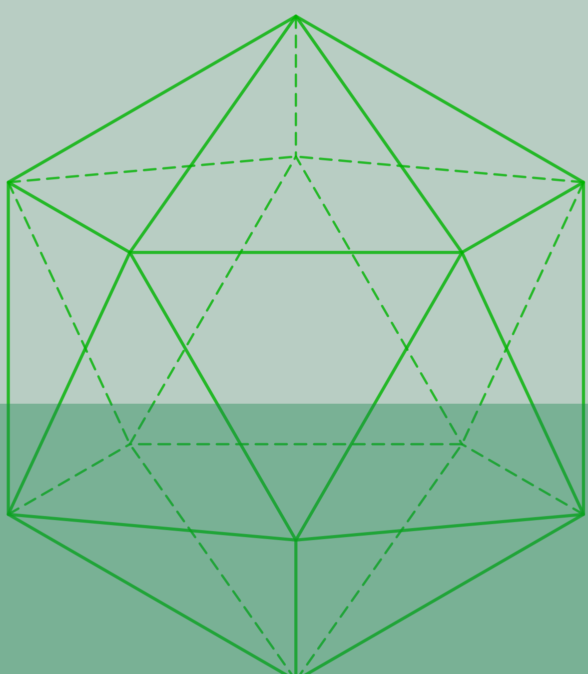
中学经典教材丛书

Textbook for Middle School Solid Geometry

立体几何（甲种本）

全一册



人民教育出版社数学室　编

同济极客出版社

Textbook for Middle School Solid Geometry

立体几何（甲种本）

人民教育出版社数学室　　编

献给：奔赴高考的莘莘学子

同济极客出版社

*** 内 容 简 介 ***

本书供六年制中学高中一年级选用，每周授课 2 课时．本书内容包括直线和平面、多面体和旋转体以及多面角和正多面体等三章．本书习题共分四类：练习、习题、复习参考题以及总复习参考题．练习主要供课堂练习用；习题主要供课内外作业用；复习参考题和总复习参考题都分 A、B 两组．复习参考题 A 组供复习本章知识时使用；总复习参考题 A 组供复习全书知识时使用；两类题中的 B 组综合性与灵活性较大，仅供学有余力的学生参考使用．习题及复习参考题、总复习参考题中的 A 组题的题量较多，约为学生通常所需题量的 1.5 倍，教学时可根据情况选用．本书是在中小学通用教材编写组编写的全日制十年制高中课本（试用本）《数学》第二册第五章“空间图形”的基础上编写的．初稿编出后，曾向各省、市、自治区的教研部门、部分师范院校征求了意见，并向部分中学教师征求了意见，有的省还进行了试教．他们都提出了许多宝贵的意见．本书由人民教育出版社数学室编写．参加编写的有鲍珑、李慧君、孙福元等，全书由孙福元校订．

责任编辑　张晨南

封面设计　张晨南

出版发行　同济极客出版社

网　　址　http://www.tjad.cn

开　　本　216 mm×279 mm

版　　次　2024年12月12日发行　　2025年8月4日印刷

定　　价　52.00元

引言

在初中，我们学习了平面几何，研究过一些平面图形（由同一个平面内的点、线所构成的图形）的形状、大小和位置关系，还有平面图形的画法和计算，以及它们的应用．可是，在解决实际问题中，只知道这些几何知识还是不够用的．例如，建造厂房、制造机器、修筑堤坝等，都需要进一步研究空间图形的问题．

空间图形是由空间的点、线、面所构成，也可看成是空间点的集合．以前我们学过的长方体、圆柱、圆锥等，都属于空间图形．平面图形是空间图形的一部分．

立体几何的研究对象是空间图形．我们将在平面几何知识的基础上，来研究空间图形的性质、画法、计算，以及它们的应用．

目录

第一章　直线和平面

第一节　平面

1.1.1　平面

常见的桌面、黑板面、平静的水面以及纸板等，都给我们以平面的形象．几何里所说的平面就是从这样的一些物体抽象出来的．但是，几何里的平面是无线延展的．

当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们都很像平行四边形．因此，在立体几何中，通常画平行四边形来表示平面（图 1.1）．当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 $45°$，横边画成等于邻边的两倍．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画（图 1.2）．这样看起来立体感强一些．

图 1.1　　　　　　图 1.2

平面通常用一个希腊字母 α、β、γ 等来表示，如平面 α、平面 β、平面 γ 等，也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 AC（图 1.1）．

练习一

1. 能不能说一个平面长 $4\,\mathrm{m}$，宽 $2\,\mathrm{m}$？为什么？
2. 观察中甲乙两个图形，用模型来说明它们的位置有什么不同．并用字母来表示各平面

（第 2 题）

1.1.2 平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质．我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础.

公理 1

如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内（图 1.3）.

这时，我们说直线在平面内，或者说平面经过直线.

图 1.3

例如，把一根支持边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上.

点 A 在直线 a 上，记作 $A \in a$；点 A 在直线 a 外，记作 $A \notin a$；点 A 在平面 α 内，记作 $A \in \alpha$；点 A 在平面 α 外，记作 $A \notin \alpha$；直线 a 在平面 α 内，记作 $a \subset \alpha$.

公理 2

如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线（图 1.4）.

图 1.4

例如，教室内相邻的墙角，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线.

如果两个平面 α 和 β 有一条公共直线 a，就说平面 α 和 β 相交，交线是 a，记作 $\alpha \cap \beta = a$.

公理 3

经过不在同一直线上的三点，有且仅有一个平面（图 1.5）.

图 1.5

例如，一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了.

过 A、B、C 三点的平面又可记作“平面 ABC”.

根据上述公理，可以得出下面的推论:

推论 1

经过不在同一直线上的三点，有且仅有一个平面（图 1.6a）.

(a)　(b)　(c)

图 1.6

A 是直线 a 外的一点，在 a 上任取两点 B、C，根据公理3，经过不共线的三点 A、B、C 有一个平面 α. 因为 B、C 都在平面 α 内，所以根据公理1，直线 a 在平面 α 内. 即平面 α 是经过直线 a 和点 A 的平面.

因为 B、C 在直线 a 上，所以经过直线 a 和点 A 的平面一定经过 A、B、C. 又根据公理3，经过不共线的三点的平面只有一个，所以经过直线 a 和点 A 的平面只有一个.

类似地，可以得出下面两个推论:

推论2

经过两条相交直线，有且仅有一个平面（图 1.6b）.

推论3

经过两条平行直线，有且仅有一个平面（图 1.6c）.

“有且仅有一个平面”，我们也说“确定一个平面”

注意：在立体几何里，平面几何中的定义、公理、定理等，对于同一个平面内的图形仍然成立.

例 1.1 两两相交且不过同一个点的三条直线比在同一个平面内.

已知：直线 AB、BC、CA 两两相交，焦点分别为 A、B、C（图 1.7）. 求证：直线 AB、BC、CA 共面[①].

证明： $\because$ 直线 AB 和 AC 相交于点 A,

$\therefore$ 直线 AB 和 AC 确定一个平面 α（推论2）.

$\because$ $B \in AB$, $C \in AC$,

$\therefore$ $B \in \alpha$, $C \in \alpha$.

$\therefore$ $BC \subset \alpha$（公理1）.

因此，直线 AB、BC、CA 都在平面 α 内，即它们共面.

图 1.7

练习二

1. 填空
   a) ______________的三点确定一个平面；
   b)
   c)
2. 用符号表示下列语句:
   a) 点 A 在平面 α 内，但在平面 β 外；
   b)
   c)
   d)
3.

① 空间的几个点和几条直线，如果都在同一个平面内，可以简单地说它们“共面”，否则说它们“不共面”.

1.1.3　水平放置的平面图形的直观图的画法

练习三

1. 画出水平放置的正方形、正三角形的直观图.
2. 图中所给出的 x 轴、y 轴经过正五边形中心，画这个正五边形的直观图.

习题一

1. 下面的说法正确吗？为什么？
   a) 线段 AB 在平面 α 内，直线 AB 不全在平面 α 内；
   b) 平面 α 和 β 只有一个公共点.
2. 为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚？
3. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？
4. 解答：
   a) 不共面的四点可以确定几个平面？
   b) 三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定几个平面？
   c) 共点的三条直线可以确定几个平面？
5. 一条直线经过平面内的一点与平面外的一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？
6. 一条直线与两条平行直线都相交，证明：这三条直线在同一个平面内.
7. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线，证明：这三条直线在同一个平面内.
8. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？
9. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿下端是否在同一个平面内？
10. 画出图中水平放置的四边形 $OABC$ 的直观图.
11. 画水平放置的等腰梯形和平行四边形的直观图.

第二节 空间两条直线

1.2.1 两条直线的位置关系

练习四

1. 在教室中找出几对异面直线的离子.
2. 解答:
   a) 没有公共点的两条直线叫做平行直线，对吗?
   b) 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线吗? 为什么?
3. 说出正方体中各对线段的位置关系
   a) AB 和 CC_1; b) A_1C 和 BD_1; c) A_1A 和 CB_1;
   d) A_1C_1 和 CB_1; e) A_1B_1 和 DC; f) BD_1 和 DC.

1.2.2 平行直线

练习五

1. 把一张长方形的纸对折两次，打开后如图那样，说明为什么这些折痕是互相平行的.

1.2.3 两条异面直线所成的角

练习六

1.
2.
3.

习题二

1. 什么叫平行直线? 什么叫异面直线，说出它们的共同点和区别.
2.
3.
4.
5.

6.
7.
8.
9.
10.
11.

第三节　空间直线和平面

1.3.1　直线和平面的位置关系

练习七

1. 观察图中的吊桥，说出立柱和桥面、水面，铁轨和桥面、水面的位置关系.
2. 举出直线和平面三种位置关系的实例.

1.3.2　直线和平面平行的判定与性质

直线和平面平行，除可根据定义判定外，还有以下的判定定理：

直线和平面平行的判定定理

如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

直线和平面平行的性质定理

如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行.

练习八

1. ;
2. ;
3. .

习题三

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

1.3.3 直线和平面垂直的判定与性质

练习九

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

1.3.4 斜线在平面上的射影、直线和平面所成的角

练习十

1. ;
2. ;
3. .

1.3.5　三垂线定理

练习十一

1. ;
2. .

习题四

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

第四节　空间两个平面

1.4.1　两个平面的位置关系

练习十二

1. 举出两个平面平行和相交的一些实例.
2. 画两个平行平面和分别在这两个平面内的两条平行直线，再画一个经过这两条平行直线的平面.

1.4.2 两个平面平行的判定和性质

练习十三

1.
2.
3.

习题五

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.

1.4.3 二面角

练习十四

1.
2.
3.
4.

1.4.4　两个平面垂直的判定和性质

练习十五

1.
2.
3.

习题六

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.

小结

一、　本章的主要内容是有关空间的直线与直线、直线与平面以及平面与平面的位置关系和有关图形的画法．着重研究的是它们之间的平行与垂直关系．

二、　本章的四个公理是这一章内容的基础．此外，平面几何里的定义、定理等，对于空间的任何平面内的平面图形仍然适用；但对于非平面图形，则需要经过证明才能应用．在解决立体几何的问题时，常把它转化为平面几何的问题来解决．

三、　空间两条之间的位置关系由“平行”、“相交”、“异面”三种；空间一条直线和一个平面的位置关系有“直线在平面内”、“平行”、“相交”三种；两个平面的位置关系有“平行”、“相交”两种．

四、　关于空间的直线与直线，直线与平面、平面与平面的平行与垂直关系的

性质定理与判定定理是本章的中心问题. 应用这些定理时, 要弄清定理的题设和结论. 判定定理的题设是结论成立的充分条件, 性质定理的结论是题设成立的必要条件. 学完全章后, 判定上述的平行和垂直关系的途径就更为广泛. 例如, 也可以用“垂直于同一个平面的两条直线必平行”去判定两条直线平行; 用“如果两个平面垂直, 那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面”去判定一条直线与一个平面垂直.

五、 两条异面直线所成的角、直线与平面所成的角以及二面角都是通过平面几何中的角来定义的, 因而, 它们都可以看作是平面几何中角的概念在空间的拓广.

两条异面直线所成的角和二面角的定义都以定理“两边分别平行且方向相同的两个角相等”为基础. 而斜线和平面所成的角实际是用这条斜线和平面内的直线所成的角中最小的角来定义的.

两条异面直线的距离、直线和平面间的距离以及两个平行平面间的距离, 都分别是它们的两点的距离中最小.

复习参考题一

A 组

1. 下面的说法正确吗？为什么？
   a) 两条直线确定一个平面；
   b) 如果两个平面有三个公共点，那么这两个平面重合.
2. 解答:
   a) 求证：两两相交且不共点的四条直线共面；
   b) 已知四个点不共面，证明它们中任何三点都不在同一条直线上，逆命题正确吗？
3. 用斜二测画法画出下列水平放置的图形的直观图.
4. 解答:
   a) 已知 a 和 b 是异面直线，a 和 c 是异面直线，那么 b 和 c 也是异面直线吗？
   b) 在一个平面内，经过一条直线外一点有几条直线和这条直线垂直？在空间呢？
   c) 在一个平面内，经过一条直线外一点有几条直线和这条直线平行？在空间呢？
5.
6.
7.
8.
9.

10.
11.
12.
13.
14.

B 组

15. a、b 是异面直线，平面 α 经过直线 b 与直线 a 平行，平面 β 经过直线 a 与平面 α 相交于直线 c．求证：
    a) 直线 b、c 所夹的不大于直角的角就是异面直线 a、b 所成的角；
    b) 如果 $\alpha \perp \beta$，$b \cap c = A$，在平面 β 内，作 $AB \perp c$ 交直线 a 于点 B，那么线段 AB 就是异面直线 a、b 的公垂线，直线 a 与平面 α 的距离就是异面直线 a、b 的距离.
16. 两个不全等的三角形不在同一平面内，它们的边两两对应平行．证明：
    a) 三条对应顶点的连线交于一点；
    b) 这两个三角形相似.
17. 直线 a 与 b 不平行，如果 $\alpha \perp a$，$\beta \perp b$，那么平面 α 与 β 必定相交，并且交线必垂直于直线 a、b.
18. 解答：
    a) 由平面 α 外一点 P 引平面的三条相等的斜线段，斜足分别为 A、B、C，O 为 $\triangle ABC$ 的外心，求证：$OP \perp \alpha$.
    b) 平面 ABC 外一点 P 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等，O 是 $\triangle ABC$ 内一点，且 $OP \perp$ 平面ABC．求证：O 是 $\triangle ABC$ 的内心.
19. 夹在互相垂直的两个平面之间长为 $2a$ 的线段，和这两个平面所成的叫分别为 $45°$、$30°$，过这条线段的两个端点分别在这两个平面内作交线的垂线，求两垂足的距离.
20. 平面 α 过 $\triangle ABC$ 的重心 G．求证：在平面 α 同侧的两个顶点到平面 α 的距离的和，等于另一顶点到平面的距离.
21. 已知：平面 α 和空间两点 A、B．在平面 α 内找一点 C，使 $AC + BC$ 最小.

第二章　多面体和旋转体

第一节　多面体

2.1.1　棱柱

1　棱柱的概念和性质

我们常见的一些物体，例如三棱镜、方砖以及螺杆的头部，它们都呈棱柱的形状（图 2.1）.

图 2.1

有两个面互相平行，其余各面都是四边形[①]，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做**棱柱**（??），两个互相平行的面叫做**棱柱的底面**，其余各面叫做**棱柱的侧面**.

练习一

1. 求证：直棱柱的侧棱长与高相等，侧面及经过不相邻的两条侧棱的截面都是矩形.
2. 有一个侧面是矩形的棱柱是不是直棱柱？有两个相邻侧面是矩形的棱柱呢？为什么？
3. 斜棱柱、直棱柱和正棱柱的底面、侧面各有什么特点？

2　长方体

现在研究四棱柱的特殊情形.

① 本章所说的多边形，一般包括它内部的平面部分.

图 2.2

长方体的对角线有下面的性质:

定理

长方体一条对角线长的平方等于一个定点上三条棱的长的平方和.

练习二

1.
2.
3.

3 直棱柱直观图的画法

4 直棱柱的侧面积

练习三

1.
2.

习题七

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

13.

2.1.2　棱锥

1　棱锥的概念和性质

练习四

1.
2.

2　正棱锥的直观图的画法

3　正棱锥的侧面积

练习五

1.
2.

习题八

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.

2.1.3 棱台

1 棱台的概念和性质

练习六

1.
2.

2 正棱台的直观图的画法

3 正棱台的侧面积

练习七

1.
2.

4 多面体

练习八

1.
2.

习题九

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

第二节　旋转体

2.2.1　圆柱、圆锥、圆台

1　圆柱、圆锥、圆台的概念和性质

练习九

1.
2.
3.

2　圆柱、圆锥、圆台的直观图的画法

练习十

画一个上底半径为 1.5 cm，下底半径为 2.5 cm，高为 4 cm 的圆台的直观图（比例尺取 $\frac{1}{2}$，不写画法）.

3　圆柱、圆锥、圆台的侧面积

练习十一

1.
2.
3.

习题十

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.

10.
11.
12.
13.
14.

2.2.2 球

1 球的概念和性质

2 球的直观图的画法

3 球的表面积

练习十二

1. 海面上，地球球心角 $1'$ 所对的大圆弧长约为 1 海里，1 海里约是多少千米?
2. 计算地球表面积是多少 km^2.

2.2.3 球冠

1 球冠

练习十三

1.
2.

2 旋转面和旋转体

练习十四

1. 举出一些旋转面和旋转体的实例.
2. 圆柱和圆柱面、圆锥和圆锥面有何区别?

习题十一

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.

第三节　多面体和旋转体的体积

2.3.1　体积的概念与公理

练习十五

1.
2.

2.3.2　棱柱、圆柱的体积

练习十六

1. ;
2. .

习题十二

1.
2.
3.

4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.

2.3.3 棱锥、圆锥的体积

练习十七

1. ;
2. .

习题十三

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.

2.3.4　棱台、圆台的体积

练习十八

已知上、下地面边长分别是 a、b，高是 h. 求下列正棱台的体积：

a) 正四棱台；　　b) 正六棱台.

2.3.5　拟柱体及其体积

练习十九

已知拟柱体的下底面积为 $20\,\mathrm{cm}^2$，上底面积为 $6\,\mathrm{cm}^2$，中截面面积为 $12\,\mathrm{cm}^2$，高为 $15\,\mathrm{cm}$. 求这个拟柱体的体积.

习题十四

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.

2.3.6 球的体积

练习二十

1. 球面面积膨胀为原来的二倍，计算体积变为原来的几倍.
2. 一个正方体的顶点都在球面上，它的棱长是 4 cm. 求这个球的体积.

2.3.7 球缺的体积

练习二十一

1.
2.

习题十五

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.

小结

一、
二、
三、
四、
五、
六、

复习参考题二

A 组

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12.
13.
14.
15.
16.

B 组

1.
2.

3.

4.

5.

6.

7.

第三章　多面角和正多面体

第一节　多面角

3.1.1　多面角

相邻的两面墙壁和天花板所成的屋角，一些塔的塔顶都给我们以多面角的形象.

有公共端点并且不在同一平面内的几条射线，以及相邻两条射线间的平面部分所组成的图形，叫做**多面角**.

如图 3.1 和 3.2，都是多面角．组成多面角的射线 SA、SB、……叫做**多面角的棱**，这些射线的公共端点 S 叫做**多面角的顶点**，相邻两棱间的平面部分叫做**多面角的面**，相邻两棱组成的角 $\angle ASB$、$\angle BSC$、……叫做**多面角的面角**，相邻两个面组成的二面角 E-SA-B、A-SB-C、……叫做**多面角的二面角**.

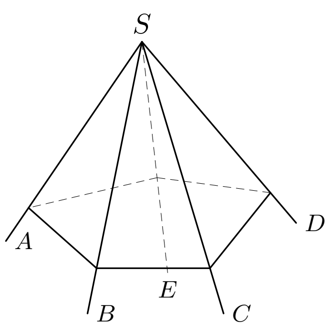


图 3.1

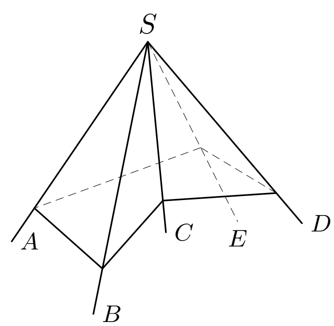


图 3.2

一个多面角的面数等于它的棱数、面角数、二面角数．多面角最少应有三个面．多面角依照它的面数分别叫做三面角、四面角、五面角、…….

多面角可以用表示它的顶点和冷的字母来表示，如图 3.1 中的多面角记作多面角 $S\text{-}ABCDE$；有时也用表示顶点的一个字母表示，记作多面角 S.

将多面角的任何一个面伸展成为平面，如果其他各面都在这个平面的同侧，这样的多面角叫做**凸多面角**．图 3.1 中的多面角就是一个凸多面角，图 3.2 中的多面角不是凸多面角.

用一个平面截凸多面角的所有面和棱，一定得到一个凸多边形，如图 3.1．用平面截图 3.2 中的多面角就不能得到凸多边形.

本章只研究凸多面角．凸多面角中，最简单的是三面角，三个面角都是直角的三角形叫做**直三面角**．例如屋角、箱角、砖角，都给我们以直三面角的形象.

直三面角 $O\text{-}XYZ$ 的一般画法如图 3.3.

例 3.1 求证：直三面角的各个二面角都是直二面角.

已知：直三面角 $O\text{-}XYZ$（图 3.3）.

求证：二面角 $\beta\text{-}OX\text{-}\gamma$、$\gamma\text{-}OY\text{-}\alpha$、$\alpha\text{-}OX\text{-}\beta$ 都是直二面角.

证明： $\because$ $O\text{-}XYZ$ 是直三面角，

$\therefore$ $\angle XOY = \angle YOZ = \angle ZOX = \mathrm{Rt}\angle$,

$OZ \perp OX$，$OY \perp OX$.

$\therefore$ $\angle YOZ$ 是二面角 $\beta\text{-}OX\text{-}\gamma$ 的平面角.

$\because$ $\angle YOZ = \mathrm{Rt}\angle$,

$\therefore$ 二面角 $\beta\text{-}OX\text{-}\gamma$ 是直二面角.

同理，$\gamma\text{-}OY\text{-}\alpha$、$\alpha\text{-}OX\text{-}\beta$ 也是直二面角.

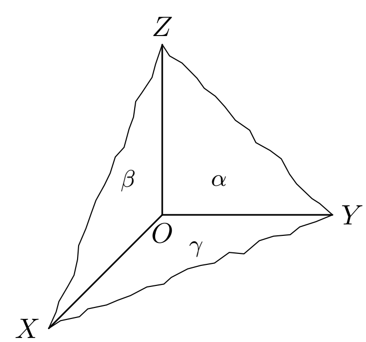


图 3.3

练习一

1. 二面角是不是多面角？多面角是不是棱锥？它们各有什么区别和联系？
2. 求证：三个二面角都是直二面角的三面角是直三面角.

3.1.2 多面角的性质

在研究多面角的性质之前，先研究三面角的一个性质：

定理

三面角的任意两个面角的和大于第三个面角.

已知：三面角 S–ABC（图 3.4）.

求证：$\angle ASB+\angle BSC>\angle ASC$.

证明： 当 $\angle ASC\leqslant\angle ASB$ 时，显然 $\angle ASB+\angle BSC>\angle ASC$.

现在设 $\angle ASC>\angle ASB$. 在面 ASC 上作线段 SD'，使 $\angle ASD'=\angle ASB$，过 D' 引与各棱都相交的平面 $A'B'C'$，使 $SB'=SD'$. 这时，

$$\triangle A'SB'\cong\triangle A'SD',$$

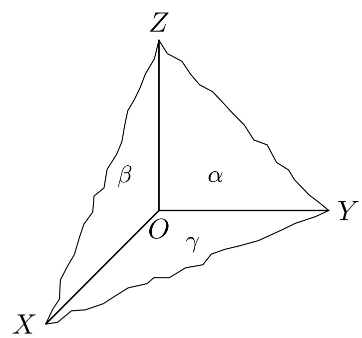


图 3.4

$\therefore\quad A'B'=A'D'$.

在 $\triangle A'B'C'$ 中，$A'B'+B'C'>A'C'$，同时，$A'D'+D'C'=A'C'$，由此得到 $B'C'>D'C'$.

在 $\triangle B'SC'$ 和 $\triangle D'SC'$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle B'SC'<\cos\angle D'SC'$.

所以，$\angle B'SC'>\angle D'SC'$，即 $\angle BSC>\angle D'SC$.

因此，$\angle ASB+\angle BSC>\angle ASD'+\angle D'SC$,

就是，$\angle ASB+\angle BSC>\angle ASC$.

这里我们注意到，如果使三面角的面与三角形的边对应，三面角的二面角与三角形的内角对应，那么三面角的一些性质与三角形类似. 因此，有些三面角的问题，常归结为三角形的问题来研究.

多面角由下面的性质：

定理

凸多面角所有面角的和小于四直角.

已知：凸 n 面角 S-$ABC\cdots E$（??）.

求证：$\angle ASB+\angle BSC+\cdots+\angle ESA<4\cdot\mathrm{Rt}\angle$.

证明: 用平面截已知多面角的所有面和棱，得到凸 n 边形 $A'B'C'\cdots E'$. 根据前面的定理，以 A'、B'、C'、…、E' 为顶点的各三面角的面角由下面的关系:

$$\angle SA'E' + \angle SA'B' > \angle E'A'B',$$
$$\angle SB'A' + \angle SB'C' > \angle A'B'C',$$
$$\angle SC'B' + \angle SC'D' > \angle B'C'D'.$$
$$\cdots\cdots$$

用 Σ 表示已知多面角的所有面角的和,

$$\Sigma = \angle ASB + \angle BSC + \cdots + \angle ESA.$$

将上面各不等式两边分别相加，左边是 n 个三角形: $\triangle A'SB'$、$\triangle B'SC'$、…、$\triangle E'SA'$ 内角的和 $2n\cdot\mathrm{Rt}\angle$ 减去已知多面角的和 Σ; 右边是凸多边形 $A'B'C'\cdots E'$ 所有内角的和，它等于 $2(n-2)\cdot\mathrm{Rt}\angle$，因此,

$$2n\cdot\mathrm{Rt}\angle - \Sigma > 2(n-2)\cdot\mathrm{Rt}\angle,$$

即

$$\Sigma < 4\cdot\mathrm{Rt}\angle.$$

这个定理表明，如果沿凸多面角的一个棱剪开，把它展在平面上，那么它不能铺满一个周角，而是缺少一部分（图 3.5）.

图 3.5

练习二

1. 下面各组面角能否构成三面角？为什么？
   a) $45°$、$65°$、$120°$;　　b) $100°$、$90°$、$150°$.
2. 下面各组面角能否构成四面角？为什么？
   a) $45°$、$65°$、$120°$、$95°$;　　b) $175°$、$105°$、$120°$、$60°$.
3. 证明：三面角的任何一个面角大于其他两个面角的差.

习题十六

1. 在三面角中，如果有两个二面角是直二面角，那么它们所对的两个面角都是直角. 为什么?
2. 直三面角内有一点 P，它到各面的距离分别是 x、y、z. 用 x、y、z 表示点 P 到三面角顶点 O 的距离.
3. 直三面角 O-XYZ 内有一点 P，OP 在三面角三个面上的射影长分别是 a、b、c. 求证：$OP = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.
4. 在三面角 S-ABC 中，$\angle BSC = 90°$，$\angle ASB = \angle ASC = 60°$.
   a) 设 $SA = SB = SC$. 求证：经过三点 A、B、C 的平面垂直于 $\angle BSC$ 所在的平面;
   b) 求证：SA 与 $\angle BSC$ 所在的平面成 $45°$ 的角.
5. 下面各组面角能否构成三面角？为什么?
   a) $75°$、$45°$、$90°$;　　b) $82°$、$56°$、$26°$;
   c) $130°$、$85°$、$36°$.
6. 求证：空间四边形每相邻两边所成的四个角的和小于四直角.
7. 求证：凸多面角的任何一个面角小于其他面角的和.
8. 下面各组面角能够构成四面角？为什么?
   a) $50°$、$70°$、$100°$、$150°$;　　b) $150°$、$30°$、$70°$、$40°$.

第二节　正多面体、多面体变形

3.2.1　正多面体

常见的食盐的结晶（图 3.6)、明矾的结晶（图 3.7）都呈正多面体的形状.

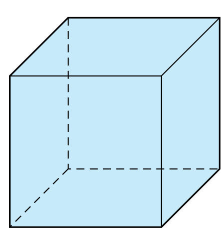


图 3.6

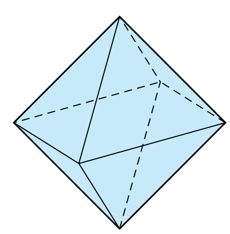


图 3.7

每个面都是由同数边的正多边形，在每个顶点都有同数棱的凸多面体，叫做**正**

多面体. 例如，正方体的所有面都是正方形，在各个顶点都有三条棱，而且是凸多面体，所以正方体就是一种正多面体.

我们知道，正多边形有无限种，那么正多面体能有多少种呢？现在来研究这个问题.

设正多面体的所有面都是正 n 边形，在每个顶点的棱数都是 m，也就是说，每个顶点都是一个 m 面角的顶点.

由于凸 m 面角的面角都是正 n 边形的内角，而正 n 边形的内角和等于 $\dfrac{2(n-2)\cdot \mathrm{Rt}\angle}{n}$，所以凸 m 面角所有面角的和等于 $\dfrac{[2(n-2)\cdot \mathrm{Rt}\angle]\cdot m}{n}$. 根据凸多面角的性质定理，下面不等式成立:

$$\frac{[2(n-2)\cdot \mathrm{Rt}\angle]\cdot m}{n} < 4\cdot \mathrm{Rt}\angle.$$

化简得

$$m(n-2) < 2n,$$

也就是

$$m < \frac{2n}{n-2}\,(m\text{、}n\ \text{都是不小于 3 的正整数}).$$

解这个不等式，

因为 $n > 5$ 时，$m < 3$ 不合题意，所以 n 不能大于 5.

因此，我们只能得到关于 m、n 的如下五个数对:

$$(3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (4,3),\ (5,3).$$

这就是说，正多面体只能有五种：用正三角形做面的正四面体、正八面体、正二十面体，在它们每个顶点的棱数分别是 3、4、5；用正方形做面的正六面体，在它每个顶点的棱数是 3；用正五边形做面的正十二面体，在它每个顶点的棱数是 3. 这五种正多面体如图 3.8 所示.

图 3.8

五种正多面体的表面展开图如图 3.9. 作为课外研究，可画它 10 倍大的展开图，然后粘成正多面体模型，加以观察.

图 3.9

数一数每种正多面体得顶点数、面数、棱数，分别填在下面表格内，研究每种正多面体的顶点数、面数与棱数，能否发现它们之间有什么共同关系？

正多面体	顶点数	面数	棱数
正四面体			
正六面体			
正八面体			
正十二面体			
正二十面体			

练习三

1. 以正多面体的各面中心为顶点的多面体都是几面体？参照模型看它们是不是正多面体？
2. 设正十二面体的棱长为 a，求它的表面积.

3.2.2　多面体的变形

我们考虑任意一个多面体，例如正六面体，假定它的面是用橡胶薄膜做成的. 如果充以气体，那么它就会连续（不破裂）变形，最后可以变为一个球面（图 3.10）.

图 3.10

像这样，表面连续变形，可变形为球面的多面体叫做**简单多面体**. 棱柱、棱锥、棱台、正多面体、凸多面体都是简单多面体.

除简单多面体外，还有不是简单多面体的几何体，例如将正方体挖去一个洞所得的几何体（图 3.11）. 这样的几何题的表面连续变形后就不能变为一个球面，而能变为一个环面.

图 3.11

我们曾研究过五种正多面体，发现它们的顶点数 V、棱数 E 和面数 F 有下面关系：

$$V + F - E = 2.$$

现在用连续变形的方法研究简单多面体，看它的顶点数 V、棱数 E 和面数 F 是否也有这种关系．以四面体 $ABCD$ 为例，将它的一个面 BCD 去掉，再使它变形为平面图形（??）．这时，四面体的顶点数 V、棱数 E 与剩下的面数 F_1，变形后都没有变．因此，要研究 V、E、F 之间的关系，研究平面图形即可．我们来研究

$$V + F_1 - E$$

的数值．可按下面两步进行：

(1) 去掉一条棱，就减少一个面．例如去掉 BC，就减少一个面 ABC．同理，去掉棱 CD、BD 时，也都随着各减少一个面 ACD、ABD（图 3.12），由于 $F_1 - E$、V 的值都不变，因此，$V + F_1 - E$ 的值不变．

图 3.12

(2) 再从剩下的树枝形，去掉一条棱，就减少一个顶点．例如去掉 CA，则减少一个顶点 C．同理，去掉棱 DA 随着减少一个顶点 D，最后剩下 AB（图 3.13）．在此过程中 $V - E$ 的值都不变．但此时因为面数 F_1 都是 0，所以 $V + F_1 - E$ 的值也不变．由于最后只剩下 AB，因此

$$V + F_1 - E = 2 + 0 - 1 = 1.$$

图 3.13

最后，加上最初去掉的一个面，得到

$$V+F-E=2.$$

因为对任意的简单多面体，应用这样的方法，最后都是只剩下一条线段，因而都得到上面的结果，所以可把它写成下面的定理：

定理 欧拉定理

简单多面体的顶点数 V、棱数 E、面数 F，有下面的关系

$$\boxed{V+F-E=2}.$$

这个定理叫做**欧拉定理**．它表明 2 这个数是简单多面体表面在连续变形下不变的数．

例 3.2　一个简单多面体的面都是三角形．求证：$F=2V-4$.

证明： 因为已知多面体的每个面有三条边，每相邻两个面的两条边重合为一条棱，所以棱数 $E=\dfrac{3F}{2}$，代入公式 $V+F-E=2$，得

$$V+F-\frac{3F}{2}=2.$$

化简得

$$F=2V-4.$$

练习四

1. 检查六棱柱、五棱锥、四棱台，看它们的顶点数、棱数、面数是否适合欧拉定理.
2. 简单多面体，凸多面体、正多面体、棱柱、棱锥、棱台的包含关系如何？用图表示.

习题十七

1. 求棱长为 a 的正八面体的对角线长.
2. 以四面体的高和棱为一边分别作正方形. 求证：这两个正方形的面积比是 $2:3$.
3. 正六面体各面中心是一个正八面体的顶点. 求这个正六面体和正八面体的表面积的比.
4. 正 n（$n=4,8,20$）面体的棱长为 a，求它们表面积的共同公式.
5. 正二十面体的棱长为 a，连结相对顶点的对角线为 b，求它的体积.
6. 求证：平行于正四面体的相对棱的平面，截这个正四面体的截面是一个矩形.
7. 就下面平面图形验证 $V+F-E=1$.

（第 7 题图）

8. 已知：凸多面体的各面都是四边形，求证：$F=V-2$.

小结

一、 本章的主要内容是多面角的概念及其主要性质，在此基础上研究正多面体，并用连续变形（也叫“拓扑变形”）的方法证明关于简单多面体的欧拉定理.

二、 作为多面角的特殊情形，定义了凸多面角的概念，并指出三面角和直三面角又是凸多面角的特殊情形. 然后研究三面角的性质，并在此基础上推出凸多面角的性质.

三、 定义正多面体的概念，并根据多面角的性质推出正多面体只有物种：正四面体、正六面体（正方体）、正八面体、正十二面体、正二十面体.

四、 研究简单多面体，推出它的表面在连续变形下的不变性质：欧拉定理（$V+F-E=2$）. 因为简单多面体包括凸多面体因而也包括正多面体，所以欧拉定理对于这些多面体也同样适用.

复习参考题三

A 组

1. 解答:
   a) 用正三角形做面可以组成几种多面角？为什么?
   b) 用正方形做面可以组成几种多面角？为什么?
   c) 用正五边形做面可以组成几种多面角？为什么?
   d) 能否用正六边形做面组成三面角？为什么?
2. 在直三面角 $S\text{-}ABC$ 的三个棱上，取 $SA = SB = SC = a$.
   a) 求直线 AB 与 SC 的距离;
   b) 求点 C 与直线 AB 的距离;
   c) 求以 SAB、CAB 为面的二面角的大小.
3. 已知正四面体所有面的中心，是一个正四面体的顶点，画出这个正四面体.
4. 线段 AC、BD、EF 相等，并且两两互相垂直平分于点 O. 求证：A、B、C、D、E、F 是正八面体的六个顶点.
5. 已知：一个简单多面体的各个顶点都有三条棱. 求证：$V = 2F - 4$.

B 组

1. 在三面角 $S\text{-}ABC$ 中，$\angle ASB = \angle ASC = 45^\circ$，$\angle BSC = 60^\circ$. 求证：$\angle BSC$ 所对的二面角是直二面角.
2. 直三面角的三个面被任意平面所截. 求证：截得的三角形的垂心是三面角的顶点在截面上的射影.

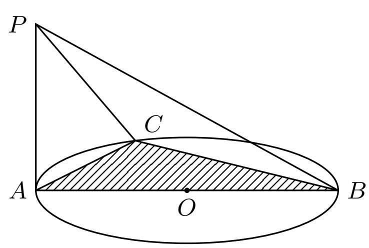
3. 已知正十二面体的十二个面的中心是一个正二十面体的顶点，画出这个正二十面体.
4. 对于图中多面体，求 $V+F-E$ 的值.

（第 4 题图）

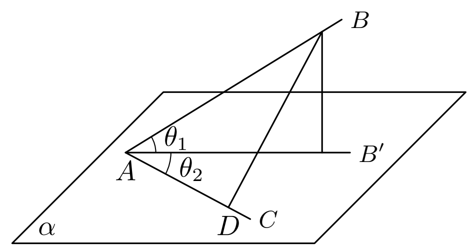
总复习参考题

A 组

1. AB、BC、CD 是不在同一平面内的线段. 求证: 经过它们中点的平面和 AC 平行, 也和 BD 平行.
2. 如图, AB 是圆 O 的直径, PA 垂直于圆 O 所在的平面, C 是圆周上的任意点. 求证: $\triangle PAC$ 所在的平面垂直于 $\triangle PBC$ 所在的平面.



(第 2 题图)



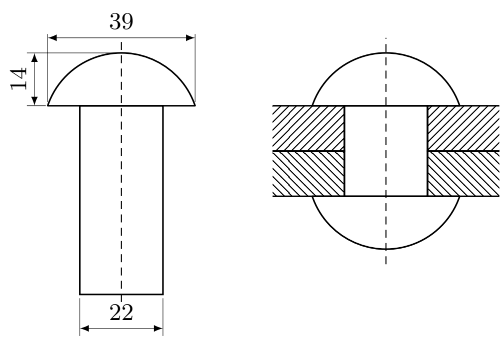
(第 3 题图)

3. 如图, AB 和平面 α 所成的角是 θ_1, AC 在平面 α 内, AC 和 AB 的射影 AB' 成角 θ_2, 设 $\angle BAC = \theta$. 求证:

$$\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 = \cos\theta.$$

4. 在 60° 的二面角 α-AB-β 中, $AC \subset \alpha$, $BD \subset \beta$, 且 $AC \perp AB$, $BD \perp AB$. 已知 $AB = AC = BD = \alpha$, 求 CD 的长.
5. 将正方体截去一个角. 求证: 截面是锐角三角形.
6. 已知圆锥底面半径是 r, 母线长是 $2r$, 用平行于底面的平面把这个圆锥表面截成相等的两部分. 求截下的圆锥的母线长.

7. 要使电视卫星的电波，能直射到地球表面积的 $\dfrac{1}{3}$，卫星要发射到多高?
8. 三棱锥 $S\text{-}ABC$ 中，侧棱 SA、SB、SC 的长分别是 a、b、c，又 $\angle ASB=60^\circ$，$\angle ASC=\angle BSC=90^\circ$，求这个棱锥的体积.
9. 圆柱的底面半径是 10 cm，高是 15 cm，平行于轴的截面在底面上截得的弦等于底面半径．求圆柱被截去部分的体积.
10. 圆台的两底面半径分别是 a 和 b（$a>b$），求这个圆台的体积与截得它的圆锥的体积的比.
11. 面积为 $2512\,\text{cm}^2$ 的铝板，经冲压制成圆柱形铝桶，如果铝桶的面积和铝板面积相等，高是 10 cm．求这种铝桶的容积.
12. 长江大桥的钢梁结构使用铆钉铆合的（如图，单位：mm）．铆钉头是球缺形，钉身是圆柱形，铆钉插入两块钢板铆合后，两侧钉头大小相等．已知每块钢板厚 12 mm，求钉身长度.



（第 12 题图）

13. 分别以直角三角形的斜边、两直角边所在直线为轴，旋转这个直角三角形所得的三个旋转体体积为 V、V_1、V_2．求证：

$$\frac{1}{V^2}=\frac{1}{V_1^2}+\frac{1}{V_2^2}.$$

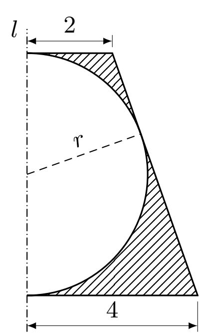
14. 正方体、等边圆柱（即底面直径与母线相等）、球的体积相等时，哪一个全面积最小?
15. 从平面外一点像平面引两条斜线，其中一条与平面成 70° 角，另一条与平面成 15° 角．求这两条斜线组成的最大角、最小角各为多少度.

B 组

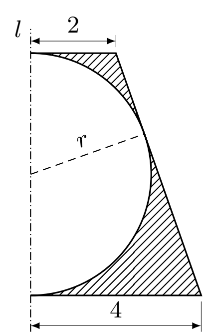
16. 求证：过一点和一条直线垂直的所有直线都在一个平面内.
17. 在120° 角的二面角 α-a-β 中，$A\in\alpha$，$B\in\beta$.
18. 空气中有一气球，它和地面的距离是 h. 在气球的东南 A 处看气球时，仰角是 θ_1；同时在气球的西南 B 处看气球时，仰角是 θ_2. A、B 两地的距离是 a. 求证：

$$h=\frac{a}{\sqrt{\cot^2\theta_1+\cot^2\theta_2}}.$$

19. 将半径为 R 的四个球，两两相切地放在桌面上，求上面一个球的球心到桌面的距离.
20. 要从半径为 210 cm 的圆形铁皮上剪下一些扇环做成漏斗. 漏斗一端的直径是 40 cm，另一端直径是 140 cm，母线长 150 cm. 计算这块铁皮能做几个漏斗，怎样剪法？
21. 测定某些材料的硬度，可用标准钢球（直径 10 mm）放在材料上，加上一定的压力 P kg，将材料表面压成球冠形凹痕. 设凹痕的面积是 $S\,\mathrm{mm}^2$，这时材料的硬度是 $P/S\,\mathrm{kg/mm}^2$. 如果所加压力是 3×10^3 kg，凹痕直径是 4.1 mm，计算这材料的硬度.
22. 如图，将正方体的棱分成 4 等分，在 $\frac{1}{4}$ 处截取各棱角的到一个多面体，正方体体积减少几分之几（不证）？



（第 22 题图）

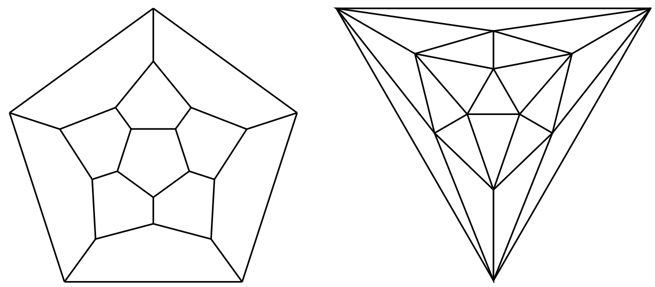


（第 23 题图）

23. 求图中阴影部分绕轴 l 旋转所成的旋转体的全面积和体积.

24. 一个圆锥侧面的母线和底面直径相等（等边圆锥），有一内切球．已知圆锥底面直径为 $2r$，求球的体积．

25. 下图是正十二面体、正二十面体的表面去掉一个面后，连续变形所成的平面图形．数出它们的顶点数 V、棱数 E 及面数 F 来验证 $V+F-E=1$．



（第 25 题图）

26. 求证：如果简单多面体的所有面都是奇数边的多边形，那么面数是偶数．

责任编辑：张晨南

封面设计：张晨南

定价：52.00元