מבוא למערכות לומדות - גיליון קצר 6

מגיש - עומר שמחי, 316572593

28 ביוני 2021

1. נסמן את פונקצייה הרשת ב־$F_\theta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ כאשר $\theta := \left(W^{(1)}, ..., w^{(L)}\right)$ כאשר $W^{(1)} \in \mathbb{R}^{d\times p}, W^{(L)} \in \mathbb{R}^p$ ו־$W^{(i)} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ עבור $1 < i < L$. כמו כן נקבע את פונקצייה ההפעלה להיות פונקצייה ה־$ReLU$, $\sigma(z) = \max\{0, z\}$. הפלט של הרשת יהיה:

$$F_\theta(x) = \left(w^{(L)}\right)^T h^{(L-1)}(x)$$

כאשר:

$$h^{(1)}(x) = \sigma\left(W^{(1)^T} x\right),\ h^{(l)}(x) = \sigma\left(W^{(l)^T} h^{(l-1)}(x)\right)$$

כעת נכפול את כל המשקלות ב־$\alpha > 0$.

(א) הראו כי $F_{\alpha\cdot\theta}(x) = c \cdot F_\theta(x)$ עבור סקלר c שמקיים את השיוון הנ"ל.
הוכחה - נרשום את פונקציית הרשת עם וקטור המשקלות החדש לפי ההגדרות ($\alpha \cdot \theta := \left(\alpha W^{(1)}, ..., \alpha w^{(L)}\right)$):

$$F_{\alpha\cdot\theta}(x) := \left(\left(\alpha w^{(L)}\right)^T\right) h^{(L-1)}(x) = \alpha \cdot \left(w^{(L)^T}\right) h^{(L-1)}(x)$$

נרשום:

$$F_{\alpha\cdot\theta}(x) = \alpha \cdot G(\theta, L, x) \ \ (*)$$
$$G(\theta, L, x) := \left(w^{(L)^T}\right) h^{(L-1)}(x)$$

נשתמש בהגדרה ונקבל:

$$G(\theta, L, x) = \left(w^{(L)^T}\right) h^{(L-1)}(x) = \left(w^{(L)^T}\right) \cdot \sigma\left(\alpha \cdot \left[W^{(L-1)^T} h^{(L-2)}(x)\right]\right) =$$
$$\underbrace{=}_{\sigma(\alpha z) = \alpha\cdot\sigma(z)} \left(w^{(L)^T}\right) \cdot \alpha \cdot \sigma\left(W^{(L-1)^T} h^{(L-2)}(x)\right) =$$
$$= \alpha\left(w^{(L)^T}\right) \cdot \sigma\left(W^{(L-1)^T} h^{(L-2)}(x)\right) = \alpha \cdot G(\theta, L-1, x)$$

כלומר קיבלנו כי:

$$G\left(\theta,L,x\right)=\alpha\cdot G\left(\theta,L-1,x\right)$$

מפתרון הנוסחה הרקורסיבית (נסיים כאשר $L=1$) קל לקבל כי:

$$G\left(\theta,L,x\right)=\alpha^{L-1}\cdot G\left(\theta,0,x\right)$$

כאשר:

$$G\left(\theta,0,x\right)=\left(w^{(L)^{T}}\right)\cdot\sigma\left(W^{(L-1)^{T}}\sigma\left(...\sigma\left(W^{(1)^{T}}x\right)...\right)\right)$$

נשים לב כי הביטוי בדרגת הקינון הגבוהה ביותר היא בדיוק $h^{(1)}\left(x\right)=\sigma\left(W^{(1)^{T}}x\right)$ ולכן הדרגה הבאה היא בדיוק:

$$W^{(2)^{T}}\sigma\left(h^{(1)}\left(x\right)\right):=h^{(2)}\left(x\right)$$

אם נמשיך ככה נקבל לבסוף כי:

$$G\left(\theta,0,x\right)=\left(w^{(L)}\right)^{T}h^{(L-1)}\left(x\right)$$

כלומר לפי הגדרה בדיוק:

$$F_{\theta}\left(x\right)=G\left(\theta,0,x\right)$$

ולכן אם נציב חזרה ב־$(*)$ נקבל:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F_{\alpha\cdot\theta}\left(x\right)}&=\alpha\cdot G\left(\theta,L,x\right)=\alpha\cdot\alpha^{L-1}G\left(\theta,0,x\right)\\&=\boldsymbol{\alpha^{L}\cdot F_{\theta}\left(x\right)}\blacksquare\end{aligned}$$

ולכן $c:=\alpha^{L}>0$ הוא בחירה שמתאימה לנוסחה שהתבקשנו לפתח.

(ב) עבור $\alpha\to0$ לאיזו הסתברות הפלט מתכנס?

פתרון ־ יש לחשב את הביטוי:

$$\lim_{\boldsymbol{\alpha\to0}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+e^{-F_{\alpha\cdot\theta}(x)}}}\underbrace{=}_{section\,1}\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{1+e^{-\alpha^{L}\cdot F_{\theta}(x)}}=\frac{1}{1+e^{-0}}=\frac{1}{1+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

לכן, קיבלנו כי הפלט מתכנס להסתברות $\frac{1}{2}$.

2. עבור $\alpha\to\infty$ לאיזו הסתברות הפלט מתכנס?

פתרון ־ באותו אופן כמו סעיף קודם, נרשום:

$$\lim_{\boldsymbol{\alpha\to\infty}}\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+e^{-F_{\alpha\cdot\theta}(x)}}}\underbrace{=}_{section\,1}\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{1+e^{-\alpha^{L}\cdot F_{\theta}(x)}}=\begin{cases}1 & F_{\theta}\left(x\right)>0\\ \frac{1}{2} & F_{\theta}\left(x\right)=0\\ 0 & F_{\theta}\left(x\right)<0\end{cases}$$

לכן, קיבלנו כי הפלט מתכנס בהתאם לסימן $F_{\theta}\left(x\right)$.