

$$\begin{aligned}
\sin 4\alpha &= \sin 2\cdot(2\alpha) = 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha \\
\sin\alpha &= \sin 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \\
\cos\frac{\alpha}{2} &= \cos^2\frac{\alpha}{4} - \sin^2\frac{\alpha}{4} \\
\tan 3\alpha &= \frac{2\tan\frac{3\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{3\alpha}{2}}
\end{aligned}$$

(2) 在二倍的正切公式(1.15)中，除了$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$和$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $(k\in\mathbb{Z})$ 诸值之外，对α的其余一切值都成立，因为当所指定的那些α值，$\tan\alpha$和$\tan 2\alpha$都不存在.

(3) 在使用二倍角三角函数的公式作恒等变形时，不仅要掌握从等式的左端的式子变换到右端的式子，而且也要熟练地掌握从等式的右端的式子变换到左端的式子.

例 1.14 化简下面的式子

a) $4\sin 15^\circ\cos 15^\circ$

b) $\frac{1}{2}\sin 15^\circ\sin 255^\circ$

c) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$

d) $\cos^2 15^\circ - \frac{1}{2}$

e) $\frac{\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ}$

解:

(1) $4\sin 15^\circ \cos 15^\circ = 2\sin 30^\circ = 1$

(2) $\frac{1}{2}\sin 15^\circ \sin 255^\circ = -\frac{1}{2}\sin 15^\circ \cos 15^\circ = -\frac{1}{4}\sin 30^\circ = -\frac{1}{8}$

(3) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\cos^2 15^\circ - \frac{1}{2} = \frac{2\cos^2 15^\circ - 1}{2} = \frac{\cos 30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(5) $\frac{\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ} = \frac{1}{2}\frac{2\tan 75^\circ}{1-\tan^2 75^\circ} = \frac{1}{2}\tan 150^\circ = -\frac{1}{2}\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{6}$

例 1.15　已知$0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $0^\circ < \beta < 90^\circ$, $\tan\alpha = \frac{1}{7}$，$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

求证：$\alpha + 2\beta = 45^\circ$

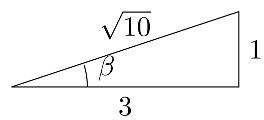


图 1.3

解: 因为β是锐角，所以$\tan\beta = \frac{1}{3}$，由$\tan\beta < 1$知$0^\circ < \beta < 45^\circ$，同理$0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

又$\tan 2\beta = \frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4} < 1$

所以$0^\circ < 2\beta < 45^\circ$，并且

$$\tan(\alpha + 2\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan 2\beta}{1 - \tan\alpha\tan 2\beta} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}} = 1$$

所以$\alpha + 2\beta = 45^\circ + k\cdot 180^\circ\ (k \in \mathbb{Z})$，但是因为$0^\circ < \alpha < 45^\circ$，$0^\circ < 2\beta < 45^\circ$，所以$0^\circ < \alpha + 2\beta < 90^\circ$，因此，$k$只能取0，因而:

$$\alpha + 2\beta = 45^\circ$$

例 1.16　用α角的三角函数表示$\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$和$\tan 3\alpha$.

解:

(1)

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(\alpha+2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha \\ &= \sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) \\ &= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha \\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos(\alpha+2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha \\ &= \cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1) - 2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha) \\ &= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha \\ &= 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\tan 3\alpha = \tan(\alpha+2\alpha) &= \frac{\tan\alpha + \tan 2\alpha}{1-\tan\alpha\tan 2\alpha} \\ &= \frac{\tan\alpha + \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1-\tan\alpha\cdot\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}} \\ &= \frac{\tan\alpha - \tan^3\alpha + 2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha - 2\tan^2\alpha} \\ &= \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\end{aligned}$$

例 1.17 求证:

(1) $[\sin\alpha(1-\sin\alpha)+\cos\alpha(1-\cos\alpha)]\times[\sin\alpha(1+\sin\alpha)+\cos\alpha(1+\cos\alpha)] = \sin 2\alpha$

(2) $\sin 50^\circ\left(1+\sqrt{3}\tan 10^\circ\right) = 1$

证明:

(1)

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= (\sin\alpha - \sin^2\alpha + \cos\alpha - \cos^2\alpha) \times (\sin\alpha + \sin^2\alpha + \cos\alpha + \cos^2\alpha) \\
&= (\sin\alpha + \cos\alpha - 1)(\sin\alpha + \cos\alpha + 1) \\
&= (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1 \\
&= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
&= \sin 2\alpha = \text{右边}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \sin 50^\circ \left(1 + \frac{\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\cos 10^\circ}\right) \\
&= \sin 50^\circ \frac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10^\circ\right)}{\cos 10^\circ} \\
&= 2\sin 50^\circ \cdot \frac{\cos 60^\circ \cdot \cos 10^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ} \\
&= \frac{2\sin 50^\circ \cdot \cos 50^\circ}{\cos 10^\circ} \\
&= \frac{\sin 100^\circ}{\cos 10^\circ} \\
&= \frac{\cos 10^\circ}{\cos 10^\circ} = 1 = \text{右边}
\end{aligned}$$

练习

(1) 不查表，求下列各式的值:

a) $2\sin 12^\circ 30' \cdot \cos 12^\circ 30'$

b) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$

c) $2\cos^2 67^\circ 30' - 1$

d) $2\sin^2 75^\circ - 1$

e) $\frac{2\tan 22.5^\circ}{1-\tan^2 22.5^\circ}$

f) $\sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$

g) $1 - 2\sin^2 750^\circ$

h) $\frac{2\tan 150^\circ}{1-\tan^2 150^\circ}$

(2) 化简:

a) $(\sin x - \cos y)^2$

b) $\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos^4\theta - \sin^4\theta$

d) $\frac{1}{1-\tan\theta} - \frac{1}{1+\tan\theta}$

(3) 已知$\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，$a\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，试求：$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$，$\tan 2\alpha$的值.

(4) 试推导出$\tan 3\alpha$的公式（用$\tan\alpha$表示）.

(5) 证明以下各等式:

(a) $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

(b) $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

(c) $2\sin(\pi+\alpha)\cos(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$

(d) $\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}=\cos x$

(e) $1+2\cos^2\alpha=2+\cos 2\alpha$

(f) $\frac{1}{\sin\alpha}-\frac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha}=2\sin\alpha$

(g) $\tan 2\alpha=\frac{2\cot\alpha}{\cot^2\alpha-1}$

(h) $\frac{\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}=\cot\theta$

(i) $\cot x-\cot 2x=\frac{1}{\sin 2x}$

(j) $\frac{\sin\beta\cdot\cos\beta}{\sin^2\beta-\cos^2\beta}=-\frac{1}{2}\tan 2\beta$

1.2.2 万能公式——用$\tan\frac{\alpha}{2}$分别表示任意角α的三角函数

定理

若$\alpha\neq(2k+1)\pi\quad(k\in\mathbb{Z})$，则$\sin\alpha$，$\cos\alpha$和$\tan\alpha$可以表示成$\tan\frac{\alpha}{2}$的有理式，即:

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\tag{1.16}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\tag{1.17}$$

$$\tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}\tag{1.18}$$

证明: 根据倍角公式有:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

或者

$$\sin\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

上面两个等式的分母恒等于1, 因为$\alpha \neq \pi + 2k\pi$，则$\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, 因而$\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$.

上两式右边的分子、分母同除以$\cos^2\frac{\alpha}{2} \neq 0$, 得

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

这两个式子相除就得到

$$\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

上述三个公式通常叫做万能公式，应用它，就可以将α角的任一种三角函数化为以$\tan\frac{\alpha}{2}$为变量的有理函数，这对问题的解决往往是有益的.

例 1.18 已知$\sin\alpha = 0.8$, 且$90^\circ < \alpha < 180^\circ$, 求$\sin 2\alpha$, $cos2\alpha$

解: 除用倍角公式求解外，我们应用万能公式给出另解一种解法如下:

因为$\sin\alpha = 0.8$，$90^\circ < \alpha < 180^\circ$，所以$\tan\alpha = -\frac{4}{3}$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{-\frac{8}{3}}{1+\frac{16}{9}} = -\frac{24}{25}$$
$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{7}{25}$$

例 1.19 已知$\cot\alpha = -2$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$,

求$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$.

解： 因为$\cot\alpha=-2$，$90^\circ<\alpha<180^\circ$，所以$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{5}$$

例 1.20 求证：$\frac{\cos A}{\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}}=\frac{1}{2}\sin A$

证明：

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{\tan\frac{A}{2}\cdot\cos A}{1-\tan^2\frac{A}{2}}\\&=\frac{1}{2}\tan A\cdot\cos A\\&=\frac{1}{2}\sin A=\text{右边}\end{aligned}$$

练习

(1) 已知$\cos A=\frac{4}{5}$，且$\frac{3}{2}\pi<A<2\pi$，试用万能公式求$\tan\frac{A}{2}$.

(2) 应用万能公式求证：$\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$

(3) 求证：

(a) $\frac{1}{4}\sin 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha}{\cot\frac{\alpha}{2}-\tan\frac{\alpha}{2}}$

(b) $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2}$

1.2.3 半角的正弦、余弦和正切

用α角的三角函数来表示$\frac{\alpha}{2}$的角的三角函数的公式称为**半角三角函数公式**. 在倍角公式：

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,\qquad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

里，用$\frac{\alpha}{2}$代替α, 就得到

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1$$

所以

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$

由于$0\le\sin^2\frac{\alpha}{2}\le 1$，$0\le\cos^2\frac{\alpha}{2}\le 1$，故知

$$0\le\frac{1\pm\cos\alpha}{2}\le 1$$

两边开平方，得

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

当$\alpha\neq(2k+1)\pi$时，$\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0$且$\cos\alpha\neq -1$; 上面两个等式的两边相除，得到

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

下面三个公式称为半角的三角函数公式:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\tag{1.19}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\tag{1.20}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\tag{1.21}$$

其中: $\alpha\neq(2k+1)\pi$. 至于根号前正号或负号的选取是依半角的终边位于什么象限内而定.

例 1.21 已知，$\cos\alpha=0.6$, $270^\circ<\alpha<360^\circ$

求$\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$和$\tan\frac{\alpha}{2}$.

解: 因为已知$270^\circ<\alpha<360^\circ$，所以$135^\circ<\frac{\alpha}{2}<180^\circ$ 这时可以肯定$\frac{\alpha}{2}$角是第一象限的角，所以$\sin\frac{\alpha}{2}$的值是正的，$\cos\frac{\alpha}{2}$和$\tan\frac{\alpha}{2}$的值是负的，因此得到

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-0.6}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1+0.6}{2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=-\sqrt{\frac{1-0.6}{1+0.6}}=-\frac{1}{2}$$

例 1.22　已知$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$，求$\sin\frac{\alpha}{2}$.

解：因为$\cos\alpha=-\frac{1}{3}<0$, 所以$\alpha$角是第二或第三象限的角，即

$$\frac{\pi}{2}+2k\pi<\alpha<\pi+2k\pi \tag{1.22}$$

或者

$$\pi+2k\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \tag{1.23}$$

从而由不等式(1.22)知道

$$\frac{\pi}{4}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

当k为正、负偶数时，$\frac{\alpha}{2}$角是第一象限的角；当k为正、负奇数时，$\frac{\alpha}{2}$角是第三象限的角，因此，尽管知道α是第二象限的角，也不能确定$\frac{\alpha}{2}$是第几象限的角，它可能是第一象限的角，也可能是第三象限的角，所以$\sin\frac{\alpha}{2}$的值取符号“$+$”号或“$-$”号不能确定.

同理，由不等式(1.23)知道

$$\frac{\pi}{2}+k\pi<\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{4}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

当k为正负偶数时，$\frac{\alpha}{2}$是第二象限角；当k为正负奇数时，$\frac{\alpha}{2}$是第二象限角，因此，当α是第三象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$ 可能是第二象限的角或第四象限的角，所以$\sin\frac{\alpha}{2}$ 的值的符号不能确定.

根据上面的讨论知道

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$

从上面的两个例子，可以知道，如果能确定α角在哪一个固定的区间，就可以确定角$\frac{\alpha}{2}$在哪一个固定的区间，这时公式(1.19)、(1.20)、(1.21)就能够选取固定的“$+$”号或“$-$”号；如果只知道角α所在象限，而不知道它在哪一个固定的区间时，就不能确定角$\frac{\alpha}{2}$在哪一个固定的区间，这时公式(1.19)、(1.20)、(1.21)中，就应该保留“$\pm$”号.

例 1.23 利用半角公式求$\cos\frac{\pi}{8}$的值（准确到0.001）

解： 因为$\frac{\pi}{8}$是第一象限的角，把它作为$\frac{\pi}{4}$的半角，使得

$$\cos\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\approx 0.924$$

例 1.24 求证：$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$

证明： 因为$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$，所以:

$$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

又$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$，因此:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{1.24}$$

我们来说明，当α是锐角时，这个公式的几何意义，如图1.4所示.

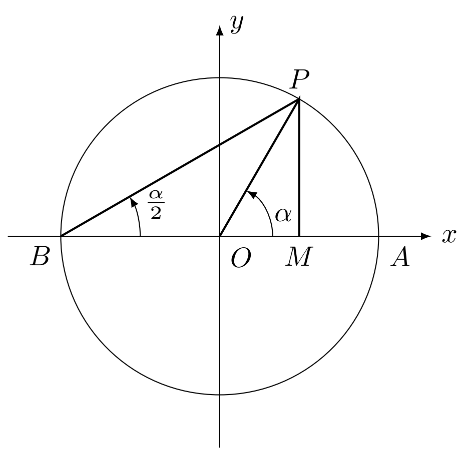


图 1.4

在单位圆中，半径$|OA|=|OP|=|OB|=1$, $\angle POA=\alpha$ (弧度).

于是，$\overline{MP}=\sin\alpha$, $\overline{OM}=\cos\alpha$, $\angle PBA=\frac{\alpha}{2}$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{MP}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{MP}}{\overline{BO}+\overline{OM}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

例 1.25 求$\tan 15^\circ$的值.

解: 解法1: $\tan 15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2-\sqrt{3}$

解法2:

$$\begin{aligned}
\tan 15^\circ &= \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} \\
&= 2-\sqrt{3}
\end{aligned}$$

由这两种解法看出，如果已知$\sin\alpha$, $\cos\alpha$的值，那么求$\tan\frac{\alpha}{2}$时，用公式(1.24)要比公式(1.23)方便一些，其中尤以$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$更方便.

例 1.26 求证:

a) $\tan\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$

b) $\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} = \cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$

c) $\frac{\cos^2 A}{\cot\frac{A}{2} - \tan\frac{A}{2}} = \frac{1}{4}\sin 2A$

证明:

(1)

$$\begin{aligned}
\tan\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) &= \tan\frac{90^\circ-\alpha}{2} \\
&= \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{1+\cos(90^\circ-\alpha)} \\
&= \frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha} &= \frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{1-\cos(90^\circ-\alpha)} \\
&= \frac{1}{\tan\frac{90^\circ-\alpha}{2}} = \cot\frac{90^\circ-\alpha}{2} \\
&= \cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\frac{\cos^2 A}{\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}} &= \frac{\cos^2 A}{\frac{1+\cos A}{\sin A}-\frac{1-\cos A}{\sin A}}\\
&= \frac{\sin A\cos^2 A}{2\cos A}\\
&= \frac{1}{2}\sin A\cdot\cos A\\
&= \frac{1}{4}\sin 2A
\end{aligned}
$$

练习

(1) 已知$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，求$\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\tan\frac{\alpha}{2}$.

(2) 已知$\sin x=-\frac{4}{5}$，且$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$，求$\sin\frac{x}{2}$, $\cos\frac{x}{2}$, $\tan\frac{x}{2}$.

(3) 已知$\cos A=\frac{4}{5}$，且A是第四象限角，试求$\tan\frac{A}{2}$.

(4) 求证:

a) $\sin^2\frac{x}{4}=\frac{1-\cos\frac{x}{2}}{2}$

b) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

c) $1-\sin\beta=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$

d) $\sin 4\alpha=\frac{4\sin\alpha(1-\tan^2\alpha)}{\sec\alpha(1+\tan^2\alpha)}$

习题1.2

(1) 不查表计算下列的值

a) $\sin 15^\circ\sin 75^\circ$

b) $\sin\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}$

c) $\frac{\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}}$

d) $\frac{1-\tan^2 15^\circ}{1+\tan^2 15^\circ}$

e) $\cot\frac{\pi}{8}-\tan\frac{\pi}{8}$

f) $\sin^4 105^\circ+\cos^4 75^\circ$

(2) 化简下面的式子

a) $2-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$

b) $\cos 4\alpha+2\sin^2 2\alpha$

c) $1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

d) $\left(\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha\right)^2$

(3) 证明:

(a) 若 $0<\alpha<\pi$, 则 $\sin 2\alpha<2\sin\alpha$

(b) 若 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, 则 $\tan 2\alpha<2\tan\alpha$

(4) 已知 $\sin\alpha = \frac{7}{25}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, 求 $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ 和$\tan 2\alpha$.

(5) 已知$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2n}{1+n^2}$，求$\sin\alpha$和$\tan\alpha$.

(6) 已知$\sin\alpha = 0.8$, $\cos\beta = -\frac{5}{13}$，并且 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$，求:

(a) $\sin(\alpha + 2\beta)$

(b) $\cos(2\alpha - \beta)$

(c) $\tan[2(\alpha - \beta)]$

(7) 设方程$x^2 - (\tan\theta + \cot\theta)x + 1 = 0$的一个限是$2 + \sqrt{3}$，求$\sin 2\theta$.

(8) 设$\tan\theta$, $\tan\phi$是方程$7x^2 + 3x + 1 = 0$的二根，求 $\tan\frac{\theta+\phi}{2}$的值.

(9) 若$\tan^2\alpha - a\tan\alpha + 1 = 0$, $\quad (a > 0)$，求$\cos 2\alpha$.

(a) 当$0^\circ < \alpha < 45^\circ$

(b) 当$45^\circ < \alpha < 90^\circ$

(10) 如图1.5, 半径为R的圆木料，要截成横截面为长方形的木料，问怎样截取，才可以使长方形截面的面积最大?

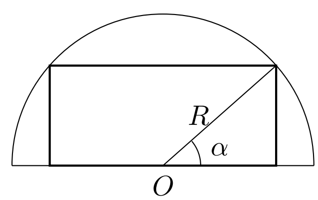


图 1.5

(11) 直角三角形的面积为12, 一锐角为β,求它的外接圆面积，又当β是多少度时? 外接圆面积最小.

(12) 设 $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$, 求 $\sin 2\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\cos\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\alpha}{2}$.

(13) (a) 已知$\cos\alpha = \frac{119}{169}$，求$\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$和$\tan\frac{\alpha}{2}$.

(b) 已知$\cos\phi = \frac{1}{3}$，且$\phi \in (270^\circ, 360^\circ)$，求$\sin\frac{\phi}{2}$, $\cos\frac{\phi}{2}$及$\tan\frac{\phi}{2}$.

(14) 已知$\cos\alpha = \frac{4}{5}$，且$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$，求$\tan\frac{\alpha}{2}$.

(15) 已知，等腰三角形顶角的余弦等于$\frac{7}{25}$, 求底角的正弦、余弦和正切.

(16) (a) 已知$\tan\alpha = \frac{4}{5}$, $180^\circ < \alpha < 270^\circ$. 求$\tan\frac{\alpha}{2}$, $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$.

(b) 已知$2\sin x + 3\cos x = 2$, 求$\sin x$ 和 $\cos x$的值.

(17) 求证:

(a) $\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2=1-\sin x$
(b) $\tan\alpha-\cot\alpha=-2\cot 2\alpha$
(c) $\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\tan\alpha$
(d) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1+\sin 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}$
(e) $\sin\alpha(1+\cos 2\alpha)=\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$
(f) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\cos 2x$
(g) $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$
(h) $\frac{1+\sin 2\theta-\cos 2\theta}{1+\sin 2\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$
(i) $\frac{2\sin x-\sin 2x}{2\sin x+\sin 2x}=\tan^2\frac{x}{2}$
(j) $\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}=\tan\alpha$

(18) 利用45°, 30°的三角函数值，求$\cos 22^\circ 30'$; $\sin 22^\circ 30'$; $\cos 15^\circ$, $\sin 15^\circ$的值.

(19) (a) 求$\sin 18^\circ$的值；
(b) 求证$\cos 36^\circ-\cos 72^\circ=\frac{1}{2}$.

(20) 求证:
(a) $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
(b) $\tan 67.5^\circ=\sqrt{2}+1$
(c) $\tan 7^\circ 30'=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$

(21) 证明下列恒等式
(a) $2\sin\theta+\sin 2\theta=4\sin\theta\cdot\cos^2\frac{\theta}{2}$
(b) $\tan 15^\circ+\cot 15^\circ=4$
(c) $\cos^2\alpha-2=\cos 2\alpha\cdot\csc^2\alpha$
(d) $\sin(n\pi+x)\cos(n\pi-x)=\frac{1}{2}\sin 2x, \quad (n\in\mathbb{Z})$
(e) $\cos\alpha(\cos\alpha-\cos\beta)+\sin\alpha(\sin\alpha-\sin\beta)=2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$
(f) $\frac{\cos\alpha}{\sec\frac{\alpha}{2}+\csc\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$
(g) $\cos^4\theta=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{4}\cos^2 2\theta$
(h) $\sin^4\theta=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1}{8}\cos 4\theta$

(22) 求证下列条件等式:
(a) 若$\tan x=\frac{b}{a}$，则$a\cos 2x+b\sin 2x=a$
(b) 若$\tan\alpha\frac{\alpha}{2}=\frac{m}{n}$，则$\sin\alpha+\frac{m}{n}\cos\alpha=1$

(c) 若$1+2\tan^2 x=\tan^2 y$，则$\sin^2 x+\cos 2y=0$

(d) 若$x+y=3-\cos 4\alpha$, $x-y=4\sin 2\alpha$，则$x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=2$

(e) 若$2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，则

$$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\sin\beta}{2}},\qquad \cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\sin\beta}{2}}$$

第三节 三角函数的和差化积与积化和差

1.3.1 三角函数的和差化积

根据两角和差的正弦函数的定理有:

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$
$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$$

由这两个等式左、右两端相加和相减得:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y \tag{1.25}$$
$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y \tag{1.26}$$

设$x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, 那么

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\qquad y=\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{1.27}$$

因此，上面两个等式(1.25)和(1.26)就变成

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{I}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{II}$$

根据两角和差的余弦函数的定理有:

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$
$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$$

由这两个等式左、右两端相加和相减得:

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y \tag{1.28}$$
$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y \tag{1.29}$$

以等式(1.27)代入上式得:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{III}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{IV}$$

利用上面得到的四个公式；即

和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{I}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{II}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{III}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \tag{IV}$$

可以把某些三角函数的和或差化成积的形式.

例 1.27 把下列各式化成积的形式

a) $1+\sin\alpha$　　b) $1-2\sin\alpha$

c) $\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5}$　　d) $\cos 22^\circ-\sin 66^\circ$

解:

(1) 方法1:

$$
\begin{aligned}
1+\sin\alpha &= \sin 90^\circ + \sin\alpha \\
&= 2\sin\frac{90^\circ+\alpha}{2}\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2} \\
&= 2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= 2\sin^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$

方法2:

$$
\begin{aligned}
1+\sin\alpha &= 1+\cos(90^\circ-\alpha) \\
&= 2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
1-2\sin\alpha &= 2\left(\frac{1}{2}-\sin\alpha\right) \\
&= 2(\sin 30^\circ - \sin\alpha) \\
&= 2\times 2\cos\frac{30^\circ+\alpha}{2}\sin\frac{30^\circ-\alpha}{2} \\
&= 4\cos\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(15^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{5}+\cos\frac{\pi}{5} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\frac{\pi}{5} \\
&= \cos\frac{3\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{5} \\
&= 2\cos\frac{\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{10}}{2}\cos\frac{\frac{3\pi}{10}-\frac{2\pi}{10}}{2} \\
&= 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{20} \\
&= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{20}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
\cos 22^\circ - \sin 66^\circ &= \cos 22^\circ - \cos(90^\circ - 66^\circ) \\
&= \cos 22^\circ - \cos 24^\circ \\
&= -2\sin\frac{46^\circ}{2}\sin\left(-\frac{2^\circ}{2}\right) \\
&= 2\sin 23^\circ \sin 1^\circ
\end{aligned}
$$

例 1.28 把$\sin^2\alpha - \sin^2\beta$化为乘积形式.

解： 方法1:

$$
\begin{aligned}
\sin^2\alpha - \sin^2\beta &= (\sin\alpha + \sin\beta)(\sin\alpha - \sin\beta) \\
&= \left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
&= \left(2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\
&= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

方法2: 利用公式$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$ 进行替换，得到

$$
\begin{aligned}
\sin^2\alpha - \sin^2\beta &= \frac{1-\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\times(-2)\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) \\
&= \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)
\end{aligned}
$$

例 1.29 引入辅助角把下面各式化为两角和的正弦函数.

(1) $3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$

(2) $3\cos\alpha - \sqrt{3}\sin\alpha$

(3) $\cos 2x - 4\sin 2x$

解：

(1)

$$\begin{aligned}3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha&=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cos\alpha+\sin\alpha\right)\\&=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\\&=2\sqrt{3}\left(\sin60^\circ\cos\alpha+\cos60^\circ\sin\alpha\right)\\&=2\sqrt{3}\sin(60^\circ+\alpha)=2\sqrt{3}\sin(\alpha+60^\circ)\end{aligned}$$

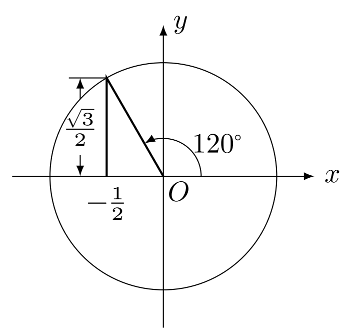


图 1.6

(2)

$$\begin{aligned}3\cos\alpha-\sqrt{3}\sin\alpha&=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)\\&=2\sqrt{3}\left(\sin120^\circ\cos\alpha+\cos120^\circ\sin\alpha\right)\\&=2\sqrt{3}\sin(120^\circ+\alpha)=2\sqrt{3}\sin(\alpha+120^\circ)\end{aligned}$$

(3) 配一个正系数k，使得

$$\cos2x-4\sin2x=k\left(\frac{1}{k}\cos2x-\frac{4}{k}\sin2x\right)$$

并且引入一个辅助角θ，满足下面两个等式:

$$\sin\theta=\frac{1}{k},\qquad\cos\theta=-\frac{4}{k}$$

k的值可由等式$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{1+(-4)^2}{k^2}=1$确定，于是有：

$$k=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$$

于是$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{17}}$. θ是第二象限角，它的值可由$\tan\theta=-\frac{1}{4}=-0.25$求出，得到

$$\theta=180^\circ-14^\circ2'=165^\circ58'$$

因此:

$$\begin{aligned}\cos 2x-4\sin 2x&=\sqrt{17}\left(\sin 165^\circ58'\cos 2x+\cos 165^\circ58'\sin 2x\right)\\&=\sqrt{17}\sin(2x+165^\circ58')\end{aligned}$$

例 1.30 化$a\sin x+b\cos x$为积的形式.

分析： 仿照例1.29可以引入一个辅助角θ, 并配上一个正系数k, 我们来分析如何确定k,θ:

假设$a=k\cdot\cos\theta$, $b=k\cdot\sin\theta$, 原式就变为

$$\begin{aligned}a\sin x+b\cos x&=k(\sin x\cdot\cos\theta+\cos x\cdot\sin\theta)\\&=k\cdot\sin(x+\theta)\end{aligned}$$

由于$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$, 因而$\left(\frac{a}{k}\right)^2+\left(\frac{b}{k}\right)^2=1$

$$\therefore\quad k=\sqrt{a^2+b^2}$$

于是就得出

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\qquad \sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

从而得

$$\tan\theta=\frac{b}{a}$$

这样，由a,b就可以确定k,θ的值了.

解：

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x\right)$$

令 $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，　$\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cdot\sin x + \sin\theta\cdot\cos x)\\
&= \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\theta)
\end{aligned}$$

其中，θ角所在的象限由a, b的符号确定，θ角的值由 $\tan\theta = \frac{b}{a}$确定.

例 1.31　若 $A+B+C=180^\circ$, 求证 $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

证明:

$$\begin{aligned}
&\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C\\
&= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C\\
&= 2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C && (\sin(A+B) = \sin C)\\
&= 2\sin C[\cos(A-B) + \cos C]\\
&= 2\sin C[\cos(A-B) - \cos(A+B)] && (\cos C = -\cos(A+B))\\
&= 2\sin C[-2\sin A\sin(-B)]\\
&= 4\sin A\sin B\sin C
\end{aligned}$$

注意: 在证明满足条件 $A+B+C=180^\circ$ 的三个角 A、B、C的三角函数恒等式时，要特别注意互为余角与互为补角的三角函数的性质，例如：从任何两个角的和是第三个角的补角这一类关系，得到

$$\sin(B+C) = \sin A, \qquad \cos(A+B) = -\cos C, \qquad \tan(C+A) = -\tan B$$

$$\cos B = -\cos(C+A), \qquad \sin C = \sin(A+B), \qquad \cot A = -\cot(B+C)$$

又从任何两个角的和的一半是第三个角的一半的余角这一关系得到

$$\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}, \qquad \sin\frac{C+A}{2} = \cos\frac{B}{2}, \qquad \tan\frac{B+C}{2} = \cot\frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{C}{2} = \sin\frac{A+B}{2}, \qquad \sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B+C}{2}, \qquad \tan\frac{B}{2} = \cot\frac{C+A}{2}$$

例 1.32 把$1+\sin\theta+\cos\theta$化成积的形式.

解:

$$\begin{aligned}
1+\sin\theta+\cos\theta &= (1+\cos\theta)+\sin\theta \\
&= 2\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2} \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2}\left[\sin\left(90^\circ-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\frac{\theta}{2}\right] \\
&= 2\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)
\end{aligned}$$

练习

(1) 把下列各式化为积的形式（口答）

a) $\sin 24^\circ+\sin 20^\circ$

b) $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ$

c) $\cos 3x+\cos 2x$

d) $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

(2) 求值:

(a) $\frac{\sin 20^\circ-\sin 40^\circ}{\cos 20^\circ-\sin 40^\circ}$

(b) $\sin 20^\circ+\sin 40^\circ-\sin 80^\circ$

(3) 求证:

(a) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cot\frac{\alpha-\beta}{2}$

(b) $\frac{\sin x+\sin y}{\cos x-\cos y}=\cot\frac{y-x}{2}$

(c) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C$,其中$A+B+C=\pi$

(4) 将下列各式化为两角和（差）的三角函数:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\sin x$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$

c) $\sqrt{2}\cos x+\sqrt{2}\sin x$

d) $\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$

e) $4\sin\alpha+3\cos\alpha$

f) $3\cos\beta-\sqrt{7}\sin\beta$

1.3.2 三角函数的积化和差

将公式(1.25)、(1.26)、(1.28)、(1.29)的两边同除以2，便得到如下公式：

积化和差公式

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)] \tag{V}$$

$$\cos x\cdot\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)] \tag{VI}$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)] \tag{VII}$$

$$\begin{aligned}\cos x\cdot\sin y&=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]\\&=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]\end{aligned} \tag{VIII}$$

若$x=y$，由此可推出倍角公式，即有

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x,\qquad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\qquad \sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

例 1.33 化乘积$\sin 35^\circ\cos 55^\circ$ 为和的形式.

解: 解法1:

$$\sin 35^\circ\cos 55^\circ=\frac{1}{2}[\sin 90^\circ+\sin(-20^\circ)]=\frac{1}{2}[1-\sin 20^\circ]$$

解法2:

$$\sin 35^\circ\cos 55^\circ=\sin^2 35^\circ=\frac{1-\cos 70^\circ}{2}=\frac{1-\sin 20^\circ}{2}$$

例 1.34 不查表，求下列各式的值:

(1) $\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}$

(2) $\cos^2 73^\circ+\cos^2 47^\circ+\cos 73^\circ\cos 47^\circ$

解:

(1) 解法1:

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12} &= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{3}\right]\\ &= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{4}(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

解法2:

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12} &= \cos\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}\\ &= \cos^2\frac{\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 1+\frac{\cos 146^\circ}{2}+\frac{1+\cos 94^\circ}{2}+\frac{\cos 120^\circ+\cos 26^\circ}{2}\\ &= 1+\frac{\cos 146^\circ+\cos 94^\circ}{2}-\frac{1}{4}+\frac{\cos 26^\circ}{2}\\ &= \frac{3}{4}+\frac{2\cos 120^\circ\cos 26^\circ}{2}+\frac{\cos 26^\circ}{2}\\ &= \frac{3}{4}-\frac{\cos 26^\circ}{2}+\frac{\cos 26^\circ}{2}\\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

例 1.35 化简 $\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha$ 并求 $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$ 的值.

解:

$$\begin{aligned}\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha &= \frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{2\sin\alpha}\\ &= \frac{\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha\cdot\cos 4\alpha}{2\sin\alpha}\\ &= \frac{\sin 4\alpha\cdot\cos 4\alpha}{2^2\sin\alpha}\\ &= \frac{\sin 8\alpha}{2^3\sin\alpha}=\frac{\sin 8\alpha}{8\sin\alpha}\end{aligned}$$

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{8}$$

例 1.36 求证:

(1) $\sin 15^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 75^\circ=\frac{1}{8}$

(2) $\cos 10^\circ\cdot\cos 30^\circ\cdot\cos 50^\circ\cdot\cos 70^\circ=\frac{3}{16}$

证明:

(1) 证法1:

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{2}\sin 15^\circ\cdot\sin 75^\circ\\&=-\frac{1}{4}[\cos 90^\circ-\cos(-60^\circ)]\\&=-\frac{1}{4}(0-\cos 60^\circ)\\&=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}=\text{右边}\end{aligned}$$

证法2:

$$\begin{aligned}\text{左边}&=\frac{1}{2}\sin 15^\circ\cdot\sin 75^\circ\\&=\frac{1}{2}\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ\\&=\frac{1}{4}\sin 30^\circ=\frac{1}{8}=\text{右边}\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\text{左边} &= \cos 10^\circ \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}[\cos 120^\circ + \cos(-20^\circ)] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 10^\circ \left(-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right) \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8}[\cos 30^\circ + \cos 10^\circ] \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{8}\cos 10^\circ \\
&= \frac{3}{16} = \text{右边}
\end{aligned}
$$

例 1.37 求证：$\cos^3 2\alpha = \sin 3\alpha \cdot \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cdot \cos^3 \alpha$

证明:

$$
\begin{aligned}
\text{右边} &= \sin^2 \alpha(\sin 3\alpha \cdot \sin \alpha) + \cos^2 \alpha(\cos 3\alpha \cdot \cos \alpha) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin^2 \alpha(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) + \cos^2 \alpha(\cos 4\alpha + \cos 2\alpha)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos 2\alpha(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos 4\alpha(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos 2\alpha + \cos 4\alpha \cdot \cos 2\alpha\right] \\
&= \frac{1}{2}\cos 2\alpha(1 + \cos 4\alpha) \\
&= \frac{1}{2}\cos 2\alpha \cdot 2\cos^2 2\alpha \\
&= \cos^3 2\alpha = \text{左边}
\end{aligned}
$$

例 1.38 已知在$\triangle ABC$中，$\sin B \cdot \sin C = \cos^2 \frac{A}{2}$．求证这个三角形是等腰三角形.

证明: 由于$\sin B \cdot \sin C = \cos \frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$ 且 $A = \pi - (B+C)$, $\cos A = -\cos(B+C)$,
因而就有

$$\sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2}[1 - \cos(B+C)]$$

所以

$$-\frac{1}{2}[\cos(B+C)-\cos(B-C)]=\frac{1}{2}-\cos(B+C)]$$

化简上式，得$\cos(B-C)=1$.

又由$-180^\circ<B-C<180^\circ$，所以$B-C=0^\circ$，即$B=C$，这证明了$\triangle ABC$是等腰三角形.

例 1.39 若$A+B+C=\pi$, 求证:

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}=4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$

证明:

$$\begin{aligned}
&4\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\\
&=2\cos\frac{\pi-A}{4}\left[\cos\frac{2\pi-(B+C)}{4}+\cos\frac{B-C}{4}\right]\\
&=2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi+A}{4}+2\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{B-C}{4}\\
&=\left(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)+2\cos\frac{B+C}{4}\cos\frac{B-C}{4}\\
&=\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

练习

(1) 先将各式化为和差形式，再查表求值:

a) $2\sin 70^\circ\cdot\cos 20^\circ$

b) $\cos 80^\circ\cdot\sin 120^\circ$

c) $\cos 68^\circ\cdot\cos 52^\circ$

d) $\sin 121^\circ\cdot\sin 50^\circ$

(2) 不查表求值:

(a) $\sin 105^\circ\cdot\cos 75^\circ$

(b) $2\cos 37.5^\circ\cdot\cos 22.5^\circ$

(c) $2\cos\frac{9\pi}{13}\cdot\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$

(d) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ\cdot\cos 40^\circ$

(3) 求证:

(a) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2x$

(b) $\sin 20^\circ\cdot\cos 70^\circ+\sin 10^\circ\cdot\sin 50^\circ=\frac{1}{4}$

(c) $\cos 2\alpha\cdot\cos\alpha-\sin 5\alpha\cdot\sin 2\alpha=\cos 4\alpha\cdot\cos 3\alpha$

(d) $\cos 4x\cdot\cos 2x-\cos^2 3x=-\sin^2 x$

(e) $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=2\tan 2x$

习题1.3

(1) 将函数的和化为乘积形式

a) $\sin 12^\circ+\sin 20^\circ$

b) $\sin 40^\circ-\sin 16^\circ$

c) $\cos 50^\circ+\cos 30^\circ$

d) $\cos 17^\circ-\cos 13^\circ$

e) $\sin 24^\circ+\cos 55^\circ$

f) $\sin\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}$

g) $\tan 10^\circ+\tan 20^\circ$

h) $\tan 12^\circ-\cot 40^\circ$

i) $\tan\alpha+\cot\alpha$

j) $\cos\alpha-\sin\alpha$

(2) 化函数的和式为乘积

a) $\cos^2\alpha-\cos^2\beta$

b) $\tan^2\alpha-\tan^2\beta$

c) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$

d) $\sin 16^\circ+\sin 24^\circ+\sin 40^\circ$

e) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$

f) $\sin^2 x-\sin^2 y$

(3) 化简下面式子

(a) $I\sin\omega t+I\sin\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)+I\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)$

(b) $\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cdot\cos 2$

(c) $\sec\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\sec\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

(d) $\frac{\tan(45^\circ+x)-\tan(45^\circ-x)}{\tan(45^\circ+x)+\tan(45^\circ-x)}$

(e) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$

(4) 引入辅助角将下面式子化为乘积形式:

a) $1+\sin\alpha$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\alpha$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\alpha$

d) $\frac{3}{4}-\sin^2\alpha$

e) $\frac{1}{4}-\cos^2\alpha$

f) $3-\tan^2\alpha$

g) $\sqrt{3}+2\cos\alpha$

h) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x$

i) $4\sin x-3\cos x$

j) $7\sin 2t-6\cos 2t$

(5) 不查表，计算下面各式的值

a) $\sin 52°30'\cos 7°30'$

b) $\cos 97°30'\sin 37°30'$

c) $2\cos 165°\cos 135°$

d) $\tan 10°\cdot\tan 50°\cdot\tan 70°$

e) $\cos 20°\cos 40°\cos 60°\cos 90°$

f) $\cos 20°+\cos 100°+\cos 140°$

g) $\sin 20°\sin 40°\sin 60°\sin 80°$

h) $\cos 40°\cdot\cos 80°\cdot\cos 160°+\cos 160°\cdot\cos 40°$

(6) 化简下列各式

(a) $2\sin 2\alpha\sin\alpha+\cos 3\alpha$

(b) $2\cos\frac{9\pi}{13}\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}$

(7) 证明下列各等式:

(a) $\frac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+\sin 5A+\sin 7A}=\frac{\sin 3A}{\sin 5A}$

(b) $\frac{\sin x-\sin y}{\sin(x+y)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(x-y)}{\sin\frac{1}{2}(x+y)}$

(c) $\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}{1+\cos 2(\alpha+\beta)}$

(d) $\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{7\alpha}{2}+\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{11\alpha}{2}=\sin 2\alpha\cdot\sin 5\alpha$

(e) $(\sin x+\cos x)(\sin 2x+\cos 2x)=\sin 3x+\cos x$

(8) 若$A+B+C=\pi$，求证:

(a) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(b) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

(c) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

(d) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$

(9) 若一三角形的边和角适合条件:

$$(a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin(A+B)$$

试证：此三角形为直角三角形或等腰三角形.

提示：用正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(10) 若A、B、C、D均在0与π之间，求证:

(a) $\sin\frac{A+B}{2}\geq\frac{1}{2}(\sin A+\sin B)$

(b) $\sin\frac{A+B+C+D}{4} \geq \frac{1}{4}(\sin A+\sin B+\sin C+\sin D)$

(c) $\sin\frac{A+B+C}{3} \geq \frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C)$

提示：在(b)中令$D=\frac{A+B+C}{3}$推导出(c).

(11) 求下列各式的最大值与最小值：

a) $\sin x\cdot\cos x$

b) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)$

d) $6\cos x+8\sin x$

第四节 简单三角方程

在初中我们曾经学习过这样的问题：已知三角函数值求角. 如，已知$\sin x=\frac{1}{2}$，求x的值，像这样条件等式$\sin x=\frac{1}{2}$的样子，我们把**含有未知数的三角函数的等式，叫做三角方程**. 例如：$\sin x-1=-\frac{1}{2}$，$2\sin^2 x+3\cos x=0$，$\sin 5x=\cos 4x$，等等都是三角方程.

解三角方程就是求出未知数的一切能适合下方程的值，或证明方程无解.

三角方程的一般理论和解法，留待以后学习，本节仅就几种特殊类型的简单三角方程的具体解法加以讨论.

1.4.1 最简单的三角方程

三角方程中，$\sin x=a$，$\cos x=a$，$\tan x=a$，$\cot x=a$就叫做最简单的三角方程. 它们的求解是其它三角方程求解的基础.

最简单的三角方程求解的方法是相同的，正像在初中已经学过的那样：首先求出，已知方程在$0\leq x<2\pi$区间内的解，如果这个区间内有两个解：$x=\alpha_1$和$x=\alpha_2$，那么原方程的所有解就是$x=\alpha_1+2k\pi$和$x=\alpha_2+2k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$；如果在这个区间内只有一个解：$x=\alpha$，那么原方程的解就是$x=\alpha+2k\pi$；如果在这个区间没有解，那么原方程也没有解. 可见，最简单的三角方程或有无限多解，或没有解.

例 1.40 解方程$\sin x=\frac{1}{2}$.

解： 已知在$(0,2\pi)$内解为$x=\frac{\pi}{6}$和$x=\frac{5\pi}{6}$，所以方程的解集为

$$\left\{x\middle|x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}\bigcup\left\{x\middle|x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right\}$$

例 1.41 解方程$\cos x = 0$

解： 已知在$(0, 2\pi)$内，$x = \frac{\pi}{2}$和$x = \frac{3\pi}{2}$，所以方程的解为

$$\begin{aligned} &\left\{x \middle| x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \bigcup \left\{x \middle| x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi = \frac{\pi}{2}(2k+1)\pi\right\} \\ = &\left\{x \middle| x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

例 1.42 解方程$\sin x = -1$

解： 解集为$\left\{x \middle| x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

例 1.43 解方程$\cos x = 2$

解： 由于任意角α的余弦具有性质$|\cos \alpha| < 1$, 因此，方程$\cos x = 2$无解，即解集为$\emptyset$.

例 1.44 解方程$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

解： 由查表可知在$[0, 2\pi)$内，$x = 40°54'$和$x = 220°54'$．所以方程的解为

$$\begin{aligned} &\left\{x \middle| x = 40°54' + k \cdot 360°\right\} \cup \left\{x \middle| x = 220°54' + k \cdot 360°\right\} \\ = &\left\{x \middle| x = 40°54' + k \cdot 180°,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

一般地，可以概括出：

- 方程 $\sin x = a$与$\cos x = a$, 当$|a| \leq 1$时有解；当$|a| > 1$时无解；
- 方程 $\tan x = a$与$\cot x = a$，当a为任意实数时，都有解.

练习

解下列最简单三角方程

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　b) $\sin x = 0$

c) $\cos x = -1$　　d) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\tan x = 0.5$　　f) $\cot x = -2.3016$

g) $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$　　　　h) $\tan x = 2\sqrt{2} - 1$

1.4.2　简单的三角方程

有几类特殊而简单的三角方程，可以通过三角恒等变形或利用代数中解方程的方法，将它们化成一个或几个最简单的三角方程，从而求出它们的解集.

例 1.45　解方程

分析： 这几个三角方程的共同特点是：只含有同一个未知数的同名三角函数. 因此可以将这个含有未知数的三角函数视为一元，用代数方法先求出它的值，从而归结为最简单的三角方程求解.

解：

(1) 原方程化为 $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

所以解集是 $\left\{x \middle| x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

(2) 原方程化为 $\tan(x + 15^\circ) = -1$

$$x + 15^\circ = -45^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

所以解集是 $\left\{x \middle| x = -60^\circ + k \cdot 180^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$

(3) 原方程化为 $\sin(3x - 9^\circ) = \frac{1}{2}$

$$3x - 9^\circ = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, \quad 3x - 9^\circ = 150^\circ + k \cdot 360^\circ, \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

所以解集为

$$\left\{x \middle| x = 13^\circ + k \cdot 120^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{x \middle| x = 53^\circ + k \cdot 120^\circ, \quad k \in \mathbb{Z}\right\}$$

(4) 原方程是关于$\cos x$的二次方程，解这个方程，得

$$\cos x = 2+\sqrt{2}, \qquad \cos x = 2-\sqrt{2}$$

因为$2+\sqrt{2}>1$，所以$\cos x = 2+\sqrt{2}$无解；从$\cos x = 2-\sqrt{2}$，可以解得：$x = \pm 54°9' + k\cdot 360°$，$(k\in\mathbb{Z})$.

所以原方程的解集是 $\left\{x \middle| x = \pm 54°9' + k\cdot 360°, \quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

例 1.46 解方程$2\sin^2 x + 3\cos x = 0$.

分析： 利用三角公式，可以化为只含同一个未知数的同名函数的三角方程求解.

解： 原方程化为$2(1-\cos^2 x)+3\cos x = 0$，即

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

解这个关于$\cos x$的二次方程，得

- $\cos x = 2$，它的解集为$\emptyset$;
- $\cos x = -\frac{1}{2}$, $\quad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad (k\in\mathbb{Z})$

所以原方程的解集是$\left\{x \middle| x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\right\}$.

例 1.47 解方程$\sin^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin x\cdot\cos x - \cos^2 x = 0$.

分析： 方程的每一项中，关于$\sin x$与$\cos x$的次数都相同（这里都是二次），我们叫做关于$\sin x$与$\cos x$的齐次方程，这种特点的方程可直接观察知道$\cos x = 0$的x值，不会是方程的解、因此，这类方程可以两边同除以$\cos x$的某次幂而不会使方程增根或丢根的，这样就可以归结为含有未知数正切函数的方程求解了.

解： 原方程两边同除以$\cos^2 x$得：$\tan^2 x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\tan x - 1 = 0$

解这个关于$\tan x$的二次方程，得

- $\tan x = \sqrt{3}$, $\qquad x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad (k\in\mathbb{Z})$
- $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\qquad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad (k\in\mathbb{Z})$

所以原方程的解集是

$$\left\{x \middle| x = \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{x \middle| x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

例 1.48　解方程$\sin x = 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

解： 由和角公式

$$\sin x = 2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos x - \cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin x\right) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$$

所以 $2\sin x = \sqrt{3}\cos x$，两边同除以$2\cos x$，得

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.8660$$

查表可得：$x = 40°54' + k\cdot 180° \quad (k\in\mathbb{Z})$

所以原方程的解集是$\left\{x\middle|x = 40°54' + k\cdot 180°,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$

例 1.49　解方程$\sqrt{3}\sin x = \frac{6}{\sqrt{3}}\cos^2\frac{x}{2}$

解： 利用倍角公式变形

$$2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2} - \frac{6}{\sqrt{3}}\cos^2\frac{x}{2} = 0$$

即：$\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right) = 0$

所以，原方程可分解为下面两个方程解

$$\cos\frac{x}{2} = 0,\qquad \sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$$

- 若$\cos\frac{x}{2} = 0$，则$\frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi$，所以$x = \pm\pi + 4k\pi$，$(k\in\mathbb{Z})$
- 若$\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 0$,可变形为$\tan\frac{\pi}{2} = 1$,则$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi$,所以$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$，$(k\in\mathbb{Z})$

因此原方程的解集是

$$\left\{x\middle|x = \pm\pi + 4k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{x\middle|x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\right\}$$

练习

解下列三角方程:

(1) $2\sin\frac{2x}{3}=1$, $3\tan\frac{x+20^\circ}{3}=\sqrt{3}$

(2) $\sin^2 x-2\sin x-3=0$

(3) $4\cos^2 x-4\sin x=1$

(4) (a) $2\sin x-5\cos x=0$

(b) $3\sin^2 x+2\sin x\cos x-5\cos^2 x=0$

(5) (a) $\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}\cos\frac{x}{4}=0$

(b) $4\cos\frac{x}{2}-5\cos x=5$

(6) (a) $\cos 3x+\cos 2x=0$

(b) $6\sin x+8\cos x=5$

习题1.4

解下列三角方程:

a) $2\cos 2x=1$

b) $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $2\cos\left(\frac{\pi}{3}+45^\circ\right)=1$

d) $\tan 2x-\sqrt{3}=0$

e) $\frac{1}{2}\cot(x+25^\circ)-2=0$

f) $2\cos^2 x-3\cos x+1=0$

g) $\sin^2 2x=\sin 2x$

h) $3\sin x-2\cos^2 x=0$

i) $2\sin^2 x=1$

j) $\sin^2 x-7\sin x\cdot\cos x+6\cos^2 x=0$

k) $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{4}$

l) $\sin 3x=\sin x$

m) $3\sin^2 x-\sin 2x-\cos^2 x=0$

n) $\sin 2x=\cos 3x$

o) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$

p) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=0$

q) $5\cos 2x+2\sin 2x=0$

r) $\cos^2 x-3\sin^2 2x=0$

s) $\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=1$

t) $4\sin x+3\cos x=3$

本章内容要点

一、本章内容主要包括两角和、差、倍、半的三角函数公式，以及三角函数的和差化积、积化和差的公式. 这些公式的推导和变化，在数学和其它工程技术中都

有广泛应用，要熟练地掌握.

二、掌握这些公式，主要应以两角和（差）的余弦公式为基础，掌握和理解这些公式之间的内在联系和推导线索（见附表所列），这样可以帮助记忆.

三、除附表中所列主要公式外，还有

(1) 万能公式——用$\tan\frac{\alpha}{2}$的有理式表示α角的任何三角函数．即

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\quad \tan\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

(2) $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\theta)$

其中，辅助角θ由a、b的符号确定象限，由$\tan\theta=\frac{a}{b}$确定数值.

四、应用这些公式时，必须注意：凡使公式中某式子没有意义的角，都不适合公式；必须另加讨论．在使用半角公式时，必须考察半角所在的象限，从而确定公式中根号前的符号.

五、本章还包括了简单三角方程及其解法的内容，主要是应用三角公式和代数方法解一些特殊类型的三角方程．其中有

(1) 最简单的三角方程

- $\sin x=a$, $\cos x=a$, 当$|a|\le 1$时有解；
- $\tan x=a$, $\cot x=a$, a为任意实数都有解.

(2) 简单三角方程，其中包括只含有一个未知数的同名三角函数，关于$\sin x$及$\cos x$是齐次式、可变形为因式乘积的等特殊类型，一般都用解代数方程的方法，归结为解最简单的三角方程来求解.

复习题一

(1) 求值：

(a) 已知$\cos 2\alpha=\frac{3}{5}$，求$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$的值.

(b) 已知$\tan x=\frac{7}{24}$，求$\cos 2x$, $\cot\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$的值.

(c) 已知$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$，求$\sin 2\theta$的值.

(d) 已知$\sin\phi\cdot\cos\phi=\frac{60}{169}$，且$\frac{\pi}{4}<\phi<\frac{\pi}{2}$，求$\sin\phi$.

(e) 已知$\sin\alpha-\cos\alpha=m$，求$\sin 2\alpha$的值.

(2) 在$\triangle ABC$中

(a) 如果$\cos A = \frac{15}{17}$, $\cos B = \frac{9}{41}$，求$\cos C$;

(b) 如果$\tan A = 2$, $\tan B = 3$，求$\tan C$;

(c) 如果$\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos B = \frac{5}{13}$，求$\cos C$;

(d) 如果$\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos B = \frac{12}{13}$，求$\sin C$.

(3) (a) 等腰三角形底角的正弦为$\frac{13}{5}$，求顶角的正弦、余弦和正切;

(b) 等腰三角形顶角的余弦为$\frac{7}{25}$，求底角的正弦;

(c) 等腰三角形中，腰为底的2倍，求顶角的正弦、余弦.

(4) 证明下列各恒等式

(a) $\cos^4 A - \sin^4 A + 1 = 2\cos^2 A$

(b) $(\sin A + \cos A) \cdot (1 - \sin A \cos A) = \sin^3 A + \cos^3 A$

(c) $\frac{1-\tan A}{1+\tan A} = \frac{\cot A - 1}{\cot A + 1}$

(d) $\frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$

(e) $\frac{\cot A \cos A}{\cot A + \cos A} = \frac{\cot A - \cos A}{\cot A \cos A}$

(f) $\frac{1+2\sin A \cos A}{\sin^2 A - \cos^2 A} = \frac{\tan A + 1}{\tan A - 1}$

(g) $\frac{\cos A + \cos B}{\sin A - \sin B} + \frac{\sin A + \sin B}{\cos A - \cos B} = 0$

(h) $\cot^2 A - \cot^2 B = \frac{\sin^2 B - \sin^2 A}{\sin^2 A \sin^2 B}$

(5) 求证:

(a) $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\pi - \alpha) = \sin 2\alpha$

(b) $\left(\sin\frac{A}{2} - \cos\frac{A}{2}\right)^2 = 1 - \sin A$

(c) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$

(d) $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\tan 2x$

(e) $1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

(6) 把下列各式化为乘积的形式:

a) $1 + \sin 2A$

b) $\frac{1}{2} - \cos x$

c) $\frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

d) $\sin\alpha - \cos\beta$

e) $\sin^2\alpha - \sin 2\beta$

f) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta$

g) $\sin\alpha - \sin\beta + \sin(\alpha + \beta)$

h) $1 + \cos\theta + \cos\frac{\theta}{2}$

i) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta$

j) $1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha - \sin^2\beta - \cos^4\alpha$

(7) (a) 当α是多少度时，方程$2x^2+2\sqrt{2}x+\tan\alpha=0$有两个相等的实数根.（$0^\circ\leq\alpha\leq 360^\circ$）

(b) $x^2-\cos\alpha x+\frac{1}{4}\sin 2\alpha=0$, $(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$为关于x的二次方程，当α为何值时，方程有两个相等的实数根，它的根是什么?

(8) 若方程$5x^2-10x\cos\alpha+7\cos\alpha+6=0$的两根相等，试求两邻边之和为6，且夹角为$\alpha$的平行四边形的最大面积.

(9) 已知A、B是一个直角三角形的两个锐角，而且$\sin A$和 $\sin B$是方程$4x^2+kx+\sqrt{3}=0$的两个根，求A、B和k的值.

(10) $\triangle ABC$的三个内角分别是α、β、γ, 而$\tan\alpha$、$\tan\beta$是方程$x^2-5x+6=0$的两个根，求γ.

(11) 确定x为何值时下列等式有意义

$$\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x},\qquad \cot\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1-\cos x}$$

(12) 已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，求证$\sin\alpha+\cos\alpha>1$.

(13) 已知$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$,

问 $\sin(\alpha+\beta)$和$\sin\alpha+\sin\beta$哪个大?

(14) 证明下列恒等式:

(a) $\tan 20^\circ+\tan 40^\circ+\sqrt{3}\tan 20^\circ\cdot\tan 40^\circ=\sqrt{3}$

(b) $\frac{\sin(2x+y)}{\sin x}-2\cos(x+y)=\frac{\sin y}{\sin x}$

(c) $\sec\theta=\sqrt{\frac{\sec^4\theta-\tan^4\theta}{2\sin^2\theta+\cos^2\theta}}$, $\quad(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

(d) $\frac{3-4\cos 2A+\cos 4A}{3+4\cos 2A+\cos 4A}=\tan^4 A$

(e) $\frac{1+\cos A+\cos 2A+\cos 3A}{2\cos^2 A+\cos A-1}=2\cos A$

(f) $\tan 3\theta-\tan 2\theta-\tan\theta=\tan 3\theta\cdot\tan 2\theta\cdot\tan\theta$

(g) $\sin x+\sin y+\sin z-\sin(x+y+z)=4\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y+z}{2}\cdot\sin\frac{z+x}{2}$

(h) $\cos x+\cos y+\cos z+\cos(x+y+z)=4\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{y+z}{2}\cdot\cos\frac{z+x}{2}$

(15) 在 $\triangle ABC$ 中, 求证:

(a) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$

(b) $\frac{\cos A}{\sin B\cdot\sin C}+\frac{\cos B}{\sin A\cdot\sin C}+\frac{\cos C}{\sin A\cdot\sin B}=2$

(c) $\frac{\cos 2A}{a^2}-\frac{\cos 2B}{b^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$

(d) $(a^2-b^2-c^2)\tan A+(a^2-b^2+c^2)\tan B=0$

(16) 在 $\triangle ABC$ 中, 证明:

(a) 若$\sin A = 2\cos B \cdot \sin C$，则$\triangle ABC$为等腰三角形;

(b) 若$a^2 = b(b+c)$，则$A = 2B$;

(c) 若$\lg\sin A - \lg\cos B - \lg\sin C = \lg 2$，则$\triangle ABC$是等腰三角形;

(d) 若$\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$，则$\triangle ABC$是直角三角形.

(17) 求下列函数的周期:

a) $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

b) $y = 2\cos^2\alpha - 1$

c) $y = 4\cos 2\theta \sin^2\theta$

d) $y = \sqrt{3}\sin 2\theta - \cos 2\theta$

(18) 求函数$x = \tan\theta + \cot\theta$的极值，并求$\theta$为何值时达到这个极值.

(19) 求下列函数的最大值与最小值

a) $y = \sin 3x \cdot \cos 3x$

b) $y = \sin(x - 30^\circ)\cos x$

c) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$

d) $y = \sin x + \cos x$

e) $y = a\sin x + b$

f) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$

(20) 求函数$y = 3\cos 2x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 1$的振幅、周期、极大值和极小值.

(21) 解下列三角方程:

a) $4\sin^2 x + (2\sqrt{3}-2)\cos x - (4-\sqrt{3}) = 0$

b) $\sec^2 x = 1 + \tan x$

c) $\cos 2x + \sin 3x = 0$

d) $\cos 3x + 2\cos x = 0$

e) $\tan 3x = \tan 4x$

f) $\frac{\sin 2x}{\cos x} = \frac{\cos 2x}{\sin x}$

g) $5\cos x + 12\sin x = 13$

h) $\sin 6x \cdot \cos x = \sin 4x \cdot \cos 3x$

i) $\sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x$

j) $\sin 5x - \sin 3x = \sqrt{2}\cos 4x$

(22) 求证:

(a) 方程 $\sin^2 x = \sin^2\alpha$的解集是$\{x | x = \pm\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

(b) 方程 $\tan^2 x = \tan^2\alpha$的解集是$\{x | x = \pm\alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

责任编辑：张晨南

封面设计：张晨南

定价：66.00元