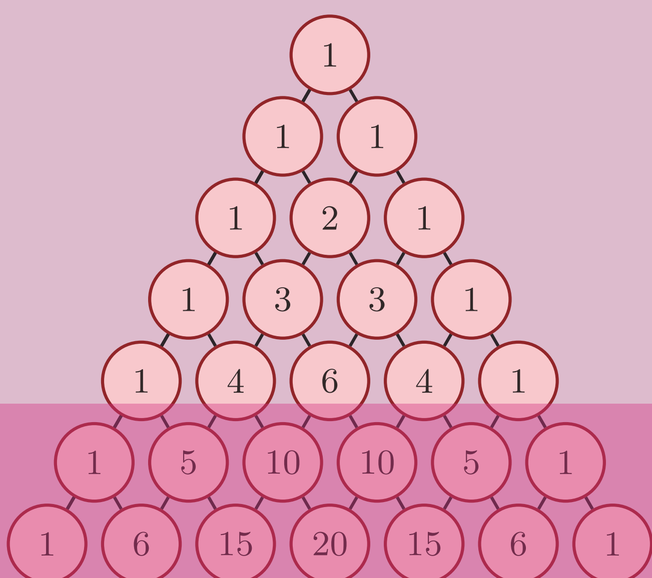
中学经典教材丛书

Volume III

Textbook for Middle School Algebra

高中代数（甲种本）

第三册



人民教育出版社数学室　编

同济极客出版社

TEXTBOOK FOR MIDDLE SCHOOL ALGEBRA

高中代数（甲种本）

人民教育出版社数学室　　编

献给：奔赴高考的莘莘学子

同济极客出版社

*** 内 容 简 介 ***

本书供六年制中学高中三年级选用．每周授课 2 课时．本书内容包括一元多项式和高次方程；排列，组合，二项式定理；概率．本书习题共分三类：练习、习题、复习参考题．练习主要供课堂练习用；习题主要供课内外作业用；复习参考题分 A、B 两组．A 组供复习本章知识时使用；B 组题略带综合性、灵活性，仅供学有余力的学生参考使用．练习、习题及复习参考题 A 组题的题量较多，教学时可根据情况选用．本书在编写过程中，曾参考了中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本（试用本）《数学》第三册的有关章节，大部分内容是以原来章节为基础编写的．本书由人民教育出版社数学室编写．参加编写工作的有饶汉昌、蔡上鹤、方明一．全书由吕学礼校订．

责任编辑　张晨南
封面设计　张晨南
出版发行　同济极客出版社
网　　址　http://www.tjad.cn
开　　本　216 mm×279 mm
版　　次　2024年12月12日发行　　2026年1月29日印刷
定　　价　104.00元

目录

第一章　一元多项式和高次方程

第一节　一元多项式

1.1.1　一元 n 次多项式

我们在初中学习过整式. 单项式与多项式都是整式（单项式可以看作是特殊的多项式).

以 x 为元的一元多项式的一般形式有

$$\begin{aligned}&\text{一元一次式}\quad ax+b,\\&\text{一元二次式}\quad ax^2+bx+c,\\&\text{一元三次式}\quad ax^3+bx^2+cx+d,\end{aligned}$$

等等，其中 $a\neq 0$.

一般地，以 x 为元的一元 n 次多项式的一般形式可以写成

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots++a_1x+a_0,$$

这里 n 是确定的自然数，$a_n\neq 0$.

我们把系数 $a_i\,(i=0,1,\dots,n)$ 都是复数的一元 n 次多项式叫做**复系数一元 n 次多项式**. 类似地，把系数都是实数（或有理数、整数等）的一元 n 次多项式叫做**实系数**（或**有理系数**、**整系数**等）**一元 n 次多项式**，它们都是复系数一元 n 次多项式的特殊情形. 在本章中提到的多项式，如果不特别说明，都是指复系数多项式.

单独的一个非零数 a_0, 可以看作**零次多项式**(事实上, 当 $x\neq 0$ 时, $a_0=a_0x^0$). 系数都是零的多项式叫做**零多项式**，零多项式没有确定的项数与次数.

当 x 在复数集 $\mathbb{C}$ 上取值时，由于复数集中加法、减法、乘法总可以实施，一元 n 次多项式总有确定的值，所以，当 x 表示复数时，我们可以把一元 n 次多项式看作定义在复数集 $\mathbb{C}$ 上的函数，并记作 $f(x), g(x)$ 等．当 $x=a+b\mathrm{i}$ 时，$f(x)$ 的值记作 $f(a+b\mathrm{i})$．很明显，不论 x 在 $\mathbb{C}$ 上取什么值，零多项式的值都等于 0，所以零多项式可以记作数 0．

本章中，我们规定 x 表示复数．

练习一

1. 设 $f(x)=x^2-5x+7$，求：

   (1)　$f(0)$；　　(2)　$f\left(-\frac{\mathrm{i}}{5}\right)$；

   (3)　$f(3+2\mathrm{i})$；　　(4)　$f\left(\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$．

2. 零次多项式和零多项式有什么区别？

1.1.2　综合除法

我们在初中已经学过实系数多项式的加、减、乘、除等运算．复系数多项式同样有这些运算．一元多项式相加（包括相减）、相乘的结果仍是一元多项式，并且加乘运算满足交换律、结合律以及乘法对加法的分配律．

一个一元多项式除以另一个一元多项式，并不是总能整除，当被除式 $f(x)$ 除以除式 $g(x)$（不是零多项式），得商式 $q(x)$ 及余式 $r(x)$ 时，就有下列等式：

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中 $r(x)$ 的次数小于 $g(x)$ 的次数，或者 $r(x)$ 是零多项式．当 $r(x)$ 是零多项式时，就是 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除．

一个一元多项式除以一个一元一次式，有一种简便的计算方法——综合除法．

先用一般的除法来计算 $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 除以 $x-b$：

$$
\begin{array}{r|llll}
 & a_3x^2 & +(a_2+a_3b)x & +[a_1+(a_2+a_3b)b] & \\
\hline
x-b & a_3x^3 & +a_2x^2 & +a_1x & +a_0 \\
 & a_3x^3 & -a_3bx^2 & & \\
\cline{2-5}
 & & (a_2+a_3b)x^2 & +a_1x & \\
 & & (a_2+a_3b)x^2 & -(a_2+a_3b)bx & \\
\cline{3-5}
 & & & [a_1+(a_2+a_3b)b]x & +a_0 \\
 & & & [a_1+(a_2+a_3b)b]x & -[a_1+(a_2+a_3b)b]b \\
\cline{4-5}
 & & & & a_0+[a_1+(a_2+a_3b)b]b
\end{array}
$$

这里所得的商式是 $a_3x^2+(a_2+a_3b)x+[a_1+(a_2+a_3b)b]$；余式是 $a_0+[a_1+(a_2+a_3b)b]b$，它不含 x，所以它是一个常数，下面把它叫做余数.

商式中各项的系数及余数分别是

$$
a_3,\quad a_2+a_3b,\quad a_1+(a_2+a_3b)b;
$$
$$
a_0+[a_1+(a_2+a_3b)b]b.
$$

其中第一个数就是被除式中第一项的系数，把这个数乘以 b 再加上被除式中下一项的系数就得第二个数，依此类推，最后得到余数.

因此，上面的除法可以用下面的简便算式来进行:

$$
\begin{array}{cccc|l}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & b \\
 & a_3b & (a_2+a_3b)b & [a_1+(a_2+a_3b)b]b & \\
\hline
a_3 & a_2+a_3b & a_1+(a_2+a_3b)b & \multicolumn{1}{|c|}{a_0+[a_1+(a_2+a_3b)b]b} & \\
\cline{4-4}
\end{array}
$$

这里，第一行是被除式按降幂排列时各项的系数，如果有缺项，必须用零补足. 移下第一个系数，乘以 b，加上第二个系数，依次进行，算得的第三行就是商式各项的系数及余数. 用这种算式进行的除法叫做**综合除法**.

被除式的次数不是三次时，综合除法同样适用.

例 1.1 用综合除法计算:

(1) $(x^3+8x^2-2x-14)\div(x+1)$；　(2) $(2x^4+5x^3-24x^2+15)\div(x-2)$.

解:

(1) $x+1$ 就是 $x-(-1)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & +8 & -2 & -14 & -1 \\ & -1 & -7 & +9 & \\ \hline 1 & +7 & -9 & \multicolumn{1}{|r|}{-5} & \\ \cline{4-4} \end{array}$$

$\therefore$　商式是 x^2+7x-9，余数是 -5.

(2) 被除式缺一次项，用 0 补足，得

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & +5 & -24 & +0 & +15 & 2 \\ & +4 & +18 & -12 & +9 & \\ \hline 2 & +9 & -6 & -12 & \multicolumn{1}{|r|}{-9} & \\ \cline{5-5} \end{array}$$

$\therefore$　商式是 $2x^3+9x^2-6x-12$，余数是 -9.

例 1.2 用综合除法计算下列各式, 并把结果写成“$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$”的形式:

(1)　$(4x^4-7x^2-7x-5)\div\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$;

(2)　$(6x^4-5x^3-3x^2-x+4)\div(2x+1)$.

解:

$$(1)\quad \begin{array}{rrrrr|l} 4 & +0 & -7 & -7 & -5 & \dfrac{3}{2} \\ & +6 & +9 & +3 & -6 & \\ \hline 4 & +6 & +2 & -4 & \multicolumn{1}{|r|}{-11} & \\ \cline{5-5} \end{array}$$

$$\therefore\quad 4x^4-7x^2-7x-5=\left(x-\frac{3}{2}\right)(4x^3+6x^2+2x-4)-11.$$

(2) $2x+1$ 就是 $2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$，先将 $6x^4-5x^3-3x^2-x+4$ 除以 $x+\dfrac{1}{2}$.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 6 & -5 & -3 & -1 & +4 & -\dfrac{1}{2} \\ & -3 & +4 & -\dfrac{1}{2} & +\dfrac{3}{4} & \\ \hline 6 & -8 & +1 & -\dfrac{3}{2} & \multicolumn{1}{|r|}{+\dfrac{19}{4}} & \\ \cline{5-5} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad & 6x^4-5x^3-3x^2-x+4\\
&=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(6x^3-8x^2+x-\frac{3}{2}\right)+\frac{19}{4}\\
&=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(6x^3-8x^2+x-\frac{3}{2}\right)+\frac{19}{4}\\
&=(2x+1)\left(3x^3-4x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)+\frac{19}{4}
\end{aligned}$$

由例 1.2 的第 (2) 小题可知，$f(x)$ 除以一般的一元一次式 $px\pm q$，也可以利用综合除法：先将 $f(x)$ 除以 $x\pm\dfrac{q}{p}$，所得的商式除以 p 就是所求的商式，所得的余数就是所求的余数.

练习二

用综合除法计算（第 1～3 题）：

1. $(x^3+6x^2-11x-14)\div(x-3)$;
2. $(x^5-4x^3-8)\div(x-2)$;
3. $(3x^4+7x^3-15x-20)\div(x+2)$;

用综合除法计算下列各式，并且把所得的结果写成“$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$”的形式（第 4～6 题）：

4. $(x^6+1)\div(x+1)$;
5. $(27x^3-10)\div(3x-2)$;
6. $(20x^5+9x^4-8x^3+12x^2-35x-12)\div(5x+6)$;

1.1.3　余数定理

设有多项式 $f(x)=x^3-7x^2+12x+27$，那么 $f(5)=5^3-7\times5^2+12\times5+27=125-175+60+27=37$；另一方面，如果把这个多项式除以 $x-5$，求余数，那么用综合除法可得

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & -7 & +12 & +27 & 5\\
 & +5 & -10 & +10 & \\
\hline
1 & -2 & +2 & \multicolumn{1}{|c}{+37} &
\end{array}$$

我们发现，所得的余数正好也是 37. 这就是说，多项式 $f(x)=x^3-7x^2+12x+27$ 除以 $x-5$ 所得的余数正好等于 $f(5)$.

对一般的多项式，有下面的重要定理：

定理 余数定理[①]

多项式 $f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的余数等于 $f(b)$.

证明： 设多项式 $f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的商式为 $q(x)$，余数为 r，则有

$$f(x)=(x-b)\cdot q(x)+r.$$

用 $x=b$ 代入等式的两边，得

$$f(b)=(b-b)\cdot q(b)+r.$$

由此即得余数 $r=f(b)$.

根据余数定理，既然多项式 $f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的余数 r 等于 $f(x)$ 在 $x=b$ 时的值 $f(b)$，那么 r 就可以由 $f(b)$ 来求得，反过来，$f(b)$ 也可以由 r 来求得.

例 1.3 设 $f(x)=x^8+3$，求 $f(x)$ 除以 $x+1$ 所得的余数.

解： 根据余数定理，所求的余数等于 $f(-1)=(-1)^8+3=4$.

例 1.4 设 $f(x)=x^5-12x^3+15x-8$，求 $f(6)$.

解： 用综合除法求 $f(x)$ 除以 $x-6$ 所得的余数：

$$\begin{array}{cccccc|c}
1 & +0 & -12 & +0 & +15 & -8 & 6 \\
 & +6 & +36 & +144 & +864 & +5274 & \\
\hline
1 & +6 & +24 & +144 & +879 & \multicolumn{1}{|c|}{+5266} & \\
\cline{6-6}
\end{array}$$

根据余数定理，余数 5266 等于 $f(6)$，所以

$$f(6)=5266.$$

① 此定理又叫做**余式定理**、**剩余定理**或**裴蜀定理**. 裴蜀（Etienne Bézout，1730–1783 年），法国数学家.

练习三

1. 设 $f(x)=5x^4-x^2+6$，求 $f(x)$ 除以 $x-1$ 所得的余数.
2. 设 $f(x)=x^4-3x^3+6x^2-10x+9$，求 $f(4)$.
3. 已知 $f(x)=16x^4-14x^3-15x^2-24x+38$，求 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$.
4. 设 $f(x)=x^6+a^6$，求 $f(x)$ 除以 $x-ai$ 所得的余数.

1.1.4　因式定理

从余数定理可以推出一个重要的定理——因式定理.

定理　因式定理

多项式 $f(x)$ 有一个因式 $x-b$ 的充要条件是 $f(b)=0$.

证明：

(1) 充分性. 设 $f(b)=0$. 则根据余数定理，$f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的余数也等于 0，因此 $f(x)$ 有一个因式 $x-b$.

(2) 必要性. 设 $f(x)$ 有一个因式 $x-b$，则 $f(x)$ 除以 $x-b$ 所得的余数等于 0. 根据余数定理，有 $f(b)=0$.

例 1.5　求证 n 为任何正整数时，x^n-a^n 都有因式 $x-a$.

证明： 设 $f(x)=x^n-a^n$，那么 $f(a)=a^n-a^n=0$. 根据因式定理，x^n-a^n 有因式 $x-a$.

例 1.6　m 为何值时，多项式 $f(x)=x^5-3x^4+8x^3+11x+m$ 能被 $x-1$ 整除？

解： $f(x)$ 能被 $x-1$ 整除，就是 $f(x)$ 有因式 $x-1$. 根据因式定理，充要条件是 $f(1)=0$，即 $1-3+8+11+m=0$. 由此可得 $m=-17$.

练习四

1. 不用除法，求证多项式 $x^4-5x^3-7x^2+15x-4$ 有因式 $x-1$.
2. 求证 n 为正偶数时，x^n-a^n 有因式 $x+a$；n 为正奇数时，x^n+a^n 有因式 $x+a$.

3. 求证 $x^{4n}-1$（$n\in\mathbb{N}$）有因式 $x-\mathrm{i}$，又有因式 $x+\mathrm{i}$.
4. 已知 $f(x)=x^3-8x+l$ 有因式 $x+2$，确定 l 的值.

1.1.5 利用综合除法、因式定理来分解因式

设有多项式 $x^6+x^4-x^2-1$，我们把它在复数集 $\mathbb{C}$ 中分解因式，得

$$\begin{aligned}x^6+x^4-x^2-1&=x^4(x^2+1)-(x^2+1)\\&=(x^4-1)(x^2+1)\\&=(x^2-1)(x^2+1)(x^2+1)\\&=(x-1)(x+1)(x+\mathrm{i})^2(x-\mathrm{i})^2\end{aligned}$$

这个一元六次式有六个一次因式，其中有两个相同因式 $x+\mathrm{i}$，两个相同因式 $x-\mathrm{i}$.

关于复系数一元 n 次多项式的因式分解，有下面的定理：

定理 1

任何一个复系数一元 n 次多项式 $f(x)$ 有且仅有 n 个一次因式 $x-x_i$（$i=1,2,\dots,n$），把其中相同的因式的积用幂表示后，$f(x)$ 就具有唯一确定[①]的因式分解的形式：

$$f(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m}\tag{1.1}$$

其中 $k_1,k_2,\dots,k_m\in\mathbb{N}$，且 $k_1+k_2+\dots+k_m=n$，复数 $x_1,x_2,\dots,x_m$ 两两不等.

这个定理的证明超出中学数学范围，本书从略.

① 这里所说的“唯一确定”，不考虑各一次因式的书写顺序，也不考虑常数因子. 例如，我们把 $4x^2-16=(2x+4)(2x-4)$ 与 $4x^2-16=4(x-2)(x+2)$ 等等看成同一种分解形式.

我们把分解结果 (1.1) 中的 $x-x_i\ (i=1,2,\dots,m)$ 叫做**多项式 $f(x)$ 的 k_i 重一次因式**. 例如: 多项式 x^2-6x+9 有 2 重一次因式 $x-3$; 多项式 $(x-4)(x+2)^2(x-5)^3$ 有 1 重一次因式 $x-4$, 2 重一次因式 $x+2$, 3 重一次因式 $x-5$.

由定理 1 可以得到:

推论

如果 $x-a, x-b$ $(a\neq b)$ 都是复系数一元 n 次多项式 $f(x)$ 的因式, 那么它们的积 $(x-a)(x-b)$ 也是 $f(x)$ 的因式.

证明: 因为 $f(x)$ 的分解结果 (1.1) 是唯一确定的, 所以 a 一定等于某个 x_i, b 一定等于某个 $x_j (i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,m,$ 且 $i\neq j)$, 即 $(x-a)(x-b)=(x-x_i)(x-x_j)$, 由此可见, $(x-x_i)(x-x_j)$ 是 $f(x)$ 的因式.

对于一个任意的复系数一元 n 次多项式 $f(x)$, 要求出它的一次因式, 没有一般的方法. 但是, 如果 $f(x)$ 是整系数多项式, 那么进一步运用下列定理, 就能使我们较快地求得它的形如 $x-\dfrac{q}{p}$ (其中 p,q 是互质的整数) 的因式, 或者确定它没有这种形式的因式.

定理 2

如果整系数多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有因式 $x-\dfrac{q}{p}$ (其中 p,q 是互质的整数), 那么 p 一定是首项系数 a_n 的约数, q 一定是末项系数 a_0 的约数.

例如, $15x^2-17x+4$ 有因式 $3x-1, 5x-4$, 即 $3\left(x-\dfrac{1}{3}\right), 5\left(x-\dfrac{4}{5}\right)$, 3 与 5 都是首项系数 15 的约数, 1 与 4 都是末项系数 4 的约数. 又如, 如果 $2x^4-x^3-13x^2-x-15$ 有 $x-\dfrac{q}{p}$ 形式的因式 (其中 p,q 是互质的整数, 下同), 那么 p 只可能是 $1,2$, q 只可能是 $\pm1,\pm3,\pm5,\pm15$.

要注意定理中 "p 是 a_n 的约数, q 是 a_0 的约数" 只是 "整系数多项式 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有因式 $x-\dfrac{q}{p}$" 的必要条件, 而不是充分条件 (为什么).

下面证明定理 2.

证明： 因为 $f(x)$ 有因式 $x-\frac{q}{p}$，所以 $f\left(\frac{q}{p}\right)=0$，即

$$a_n\left(\frac{q}{p}\right)^n+a_{n-1}\left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}+\cdots+a_1\left(\frac{p}{q}\right)+a_0=0.$$

把第二项起的各项移到右边，并将两边都乘以 p^{n-1}，得

$$\frac{a_nq^n}{p}=-(a_{n-1}q^{n-1}+\cdots+a_1qp^{n-2}+a_0p^{n-1}).$$

等式的右边是一个整数，所以 $\frac{a_nq^n}{p}$ 也是一个整数，即 p 能整除 a_nq^n. 但因 p,q 互质，所以 p 的任何一个质因数都不是 q 的约数，从而也不是 q^n 的约数[1]. 由此可知，p 一定是 a_n 的约数.

同理，把上面的等式写成

$$\frac{a_0p^n}{q}=-(a_nq^{n-1}+a_{n-}q^{n-2}p+\cdots+a_1p^{n-1}).$$

可以证明 q 一定是 a_0 的约数.

推论

如果首项系数为 1 的整系数多项式 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 有因式 $x-q$，其中 $q\in\mathbb{Z}$，那么 q 一定是常数项 a_0 的约数.

利用定理 2 及其推论，我们可以较快地确定一个整系数一元一次式是不是某整系数一元 n 次多项式的因式.

例 1.7 把 $f(x)=x^3+x^2-10x-6$ 分解因式[2].

分析： 先考虑 $x-q$（$q\in\mathbb{Z}$）形式的因式，因为 $f(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式，根据定理 2 的推论，可能出现的 $x-q$ 这样的因式有 $x\pm1,x\pm2,x\pm3,x\pm6$.

---

① 例如：$p=2\times5=10,q=3\times7=21$，$p$ 的任何一个质因数（2 或 5）都不是 q 的约数，从而也不是 $q^m=3^n\times7^n$ 的约数.

② 如果没有特别说明，本章中所说的因式分解，都是指在复数集 $\mathbb{C}$ 中的因式分解

判断 $x-1, x+1$ 是不是 $f(x)$ 的因式时，只要根据因式定理，计算 $f(1), f(-1)$ 是不是等于零就可以了．因为 $f(1)=-14\neq 0, f(-1)=4\neq 0$，所以 $x-1, x+1$ 都不是 $f(x)$ 的因式.

判断 $x-2, x+2, \cdots$ 是不是 $f(x)$ 的因式时，可以计算 $f(2), f(-2), \cdots$ 是不是等于零．用综合除法，由于

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -10 & -6 & 2 \\ & +2 & +6 & & \\ \hline 1 & +3 & -4 & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -10 & -6 & 2 \\ & -2 & +2 & & \\ \hline 1 & -1 & -8 & & \end{array}$$

(上面左式中 -4×2 不是 -6 的相反数，右式中 $-8\times(-2)$ 不是 -6 的相反数，已经说明相应的余数都不是零，所以不必继续演算了.）可见 $x-2, x+2$ 都不是 $f(x)$ 的因式．但

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -10 & -6 & 3 \\ & +3 & +12 & +6 & \\ \hline 1 & +4 & +2 & \multicolumn{1}{|c}{0} & \end{array}$$

可知 $x-3$ 是 $f(x)$ 的因式．所以

$$x^3+x^2-10x-6=(x-3)(x^2+4x+2).$$

因为方程 $x^2+4x+2=0$ 的两个根是 $-2\pm\sqrt{2}$，于是,

$$x^3+x^2-10x-6=(x-3)(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2}).$$

解答时，只需写出结果是因式的试验过程，其他过程不必写出.

解:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & +1 & -10 & -6 & 3 \\ & +3 & +12 & +6 & \\ \hline 1 & +4 & +2 & \multicolumn{1}{|c}{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad x^3+x^2-10x-6 &= (x-3)(x^2+4x+2) \\ &= (x-3)(x+2+\sqrt{2})(x+2-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

例 1.8 把 $f(x)=2x^4-x^3-13x^2-x-15$ 分解因式.

分析： $f(x)$ 首项系数不是 1，根据定理 2，可试验 $x\pm 1, x\pm 3, x\pm 5, x\pm 15, x\pm \frac{1}{2}, x\pm\frac{3}{2}, x\pm\frac{5}{2}, x\pm\frac{15}{2}$.

因为 $f(1)\neq 0$，$f(-1)\neq 0$，所以 $x+1, x-1$ 不是 $f(x)$ 的因式．但

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -1 & -13 & -1 & -15 & 3 \\ & +6 & +15 & +6 & +15 & \\ \hline 2 & +5 & +2 & +5 & \multicolumn{1}{|r}{0} & \end{array}$$

所以,

$$f(x)=(x-3)(2x^3+5x^2+2x+5).$$

继续分解 $2x^3+5x^2+2x+5$．这个多项式的首项系数是 2，末项系数是 5，所以只要试验 $x\pm 1, x\pm 5, x\pm\frac{1}{2}, x\pm\frac{5}{2}$ 就可以了．但因 $x\pm 1$ 不是原来多项式 $f(x)$ 的因式，所以也不是这个多项式的因式．由

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & +5 & +2 & +5 & -\frac{5}{2} \\ & -5 & +0 & -5 & \\ \hline 2 & +0 & +2 & \multicolumn{1}{|r}{0} & \end{array}$$

得

$$\begin{aligned} 2x^3+5x^2+2x+5 &= \left(x+\frac{5}{2}\right)(2x^2+2) \\ &= (2x+5)(x^2+1) \end{aligned}$$

（实际上，利用分组分解法也容易得到这个结果.）

x^2+1 在复数集 $\mathbb{C}$ 中还能继续分解因式，所以

$$\begin{aligned} 2x^4-x^3-13x^2-x-15 &= (x-3)(2x+5)(x^2+1) \\ &= (x-3)(2x+5)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}). \end{aligned}$$

解：

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -1 & -13 & -1 & -15 & 3 \\ & +6 & +15 & +6 & +15 & \\ \hline 2 & +5 & +2 & +5 & \multicolumn{1}{|r}{0} & \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr|l} 2 & +5 & +2 & +5 & -\dfrac{5}{2} \\ & -5 & +0 & -5 & \\ \hline 2 & +0 & +2 & \multicolumn{1}{|r}{0} & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad 2x^4 - x^3 - 13x^2 - x - 15 &= (x-3)(2x^3+5x^2+2x+5) \\ &= (x-3)(2x+5)(x^2+1) \\ &= (x-3)(2x+5)(x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}). \end{aligned}$$

练习五

1. 判断下列各命题的真假，并说明理由：

(1) 如果整数 p, q 互质，且 p 为整系数多项式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

的首项系数 a_n 的约数，q 为末项系数 a_0 的约数，那么 $x - \dfrac{q}{p}$ 一定是 $f(x)$ 的因式；

(2) 如果多项式 $f(x) = g(x)q(x)$，其中 $g(x), q(x)$ 也是多项式，且 $x - a$ 不是 $f(x)$ 的因式，那么 $x - a$ 也不是 $q(x)$ 的因式.

2. 把下列各式分解因式：

(1) $x^3 + x^2 - 10x + 8$；　　(2) $2x^3 - 9x^2 + x + 12$；

(3) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 12x - 4$；　　(4) $4x^5 - 13x^3 + 10x^2 - 42x + 20$.

习题一

1. 设 $f(x) = x^3 - \mathrm{i}x^2 + 2x - 2\mathrm{i}$，求：

(1) $f(0)$；　　(2) $f(2)$；　　(3) $f(\mathrm{i})$；

(4) $f(\sqrt{2}\mathrm{i})$；　　(5) $f(-\sqrt{2}\mathrm{i})$.

2. 用综合除法求商式及余数：

(1) $(3x^4 - 50x^2 + 14) \div (x - 4)$；

(2) $(x^4 - 15x^2 - 10x + 28) \div (x + 2)$；

(3) $(3x^4 - 5x^3 + 8x^2 - x - 40) \div \left(x - \dfrac{2}{3}\right)$；

(4) $(x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 14x + 8) \div (x + 4)$；

(5) $(5x^3-6x^2+7x+8)\div(5x+4)$;

(6) $(4x^4+6x^3-8x^2+5x)\div(2x+5)$;

(7) $(y^3-8y^2+16y-25)\div(y-6)$;

(8) $(2a^4-a^2+9a-12)\div(a+2)$;

(9) $(8t^4+14t^3-3t^2-35t+18)\div(4t-3)$;

(10) $(25m^5+36m^3-14m^2+8m+8)\div(5m+2)$;

(11) $(x^3-8x^2y+8y^3)\div(x-2y)$（提示：把 x 看作多项式的元，y 看作系数）；

(12) $(10m^5-7m^4n-16m^3n^2+23mn^4-21n^5)\div(2m-3n)$.

3. 解答：

(1) 用综合除法求 $f(x)=x^5-2x^4-5x^3+9x^2-14x+29$ 除以 $x-3$ 所得的余数；

(2) 对于上题中的 $f(x)$，用代入法求 $f(3)$；

(3) 比较第 (1)、(2) 小题所得的结果.

4. 解答：

(1) 用综合除法求 $f(x)=x^7-23x^4+19$ 除以 $x+1$ 所得的余数；

(2) 对于第 (1) 小题中的 $f(x)$，用代入法求 $f(-1)$；

(3) 比较第 (1)、(2) 小题所得的结果.

5. 解答：

(1) 已知 $f(x)=x^5+2x^4-19x^3+19x^2-25x-70$，利用综合除法求 $f(3)$；

(2) 已知 $f(x)=9x^5+3x^4-32x^3+10x^2+27x-6$，利用综合除法求 $f\left(\dfrac{4}{3}\right)$；

6. 不用除法，求下列各式除以 $x-y$ 所得的余式以及除以 $x+y$ 所得的余式：

(1) x^7+y^7; (2) x^7-y^7; (3) x^8+y^8; (4) x^8-y^7.

7. 不用除法，求证：

(1) $x^5+4x^3-11x^2+9x-3$ 有因式 $x-1$；

(2) $x^4-8x^3-6x^2+9x+6$ 有因式 $x+1$；

(3) $(x-1)^5-1$ 有因式 $x-2$；

(4) $(x+3)^{2n}-(x+1)^{2n}$（其中 $n\in\mathbb{N}$）有因式 $x+2$.

8. 用因式定理证明 $(2a+b)^n-a^n$（其中 $n\in\mathbb{N}$）有因式 $a+b$.

9. 用因式定理证明 $x^{4n+2}+a^{4n+2}$（其中 $n\in\mathbb{N}$）有因式 $x-a\mathrm{i}$，又有因式 $x+a\mathrm{i}$.

10. 用因式定理证明 $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ 有一次因式 $a-b,b-c,c-a$.

11. 解答:

  (1) 已知 $f(x)=x^4+5x^3-mx-28$ 有因式 $x-2$，确定 m 的值;

  (2) 已知 $f(x)=2x^3-9x^2+n$ 有因式 $2x+3$，确定 n 的值.

12. 已知 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，求证:

  (1) $x-1$ 成为 $f(x)$ 的一次因式的充要条件是 $a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$;

  (2) $x+1$ 成为 $f(x)$ 的一次因式的充要条件是 $a_n-a_{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_1+(-1)^na_0=0$.

13. 已知 n（$n\geqslant 1$）次多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，且所有 a_i（$i=0,1,\ldots,n$）都是非负实数，求证 $x-b$（其中 $b\in\mathbb{R}$）成为 $f(x)$ 的一次因式的必要条件是 $b\leqslant 0$.

14. 把下列各式分解因式:

  (1) $x^3-4x^2-17x+60$;　　(2) x^3-8x+8;

  (3) $6x^3+x^2+7x+4$;　　(4) $3x^3+x^2+4x-4$;

  (5) $4x^4+4x^3-9x^2-x+2$.

15. 把下列各式分解因式（在有理数集 $\mathbb{Q}$ 中）:

  (1) $4x^4-3x^3+15x^2-1$;

  (2) $3a^5-5a^4b+a^3b^2-8a^2b^3+3ab^4+2b^5$.

第二节　高次方程

1.2.1　一元 n 次方程的根的个数

如果

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\quad(a_n\neq 0)$$

是复系数一元 n 次多项式，那么方程 $f(x)=0$，即

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,$$

叫做**复系数一元 n 次方程**. 当 $n>2$ 时，通常也叫做**复系数高次方程**. 我们过去学过的二项方程是复系数高次方程的特殊情形.

类似地，如果 $f(x)$ 是实系数（或有理系数、整系数等）一元 n 次多项式，那么方程 $f(x)=0$ 叫做**实系数**（或**有理系数**、**整系数**等）**一元 n 次方程**. 当 $n>2$

时，通常也叫做**实系数**（或**有理系数**、**整系数**等）**高次方程**．很明显，实系数、有理系数、整系数一元 n 次方程都是复系数一元 n 次方程的特殊情形．在本章中所提到的一元 n 次方程，如果不特别说明，都是指复系数一元 n 次方程．

复系数一元 n 次方程 $f(x)=0$ 的根与多项式 $f(x)$ 的一次因式之间有着极为密切的关系．首先，根据因式定理，我们有

定理

一元 n 次方程 $f(x)=0$ 有一个根 $x=b$ 的充要条件是多项式 $f(x)$ 有一个一次因式 $x-b$.

在第 1.1.5 节中，我们还知道，任何一个复系数一元 n 次多项式 $f(x)$ 具有唯一确定的因式分解的形式：

$$f(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m},$$

其中 $k_1,k_2,\dots,k_m\in\mathbb{N}$，且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$，复数 $x_1,x_2,\dots,x_m$ 两两不等．由定理 1，可知 $x_1,x_2,\dots,x_m$ 都是方程 $f(x)=0$ 的根，且 $f(x)=0$ 没有其他的根．由于 $x-x_i$（$i=1,2,\dots,m$）是多项式 $f(x)$ 的 k_i 重一次因式，我们相应地把 x_i 叫做**方程** $f(x)=0$ **的** k_i **重根**.

例如: 方程 $x^2-6x+9=0$, 即 $(x-3)^2=0$ 有 2 重根 3; 方程 $(x-4)(x+2)^2(x-5)^3=0$ 有 1 重根 4, 2 重根 -2, 3 重根 5. 这两个方程的解集可以分别表示为 $\{3_{(2)}\}$, $\{4,-2_{(2)},5_{(3)}\}$，其中元素右边下标括号中的数 k（$k\geqslant 2$）表示这个元素是相应方程的 k 重根. 例如, 元素 5 右边的下标 (3), 表示 5 是方程 $(x-4)(x=2)^2(x-5)^3=0$ 的 3 重根，即此方程有 3 个相等的根 5，但在解集中 5 只能算一个元素.

复系数一元 n 次方程有多少个根呢？由第 1.1.5 节的定理 1，容易得到

定理 2

复系数一元 n 次方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中有且仅有 n 个根（k 重根算作 k 个根）.

例 1.9 求方程

$$f(x)=x^4+3x^3-2x^2-9x+7=0$$

在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集.

解： 方程 $f(x)=0$ 的系数 $1,3,-2,-9,7$ 的和为 0，即 $f(1)=0$，可知 1 是原方程的根，从而 $x-1$ 是多项式 $f(x)$ 的一次因式．利用综合除法，得

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & +3 & -2 & -9 & +7 & 1 \\
  & 1 & +4 & +2 & -7 & \\
\hline
1 & +4 & +2 & -7 & & 1 \\
  & 1 & +5 & +7 & & \\
\hline
1 & +5 & +7 & & &
\end{array}
$$

（说明：这里第一次除以 $x-1$，所得商式得系数 $1,4,2,-7$ 的和又为 0，可知 1 又是方程 $x^3+4x^2+2x-7=0$ 的根，所以利用综合除法，再将商式除以 $x-1$，得到 x^2+5x+7）[①]即

$$f(x)=(x-1)^2(x^2+5x+7)=0.$$

这时商式 x^2+5x+7 已降为二次式了，解方程 $x^2+5x+7=0$，得原方程得另外两个根

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}.$$

由定理 2，原方程有且仅有四个根．从而原方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集是

$$\left\{1_{(2)},\frac{-5+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2},\frac{-5-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right\}$$

由第 1.1.5 节 的定理 2 及其推论，我们还可以得到：

定理 3

如果既约分数 $\dfrac{q}{p}$ 是整系数一元 n 次方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_xx+a_0=0$$

的根，那么 p 一定是 a_n 的约数，q 一定是 a_0 的约数．

① 实际解题时，括号中的说明都可以省去．

推论 1

如果整系数一元 n 次方程的首项系数是 1，那么这个方程的有理数根只可能是整数.

推论 2

如果整系数一元 n 次方程有整数根，那么它一定是常数项的约数.

例 1.10 求方程 $f(x)=2x^6+x^5-16x^4-6x^3+25x^2+20x+4=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集.

解: 原方程是一个整系数一元六次方程，由定理 3，如果它有有理数根，只可能是 $\pm1,\pm2,\pm4,\pm\dfrac{1}{2}$. 因为它的系数之和不为0，可知 1 不是它的根. 利用综合除法，得:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
2 & +1 & -16 & -6 & +25 & +20 & +4 & -1 \\
 & -2 & +1 & +15 & -9 & -16 & -4 & \\
\hline
2 & -1 & -15 & +9 & +16 & +4 & & 2 \\
 & +4 & +6 & -18 & -18 & -4 & & \\
\hline
2 & +3 & -9 & -9 & -2 & & & 2 \\
 & +4 & +14 & +10 & +2 & & & \\
\hline
2 & +7 & +5 & +1 & & & & -\dfrac{1}{2} \\
 & -1 & -3 & -1 & & & & \\
\hline
2 & +6 & +2 & & & & &
\end{array}
$$

(说明: 这里先除以 $x+1$, 得商式 $2x^5-x^4-15x^3+9x^2+16x+4$, 余数为 0. 方程 $=0$ 的有理数根只可能是 $-1,\pm2,\pm4,\pm\dfrac{1}{2}$. 用心算可知 -1 不是它的根. 用综合除法除以 $x-2$ 后，得商式 $2x^4+3x^3-9x^2-9x-2$，余数为 0. 方程 $2x^3+7x^2+5x+1=0$ 的系数都是正数，所以它没有正数根，它的有理数根只可能是 $-\dfrac{1}{2}$. 用综合除法除以 $x+\dfrac{1}{2}$ 后，得商式 $2x^2+6x+2$，余数为 0. $2x^2+6x+2$ 已经是二次式了.）即

$$f(x)=(x+1)(x-2)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2+6x+2)=0.$$

解方程 $2x^2+6x+2=0$，得原方程得另外两个根

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

从而原方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中得解集是

$$\left\{-1,2_{(2)},-\frac{1}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

例 1.11　求**最简整系数方程**（就是求一个整系数方程，并使最高次项系数取尽可能小得自然数）$f(x)=0$，已知它在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集为 $\left\{\frac{1}{2}_{(2)},\mathrm{i},-\mathrm{i}\right\}$.

解： 设所求的方程是

$$a\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})=0\quad(a\in\mathbb{N},\text{ 且 }a\neq 0),$$

即

$$a\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)(x^2+1)=0,$$

因为要求上式具有最简单的整系数，所以取 $a=4$．代入上式得

$$4\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)(x^2+1)=0,$$

即

$$4x^4-4x^3+5x^2-4x+1=0.$$

练习六

1.（口答）在复数集 $\mathbb{C}$ 中，下列方程有且仅有多少个根?

(1)　$x^4+3x^2+4x+5=0$；　　(2)　$x^7=1$；

(3)　$(x+1)^4-(x-1)^4=0$；　　(4)　$(x-1)^2(x-2)^3(x+3)^4=0$.

2. 解答:

(1) 用综合除法验证 3 是方程 $2x^3-5x^2-9x+18=0$ 的一个根；

(2) 把方程 $2x^3-5x^2-9x+18=0$ 先化成

$$(x-x_1)(ax^2+bx+c)=0$$

的形式，再化成

$$a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=0$$

的形式.

3. 求下列方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集:

(1) $3x^3-11x^2+5x+3=0$;

(2) $6x^4+31x^3+25x^2-39x+9=0$;

(3) $3x^5+4x^4-10x^3-14x^2+3x+6=0$.

4. 求最简整系数方程 $f(x)=0$，已知它在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集是:

(1) $\{-1,-2,3\}$;　　(2) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{2}{3},1\right\}$;

(3) $\{-2,2_{(2)}\}$;　　(4) $\left\{1+\mathrm{i},1-\mathrm{i},-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$;

1.2.2 一元 n 次方程的根与系数的关系

我们知道，如果一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0$$

的两个根是 x_1,x_2，那么根与系数之间有下列关系:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

一般地说，我们有如下的定理:

定理 韦达[①]定理

如果一元 n 次方程

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

在复数集 $\mathbb{C}$ 中的根是 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，那么

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases} \tag{1.2}$$

例如：当 $n = 3$ 时，有

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

下面我们证明上述定理.

证明： 因为方程 $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的根是 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，由第 1.2.1 节定理 1，可以把 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 分解成 n 个一次因式与 a_n 的积：

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

① 韦达（François Viète，1540–1603 年），法国数学家.

因为

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-(x_1+x_2+\cdots+x_n)x^{n-1}$$
$$+(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)x^{n-2}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n,$$

代入上式后，把每一项与 a_n 相乘. 现将等号左边的多项式减去等号右边的多项式，所得的差 $F(x)$ 是一个零多项式. 对 $F(x)$ 进行整理，可知

$$\begin{aligned}F(x)=&[a_{n-1}+a_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)]x^{n-1}\\&+[a_{n-2}-a_n(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)]x^{n-2}\\&+\cdots+[a_0-(-1)^n a_n x_1x_2\cdots x_n].\end{aligned}$$

根据零多项式的定义，$F(x)$ 的系数都是 0，所以

$$\begin{cases}a_{n-1}+a_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0,\\ a_{n-2}-a_n(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)=0,\\ \cdots\cdots\\ a_0-(-1)^n a_n x_1x_2\cdots x_n=0.\end{cases}$$

由此即得

$$\begin{cases}x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n},\\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n},\\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n},\\ \cdots\cdots\\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}.\end{cases}$$

这个定理的逆命题也成立，即对于任何一元 n 次方程

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,$$

如果有 n 个数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 满足式 (1.2)，那么 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 一定是方程 $f(x)=0$ 的根.

例 1.12　已知方程 $2x^3-5x^2-4x+12=0$ 有 2 重根，利用一元 n 次方程的根与系数的关系，求这个方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集.

解：设原方程在 $\mathbb{C}$ 中的解集为 $\{\alpha_{(2)}, \beta\}$，那么

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=\dfrac{5}{2}, & (1.3)\\ \alpha^2+2\alpha\beta=-2, & (1.4)\\ 2\alpha^2\beta=-6. & (1.5)\end{cases}$$

（说明：这里有两个未知数、三个方程. 我们可以选其中两个方程，求出满足这两个方程的 α, β，再代入另一个方程，如能满足，就是方程组的解，否则不是.）解 (1.3)、(1.4) 两式组成的方程组，得

$$\begin{cases}\alpha=2,\\ \beta=-\dfrac{3}{2},\end{cases} \qquad 或 \begin{cases}\alpha=-\dfrac{1}{3},\\ \beta=\dfrac{19}{6},\end{cases}$$

第一个解满足 (1.5)式；第二个解不满足 (1.5)式，应舍去. 所以原方程在 $\mathbb{C}$ 中的解集为 $\left\{2_{(2)}, -\dfrac{3}{2}\right\}$.

例 1.13　当且仅当 k 是什么数的时候，方程 $x^3-6x^2+3x+k=0$ 的三个根成等差数列①？

解：设原方程在 $\mathbb{C}$ 中的三个根成等差数列，并分别记作 $a-d, a, a+d\,(d \geqslant 0)$，那么

$$\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=6,\\ a(a-d)+a(a+d)+(a+d)(a-d)=3,\\ a(a-d)(a+d)=-k.\end{cases}$$

① 本书中涉及等差、等比数列的问题，都限于在实数集内讨论.

整理后，得

$$\begin{cases} 3a = 6, & (1.6) \\ 3a^2 - d^2 = 3, & (1.7) \\ a^3 - ad^2 = -k. & (1.8) \end{cases}$$

由 (1.6) 式，得 $a = 2$；代入 (1.7) 式，得 $d = 3$；再代入 (1.8) 式．便得

$$k = 10.$$

这就是说，要使原方程得三个根成等差数列，k 必须等于 10．反过来，容易验证，当方程中的 $k = 10$ 时，$-1(= a - d), 2(= a), 5(= a + d)$ 三个数确实是原方程的根，且成等差数列．所以当且仅当 $k = 10$ 时，原方程的三个根成等差数列．

练习七

利用一元 n 次方程的根与系数的关系解下列各题:

1. 已知方程 $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$ 的根中有三个是 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2$，求这个方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集.
2. 已知方程 $2x^3 + x^2 - 8x - 4 = 0$ 的根都是实根，且有两个互为相反数，求这个方程的解集.
3. 已知方程 $x^3 - 9\sqrt{2}x^2 + 46x - 30\sqrt{2} = 0$ 的三个根成等差数列，求这个方程的解集.

1.2.3 实系数方程虚根成对定理

我们知道，如果 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$，那么实系数一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有一对虚数根，它们互为共轭虚数，即

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}\mathrm{i}}{2a}.$$

一般地说，关于实系数一元 n 次方程的虚数根，有下面的性质:

定理

如果虚数 $a + b\mathrm{i}$ 是实系数一元 n 次方程 $f(x) = 0$ 的根，那么 $a - b\mathrm{i}$ 也是这个方程的根，并且它们的重数相等.

证明： 由 $a+b\mathrm{i}$ 是实系数一元 n 次方程 $f(x)=0$ 的根，可知 $f(a+b\mathrm{i})=0$．我们先来证明 $a-b\mathrm{i}$ 也是方程 $f(x)=0$ 的根，为此只需证明 $f(a-b\mathrm{i})=0$．

考虑多项式

$$\begin{aligned} g(x) &= [x-(a+b\mathrm{i})][x-(a-b\mathrm{i})] \\ &= (x-a)^2-(b\mathrm{i})^2 \\ &= x^2-2ax+(a^2+b^2), \end{aligned} \tag{1.9}$$

这是一个实系数二次三项式．用 $g(x)$ 除 $f(x)$，设商式为 $q(x)$，那么余式的次数不大于 1，可以表示为 $mx+n$（其中 m,n 为实数）．于是

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+mx+n \tag{1.10}$$

把 $x=a+b\mathrm{i}$ 代入上式, 左边 $f(a+b\mathrm{i})=0$, 又由式 (1.9) 知右边的 $g(a+b\mathrm{i})=0$, 从而右边的 $m(a+bi)+n=0$，即

$$am+n+bm\mathrm{i}=0.$$

根据复数等于零的条件，得

$$am+n=0,\quad bm=0.$$

由于 $b\neq 0$（否则 $a+b\mathrm{i}$ 不是虚数），所以 $m=0$，由此 $n=0$．又由式 (1.9) 知 $g(a-b\mathrm{i})=0$，所以由式 (1.10),

$$\begin{aligned} f(a-b\mathrm{i}) &= g(a-b\mathrm{i})\cdot q(a-b\mathrm{i})+m(a-b\mathrm{i})+n \\ &= 0\cdot q(a-b\mathrm{i})+0\cdot(a-b\mathrm{i})+0=0, \end{aligned}$$

即 $a-bi$ 是方程 $f(x)=0$ 的根.

现在再证明 $a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 的重数相等，由上面的证明可知 $m=0,n=0$，代入式 (1.10)，得

$$f(x)=g(x)\cdot q(x).$$

这说明 $g(x)$ 整除 $f(x)$．因为 $f(x),g(x)$ 的系数都是实数，非零实系数多项式除以实系数多项式，商式仍然是实系数多项式，所以 $q(x)$ 的系数也都是实数．如果

$a+b\mathrm{i}$ 是方程 $f(x)=0$ 的重根，那么它必然是方程 $q(x)=0$ 的根，根据上面的证明，$a-b\mathrm{i}$ 也必然是方程 $q(x)=0$ 的根．这样 $a-b\mathrm{i}$ 也是方程 $f(x)=0$ 的重根．设 $a+b\mathrm{i}$ 与 $a-b\mathrm{i}$ 分别是方程 $f(x)=0$ 的 s 重根与 t 重根，重复运用这个推理方法，可知 $s\leqslant t$；同理可证 $t\leqslant s$．所以 $s=t$．

由上面的定理可知，在实系数一元 n 次方程中，虚数根总是成对出现的．

例 1.14　求方程 $2x^4-6x^3+21x^2+14x+39=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集，已知它的根中有一个是 $2-3\mathrm{i}$．

解法一：这是一个一元四次方程，在复数集 $\mathbb{C}$ 中有且仅有四个根，因为它的系数都是实数，且 $2-3\mathrm{i}$ 是它的根，可知 $2+3\mathrm{i}$ 也是它的根．

把 $2x^4-6x^3+21x^2+14x+39=0$ 除以 $[x-(2-3\mathrm{i})][x-(2+3\mathrm{i})]$，也就是除以 $x^2-4x+13$，得商式 $2x^2+2x+3$．因此原方程可以化为

$$[x-(2-3\mathrm{i})][x-(2+3\mathrm{i})](2x^2+2x+3)=0.$$

解方程 $2x^2+2x+3=0$，得 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}\mathrm{i}}{2}$，所以原方程的解集是

$$\left\{2-3\mathrm{i},2+3\mathrm{i},\frac{-1+\sqrt{5}\mathrm{i}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}\mathrm{i}}{2}\right\}.$$

解法二：原方程有两个根 $2-3\mathrm{i},2+3\mathrm{i}$，设另外两个根为 α,β，由根与系数的关系，有

$$\begin{cases}\alpha+\beta+(2-3\mathrm{i})+(2+3\mathrm{i})=3,\\ \alpha\cdot\beta\cdot(2-3\mathrm{i})\cdot(2+3\mathrm{i})=\dfrac{39}{2},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-1,\\ \alpha\beta=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$

所以 α,β 是一元二次方程 $2x^2+2x+3=0$ 的根．解这个一元二次方程，得两个根 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}\mathrm{i}}{2}$．从而原方程得解集是

$$\left\{2-3\mathrm{i},2+3\mathrm{i},\frac{-1+\sqrt{5}\mathrm{i}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}\mathrm{i}}{2}\right\}.$$

例 1.15 求次数最低的实系数方程 $f(x)=0$，已知它在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集含有 $\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}, 0$ 这三个数.

解： 根据实系数方程虚根成对定理，如果 $\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}$ 是所求实系数方程 $f(x)=0$ 的根，那么它们的共轭虚数 $-\mathrm{i}, -1-\mathrm{i}$ 也是这个方程的根，所以所求得实系数方程至少有五个根 $\pm\mathrm{i}, -1\pm\mathrm{i}, 0$，也就是说，$f(x)$ 至少有五个一次因式 $x\mp\mathrm{i}, x+1\mp\mathrm{i}, x$. 把 $f(x)$ 写成这五个一次因式与一个常数 a（$a\in\mathbb{C}$，且 $a\neq 0$）的积

$$f(x)=a(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})(x+1-\mathrm{i})(x+1+\mathrm{i})x.$$

取 $a=1$，那么，实系数一元五次方程

$$(x-\mathrm{i})(x+\mathrm{i})(x+1-\mathrm{i})(x+1+\mathrm{i})x=0,$$

即

$$x^5+2x^4+3x^3+2x^2+2x=0,$$

就是所求的方程.

练习八

1. 已知方程 $3x^4-2x^3+10x^2-2x+7=0$ 的根中有一个是 i，求它在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集.
2. 求次数最低的实系数方程 $f(x)=0$，已知它在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集含有下列数:

   (1)　$3+2\mathrm{i}$;　　　　(2)　$-2, 1-\mathrm{i}$.
3. 已知虚线 $-1+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 是实系数方程 $x^3+3x^2+ax+b=0$ 的根，求 a, b 的值以及这个方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集.

习题二

1. 求证任何复系数一元 n 次方程都可化成

$$x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0=0$$

   的形式，其中 $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}\in\mathbb{C}$.
2. 求下列方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集:

   (1)　$x^3-8x^2+20x-16=0$;　　　　(2)　$x^4+x^3-5x^2+x-6=0$;

(3) $2x^4+9x^3-27x^2+53x-21=0$; (4) $5x^4+6x^3-5x-6=0$.

3. 求最简整系数方程 $f(x)=0$，已知它在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集是:

(1) $\{0,2-\sqrt{3},2+\sqrt{3},2\mathrm{i},-2\mathrm{i}\}$ (2) $\left\{\frac{1}{2}_{(2)},-\frac{2}{3}_{(3)}\right\}$

4. 求证:

(1) 如果一元 n 次方程 $f(x)=0$ 各项的系数都是正数，那么它没有正数根;

(2) 如果一元 n 次方程 $f(x)=0$ 各奇次项的系数都是正数，各偶次项（包括常数项 a_0）的系数都是负数，那么它没有负数根;

(3) 方程 $2x^5+3x^4+5x^2+7=0$ 没有实数根.

5. 利用第 4 题的结论，求下列方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集:

(1) $x^3+\frac{7}{2}x^2+\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$; (2) $x^3-\frac{2}{3}x^2+3x-2=0$.

利用一元 n 次方程根与系数的关系解下列各题（第 6～9 题）:

6. 解答:

(1) 已知方程 $18x^3-9x^2-74x+40=0$ 的根中有一个是另一个的 2 倍，求这个方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集;

(2) 已知方程 $x^4+4x^3+10x^2+12x+9=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中的四个根是 2 重根 a，2 重根 b，求 a,b 的值.

7. 解答:

(1) 已知方程 $x^4-4x^3-34x^2+ax+b=0$ 的四个根成等差数列，求 a,b 的值，并且求这个方程的解集;

(2) 已知方程 $8x^3-14x^2+kx+27=0$ 的三个根成等比数列，求 k 的值，并且求这个方程的解集.

8. 已知方程 $x^3+px^2+qx+r=0$（$p,q,r\in\mathbb{C}$）在复数集 $\mathbb{C}$ 中的根是 x_1,x_2,x_3，求下列各式的值:

(1) $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_1x_3}+\frac{1}{x_2x_3}$; (2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$;

(3) $x_1^2+x_2^2+x_3^2$; (4) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2$.

9. 设方程 $=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中的根是 x_1,x_2,x_3，求一元三次方程，使它在 $\mathbb{C}$ 中的根是:

(1) $2x_1,2x_2,2x_3$; (2) $-x_1,-x_2,-x_3$; (3) $\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}$.

10. 根据已知条件，求下列方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集：

(1) $x^4-3x^3-10x^2+42-20=0$，已知它的根中有一个是 $3+\mathrm{i}$；

(2) $x^4+3x^3+5x^2+4x+2=0$，已知它的根中有一个是 $\mathrm{i}-1$；

(3) $x^4-4x^3+11x^2-14x+10=0$，已知它的根中有两个是 $a+b\mathrm{i}, a+2b\mathrm{i}$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，且 $b\neq 0$.

11. 求次数最低的实系数方程 $f(x)=0$，已知它在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集含有下列数：

(1) $1, \dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$；　　(2) $2+\mathrm{i}, -1+\mathrm{i}$；

(3) $\pm 1, \mathrm{i}$；　　(4) $\sqrt{2}, \sqrt{2}\mathrm{i}$.

12. 求证实系数一元 n 次方程在 n 为奇数时，有奇数个实根；在 n 为偶数时，有偶数个实根，或者没有实根.

13. 已知虚数 $a+b\mathrm{i}$（$a,b\in\mathbb{R}$）是实系数方程 $x^3+px+q=0$ 的根，求证 $2a$ 是方程 $x^3+px-q=0$ 的根.

14. 一个长方体的长、宽、高分别是 $12\,\mathrm{cm}$、$5\,\mathrm{cm}$、$6\,\mathrm{cm}$. 要使各度（即长、宽、高）都增加一个相同的长度，体积增加 $186\,\mathrm{cm}^3$，这个增加的长度应是多少？

15. 把边长为 $6\,\mathrm{dm}$ 的正方形铁板的四角各截去一个相同的小正方形，然后把各边折起来做成一个无盖的长方体盒. 已知这个长方体盒的容积（铁板厚度不计）是 $16\,\mathrm{dm}^3$，求截去的小正方形每边的长.

小结

一、 本章主要内容是复系数一元 n 次多项式和一元 n 次方程的一些基本概念和重要性质.

二、 复系数一元 n 次多项式的一般形式可以写成

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 $n\in\mathbb{N}$，系数 $a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$，且 $a_n\neq 0$. 在需要的时候，我们可把一元 n 次多项式看作定义在 $\mathbb{C}$ 上的函数，并记作 $f(x), g(x)$ 等.

单独的一个非零复数，可以看作零次多项式；系数都是零的多项式叫做零多项式. 不论 x 在 $\mathbb{C}$ 上取什么值，零多项式的值都等于 0.

三、 余数定理：多项式 $f(x)$ 除以 $x-b$（$b\in\mathbb{C}$）所得的余数等于 $f(b)$. 余数

定理有一个重要的推论——因式定理：多项式 $f(x)$ 有一个因式 $x-b$ 的充要条件是 $f(b)=0$.

四、 任何一个复系数一元 n 次多项式 $f(x)$ 有唯一确定（不考虑各一次因式的书写顺序，也不考虑常数因子）的因式分解的形式：

$$f(x)=a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\cdots(x-x_m)^{k_m},$$

其中 $k_1,k_2,\ldots,k_m\in\mathbb{N}$，且 $k_1+k_2+\cdots+k_m=n$，复数 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 两两不等. $x-x_i$（$i=1,2,\ldots,m$）叫做多项式 $f(x)$ 的 k_i 重因式.

五、 如果整系数多项式 $f(x)=$ 有因式 $x-\dfrac{q}{p}$（其中 p,q 是互质的正数），那么 p 一定是首项系数 a_n 的约数，q 一定是末项系数 a_0 的约数. 根据这个定理，依靠综合除法的帮助，或者可以求出整系数多项式的整系数一次因式，或者可以证明它没有这种因式.

六、 多项式因式分解与解方程密切相关. 如果 $x-x_i$（$i=1,2,\ldots,m$）是多项式 $f(x)$ 的 k_i 重一次因式，那么 x_i 叫做方程 $f(x)=0$ 的 k_i 重根. 由此可以推出重要定理：复系数一元 n 次方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中有且仅有 n 个根（k 重根算作 k 个根）. 这个定理确定了复系数一元 n 次方程在 $\mathbb{C}$ 中的根的个数，显然，实系数一元 n 次方程在实数集 $\mathbb{R}$ 中的根的个数不具有这一性质.

七、 如果一元 n 次方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

在复数集 $\mathbb{C}$ 中的根是 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，那么

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_n=-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n=\dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \cdots\cdots \\ x_1x_2\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases} \tag{$*$}$$

这个定理确定了一元 n 次方程的根与系数的关系，它的逆命题也成立，即对于任何一元 n 次方程

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0,$$

如果有 n 个数 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 满足式 $(*)$，那么 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 一定是方程 $f(x)=0$ 的根.

八、 如果虚数 $a+b\mathrm{i}$ 是实系数一元 n 次方程 $f(x)=0$ 的根，那么它的共轭虚数 $a-b\mathrm{i}$ 也是这个方程的根，并且它们的重数相等. 这个定理确定了实系数一元 n 次方程虚根成对的性质.

九、 根据本章的知识，我们可以把某些一元 n 次多项式分解因式，也可以求出相应的一元 n 次方程的解集. 在解决这类问题时，要认真分析已知条件，选择较为简便的解法. 例如：对于整系数一元 n 次方程，可以利用综合除法求有理根；已知实系数一元 n 次方程的一个虚数根 $a+b\mathrm{i}$，就可知道它有了另一个虚数根 $a-b\mathrm{i}$；有时还可根据已知条件，利用一元 n 次方程的根与系数的关系；也可先观察方程的系数有什么特点，确定根的范围；等等. “降次”是在分解因式和解方程时经常采用的一种基本思想方法.

复习参考题一

A 组

1. 计算 $(5x^2-2x^3+6x^4-18)\div(2x^2+1)$, 并把结果写成“$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$”的形式.
2. 一个多项式除法的除式是 $2x^2+3x-5$，商式是 $3x-5$，余式是 -7，求被除式.
3. 用综合除法求商式及余数．其中哪些能够整除，哪些不能整除?

   (1) $(a^3-b^3)\div(a-b)$；　(2) $(a^4-b^4)\div(a-b)$；

   (3) $(x^6-y^6)\div(x+y)$；　(4) $(x^5+y^5)\div(x+y)$；

   (5) $(m^5-n^5)\div(m+n)$；　(6) $(m^6+n^6)\div(m-n)$；

   (7) $(u^6+v^6)\div(u+v)$；　(8) $(u^7+v^7)\div(u+v)$.
4. 用综合除法求商式及余数:

   (1) $(2x^3-3x^2+8x-12)\div(2x-3)$；

   (2) $(4a^3+2a^2b-8ab^2-12b^3)\div(2a+3b)$；

   (3) $(3x^4+2x^2-5x)\div(3x-1)$；

   (4) $(3x^4-2x^3y+3x^2y^2-2xy^3+3y^4)\div(3x+2y)$.
5. 解答:

   (1) 设 $f(x)=x^n+a^n$（其中 $n\in\mathbb{N}$），求 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余式，又求 $f(x)$ 除以 $x+a$ 所得的余式;

   (2) 设 $f(x)=x^n-a^n$（其中 $n\in\mathbb{N}$），求 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余式，又求 $f(x)$ 除以 $x+a$ 所得的余式;

   (3) 通过第 (1)、(2) 小题，说出在什么情况下，x^n+a^n 或 x^n-a^n（其中

$n \in \mathbb{N}$）有因式 $x-a$ 或 $x+a$.

6. 求证 $x^3-4ax^2-10bx+16$ 有因式 $x+2$ 的充要条件是

$$a=\frac{1}{4}(2+5b).$$

7. 把下列多项式分解因式:

(1) $y^4+5y^3+22y^2+80y+96$;

(2) $a^4-4a^3b-7a^2b^2+22ab^3+24b^4$.

8. 在复数集中 $\mathbb{C}$ 中解下列方程或方程组:

(1) $x^3+\frac{7}{2}x^2-1=0$;

(2) $4x^4+7x^3-22x^2-35x+10=0$;

(3) $5x^4-29x^3+14x^2-116x-24=0$;

(4) $x^4-x^3+\frac{1}{4}x^2-4x-15=0$;

(5) $\begin{cases} x^3+y^3=19, \\ y=2x+7; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} x^2+y^2=52, \\ y=x^2-11x+34. \end{cases}$

9. 解答:

(1) 已知方程 $x^4-x^3+mx^2+nx-6=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中有两个根的和为 3，积为 2，求 m,n 的值，并且求方程在 $\mathbb{C}$ 中的解集;

(2) 已知方程 $x^3+3x^2+mx+n=0$ 的三个根成等差数列，方程 $x^3-(m-2)x^2+(n-3)x-8=0$ 的三个根成等比数列，求 m,n 的值.

10. 设方程 $2x^3-4x^2+x-6=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中的根是 x_1,x_2,x_3，求在 $\mathbb{C}$ 中的根是 x_1+1,x_2+1,x_3+1 的一元三次方程.

11. 已知方程 $f(x)=2x^4-3x^3+ax^2+bx+c=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中有 3 重根 -1，另一个根是 x_4，求 a,b,c,x_4 的值.

12. 求方程 $x^3+\mathrm{i}x^2-4x-4\mathrm{i}=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集.

13. 已知方程 $x^3+2x^2-3x+2-4\mathrm{i}=0$ 的根中有一个是 $-\mathrm{i}$，求这个方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集.

14. 已知方程 $x^3-9x^2+33x-65=0$ 的根中有一个虚根的模等于 $\sqrt{13}$，求这个方程在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集.

15. 一个长方体的长是宽的 2 倍，高比宽少 2 cm，它的体积是 490 cm^3，求它的长、宽、高.
16. 某厂一种轻工产品第一年的产值为 200 万元，以后三年逐年按同样的百分数递增，四年的总产值为 928.2 万元. 求产值每年比上一年增加的百分数.

B 组

17. 用综合除法求 $(a^3-b^3+c^3+3abc)\div(a-b+c)$ 的商式及余数.
18. 解答:
    (1) 证明 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ 有因式 $x+y+z$，并把它分解因式.
    (2) 利用第 (1) 小题的结果把下列各式分解因式:
    (i) $a^3-b^3+c^3+3abc$;　　(ii) $8a^3+b^3+c^3-6abc$.
19. 解答:
    (1) 证明 $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$ 有因式 $a-b, b-c, c-a$，并把它分解因式;
    (2) 证明 $(ay+bx)^3+(ax+by)^3-(a^3+b^3)(x^3+y^3)$ 有因式 $x+y$，也有因式 $a+b$，并把它分解因式.
20. 把 $y^7+2y^6-y^5-2y^4+4y^3+8y^2-4y-8$ 分解因式.
21. 已知 $x^4+ax^3-4x^2+bx-12$ 有因式 $x-2$，又有因式 $x+3$，确定 a,b 的值，并把这个多项式分解因式.
22. 已知 x^4+4x^2+ax+b 有一个因式 x^2+x+1，求 a,b 的值，并把这个多项式分解因式.
23. 已知多项式 $f(x)$ 除以 $x+2$ 所得的余数为 1，除以 $x+3$ 所得的余数为 -1. 求 $f(x)$ 除以 $(x+2)(x+3)$ 所得的余式.
24. 求证多项式 $f(x)$ 除以 $(x-a)(x-b)$（其中 $a\neq b$）所得的余式是
$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}x+\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}.$$
25. 设方程 $x^3-x^2+3x2=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中的根是 x_1,x_2,x_3.
    (1) 求证 x_1,x_2,x_3 都不是有理数;
    (2) 求证 x_1,x_2,x_3 中有两个是虚数（提示：先求出 $x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 的值）;

(3) 求证对任何实数 k，方程 $x^3-x^2+3x+k=0$ 有两个虚数根.

26. 在复数集 $\mathbb{C}$ 中解下列关于 x 的方程:

(1) $x^3-(a-1)x^2-a^2=0$ $\left(a>\dfrac{1}{4}\right)$;

(2) $x^3+(k^2-2)x=2k(x^2-1)$.

27. 利用二项方程的解法解下列方程:

(1) $(x^3+1)^2+3=0$;

(2) $(x-2)^2(x^2+2x+4)^2-49=0$.

28. 在复数集 $\mathbb{C}$ 中解方程组

$$\begin{cases} x=y^2+4y+1, \\ y=x^2+2x-3, \end{cases}$$

29. 求方程 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集（提示：在方程两边都乘以 $x-1$）.

30. 求证 $\cos\dfrac{\pi}{7}+\cos\dfrac{3\pi}{7}+\cos\dfrac{5\pi}{7}=\dfrac{1}{2}$（提示：考虑方程 $x^7-1=0$ 在复数集 $\mathbb{C}$ 中的解集）.

第二章　排列、组合、二项式定理

第一节　排列与组合

2.1.1　基本原理

我们先看下面的问题:

从甲地到乙地，可以乘火车，也可以乘汽车，还可以乘轮船．一天中，火车有 4 班，汽车有 2 班，轮船有 3 班．那么一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有多少种不同的走法?

因为一天中乘火车有4种走法，乘汽车有 2 种走法，乘轮船有 3 种走法，每一种走法都可以从甲地到达乙地，因此，一天中乘坐这些交通工具从甲地到乙地共有

$$4 + 2 + 3 = 9$$

种不同的走法.

一般地，有如下原理:

原理　加法原理

做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种不同的方法，在第二类办法中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种不同的方法.

我们再看下面的问题：由 A 村去 B 村的道路有 3 条，由 B 村去 C 村的道路有 2 条（图 2.1）．从 A 村经 B 村去 C 村，共有多少种不同的走法？

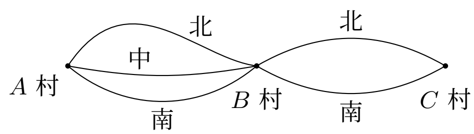


图 2.1

这里，从 A 村到 B 村有 3 种不同的走法，按这 3 种走法中的每一种走法到达 B 村后，再从 B 村到 C 村又有 2 种不同走法．因此，从 A 村经 B 村去 C 村共有

$$3 \times 2 = 6$$

种不同的走法．

一般地，有如下原理：

原理 **乘法原理**

做一件事，完成它需要分成 n 个步骤，做第一步有 m_1 种不同的方法，做第二步有 m_2 种不同的方法，……，做第 n 步有 m_n 种不同的方法．那么完成这件事共有

$$N = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法．

例 2.1 书架上层放有 6 本不同的数学书，下层放有 5 本不同的语文书．

(1) 从中任取一本，有多少种不同的取法？

(2) 从中任取数学书与语文书各一本，有多少种不同的取法？

解：

(1) 从书架上任取一本书，有两类办法：第一类办法是从上层取数学书，可以从 6 本书中任取一本，有 6 种方法；第二类办法是从下层取语文书，可以从 5 本书中任取一本，有 5 种方法．根据加法原理，得到不同的取法的种数是

$$N = m_1 + m_2 = 6 + 5 = 11.$$

答：从书架上任取一本书，有 11 种不同的取法.

(2) 从书架上任取数学书与语文书各一本，可以分成两个步骤完成：第一步取一本数学书，有 6 种方法，第二步取一本语文书，有 5 种方法．根据乘法原理，得到不同的取法的种数是

$$N = m_1 \times m_2 = 6 \times 5 = 30.$$

答：从书架上取数学书与语文书各一本，有 30 种不同的方法.

例 2.2　由数字 $1, 2, 3, 4, 5$ 可以组成多少个三位数（各位上的数字允许重复)?

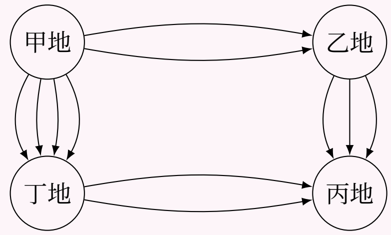
解：要组成一个三位数可以分成三个步骤完成：第一步确定百位上的数字，从 5 个数字种任选一个数字，共有 5 种选法；第二步确定十位上的数字，由于数字允许重复，这仍有 5 种选法；第三步确定个位上的数字，同理，它也有 5 种选法．根据乘法原理得到可以组成的三位数的个数是

$$N = 5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125.$$

答：可以组成 125 个三位数.

练习一

1.（口答）一件工作可以用两种方法完成．有 5 人会用第一种方法完成，另有 4 人会用第二种方法完成．选出一个人来完成这件工作，共有多少种选法?
2. 在读书活动中，一个学生要从 2 本科技书、2 本政治书、3 本文艺书里任选一本，共有多少种不同的选法?
3. 一名儿童做加法游戏．在一个红口袋中装着 20 张分别标有数 $1, 2, \cdots, 19, 20$ 的红卡片，从中任抽一张，把上面的数作为被加数；在另一个黄口袋中装着 10 张分别标有数 $1, 2, \cdots, 9, 10$ 的黄卡片，从中任抽一张，把上面的数作为加数．这名儿童一共可以列出多个加法式子?
4. 乘积 $(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5)$ 展开后共有多少项?
5. 如图，从甲地到乙地有 2 条路可通，从乙地到丙地有 3 条路可通；从甲地到丁地有 4 条路可通，从丁地到丙地有 2 条路可通．从甲地到丙地共有多少种不同的走法?



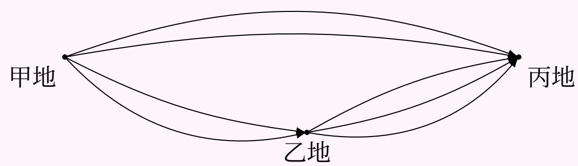
（第 5 题图）

6. 一个口袋内装有 5 个小球，另一个口袋内装有 4 个小球，所有这些小球的颜色互不相同.

(1)　从两个口袋内任取一个小球，有多少种不同的取法?

(2)　从两个口袋内各取一个小球，有多少种不同的取法?

7. 如图，从甲地到乙地有 2 条陆路可走，从乙地到丙地有 3 条陆路可走，又从甲地不经过乙地到丙地有 2 条水路可走.



（第 7 题图）

(1)　从甲地经乙地到丙地有多少种不同的走法?

(2)　从甲地到丙地共有多少种不同的走法?

2.1.2　排列

我们看下面的问题:

1. 北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线，需要准备多少种不同的飞机票?

这个问题就是从北京、上海、广州三个民航站中，每次取出两个站，按照起点站在前、终点站在后的顺序排列，求一共有多少种不同的排法.

首先确定起点站，在三个站中，任选一个站为起点站，有 3 种方法；其次确定终点站，当选定起点站后，终点站就只能在其余的两个站中去选，因此，有 2 种方

法. 那么, 根据乘法原理, 在三个民航站中, 每次取两个, 按起点站在前、终点站在后的顺序排列的不同方法共有

$$3 \times 2 = 6$$

种. 也就是说, 需要准备如下 6 种不同的飞机票:

起点站	终点站	飞机票
北京	上海	北京——上海
	广州	北京——广州
上海	北京	上海——北京
	广州	上海——广州
广州	北京	广州——北京
	上海	广州——上海

2. 由数字 $1, 2, 3, 4$ 可以组成多少个没有重复数字的三位数?

这个问题就是从 $1, 2, 3, 4$ 这四个数字中, 每次取出三个, 按照百位、十位、个位的顺序排列起来, 求一共有多少种不同的排法.

第一步, 先确定百位上的数字, 在 $1, 2, 3, 4$ 这四个数字种任取一个, 有 4 种方法;

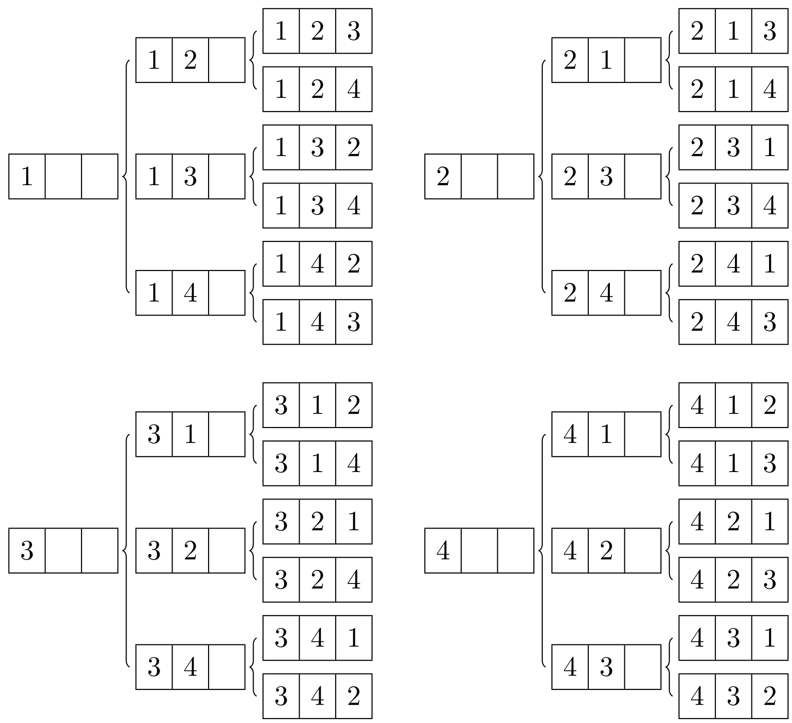
第二步, 确定十位上的数字, 当百位上的数字确定以后, 十位上的数字只能从余下的三个数字中去取, 有 3 种方法;

第三步, 确定个位上的数字, 当百位、十位上的数字都确定以后, 个位上的数字只能从余下的两个数字中去取, 有 2 种方法.

根据乘法原理,从四个不同的数字中,每次取出三个排成一个三位数的方法共有

$$4 \times 3 \times 2 = 24$$

种. 也就是说, 可以排成 24 个不同的三位数. 具体排法如下:

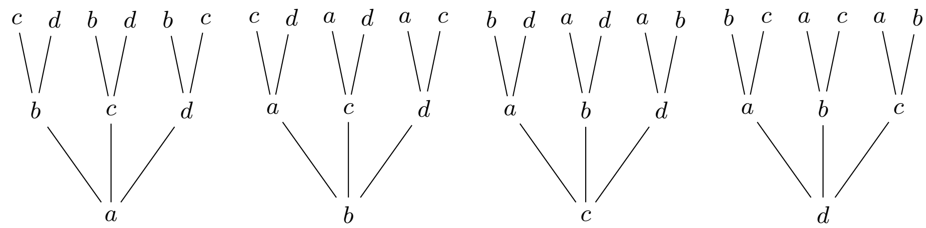


我们把被取的对象（如上面问题中的民航站、数字）叫做**元素**. 上面第一个问题，就是从 3 个不同的元素中，任取 2 个，然后按一定的顺序排成一列，求一共有多少种不同的排法；第二个问题，就是从 4 个不同的元素中，任取 3 个，然后按一定的顺序排成一列，求一共有多少种不同的排法.

一般地说，从 n 个不同元素中，任取 m（$m \leqslant n$）个元素（本章只研究被取出的元素各不相同的情况），按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**排列**.

从排列的定义知道, 如果两个排列相同, 不仅这两个排列的元素必须完全相同, 而且排列的顺序也必须完全相同. 如果所取的元素不完全相同，例如问题 1 中的飞机票“上海——北京”和“上海——广州”，它们就是两个不同的排列. 即使所取的元素完全相同，但排列顺序不同，也不是相同的排列. 如问题 2 中的三位数“213”和“231”，虽然它们的元素相同，但排列顺序不同，也是两个不同的排列.

在实际问题中，有时需要写出某个排列问题的所有排列. 例如，已知 a, b, c, d 这 4 个元素，写出每次取出 3 个元素的所有排列，可以先列出下图（见图 2.2）:



(a)　(b)　(c)　(d)

图 2.2

由此可以写出所有的排列:

$$\begin{array}{cccc}
abc & bac & cab & dab \\
abd & bad & cad & dac \\
acb & bca & cba & dba \\
acd & bcd & cbd & dbc \\
adc & bda & cda & dca \\
adc & bdc & cdb & dcb
\end{array}$$

2.1.3　排列数公式

从 n 个不同元素中取出 m（$m \leqslant n$）个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**排列数**，用符号 P_n^m 表示[①].

例如，从 6 个不同元素中取出 5 个元素的排列数表示为 P_8^5，从 7 个不同元素中取出 6 个元素的排列数表示为 P_7^6.

现在我们研究计算排列数的公式.

求排列数 P_n^2 可以这样考虑：假定有排好顺序的 2 个空位（图 2.3），从 n 个不同元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中任意取 2 个去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列；反过来，任一个排列总可以由这样的一种填法得到．因此，所有不同填法的种数就是排列数 P_n^2.

现在我们计算有多少种不同的填法，完成这件事可分为两个步骤:

---

① P 是英文 Permutation（排列）的第一个字母.

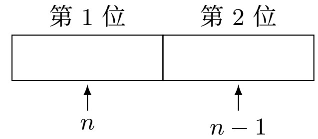


图 2.3

第一步，先排第一个位置的元素，可以从这 n 个元素中任选一个填空，有 n 种方法；

第二步，确定排在第二个位置的元素，可以从剩下的 $n-1$ 个元素中任选一个填空，有 $n-1$ 种方法.

于是，根据乘法原理，得到排列数为

$$P_n^2 = n(n-1).$$

求排列数 P_n^3 可以按依次填 3 个空位来考虑，得到

$$P_n^3 = n(n-1)(n-2).$$

同样，求排列数 P_n^m 可以这样考虑：假定有排好顺序的 m 个空位（图 2.4），从 n 个不同元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中任意取 m 个去填空，一个空位填一个元素，每一种填法就得到一个排列；反过来，任一个排列总可以由一种填法得到. 因此，所有不同填法的种数就是排列数 P_n^m.

现在我们计算共有多少中不同的填法（图 2.4）：

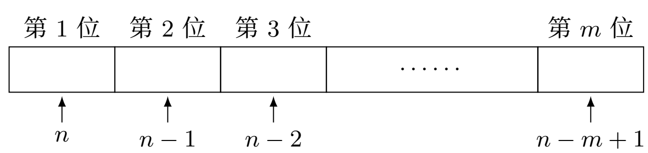


图 2.4

第一步，第 1 位可以从 n 个元素中，任选一个填上，共有 n 种填法；

第二步，第 2 位只能从余下的 $n-1$ 个元素中，任选一个填上，共有 $n-1$ 种填法；

第三步，第 3 位只能从余下的 $n-2$ 个元素中，任选一个填上，共有 $n-2$ 种填法；

依次类推，当前面的 $m-1$ 个空位都填上后，第 m 位只能从余下的 $n-(m-1)$ 个元素中，任选一个填上，共有 $n-m+1$ 种填法.

根据乘法原理，全部填满 m 个空位共有

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

种填法.

所以得到公式

$$\boxed{P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).}$$

这里 $n, m \in \mathbb{N}$，并且 $m \leqslant n$. 这个公式叫做**排列数公式**. 其中，公式右边种第一个因数是 n，后面的每个因数都比它前面一个因数少 1，最后一个因数为 $n-m+1$，共有 m 个因数相乘.

例如，$P_8^3 = 8\times7\times6 = 336$.

排列数公式中，当 $m=n$ 时，有

$$P_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1.$$

这个公式指出，n 个不同元素全部取出的排列数，等于自然数 1 到 n 的连乘积. n 个不同元素全部取出的一个排列，叫做 n 个不同元素的一个**全排列**. 自然数 1 到 n 的连乘积，叫做 n 的**阶乘**，用 $n!$ 表示，所以 n 个不同元素的全排列公式可以写成

$$P_n^n = n!.$$

排列数公式可作如下变形：

$$\begin{aligned}
P_n^m &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)\\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}{(n-m)\cdot\cdots\cdot2\cdot1}\\
&= \frac{n!}{(n-m)!},
\end{aligned}$$

因此，排列数公式还可写成

$$\boxed{P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.}$$

为了使这个公式在 $m=n$ 时也能成立，我们规定

$$0! = 1.$$

例 2.3 计算 P_{16}^3 及 P_6^6.

解: $P_{16}^3 = 16 \times 15 \times 14 = 3360$;
$P_6^6 = 6! = 720$.

例 2.4 求证 $P_n^m + mP_n^{m-1} = P_{n+1}^m$.

证明:

$$\begin{aligned}
P_n^m + mP_n^{m-1} &= \frac{n!}{(n-m)!} + \frac{n!}{[n-(m-1)]!} \\
&= \frac{n!(n-m+1)}{(n-m+1)!} + \frac{m \cdot n!}{(n-m+1)} \\
&= \frac{n!(n-m+1+m)}{(n-m+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{[(n+1)-m]!} = P_{n+1}^m.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad P_n^m + mP_n^{m-1} = P_{n+1}^m.$$

例 2.5 某段铁路上有 12 个车站，共需要准备多少种普通客票?

解: 因为每一张车票对应着 2 个车站的一个排列，因此需要准备的车票种数，就是从 12 个车站中任取 2 个的排列数:

$$P_{12}^2 = 12 \times 11 = 132(\text{种}).$$

答：一共需要准备 132 种普通客票.

例 2.6 某信号兵用红、黄、蓝三面旗从上到下挂在竖直的旗杆上表示信号，每次可以任挂一面、二面或三面，并且不同的顺序表示不同的信号，一共可以表示多少种不同的信号?

解: 如果把 3 面旗看成 3 个元素，则从 3 个元素里每次取出 1 个元素的一个排列，对应一种信号．于是，只用 1 面旗表示的信号是 P_3^1 种.

同样，只用二面旗表示的信号共有 P_3^2 种，只用 3 面旗表示的信号共有 P_3^3 种.

根据加法原理，所求的信号种数是

$$P_3^1+P_3^2+P_3^3=3+3\times2+3\times2\times1=15(\text{种})\ .$$

答：一共可以表示 15 种不同的信号.

例 2.7 用 0 到 9 这十个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数?

分析一: 因为要用 0 到 9 这十个数字组成三位数，每一个三位数可以看成是从这十个数字中任取 3 个的一个排列（0 排在首位的除外），由于百位上的数字不能是 0，我们可以分成两个步骤考虑：先排百位上的数字，再排十位和个位上的数字.

解法一: 百位上的数字只能从除 0 以外的 1 到 9 这九个数字中任选一个，有 P_9^1 种；十位和个位上的数字，可以从余下的九个数字中任选两个，有 P_9^2 种（如图 2.5）. 根据乘法原理，所求的三位数的个数是

$$P_9^1\cdot P_9^2=9\times9\times8=648.$$

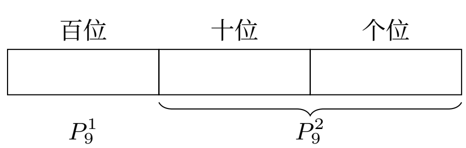


图 2.5

分析二: 从 0 到 9 这十个数字中任取三个数字的排列数，减去其中以 0 为排头的排列数，就是用这十个数字组成的没有重复数字的三位数的个数.

解法二： 从 0 到 9 这十个数字中任取三个数字的排列数为 P_{10}^3，其中以 0 为排头的排列数为 P_9^2，因此所求的三位数的个数是

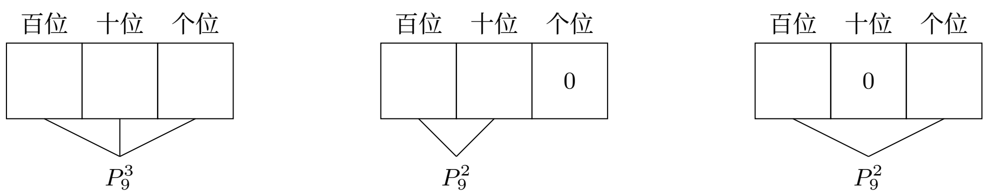
$$P_{10}^3 - P_9^2 = 10 \times 9 \times 8 - 9 \times 8 = 648.$$

解法三： 如图 2.6，符合条件的三位数可以分为三类:

每一位数字都不是 0 的三位数有 P_9^3 个;

个位数字是 0 的三位数有 P_9^2 个;

十位数字是 0 的三位数有 P_9^2 个.



(a) (b) (c)

图 2.6

根据加法原理，符合条件的三位数的个数是

$$P_9^3 + P_9^2 + P_9^2 = 648.$$

答：可以组成 648 个没有重复数字的三位数.

练习二

1. 写出:
   (1) 从四个元素 a, b, c, d 中任取两个元素的所有排列;
   (2) 从五个元素 a, b, c, d, e 中任取两个元素的所有排列.
2. 计算:
   (1) P_5^2; (2) P_{15}^4; (3) P_{100}^3; (4) P_7^7;
   (5) P_6^3; (6) $P_8^4 - 2P_8^2$; (7) $\dfrac{P_{12}^8}{P_{12}^7}$.
3. 填写下面的阶乘表，并计算出各阶乘数:

n	2	3	4	5	6	7	8
$n!$							

4. 求证:

   (1) $n! = \dfrac{(n+1)!}{n+1}$; (2) $P_8^8 - 8P_7^7 + 7P_6^6 = P_7^7$.

5. 求 n:

$$\frac{P_n^7 - P_n^5}{P_n^5} = 89$$

6. 6 名同学排成一排照相，有多少种排法?
7. 从 4 种蔬菜品种中选出 3 种，分别种植在不同土质的 3 块土地上进行试验，有多少种种植方法?
8. 用 $1, 2, 3, 4, 5$ 这五个数字，可以组成多少个没有重复数字的四位数? 其中有多少个四位数是 5 的倍数?

习题三

1. 计算:

   (1) P_{10}^4; (2) $5P_5^3 + 4P_4^2$; (3) $\dfrac{P_7^5 - P_6^6}{7! + 6!}$.

2. 求证:

   (1) $P_n^m = nP_{n-1}^{m-1}$; (2) $P_{n+1}^{n+1} - P_n^n = n^2 P_{n-1}^{n-1}$;

   (3) $\dfrac{(n+1)!}{k!} - \dfrac{n!}{(k-1)!} = \dfrac{(n-k+1)\cdot n!}{k!}$.

3. 求 n:

   (1) $P_{2n}^3 = 10P_n^3$; (2) $\dfrac{P_n^5 + P_n^4}{P_n^3} = 4$.

4. 解答:

   (1) 从多少个不同的元素中取出 2 个元素的排列数是 56?

   (2) 已知从 n 个不同的元素中取出 2 个元素的排列数等于从 $n-4$ 个不同的元素中取出 2 个元素的排列数的 7 倍，求 n.

5. 有 5 本不同的书，准备给 3 名同学，每人 1 本，共有多少种给法?
6. 一个火车站有 8 股岔道，停放 4 列不同的火车，有多少种不同的停放方法（假定

每股岔道只能停放一列火车)?

7. 一部纪录影片在 4 个单位轮映，每一单位放映 1 场，可有几种轮映次序?
8. 解答:
   (1) 由数字 $1,2,3,4,5,6$ 可以组成多少个没有重复数字的五位数?
   (2) 由数字 $0,1,2,3,4,5$ 可以组成多少个没有重复数字的五位数?
9. 解答:
   (1) 由数字 $1,2,3,4,5$ 可以组成多少个没有重复数字的自然数?
   (2) 由数字 $1,2,3,4,5$ 可以组成多少个没有重复数字，并且比 13 000 大的自然数?
10. 7 个人并排站成一排:
   (1) 如果甲必须站在正中间，有多少种排法?
   (2) 如果甲、乙两人必须站在两端，有多少种排法?

2.1.4 组合

我们看下面的问题:

在北京、上海、广州三个民航站之间的直达航线，有多少种不同的飞机票价?

这个问题与第 2.1.2 节中计算飞机票种数的问题不同，飞机票的种数与起点站、终点站有关，从北京到上海和从上海到北京，飞机票是不同的，也就是与顺序有关；但飞机票价只与起点站和终点站之间的距离有关，从北京到上海和从上海到北京，飞机票价是相同的，也就是与顺序无关.

因此，第 2.1.2 节中计算飞机票种数的问题，是从三个不同的元素中任取两个，然后按照一定的顺序排列，求一共有多少种不同的排列方法，这是排列问题；而本节这个问题，是从三个不同的元素中任取两个，不管怎样的顺序并成一组，求一共有多少个不同的组，这就是要研究的组合问题.

一般地说，从 n 个不同元素中，任取 $m(m \leqslant n)$ 个元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**.

上面问题中要确定有几种不同的飞机票价，就是要求从 3 个不同的元素中取出 2 个元素的所有组合的个数. 因为上海到广州和广州到上海的飞机票价是相同的，所以过两站间的飞机票价就是从北京、上海、广州这三个不同元素中取出上海、

广州这两个元素的一个组合.

如果两个组合中的元素完全相同，不管元素的顺序如何，都是相同的组合；只有当两个组合中的元素不完全相同时，才是不同的组合．例如，从 a,b,c 三个不同的元素中取出两个元素的所有组合有 3 个，它们分别是：

$$ab, \qquad ac, \qquad bc.$$

组合 ab 与组合 ba 是相同的组合，而组合 ab 与组合 ac 是不同的组合.

从排列和组合的定义可以知道，排列与元素的顺序有关，组合与顺序无关，例如 ab 与 ba 是两个不同的排列，但它们却是同一个组合.

在实际问题中，有时需要写出某个组合问题的所有组合．例如，已知 a,b,c,d 这 4 个元素，写出每次取出 2 个元素的所有组合，可以先列出下图（图 2.7）：

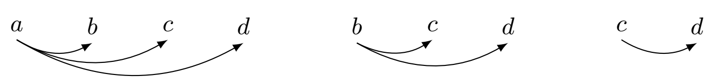


图 2.7

如图 2.7 所表示的，先把 a 从左到右依次与 b,c,d 组合，再把 b 依次与 c,d 组合，再把 c 与 d 组合，由此可以写出所有的组合：

$$ab, \qquad ac, \qquad ad, \qquad bc, \qquad bd, \qquad cd.$$

2.1.5　组合数公式

从 n 个不同元素中取出 m（$m \leqslant n$）个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的**组合数**，用符号 C_n^m 表示[1].

例如，从 8 个不同元素中取出 5 个元素的组合数表示为 C_8^5；从 7 个不同元素中取出 6 个元素的组合数表示为 C_7^6.

现在我们从研究组合数 C_n^m 与排列数 P_n^m 的关系入手，找出组合数 C_n^m 的计算公式.

例如，从 4 个不同元素 a,b,c,d 中取出 3 个元素的排列与组合的关系如下表所示：

---

① C 是英文 Combination（组合）的第一个字母.

组合		排列		
$\boxed{a\quad b\quad c}$	$\longrightarrow$	$a\ b\ c$ $a\ c\ b$	$b\ a\ c$ $b\ c\ a$	$c\ a\ b$ $c\ b\ a$
$\boxed{a\quad b\quad d}$	$\longrightarrow$	$a\ b\ d$ $a\ d\ b$	$b\ a\ d$ $b\ d\ a$	$d\ a\ b$ $d\ b\ a$
$\boxed{a\quad c\quad d}$	$\longrightarrow$	$a\ d\ d$ $a\ d\ c$	$c\ a\ d$ $c\ d\ a$	$d\ a\ c$ $d\ c\ a$
$\boxed{b\quad c\quad d}$	$\longrightarrow$	$b\ c\ d$ $b\ d\ c$	$c\ b\ d$ $c\ d\ b$	$d\ b\ c$ $d\ c\ b$

由表中可以看出，对于每一个组合都有 6 个不同的排列，因此，求从 4 个不同元素中取 3 个元素的排列数 P_4^3，可以分以下两步完成：

第一步，从 4 个不同元素中取出 3 个元素作组合，共有 C_4^3（$=4$）个；

第二步，对每一个组合中的 3 个不同元素作全排列，各有 P_3^3（$=6$）个.

根据乘法原理，得

$$P_4^3 = C_4^3 \cdot P_3^3,$$

因此，

$$C_4^3 = \frac{P_4^3}{P_3^3}.$$

一般地，求从 n 个不同元素中取出 m 个元素得排列数 P_n^m，可分以下两步完成：

第一步，先求出从这 n 个不同的元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m；

第二步，求每一个组合中 m 个元素的全排列数 P_m^m.

根据乘法原理，得到

$$P_n^m = C_n^m \cdot P_m^m,$$

因此

$$\boxed{C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}.}$$

这里 $n, m \in \mathbb{N}$，并且 $m \leqslant n$．这个公式叫做**组合数公式**.

因为

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!},$$

所以，上面的组合数公式还可以写成

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.}$$

这也是组合数的一个常用公式.

例 2.8 计算 C_{10}^4 及 C_7^3.

解：

$$C_{10}^4 = \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1} = 210;$$

$$C_7^3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 35.$$

例 2.9 求证 $C_n^m = \dfrac{m+1}{n-m}\cdot C_n^{m+1}$.

证明:

$$\because \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$\begin{aligned}
\frac{m+1}{n-m}\cdot C_n^{m+1} &= \frac{m+1}{n-m}\cdot\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}\\
&= \frac{m+1}{(m+1)!}\cdot\frac{n!}{(n-m)(n-m-1)!}\\
&= \frac{n!}{m!(n-m)!}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad C_n^m = \frac{m+1}{n-m}\cdot C_n^{m+1}.$$

2.1.6 组合数的两个性质

定理 1

$$\boxed{C_n^m = C_n^{n-m}.}$$

证明:

$$\because \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)![n-(n-m)]!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

$$\therefore \quad C_n^m = C_n^{n-m}.$$

这个性质也可以根据组合的定义得出．从 n 个不同元素中取出 m 个元素后，剩下 $n-m$ 个元素，也就是说，从 n 个不同元素中取出 m 个元素的每一个组合，都对应着从 n 个不同元素中取出 $n-m$ 个元素的唯一的一个组合；反过来也是一样．因此，从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数 C_n^m，等于从 n 个不同元素中取出 $n-m$ 个元素的组合数 C_n^{n-m}，即

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

当 $m>\frac{n}{2}$ 时，通常不直接计算 C_n^m，而是改为计算 C_n^{n-m}，这样比较简便．例如，C_9^7 可以这样计算：

$$C_9^7=C_9^{9-7}=C_9^2=\frac{9\times 8}{2!}=36.$$

为了使这个公式在 $n=m$ 时也成立，我们规定

$$C_n^0=1.$$

定理 2

$$\boxed{C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}.}$$

证明:

$$\begin{aligned}
C_n^m+C_n^{m-1}&=\frac{n!}{m!(n-m)!}+\frac{n!}{(m-1)![n-(m-1)]!}\\
&=\frac{n!(n-m+1)+n!m}{m!(n-m+1)!}\\
&=\frac{(n-m+1+m)n!}{m!(n+1-m)!}\\
&=\frac{(n+1)!}{m![(n+1)-m]!}\\
&=C_{n+1}^m,
\end{aligned}$$

$$\therefore C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}.$$

这个性质也可以根据组合的定义和加法原理得出．从 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 这 $n+1$ 个不同的元素中取出 m 个的组合数是 C_{n+1}^m，这些组合可以分成两类，一类含有 a_1，一类不含 a_1．含有 a_1 的组合是从 $a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$ 这 n 个元素中取出 $m-1$ 个元素与 a_1 组成的，共有 C_n^{m-1} 个；不含 a_1 的组合是从 $a_2,a_3,\cdots,a_{n+1}$ 这 n 个元素中取出 m 个元素组成的，共有 C_n^m 个．根据加法原理，得

$$C_{n+1}^m=C_n^{m-1}+C_n^m.$$

例 2.10 计算 C_{200}^{198} 及 $C_{99}^{3}+C_{99}^{2}$.

解: 由定理 1，得

$$C_{200}^{198}=C_{200}^{2}=\frac{200\times 199}{2\times 1}=19900;$$

由定理 2，得

$$C_{99}^{3}+C_{99}^{2}=C_{100}^{3}=\frac{100\times 99\times 98}{3\times 2\times 1}=161700.$$

例 2.11 平面内有 12 个点，任何 3 点不在同一直线上，以每 3 点为顶点画一个三角形，一共可画多少个三角形?

解: 以平面内 12 个点中得每 3 个点为顶点画三角形，可画的三角形的个数，就是从 12 个不同的元素中取出 3 个元素的组合数，即

$$C_{12}^{3}=\frac{12\times 11\times 10}{3\times 2\times 1}=220.$$

答：一共可画 220 个三角形.

例 2.12 有 13 个队参加篮球赛，比赛时先分成两组，第一组 7 个队，第二组 6 个队. 各组都进行单循环赛（即每队都要与本组其他各队比赛一场），然后由各组的前两名共 4 个队进行单循环赛决定冠军、亚军. 共需要比赛多少场?

解: 根据题意，第一组是 7 个队，单循环赛的比赛场数是 C_7^2，第二组 6 个队，单循环赛的比赛场数是 C_6^2；各组的前两名共 4 个队再进行单循环赛时，还要比赛 C_4^2 场. 所以共需要比赛的场数是

$$C_7^2+C_6^2+C_4^2=21+15+6=42.$$

答：这次篮球赛共需要比赛 42 场.

例 2.13 在产品检验时，常从产品中抽出一部分进行检查. 现在从 100 件产品中任意抽出 3 件:

(1)　一共有多少种不同的抽法?

(2)　如果 100 件产品中有 2 件次品，抽出的 3 件中恰好有 1 件是次品的抽法有多少种?

(3)　如果 100 件产品中有 2 件次品，抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法有多少种?

解:

(1) 所求的不同抽法的种数，就是从 100 件产品中取出 3 件的组合数:

$$C_{100}^{3}=\frac{100\times 99\times 98}{3\times 2\times 1}=161700$$

答：共有 161700 种抽法.

(2) 从 2 件次品种抽出 1 件次品的抽法有 C_2^1 种，从 98 件合格品中抽出 2 件合格品的抽法有 C_{98}^2 种，因此抽出的 3 件中恰好有 1 件是次品的抽法的种数是

$$C_2^1\cdot C_{98}^2=2\times 4753=9506.$$

答：3 件中恰好有 1 件是次品的抽法有 9506 种.

(3) 从 100 件产品种抽出 3 件，一共有 C_{100}^3 种抽法，在这些抽法里，除掉抽出的 3 件都是合格品的抽法 C_{98}^3 种，便得抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法的种数，即

$$C_{100}^3-C_{98}^3=161700-152096=9604.$$

本小题也可以这样来解:

从 100 件产品抽出的 3 件中至少有 1 件是次品的抽法，包括 1 件是次品的和 2 件是次品的，其中 1 件是次品的抽法有 $C_{98}^2\cdot C_2^1$ 种，2 件是次品的抽法有 $C_{98}^1\cdot C_2^2$ 种．因此，至少有 1 件是次品的抽法的种数为

$$C_{98}^2\cdot C_2^1+C_{98}^1\cdot C_2^2=9506+98=9604.$$

答：3 件中至少有 1 件是次品的抽法有 9604 种.

练习三

1. 北京、上海、天津、广东四个足球队举行单循环赛:
   (1) 列出所有各场比赛的双方;
   (2) 列出所有冠亚军的可能情况.
2. 已知平面内不在同一直线上的三点 A, B, C:
   (1) 写出连结任意两点的所有线段;
   (2) 写出连结任意两点的所有有向线段.
3. 写出:
   (1) 从五个元素 a, b, c, d, e 中任取两个元素的所有组合;
   (2) 从五个元素 a, b, c, d, e 中任取三个元素的所有组合.
4. 利用第 3 题第 (1) 小题的结果写出从五个元素 a, b, c, d, e 中任取两个元素的所有排列.
5. 计算:
   (1) C_6^2; (2) C_6^3;
   (3) C_{100}^{96}; (4) $C_7^3 - C_6^2$;
   (5) $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$; (6) $3C_8^3 - 2C_5^2$.
6. 从 $3, 5, 7, 11$ 这四个质数中任取两个相乘, 可以得到多少个不相等的积?
7. 某校举行排球单循环赛, 有 8 个队参加, 共需要举行多少场比赛?

习题四

1. 计算:
   (1) C_{15}^2; (2) C_{200}^{197};
   (3) $C_8^3 \div C_8^4$; (4) $C_{n+1}^n \cdot C_n^{n-2}$.
2. 求证:
   (1) $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$;
   (2) $C_n^{m+1} + C_n^{m-1} + 2C_n^m = C_{n+2}^{m+1}$.
3. 圆上有 10 个点:
   (1) 过每 2 点可画一条弦, 一共可画多少条弦?
   (2) 过每 3 点可画一个圆内接三角形, 一共可画多少个圆内接三角形?
4. 解答:
   (1) 凸五边形有多少条对角线?

(2)　凸 n 边形有多少条对角线?

5. 壹分、贰分、伍分硬币各一枚，一共可以组成多少种币值?

6. 从 9 个不相同的质数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9$ 中任取 4 个相乘，可以得到多少个不同的积?

7. 解答:

(1)　空间有 8 个点，没有 4 个点在同一平面内，过每 3 个点作一个平面，一共可以作多少个平面?

(2)　空间有 10 个点，其中任何 4 点不共面，以每 4 个点为顶点作一个四面体，一共可以作多少个四面体?

8. 某校高中一年级有 6 个班，二年级有 8 个班，三年级有 4 个班. 各年级分别举行班与班的排球单循环赛，一共需要比赛多少场?

9. 某班有 52 名学生，其中正副班长各 1 名，现选派 5 名学生参加某种课外活动:

(1)　如果班长和副班长必须在内，有多少种选派法?

(2)　如果班长和副班长必须有一人而且只有一人在内，有多少种选派法?

(3)　如果班长和副班长都不在内，有多少种选派法?

(4)　如果班长和副班长至少有一人在内，有多少种选派法?

10. 从 6 件不同的东西中任取 1 件、2 件、3 件、4 件、5 件、6 件，一共有多少种取法?

11. 生产某种产品 200 件，其中由 2 件是次品，现在抽取 5 件进行检查:

(1)　“其中恰有两件次品”的抽法有多少种?

(2)　“其中恰有 1 件次品”的抽法有多少种?

(3)　“其中没有次品”的抽法有多少种?

(4)　“其中至少有 1 件次品”的抽法有多少种?

12. 从 $1, 3, 5, 7, 9$ 中任取三个数字，从 $2, 4, 6, 8$ 中任取两个数字，组成没有重复数字的五位数，一共可以组成多少个数?

第二节　二项式定理

2.2.1　二项式定理

我们已经知道，

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

现在研究 $(a+b)^n$ 的展开式，这里 $n \in \mathbb{N}$.

首先，研究 $(a+b)^4$ 的展开式的各项，即研究

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

的展开式的各项.

等号右边的积的展开式的每一项，是从四个括号种每个里任取一个字母的乘积，因而各项都是 4 次式，即展开式应有下面形式的各项:

$$a^4, \quad a^3b, \quad a^2b^2, \quad ab^3, \quad b^4.$$

运用组合的知识，就可以得出展开式各项的系数规律:

在上面四个括号中，都不取 b，共有 1 种，即 C_4^0 种，所以 a^4 的系数是 C_4^0;

在四个括号中，恰有 1 个取 b，共有 C_4^1 种，所以 a^3b 的系数是 C_4^1;

在四个括号中，恰有 2 个取 b，共有 C_4^2 种，所以 a^2b^2 的系数是 C_4^2;

在四个括号中，恰有 3 个取 b，共有 C_4^3 种，所以 ab^3 的系数是 C_4^3;

在四个括号中，4 个都取 b，共有 C_4^4 种，所以 b^4 的系数是 C_4^4.

因此，

$$(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4.$$

一般地，有以下公式:

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b^1 + \cdots + C_n^ra^{n-r}b^r + \cdots + C_n^nb^n,\ (n \in \mathbb{N}).}$$

下面，我们用数学归纳法来证明这一公式. **证明:**

(1) 当 $n=1$ 时，等式的左边是

$$(a+b)^1=a+b;$$

等式的右边是

$$C_1^0a+C_1^1b=a+b.$$

于是，当 $n=1$ 时等式成立.

(2) 假设 $n=k$ 时等式成立，即

$$(a+b)^k=C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b^1+\cdots+C_k^ra^{k-r}b^r+\cdots+C_k^kb^k.$$

现在证明当 $n=k+1$ 时等式也成立.

由于

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{k+1}\\
=&(a+b)^k(a+b)\\
=&(C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b^1+\cdots+C_k^ra^{k-r}b^r+\cdots+C_k^kb^k)(a+b)\\
=&C_k^0a^{k+1}+C_k^1a^kb^1+\cdots+C_k^{r+1}a^{k-r}b^{r+1}+\cdots+C_k^kab^k\\
&\qquad+C_k^0a^kb^1+\cdots+C_k^ra^{k-r}b^{r+1}+\cdots+C_k^{k-1}ab^k+C_k^kb^{k+1}\\
=&C_k^0a^{k+1}+(C_k^1+C_k^0)a^kb^1+\cdots+(C_k^{r+1}+C_k^r)a^{k-r}b^{r+1}+\cdots\\
&\qquad+(C_k^k+C_k^{k-1})ab^k+C_k^kb^{k+1},
\end{aligned}$$

利用

$$C_k^0=C_{k+1}^0,\ C_k^1+C_k^0=C_{k+1}^1,\ \cdots,\ C_k^{r+1}+C_k^r=C_{k+1}^{r+1},\ \cdots,\\
C_k^k+C_k^{k-1}=C_{k+1}^k,\ C_k^k=C_{k+1}^{k+1},$$

则得到

$$(a+b)^{k+1}=C_{k+1}^0a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb^1+\cdots+C_{k+1}^{r+1}a^{k-r}b^{r+1}+\cdots\\
+C_{k+1}^ka^1b^k+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}.$$

这就是说，如果 $n=k$ 时等式成立，那么 $n=k+1$ 时等式也成立.

根据 (1) 和 (2)，可知对于任意自然数 n，公式都成立.

这个公式所表示的定理叫做**二项式定理**，右边的多项式叫做 $(a+b)^n$ 的**二项展开式**，其中的系数 $C_n^r\,(r=0,1,\cdots,n)$ 叫做**二项式系数**. 式中的 $C_n^r a^{n-r} b^r$ 叫做二项式展开式的**通项**，用 T_{r+1} 表示，即通项为展开式的第 $r+1$ 项:

$$\boxed{T_{r+1}=C_n^r a^{n-r} b^r.}$$

在二项式定理中，如果设 $a=1$，$b=x$，则得到公式:

$$(1+x)^n=1+C_n^1 x+C_n^2 x^2+\cdots+C_n^r x^r+\cdots+x^n.$$

遇到 n 是较小的正整数时，二项式系数也可以直接用下表计算:

$$\begin{array}{l}
(a+b)^1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\quad 1\\
(a+b)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 1\quad 2\quad 1\\
(a+b)^3 \cdots\cdots\cdots\cdots 1\quad 3\quad 3\quad 1\\
(a+b)^4 \cdots\cdots\cdots 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
(a+b)^5 \cdots\cdots 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
(a+b)^6 \cdots 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1
\end{array}$$

表中每行两端都是 1，而且除 1 以外的每一个数都等于它肩上两个数的和.

类似这样的表，早在我国宋朝数学家杨辉 1261 年所著的《详解九章算法》一书里就已出现，这本书里记载着下面的表（图 2.8），我们称它为**杨辉三角**[①].

例 2.14　展开 $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4$.

解: $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^4=1+4\left(\dfrac{1}{x}\right)+6\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+4\left(\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(\dfrac{1}{x}\right)^4=1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{x^2}+\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}.$

例 2.15　展开 $\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$.

---

① 在欧洲，人们认为这个表是法国数学家帕斯卡（Blaise Pascal，1623–1662 年）首先发现的，他们把这个表叫做帕斯卡三角.

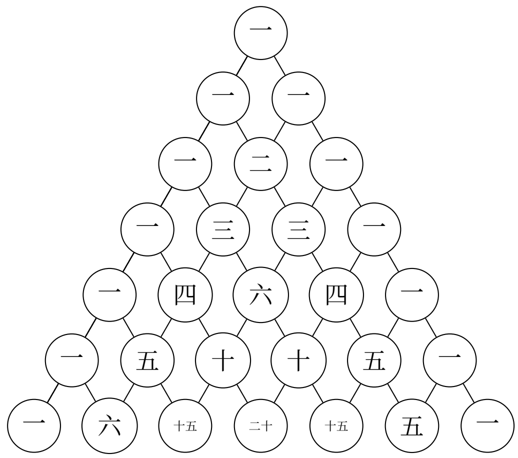


图 2.8

解：

$$
\begin{aligned}
\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 &= \left(\frac{2x-1}{\sqrt{x}}\right)^6 = \frac{1}{x^3}(2x-1)^6 \\
&= \frac{1}{x^3}\Big[(2x)^6 - C_6^1(2x)^5 + C_6^2(2x)^4 - C_6^3(2x)^3 \\
&\qquad + C_6^4(2x)^2 - C_6^5(2x) + C_6^6\Big] \\
&= \frac{1}{x^3}(64x^6 - 6\cdot 32x^5 + 15\cdot 16x^4 - 20\cdot 8x^3 + 15\cdot 4x^2 - 6\cdot 2x + 1) \\
&= 64x^3 - 192x^2 + 240x - 160 + \frac{60}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{1}{x^3}.
\end{aligned}
$$

例 2.16 求 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3$ 的展开式中 x^3 的系数.

解：展开式的通项是

$$C_9^r x^{0-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r = (-1)^r C_9^r x^{0-2r}.$$

根据题意，得

$$
\begin{aligned}
9-2r &= 3, \\
r &= 3.
\end{aligned}
$$

因此，x^3 的系数是

$$(-1)^3 C_9^3 = -84.$$

展开式中第 $r+1$ 项的二项式系数 C_n^r 与第 $r+1$ 项的系数不同，例如在 $(1+2x)^7$ 的展开式中，第四项为 $T_4 = C_7^3 \cdot 1^{7-3} \cdot (2x)^3$，其二项式系数是 $C_7^3 = 35$，而第四项（即含 x^3 的项）的系数是 $C_7^3 \cdot 2^3 = 280$.

例 2.17 计算 $(0.997)^3$ 的近似值（精确到 0.001）.

解： $(0.997)^3 = (1-0.003)^3 = 1 - 3\times 0.003 + 3\times(0.003)^2 - \cdots$. 根据题中精确度的要求，从第三项起以后的各项都可以删去，所以

$$(0.997)^3 \approx 1 - 3\times 0.003 = 0.991.$$

练习四

1. 写出 $(p+q)^7$ 的展开式.
2. 求 $(2a+3b)^6$ 的展开式的第 3 项.
3. 求 $(3b+2a)^6$ 的展开式的第 3 项.
4. 写出 $\left(\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)$ 的展开式的第 $r+1$ 项.
5. 求 $(x^3+2x)^7$ 的展开式的第 4 项的二项式系数，并求第 4 项的系数.
6. 计算 $(1.002)^6$ 的近似值（精确到 0.001）.

2.2.2 二项式系数的性质

我们已经知道，$(a+b)^n$ 的展开式的二项式系数是

$$C_n^0,\quad C_n^1,\quad C_n^2,\quad \cdots,\quad C_n^{n-1},\quad C_n^n$$

二项式系数有下列性质:

1. 在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等.

由已知公式

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

分别取 $m=0,1,\dots,k,\dots$，从而得

$$C_n^0=C_n^n,\quad C_n^1=C_n^{n-1},,\quad C_n^2=C_n^{n-2},\quad \dots,\quad C_n^k=C_n^{n-k},\dots.$$

2. 如果二项式的幂指数是偶数，中间一项的二项式系数最大；如果二项式的幂指数是奇数，中间两项的二项式系数相等并且最大.

由于展开式各项的二项式系数顺次是

$$C_n^0=1,\quad C_n^1=n,\quad C_n^2=\frac{n(n-1)}{1\cdot 2},\quad \dots,$$
$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k},\quad \dots,\quad C_n^n=1.$$

其中，后一个二项式系数的分子是前一个二项式系数的分子乘以逐次减小 1 的数（如 $n,n-1,n-2,\dots$），分母是乘以逐次增大的数（如 $1,2,3,\dots$），因而，各项的二项式系数从开始起是逐渐增大，又因为与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等，所以二项式系数增大到某一项时就逐渐减小，且二项式系数最大的项必在中间.

当 n 是偶数时，$n+1$ 是奇数，展开式共有 $n+1$ 项，所以展开式有中间一项，并且这一项的二项式系数最大.

当 n 是奇数时，$n+1$ 是偶数，展开式共有 $n+1$ 项，所以有中间两项，这两项的二项式系数相等并且最大.

例 2.18 证明

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n.$$

证明： 运用 $(1+x)^n$ 的展开式

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^kx^k+\cdots+C_n^nx^n,$$

设 $x=1$，则

$$2^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n$$

例 2.18 说明，$(a+b)^n$ 的展开式的所有二项式系数的和等于 2^n.

例 2.19 证明在 $(a+b)^n$ 的展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

证明: 在展开式

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

中，令 $a=1$，$b=-1$，则得

$$(1-1)^n = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \cdots + (-1)^n C_n^n,$$

就是

$$0 = (C_n^0 + C_n^2 + \cdots) - (C_n^1 + C_n^3 + \cdots)$$
$$\therefore \quad C_n^0 + C_n^2 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + \cdots.$$

即 $(a+b)^n$ 的展开式中，奇数项的二项式系数的和等于偶数项的二项式系数的和.

练习五

1. 求 $(1-x)^{13}$ 的展开式中的含 x 的奇次项系数的和.
2. 证明 $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots + C_n^n = 2^{n-1}$，($n$ 是偶数).
3. 求 $C_{11}^1 + C_{11}^3 + \cdots + C_{11}^{11}$.

习题五

1. 用杨辉三角展开 $(a+b)^5$.
2. 用二项式定理展开:

   (1) $(a+\sqrt[3]{b})^9$;　　(2) $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^7$.

3. 化简:

   (1) $(1+\sqrt{x})^5 + (1-\sqrt{x})^5$;　　(2) $(2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{-\frac{1}{2}})^4 - (2x^{\frac{1}{2}} - 3x^{-\frac{1}{2}})^4$.

4. 解答:

   (1) 求 $(1-2x)^{15}$ 的展开式中前四项;

(2) 求 $(2a^3-3b^2)^{10}$ 的展开式中第八项;

(3) 求 $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{3}+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ 的展开式中的中间一项;

(4) 求 $(x\sqrt{y}-y\sqrt{x})^{15}$ 的展开式中的中间两项.

5. 求下列各式的二项展开式中指定各项的系数:

(1) $\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{10}$ 的含 $\dfrac{1}{x^5}$ 的项;　　(2) $\left(2x^3-\dfrac{1}{2x^2}\right)^{10}$ 的常数项.

6. 求下列各数的近似值（精确到 0.001）:

(1) $(1.003)^5$;　　(2) $(0.9998)^8$.

7. 用二项式定理证明:

(1) $(n+1)^n-1$ 能被 n^2 整除;　　(2) $99^{10}-1$ 能被 1000 整除.

8. 证明:

(1) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ 的展开式中常数项是

$$(-2)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$$

(2) $(1+x)^{2n}$ 的展开式的中间一项是

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}(2x)^n$$

9. 已知 $(1+x)^n$ 的展开式中第四项与第八项的二项式系数相等，求这两项的二项式系数.

10. 求证:

$$2^n-C_n^1\cdot 2^{n-1}+C_n^2\cdot 2^{n-2}+\cdots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}\cdot 2+(-1)^n=1.$$

小结

一、　本章主要内容是排列、组合、二项式定理.

二、　加法原理与乘法原理是两个基本原理，它们不仅是推导排列数公式、组合数公式的基础，而且还常常需要直接运用它们去解某些问题.

这两个原理的区别在于一个与分类有关，一个与分步有关. 如果完成一件事有 n 类办法，这 n 类办法彼此之间是相互独立的，不论哪一类办法中的哪一种方法

都能单独完成这件事，求完成这件事的方法种数，就用加法原理；如果完成一件事需分成 n 个步骤，各步骤都不可缺少，需要依次完成所有的步骤，才能完成这件事，而完成每一个步骤各有若干方法，求完成这件事的方法种数就用乘法原理.

三、 排列与组合是研究从一些不同的元素中，任取几个元素进行排列或并组有多少种方法的问题. 本章所研究的主要是不同元素不允许重复的排列或组合. 排列与组合的区别要看问题是否与顺序有关. 与顺序有关就属于排列，与顺序无关就属于组合.

在求应用题中的排列数或组合数时，注意防止重复与遗漏.

四、 排列与组合的主要公式有:

1. 排列数公式

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1), \quad (m \leqslant n);$$
$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}, \quad (m \leqslant n);$$
$$P_n^n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1;$$

2. 组合数公式

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m}, \quad (m \leqslant n);$$

3. 组合数性质

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad (m \leqslant n);$$
$$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}, \quad (m \leqslant n).$$

五、 二项式定理通过公式的形式，表示出二项式的幂展开在项数、系数、各项中的指数等方面的联系.

二项式定理为

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n,$$

其中 C_n^r 叫做第 $r+1$ 项的二项式系数，展开式的第 $r+1$ 项为

$$T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r.$$

二项式系数的主要性质有:

1. 在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等.

2. 如果二项式的幂指数是偶数，中间一项的二项式系数最大；如果二项式的幂指数是奇数，中间两项的二项式系数相等并且最大.

复习参考题二

A 组

1. 求证：

   (1) $\dfrac{(2n)!}{2^n \cdot n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)$；

   (2) $1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$，（提示：考虑等式 $n \cdot n! = (n+1)! - n!$）.

2. 解答：

   (1) 已知 $\dfrac{1}{C_5^m} - \dfrac{1}{C_6^m} = \dfrac{7}{10 \cdot C_7^m}$，求 C_8^m；

   (2) 已知 $\dfrac{C_n^{m-1}}{2} = \dfrac{C_n^m}{3} = \dfrac{C_n^{m+1}}{4}$，求 n 与 m.

3. 乘积 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ 一共有多少项?

4. 6 名同学站成一排，其中某一名不站在排头，也不站在排尾，共有多少种站法?

5. 由数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 可以组成多少个没有重复数字的自然数?

6. 由数字 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 可以组成多少个没有重复数字，并且比 $500\,000$ 大的自然数?

7. 一个集合由 8 个不同的元素组成，这个集合中含 3 个元素的子集有几个?

8. 一个集合由 5 个不同的元素组成，其中含 1 个、2 个、3 个、4 个元素的子集共有几个?

9. 解答：

(1) 平面内有 n 条直线，其中没有两条互相平行，也没有三条相交于一点，一共有多少个交点?

(2) 空间有 n 个平面，其中没有两个互相平行，也没有三个相交于一直线，一共有多少条交线?

10. 100 件产品中有 97 件合格品，3 件次品，从中任意抽取 5 件进行检查.

(1) 抽出的 5 件都是合格品的抽法有多少种?

(2) 抽出的 5 件恰好有 2 件是次品的抽法有多少种?

(3) 抽出的 5 件至少有 2 件是次品的抽法有多少种?

11. 书架上有 4 本不同的数学书，5 本不同的物理书，3 本不同的化学书，全部竖起排成一排，如果不使同类的书分开，一共有多少种排法?

12. 当 a 的绝对值与 1 相比很小时, $(1+a)^n$ 的近似值可以用公式 $(1+a)^n \approx 1+na$ 来计算. 用这个近似公式计算:

(1) $(1.002)^5$;　　(2) $(0.997)^6$;

(3) $(1.005)^{10}$;　　(4) $(0.9995)^9$;

13. 分别求当 $n=1,2,3,4$ 时, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的值.

14. 解答:

(1) 求 $(a+\sqrt{b})^{12}$ 展开式中第 9 项;

(2) 求 $(1-2x)^5(1+3x)^4$ 展开式中按 x 的升幂排列的前三项;

(3) 求 $\left(9x-\dfrac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ 展开式的常数项;

(4) 求 n：已知 $(1+\sqrt{x})^n$ 的展开式中第 9 项、第 10 项、第 11 项的二项式系数成等差数列;

(5) 求 $(1+x+x^2)(1-x)^{10}$ 展开式中 x^4 的系数.

15. 解答:

(1) 用二项式定理证明 $55^{55}+9$ 能被 8 整除;

(2) 用二项式定理求 89^{10} 除以 88 的余数.

16. 证明 $(1+x)^{2n}$ 展开式中 x^n 的系数等于 $(1+x)^{2n-1}$ 展开式中 x^n 的系数的

2 倍.

17. 已知 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式的二项式系数之和比 $(a+b)^{2n}$ 展开式的二项式系数之和小 240，求:

(1) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式的第 3 项;

(2) $(a+b)^{2n}$ 展开式的中间项.

B 组

18. 求证:

(1) $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot n!=\dfrac{(n!)^{n-1}}{3\cdot 4^2\cdot 5^3\cdot\cdots\cdot n^{n-2}}$;

(2) $C_{n-1}^m+C_{n-2}^m+C_{n-3}^m+\cdots+C_{m+1}^m+C_m^m=C_n^{m+1}$.

19. 解答:

(1) 由数字 $1,2,3,4,5$ 可以组成多少个没有重复数字并且能被 5 整除的自然数?

(2) 由数字 $1,2,3,4,5$ 可以组成多少个没有重复数字，并且比 30 000 小的自然数?

20. 用数字 $0,1,2,3,4,5$ 组成没有重复数字的数:

(1) 能够组成多少个六位奇数?

(2) 能够组成多少个大于 201 345 的自然数?

21. 8 个不同的元素排成一行:

(1) 其中某 2 个元素必须排在一起，有多少种排法?

(2) 其中某 2 个元素不能排在一起，有多少种排法?

(3) 其中某 4 个元素要排在一起，另外 4 个元素也要排在一起，有多少种排法?

22. 解答:

(1) 平面内有两组平行线，一组有 m 条，另一组有 n 条. 这两组平行线相交，可以构成多少个平行四边形?

(2) 空间有三组平行平面，第一组有 m 个，第二组有 n 个，第三组有 l 个.

不同两组的平面都相交，且交线不都平行，可构成多少个平行六面体?

23. 解答:

(1) 8 个不同的元素排成前后两排，每排 4 个元素，有多少种排法?

(2) 8 个不同的元素排成前后两排，每排 4 个元素，其中某 2 个元素要排在前排，某 1 个元素要排在后排，有多少种排法?

24. 解答:

(1) 在 $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)^n$ 的展开式中，第 3 项的二项式系数比第 2 项的二项式系数大 44，求展开式中不含字母 x 的项.

(2) 在 $(1+x)^3+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^{n+2}$ 的展开式中，求含 x^2 项的系数.

25. 证明:

(1) $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=\dfrac{(2n)!}{n!\cdot n!}$,

（提示：利用 $(1+x)^n\cdot(1+x)^n=(1+x)^{2n}$，并且比较等式两边的展开式中含 x^n 项的二项式系数）;

(2) $C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=n\cdot 2^{n-1}$.

第三章　概率

3.0.1　随机事件的概率

在实际生活中，我们会碰到许多事件．有些事件，例如“在标准大气压下，水的温度达到 100 °C 时沸腾”，“抛一石块，下落”等，在一定的条件下是必然要发生的，这种在一定的条件下必然要发生的事件，叫做**必然事件**．有些事件，例如“在标准大气压下且温度低于 0 °C时，冰融化”，“在常温下，焊锡熔化”等，在一定的条件下是不可能发生的，这种在一定的条件下不可能发生的事件，叫做**不可能事件**．

此外，还有一些事件，它们在一定的条件下可能发生也可能不发生，例如：某人射击一次，可能中靶，也可能不中靶；掷一枚硬币，可能出现正面，也可能出现反面；检验某件产品，可能合格，也可能不合格；某地五月一日，可能下雨，也可能不下雨等等．这就是说，“某人射击一次，中靶”，“掷一枚硬币，出现正面”，“检验某件产品，合格”，“某地五月一日，下雨”等事件在一定的条件下是否发生，不能事先确定．这种在一定的条件下可能发生也可能不发生的事件，叫做**随机事件**．

随机事件在一次试验[①]中是否发生虽然不能事先确定，但是在大量重复试验的情况下，它的发生呈现出一定的规律性．

例如，对生产的一批乒乓球进行抽查，结果如表 3.1 所示：

我们看到，当抽查的球数很多时，抽到优等品的频率 $\dfrac{m}{n}$（优等品的个数 m 与抽取的球数 n 的比）接近于常数 0.95，在它附近摆动．

又如，在相同条件下对某种油菜籽进行发芽试验，结果如表 3.2 所示：

① 一次试验就是将事件的条件实现一次．例如对“掷一枚硬币，出现正面”这个事件来说，作一次试验就是将硬币掷一次．

表 3.1　一批乒乓球抽查结果

抽取球数 n	50	100	200	500	1000	2000
优等品数 m	45	92	194	470	954	1902
优等品频率 $\dfrac{m}{n}$	0.9	0.92	0.97	0.94	0.954	0.951

表 3.2　某种油菜籽发芽试验结果

每批试验粒数 n	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽的粒数 m	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽的频率 $\dfrac{m}{n}$	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

我们看到，当试验的油菜籽的粒数很多时，油菜籽发芽的频率接近常数 0.9，在它附近摆动.

一般地，**在大量重复进行同一试验时，事件 A 发生的频率 $\dfrac{m}{n}$ 总是接近于某个常数，在它附近摆动**，这时就把这个常数叫做**事件 A 的概率**，记作 $P(A)$①. 根据这个定义，求一个事件的概率的基本方法，是通过大量的重复试验，用这个事件发生的频率近似地作为它的概率. 概率从数量上反映了一个事件发生的可能性的大小. 在上面的例子中，抽查乒乓球得到优等品的概率是 0.95，就是说，从一批乒乓球中抽取一个，取到优等品的可能性是 95%；油菜籽发芽的概率是 0.9，就是说，从进行发芽实验的一批油菜籽中任选一粒，它发芽的可能性是 90%.

由于任何事件 A 发生的次数 m 不会是负数，也不可能大于试验次数 n，事件 A 的概率满足

$$\boxed{0 \leqslant P(A) \leqslant 1.}$$

很明显，必然事件的概率是 1，不可能事件的概率是 0.

① P 是英文 Probability（概率）的第一个字母.

练习一

1. 指出下列事件是必然事件，不可能事件，还是随机事件.
   (1) 如果 a, b 都是实数，那么 $a+b=b+a$；
   (2) 从分别标有号数 $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ 的十张号签中任取一张，得到 4 号签；
   (3) 没有水分，种籽发芽；
   (4) 某电话总机在一分钟内接到至少 15 次呼唤.
2. 某射手在同一条件下进行设计，结果如下表所示：

射击次数 n	10	20	50	100	200	500
击中靶心次数 m	8	19	44	92	178	455
击中靶心频率 $\frac{m}{n}$						

   (1) 计算表中击中靶心的各个概率；
   (2) 这个射手射击一次，击中靶心的概率约是多少？

3.0.2 等可能性事件的概率

随机事件的概率，一般可以通过大量重复试验求得其近似值，但对于某些随机事件，也可以不通过重复试验，而只通过对一次试验中可能出现的结果的分析来计算其概率.

例如，掷一枚均匀的硬币，它要么出现正面，要么出现反面，出现这两种结果的可能性是相等的. 因此，可以认为出现正面的概率是 $\frac{1}{2}$，出现反面的概率也是 $\frac{1}{2}$. 这和大量重复试验的结果是一致的. 有人做过掷一枚均匀硬币的大量重复试验，结果硬币出现正面的频率总是接近于 $\frac{1}{2}$，在它附近摆动. 其中当掷币 24 000 次时，硬币出现正面 12 012 次，其频率为 0.5005.

又如，有 10 个型号相同的杯子，其中一等品 6 个，二等品 3 个，三等品 1 个. 从中任取 1 个，取到各个杯子的可能性是相等的. 由于是从 10 个杯子中任取 1 个，共有 10 种等可能的结果. 又由于其中有 6 个一等品，从这 10 个杯子中取到一等品的结果有 6 种. 因此，可以认为取到一等品的概率是 $\dfrac{6}{10}$. 同理，可以认为取到

二等品的概率是 $\frac{3}{10}$，取到三等品的概率是 $\frac{1}{10}$. 这和大量重复试验的结果也是一致的.

一般地，如果一次试验种共有 n 种等可能出现的结果，其中事件 A 包含的结果有 m 种，那么事件 A 的概率 $P(A)$ 是 $\frac{m}{n}$.

例 3.1 先后抛掷两枚均匀的硬币，计算：

(1) 两枚都出现正面的概率；

(2) 一枚出现正面、一枚出现反面的概率.

分析： 抛掷一枚硬币，可能出现正面或反面这两种结果. 因而先后抛掷两枚硬币可能出现的结果数，可根据乘法原理得出. 由于硬币是均匀的，所有结果出现的可能性都相等. 又在所有等可能的结果中，两枚都出现正面这一事件包含的结果数是可以知道的，从而可以求出这个事件的概率. 同样，一枚出现正面、一枚出现反面这一事件包含的结果数是可以知道的，从而也可求出这个事件的概率.

解： 由乘法原理，先后抛掷两枚硬币可能出现的结果共有 $2 \times 2 = 4$ 种（图 3.1），且这 4 种结果出现的可能性都相等.

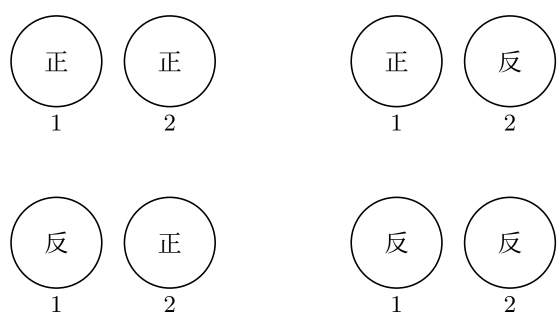


图 3.1

(1) 记“抛掷两枚硬币，都出现正面”为事件 A，那么在上面 4 种结果中，事件 A 包含的结果有 1 种，因此事件 A 的概率

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

答：两枚都出现正面的概率是 $\frac{1}{4}$.

(2) 记“抛掷两枚硬币，一枚出现正面、一枚出现反面”为事件 B，那么事件 B 包含的结果有 2 种，因此事件 B 的概率

$$P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

答：一枚出现正面、一枚出现反面的概率是 $\frac{1}{2}$.

例 3.2 在 100 件产品种，有 95 件合格品，5 件次品．从中任取 2 件，计算：

(1) 2 件都是合格品的概率；

(2) 2 件都是次品的概率；

(3) 1 件是合格品，1 件是次品的概率.

分析： 从 100 件产品中任取 2 件可能出现的结果数，就是从 100 个元素中任取 2 个的组合数．由于是任意抽取，这些结果出现的可能性都相等．又由于在所有产品中有 95 件合格品、5 件次品，取到 2 件合格品的结果数，就是从 95 个元素中任取 2 个的组合数；取到 2 件次品的结果数，就是从 5 个元素中任取 2 个的组合数；取到 1 件合格品、1 件次品的结果数，就是从 95 个元素中任取 1 个元素的组合数与从 5 个元素中任取 1 个元素的组合数的积，从而可以分别达到所求各个事件的概率.

解：

(1) 从 100 件产品中任取 2 件，可能出现的结果共有 C_{100}^2 种，且这些结果出现的可能性都相等．又在 C_{100}^2 种结果中，取到 2 件合格品的结果有 C_{95}^2 种．记“任取 2 件，都是合格品”为事件 A，那么事件 A 的概率.

$$P(A)=\frac{C_{95}^2}{C_{100}^2}=\frac{893}{990}.$$

答：2 件都是合格品的概率为 $\frac{893}{990}$.

(2) 记“任取 2 件，都是次品”为事件 B．由于在 C_{100}^2 种结果中，取到 2 件次品的结果有 C_5^2 种，事件 B 的概率

$$P(B)=\frac{C_5^2}{C_{100}^2}=\frac{1}{495}.$$

答：2 件都是次品的概率为 $\dfrac{1}{495}$.

(3) 记“任取 2 件，1 件是合格品、1 件是次品”为事件 C. 由于在 C_{100}^2 种结果中，取到 1 件合格品，1 件次品的结果有 $C_{95}^1 \cdot C_5^1$ 种，事件 C 的概率

$$P(C) = \frac{C_{95}^1 \cdot C_5^1}{C_{100}^2} = \frac{19}{198}.$$

答：1 件是合格品、1 件是次品的概率为 $\dfrac{19}{198}$.

例 3.3 某号码锁有 6 个拨盘，每个拨盘上有从 0 到 9 共十个数字. 当 6 个拨盘上的数字组成某一个六位数字号码（开锁号码）时，锁才能打开. 如果不知道开锁号码，试开一次就把锁打开的概率是多少?

分析：号码锁每个拨盘上的数字，从 0 到 9 共有十个. 6 个拨盘上的各一个数字排在一起，就是一个六位数字号码. 根据乘法原理，这种号码共有 10^6 个. 由于不知道开锁号码，试开时采用每一个号码的可能性都相等. 又开锁号码只有一个，从而可以求出试开一次就把锁打开的概率.

解：号码锁每个拨盘上的数字有 10 种可能的取法，根据乘法原理，6 个拨盘上的数字组成的六位数字号码共有 10^6 个. 又试开时采用每一个号码的可能性都相等，且开锁号码只有一个，所以试开一次就把锁打开的概率

$$P = \frac{1}{10^6}.$$

答：试开一次就把锁打开的概率是 $\dfrac{1}{10^6}$.

练习二

1. （口答）在 40 根纤维中，有 12 根的长度超过 30 mm. 从中任取 1 根，取到长度超过 30 mm 的纤维的概率是多少?
2. 在 10 支铅笔中，有 8 支正品和 2 支副品. 从中任取 2 支，恰好都取到正品的概率是多少?
3. 对于第 78 页例 3.1，有人说，先后抛掷两枚硬币，共出现“两枚都是正面”，“两枚都是反面”，“一枚正面、一枚反面”等 3 种结果，因此，“两枚都出现正面”这

一事件的概率是 $\frac{1}{3}$. 这种说法错在哪里?

习题六

1. 从生产的一批螺钉中抽取 1000 个进行检查, 结果有 4 个是次品. 那么从这批螺钉中任取一个螺钉, 取到次品的概率约是多少?
2. 在第 1, 3, 5, 8 路公共汽车都要停靠的一个站 (假定这个站只能停靠一辆汽车), 有一位乘客等候第 1 路或第 3 路汽车. 假定当时各路汽车首先到站的可能性相等, 求首先到站正好是这位乘客索要乘的汽车的概率.
3. 有 100 张已编号的卡片 (从 1 号到 100 号), 从中任取 1 张, 计算:
   (1) 卡片号是奇数的概率;
   (2) 卡片号是 7 的倍数的概率.
4. 一个均匀材料做的正方体玩具, 各个面上分别标以数 1, 2, 3, 4, 5, 6.
   (1) 将这个玩具抛掷 1 次, 朝上的一面出现奇数的概率是多少?
   (2) 将这个玩具抛掷 2 次, 朝上的一面的数之和为 7 的概率是多少?
5. 将一枚硬币连掷 3 次, 出现 “2 个正面、1 个反面” 和 “1 个正面、2 个反面” 的概率各是多少?
6. 一个口袋内装有大小相同的 7 个白球和 3 个黑球, 从中任意摸出 2 个, 得到 1 个白球和 1 个黑球的概率是多少?
7. 在 7 张数的卡片中, 有 4 张正数卡片和 3 张负数卡片. 从中任取 2 张作乘法联系, 其积为正数的概率是多少?
8. 某种产品 90 件, 其中甲等品 40 件, 乙等品 30 件, 丙等品 20 件. 在运送这些产品的路上损坏了 3 件. 如果每件产品被损坏的可能性相同, 计算着三等产品中恰好各损坏 1 件的概率.
9. 在 80 件产品中, 有 50 件一等品, 20 件二等品, 10 件三等品. 从中任取 3 件, 计算:
   (1) 3 件都是一等品的概率;
   (2) 2 件是一等品、1 件是二等品的概率;
   (3) 一等品、二等品、三等品各有 1 件的概率.
10. 一套书共有上、中、下三册, 将它们任意列到书架的同一层上去, 各册自左至右或自右至左恰好成上、中、下的顺序的概率是多少?
11. 某城市的电话号码由五个数字组成, 每个数字可以是从 0 到 9 这十个数字中的

任一个，计算电话号码由五个不同数字组成的概率.

12. 5 个同学任意站成一排，计算:
    (1) 甲恰好站在正中间的概率;
    (2) 甲、乙两人恰好站在两端的概率.
13. 从数字 $1,2,3,4,5$ 中任取 3 个，组成没有重复数字的三位数，计算:
    (1) 这个三位数是 5 的倍数的概率;
    (2) 这个三位数是偶数的概率;
    (3) 这个三位数大于 400 的概率.

3.0.3 互斥事件[①]有一个发生的概率

在 10 个乒乓球中，有 7 个一等品，2 个二等品，1 个三等品. 我们把从中任取一个，取处一等品叫做事件 A，取出二等品叫做事件 B，取出三等品叫做事件 C. 我们看到, 如果取出的乒乓球是一等品, 即事件 A 发生, 那么事件 B 就不发生; 如果取出的是二等品，即事件 B 发生，那么事件 A 就不发生. 也就是说，事件 A,B 不可能同时发生. 这种不可能同时发生的两个事件叫做**互斥事件**. 同理，事件 B,C 是互斥事件，事件 A,C 是互斥事件. 换句话说，事件 A,B,C 中，任何两个都是互斥事件. 这时我们说事件 A,B,C 彼此互斥. 一般地，如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任何两个都是互斥事件，那么就说事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **彼此互斥**.

在上面的问题里，因为是任取一个，共有 10 种等可能的取法，其中得到一等品，二等品，三等品的取法分别有 7 种，2 种，1 种，因此，$P(A)=\frac{7}{10}$，$P(B)=\frac{2}{10}$，$P(C)=\frac{1}{10}$.

现在问:“任取一个乒乓球，取出一等品或二等品”这一事件的概率是多少? 这一事件，我们记作“$A+B$”. 因为不论取出一等品还是二等品，都表示这个事件发生，而得到一等品或二等品的取法共有 $7+2$ 种，所以取出一等品或二等品的概率 $P(A+B)=\frac{7+2}{10}$. 由 $\frac{7+2}{10}=\frac{7}{10}+\frac{2}{10}$，我们看到

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B).} \tag{3.1}$$

① 有的书上也称为**互不相容事件**.

它告诉我们：如果事件 A, B 互斥，那么事件"$A+B$"发生（即 A, B 中有一个发生）的概率，等于事件 A, B 分别发生的概率的和.

一般地，如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 彼此互斥，那么事件"$A_1+A_2+\cdots+A_n$"发生（即 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中有一个发生）的概率，等于这 n 个事件分别发生的概率的和，即

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n). \tag{3.2}$$

例 3.4 某地区的年降水量，在 100～150 mm[①]范围内的概率是 0.12，在 150～200 mm 范围内的概率是 0.25，在 200～250 mm 范围内的概率是 0.16，在 250～300 mm 范围内的概率是 0.14．计算年降水量在 100～200 mm 范围内的概率与在 150～300 mm 范围内的概率.

解： 记这个地区的年降水量在 100～150 mm，150～200 mm，200～250 mm，250～300 mm 范围内分别为事件 A, B, C, D．这四个事件是彼此互斥的．根据式 (3.2)，年降水量在 100～200 mm 范围内的概率

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.12+0.25=0.37;$$

年降水量在 150～300 mm 范围内的概率是

$$\begin{aligned}P(B+C+D)&=P(B)+P(C)+P(C)\\&=0.25+0.16+0.14=0.55.\end{aligned}$$

答：年降水量在 100～200 mm 范围内的概率为 0.37，在 150～300 mm 范围内的概率为 0.55.

例 3.5 在 20 件产品中，有 15 件一级品，5 件二级品．从中任取 3 件，其中至少有 1 件为二级品的概率是多少?

解： 记从 20 件产品中任取 3 件，其中恰有 1 件二级品为事件 A_1，恰有 2 件二级

① 在本章内，a～b 表示大于或等于 a 而小于 b 的一个实数范围.

品为事件 A_2，3 件全是二级品为事件 A_3．这样，事件 A_1, A_2, A_3 的概率分别是

$$P(A_1)=\frac{C_5^1\cdot C_{15}^2}{C_{30}^2}=\frac{105}{228};$$

$$P(A_2)=\frac{C_5^2\cdot C_{15}^1}{C_{30}^2}=\frac{30}{228};$$

$$P(A_3)=\frac{C_5^3}{C_{30}^2}=\frac{2}{228}.$$

根据题意，事件 A_1, A_2, A_3 彼此互斥．由式 (3.2)，3 件产品中至少有 1 件为二级品的概率是

$$\begin{aligned}P(A_1+A_2+A_3)&=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)\\&=\frac{105}{228}+\frac{30}{228}+\frac{2}{228}=\frac{137}{228}.\end{aligned}$$

答：其中至少有一件为二级品的概率是 $\dfrac{137}{228}$.

在例 3.5 中，从 20 件产品中任取 3 件，或者都是一级品，或者不都是一级品 (即其中至少有一件是二级品)，这两个互斥事件必有一个发生．这种其中必有一个发生的两个互斥事件叫做**对立事件**.

一个事件 A 的对立事件通常记作 $\bar{A}$．根据对立事件的意义，$A+\bar{A}$ 是一个必然事件，它的概率等于 1．又由于 A 与 $\bar{A}$ 互斥，我们得到

$$\boxed{P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})=1.} \tag{3.3}$$

这就是说，**两个对立事件的概率和等于 1**.

从式 (3.3) 还可得到

$$P(\bar{A})=1-P(A). \tag{3.4}$$

运用式 (3.4) 计算事件的概率，有时比较简便．如例 3.5 还可以这样来解:

从 20 件产品中任取 3 件，3 件全是一级品（记作事件 A）的概率:

$$P(A)=\frac{C_{15}^3}{C_{30}^3}=\frac{91}{228},$$

由于“任取 3 件，至少有 1 件为二级品”是事件 A 的对立事件 $\bar{A}$，根据式 (3.4)，

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{91}{228} = \frac{137}{228}.$$

练习三

1. 判别下列每对事件是不是互斥事件，如果是，再判别它们是不是对立事件.

   从一堆产品（其中正品与次品都多于 2 个）中任取 2 件，其中：

   (1) 恰有 1 件次品和恰有 2 件次品；

   (2) 至少有 1 件次品和全是次品；

   (3) 至少有 1 件正品和至少有 1 件次品；

   (4) 至少有 1 件次品和全是正品.

2. 在某一时期内，一条河流某处的年最高水位在各个范围内的概率如下：

年最高水位	低于 10 m	10～12 m	12～14 m	14～16 m	不低于 16 m
概率	0.1	0.28	0.38	0.16	0.08

   计算在同一时期内，河流这一处的年最高水位在下列范围内的概率：

   (1) 10～16 m；　(2) 低于 12 m；　(3) 不低于 14 m.

3.0.4 相互独立事件同时发生的概率

甲坛子里有 6 个白球，4 个黑球，乙坛子里有 3 个白球，6 个黑球，从这两个坛子里分别摸出一个，它们都是白球的概率是多少?

我们把“从甲坛子里摸一个球，得到白球”叫做事件 A，把“从乙坛子里莫一个球，得到白球”叫做事件 B. 很明显，从一个坛子里摸出的是白球还是黑球，对从另一个坛子里摸出白球的概率没有影响. 这就是说，事件 A（或 B）是否发生对事件 B（或 A）发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做**相互独立事件**.

在上面的问题里，事件 $\bar{A}$ 是指“从甲坛子里摸一个球，得到黑球”，事件 $\bar{B}$ 是指“从乙坛子里摸一个球，得到黑球”. 很明显，事件 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都是相互独立的. 一般地，如果事件 A 与 B 相互独立，那么 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都是相互独立的.

“从两个坛子里分别摸出一个，都是白球”是一个事件，它的发生，就是事件 A, B 同时发生，我们将它记作“$A \cdot B$”．于是，这里的问题就是要求相互独立事件 A, B 同时发生的概率 $P(A \cdot B)$.

从甲坛子里摸出一个球，有 10 种等可能的结果；从乙坛子里摸出一个球，有 8 种等可能的结果．于是，从两个坛子里分别摸出一个球，共有 10×8 种等可能的结果，其中同时摸出白球的结果有 6×3 种．因此，从两个坛子里分别摸出一个球，都是白球的概率 $P(A \cdot B) = \dfrac{6 \times 3}{10 \times 8} = \dfrac{6}{10} \times \dfrac{3}{8}$.

另一方面，从甲坛子里摸出一个球，得到白球的概率 $P(A)$ 为 $\dfrac{6}{10}$，从乙坛子里摸出一个球，得到白球的概率 $P(B)$ 为 $\dfrac{3}{8}$，于是我们看到

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \tag{3.5}$$

这就是说，**两个相互独立事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积**.

一般地，如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，那么这 n 个事件同时发生的概率，等于每个事件发生的概率的积，即

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n). \tag{3.6}$$

例 3.6 甲、乙两人各进行一次射击，如果两人击中目标的概率都是 0.6，计算:

(1) 两人都击中目标的概率;

(2) 其中恰有一人击中目标的概率;

(3) 至少有一人击中目标的概率.

分析: 甲、乙两人各射击一次，甲（或乙）是否击中，对乙（或甲）击中的概率是没有影响的，也就是说，“甲射击一次，击中目标”与“乙射击一次，击中目标”是相互独立事件．根据式 (3.5)，可以求出这两个事件同时发生的概率．同理可以分别求出，甲击中与乙未击中，甲未击中与乙击中，甲未击中与乙未击中同时发生的概率，从而可以得到所求的各个事件的概率.

解:

(1) 记“甲射击一次，击中目标”为事件 A，“乙射击一次，击中目标”为事件 B．因此，“两人各射击一次，都击中目标”就是事件 $A \cdot B$．又由题意可知，事件

A 与 B 相互独立．根据式 (3.5)，所求的概率是

$$\begin{aligned}P(A\cdot B)&=P(A)\cdot P(B)\\&=0.6\times 0.6=0.36.\end{aligned}$$

答：两人都击中目标的概率是 0.36.

(2)“两人各射击一次，恰有一人击中目标”包括两种情况：一种是甲击中、乙未击中（事件 $A\cdot\bar{B}$ 发生），另一种是甲未击中、乙击中（事件 $\bar{A}\cdot B$ 发生）．根据题意，这两种情况在各射击一次时不可能同时发生，即事件 $A\cdot\bar{B}$ 与 $\bar{A}\cdot B$ 互斥，根据式 (3.1) 和 (3.5)，所求的概率是

$$\begin{aligned}&P(A\cdot\bar{B})+P(\bar{A}\cdot B)\\&=P(A)\cdot P(\bar{B})+P(\bar{A})\cdot P(B)\\&=0.6\times(1-0.6)+(1-0.6)\times 0.6\\&=0.24+0.24\\&=0.48.\end{aligned}$$

答：其中恰有一人击中目标的概率是 0.48.

(3) 解法一：“两人各射击一次，至少有一人击中目标”的概率

$$\begin{aligned}P&=P(A\cdot B)+[P(A\cdot\bar{B})+P(\bar{A}\cdot B)]\\&=0.36+0.48=0.84.\end{aligned}$$

解法二：两人都未击中目标的概率是

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\cdot\bar{B})&=(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-0.6)\times(1-0.6)\\&=0.4\times 0.4=0.16.\end{aligned}$$

因此，至少有一人击中目标的概率

$$P=1-P(\bar{A}\cdot\bar{B})=1-0.16=0.84.$$

答：至少有一人击中目标的概率是 0.84.

例 3.7 在一段线路中并联着三个自动控制的常开开关，只要其中有一个开关能够闭合，线路就能正常工作. 假定在某段时间内每个开关能够闭合的概率都是 0.7，计算在这段时间内线路正常工作的概率.

分析: 根据题意，这段时间内线路正常工作的概率，就是三个开关中至少有一个能闭合的概率，也就是三个开关都不能闭合的对立事件的概率. 由于这段时间内三个开关是否能闭合相互之间没有影响，三个开关都不能闭合的概率可根据式 (3.6) 求出，从而可得到所求的概率.

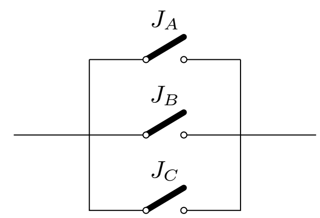


图 3.2

解: 分别记这段时间内开关 J_A, J_B, J_C 能够闭合为事件 A, B, C（图 3.2）. 根据题意，这段时间内至少有一个开关能够闭合，从而使线路能正常工作的概率是

$$
\begin{aligned}
& 1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) \\
&= 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) \qquad (\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \text{ 相互独立}) \\
&= 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)][1 - P(C)] \\
&= 1 - (1 - 0.7)(1 - 0.7)(1 - 0.7) \\
&= 1 - 0.3^3 \\
&= 0.973
\end{aligned}
$$

答: 在这段时间内线路正常工作的概率是 0.973.

练习四

1. 一个口袋内装有 2 个白球和 2 个黑球，把“从中任意摸出一个球，得到白球”叫做事件 A，把“从剩下的 3 个球中任意摸出一个球，得到白球”叫做事件 B. 在先摸出白球后，再摸出白球的概率是多少? 在先摸出黑球后，再摸出白球的概率是多少? 这里事件 A 与事件 B 是相互独立的吗?
2. 生产一种零件，甲车间的合格率是 96%，乙车间的合格率是 97%，从它们生产的零件中各抽取一件，都抽到合格品的概率是多少?
3. 有一问题，在半小时内，甲能解决它的概率是 $\frac{1}{2}$，乙能解决它的概率是 $\frac{1}{3}$，如果两人都试图独立地在半小时内解决它，计算:

(1) 两人都未解决的概率;

(2) 问题得到解决的概率.

4. 某射手射击一次，击中目标的概率是 0.9. 他连续射击 4 次，且各次射击是否击中相互之间没有影响，那么他第 2 次未击中、其他 3 次都击中的概率是多少?

3.0.5 独立重复试验

某射手射击一次，击中目标的概率是 0.9，他射击 4 次恰好击中 3 次的概率是多少?

分别记在第 $1,2,3,4$ 次射击中，这个射手击中目标为事件 A_1,A_2,A_3,A_4，未击中目标为事件 $\bar{A}_1,\bar{A}_2,\bar{A}_3,\bar{A}_4$. 那么，射击 4 次、击中 3 次共有下面 4 种情况:

$$A_1A_2A_3\bar{A}_4,\quad A_1A_2\bar{A}_3A_4,\quad A_1\bar{A}_2A_3A_4,\quad \bar{A}_1A_2A_3A_4.$$

上述每一种情况，都可看成是在 4 个位置上取出 3 个写上 A，另一个写上 $\bar{A}$，所以这些情况的种数等于从 4 个元素中取出 3 个的组合数 C_4^3，即 4 种.

由于各次射击是否击中相互之间没有影响，根据式 (3.6)，前 3 次击中、第 4 次未击中的概率

$$\begin{aligned}P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot \bar{A}_4) &= P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)\cdot P(\bar{A}_4)\\ &= 0.9\times 0.9\times 0.9\times(1-0.9)\\ &= 0.9^3\times(1-0.9)^{4-3}\end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned}P(A_1\cdot A_2\cdot \bar{A}_3\cdot A_4) &= P(A_1\cdot \bar{A}_2\cdot A_3\cdot A_4)\\ &= P(\bar{A}_1\cdot A_2\cdot A_3\cdot A_4)\\ &= 0.9^3\times(1-0.9)^{4-3}\end{aligned}$$

这就是说，在上面射击 4 次、击中 3 次的 4 种情况中，每一种发生的概率都是 $0.9^3\times(1-0.9)^{4-3}$. 因为这 4 种情况彼此互斥，根据式 (3.2)，射击 4 次、击中

3 次的概率

$$\begin{aligned} P &= P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \bar{A}_4) + P(A_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot A_4) \\ &\quad + P(A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3 \cdot A_4) + P(\bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) \\ &= C_4^3 \times 0.9^3 \times (1-0.9)^{4-3} = 4 \times 0.9^3 \times 0.1 \approx 0.29. \end{aligned}$$

在上面的例子里，4 次射击可以看成是进行 4 次独立重复试验.

一般地，如果在一次试验中某事件发生的概率是 P，那么在 n 次独立重复试验中这个事件恰好发生 k 次的概率

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}.} \tag{3.7}$$

例 3.8 某气象站天气预报的准确率为 80%，计算（结果保留两个有效数字）：

(1) 5 次预报中恰有 4 次准确的概率；

(2) 5 次预报中至少有 4 次准确的概率.

解：

(1) 记“预报一次，结果准确”为事件 A. 预报 5 次相当于作 5 次独立重复试验，根据式 (3.7)，5 次预报中恰有 4 次准确的概率

$$\begin{aligned} P_5(4) &= C_5^4 \times 0.8^4 \times (1-0.8)^{5-4} \\ &= 5 \times 0.8^4 \times 0.2 \approx 0.41. \end{aligned}$$

答：5 次预报中恰好有 4 次准确的概率约为 0.41.

(2) 5 次预报中至少有 4 次准确的概率，就是 5 次预报中恰好有 4 次准确的概率与 5 次预报都准确的概率的和，即

$$\begin{aligned} P &= P_5(4) + P_5(5) \\ &= C_5^4 \times 0.8^4 \times (1-0.8)^{5-4} + C_5^5 \times 0.8^5 \times (1-0.8)^{5-5} \\ &= 5 \times 0.8^4 \times 0.2 + 0.8^5 \\ &\approx 0.410 + 0.328 \\ &\approx 0.74. \end{aligned}$$

答：5 次预报中至少有 4 次准确的概率约为 0.74.

练习五

1. 生产一种零件，出现次品的概率是 0.04．生产这种零件 4 件，其中恰有 1 件次品，恰有 2 件次品，至多有 1 件次品的概率各是多少?
2. 在本节开始关于射手 4 次射击的问题中，分别写出射手恰好击中 4 次，3 次，2 次，1 次，0 次的概率的计算式子，并将它们与 $(0.9+0.1)^4$ 的展开式的各项进行比较.

习题七

1. 从一批乒乓球产品中任取一个，如果其重量小于 2.45 g 的概率是 0.22，重量不小于 2.50 g 的概率是 0.20，那么重量在 2.45～2.50 g 范围内的概率是多少?
2. 某射手在一次射击中射中 10 环，9 环，8 环的概率分别为 0.24，0.28，0.19，计算这个射手在一次射击中:
   (1) 射中 10 环或 9 环的概率;
   (2) 不够 8 环的概率.
3. 一个箱子内有 9 张票，其号数分别为 $1, 2, \cdots, 9$．从中任取 2 张，其号数至少有 1 个为奇数的概率是多少?
4. 在 50 件产品中有 45 件合格品，5 件次品．从中任取 3 件，计算其中有次品的概率.
5. 从某地区的儿童中预选体操学员．已知这些儿童体型合格的概率为 $\dfrac{1}{5}$，身体关节构造合格的概率为 $\dfrac{1}{4}$．从中任挑一个儿童，这个儿童体型和身体关节构造都合格的概率是多少（假定体型与身体关节构造合格与否相互之间没有影响)?
6. 甲、乙两个气象台同时作天气预报，如果它们预报准确的概率分别是 0.8 与 0.7，那么在一次预报中两个气象台都预报准确的概率是多少?
7. 将一个硬币连掷 5 次，5 次都出现正面的概率是多少?
8. 制造一种零件，甲机床的废品率是 0.04，乙机床的废品率是 0.05．从它们制造的产品中各任抽意见，其中恰有一件废品的概率是多少?
9. 电子设备的某一部件由 9 个元件组成．如果其中有任何一个元件损坏了，这个部件就不能工作．假定每个元件能使用 3000 h 的概率是 0.99，计算这个部件能工作 3000 h 的概率.
10. 一个工人负责看管四台机床，如果在一小时内这些机床不需要人去照顾的概率，第一台是 0.79，第二台是 0.79，第三台是 0.80，第四台是 0.81．假设个台机床是否需要照顾相互之间没有影响，计算在这个小时内，这四台机床都不需要人去照

顾的概率.

11. 有甲、乙、丙三批罐头，每批 100 个，其中各有 1 个是不合格的．从三批罐头中各抽出 1 个，计算：
    (1) 3 个中恰有一个不合格的概率；
    (2) 3 个中至少有 1 个不合格的概率.
12. 一次测量中出现正误差和负误差的概率都是 $\dfrac{1}{2}$，在 3 次测量中，恰好出现 2 次正误差的概率是多少？恰好出现 2 次负误差的概率是多少？
13. 一头病牛服用某药品后被治愈的概率是 95%，计算符用这种药的 4 头病牛中至少有 3 头被治愈的概率.
14. 某一批蚕豆种籽，如果每一粒发芽的概率为 90%，播下 5 粒种籽，计算：
    (1) 其中恰好有 4 粒发芽的概率；
    (2) 其中恰好有 2 粒未发芽的概率.

小结

一、 在这一章中，我们初步介绍了事件的概率的概念及其计算.

二、 随机事件在现实世界中是广泛存在的．在一次试验中，事件是否发生虽然带有偶然性，但在大量重复试验下，它的发生呈现出一定的规律性，即事件发生的频率总是接近于某个常数，在它附近摆动，这个常数就叫做这一事件的概率.

三、 对于某些事件，也可以直接通过分析来计算其概率．如果一次试验中共有 n 种等可能出现的结果，其中事件 A 包含的结果有 m 种，那么事件 A 的概率 $P(A)$ 是 $\dfrac{m}{n}$.

四、 不可能同时发生的两个事件叫做互斥事件．当 A, B 是互斥事件时，

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

如果一个事件是否发生对另一个事件发生的概率没有影响，那么这两个事件叫做相互独立事件．当 A, B 是相互独立事件时，

$$P(A \cdot B)=P(A) \cdot P(B).$$

应注意上面两个概念的区别，注意运用上面两个公式的前提条件.

其中必有一个发生的两个互斥事件叫做对立事件．当 A, B 是对立事件时，$P(B) = 1 - P(A)$．利用这个公式，常可使概率的计算简化．

五、 如果事件 A 在一次试验中发生的概率是 P，那么它在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率是

$$P_n(k) = C_n^k P^k (1 - P)^{n-k}.$$

复习参考题三

A 组

1. 把 5 本不同的书任意列到书架的同一层上，计算其中固定的 3 本书放在中间的概率.
2. 用数字 $1, 2, 3, 5, 8$ 任意组成没有重复数字的五位数，计算:
   (1) 它是奇数的概率;
   (2) 它小于 $23\,000$ 的概率.
3. 有五根细木棍，它们的长度分别为 1、3、5、7 和 9 cm，从中任取三根，它们能搭成一个三角形的概率是多少?
4. 同时抛掷两个均匀的正方体玩具（各个面上分别标以数 $1, 2, 3, 4, 5, 6$），计算:
   (1) 朝上的一面的数相同的概率;
   (2) 朝上的一面数之积为偶数的概率.
5. 甲击中目标的概率是 0.5，乙击中目标的概率是 0.4，两人各射击一次，“目标被击中的概率是 $0.5 + 0.4 = 0.9$”这种说法对不对? 为什么?
6. 某售货员负责在三个柜面上售货. 如果在某一小时内柜面不需要售货员照顾的概率，第一柜面是 0.9，第二柜面是 0.8，第三柜面是 0.7. 假定各个柜面是否需要照顾相互之间没有影响，计算在这个小时内，至少有一个柜面需要售货员照顾的概率.
7. 某仪表内装有 m 个同样的电子元件，其中任一个电子元件损坏时，这个仪表就不能工作. 如果在某段时间内每个电子元件损坏的概率是 P，计算在这段时间内，这个仪表不能工作的概率.
8. 两个篮球运动员在罚球线投球的命中率分别是 0.7 与 0.6，每人投球 3 次，计

算两人都恰好投进 2 球的概率.

B 组

9. 某人的口袋内装有 1 枚伍分的应比、2 枚贰分的硬币以及 3 枚壹分的硬币，他从中任取 3 枚，取出的总钱数不少于伍分的概率是多少?
10. 8 个篮球队中有 2 个强队，先任意将这 8 个队分成两个组（每组 4 个队）进行比赛，这两个强队被分在一个组内的概率是多少?
11. 在一副扑克牌（52 张）中，有“黑桃，红心，梅花，方块”这四种花色的牌各 13 张．从中任取 4 张，这 4 张牌的花色相同的概率是多少? 这 4 张牌的花色各不相同的概率是多少?
12. 甲袋子内有 m 个白球，n 个黑球，乙袋子内有 n 个白球，m 个黑球．从两个袋子内各任意摸出一个，得到一个白球、一个黑球的概率是多少?
13. 某种大炮击中目标的概率是 0.3，只要以多少门这样的大炮同时射击一次，就可以使击中目标的概率超过 95%.
14. 一个通讯小组有两套通讯设备，只要其中有一套设备能正常工作，就能进行通讯．每套设备由 3 个部件组成，只要其中有一个部件出故障，这套设备就不能正常工作．如果在某段时间内每个部件不出故障的概率都是 P，计算在这段时间内能进行通讯的概率.

责任编辑：张晨南

封面设计：张晨南

定价：104.00元