**Section 1: Linear regression implementation**

(Q1)

הפונקציה היא פונקציית מקרים.

נתייחס לנגזרת שלה לפי b לפי המקרים:

* עבור המקרה , הטעות היא ריבועית ביחס לb והפונקציה היא גזירה ביחס לb. אין נקודות אי גזירות בתחום זה ולכן הגדרת הנגזרת והsubderivative מתלכדות.
* עבור המקרה , הטעות היא מוגדרת באמצעות הזזה והכפלה בסקלר של פונקציית הערך המוחלט- . פונקציה זו היא גזירה ביחס לb בכל מקום מלבד באופן פוטנציאלי בנקודה שבה . עם זאת, מאחר שאנו בתחום שבו , הפונקציה גזירה באזורים אלו גם כן, ולכן הגדרת הנגזרת והsubderivative מתלכדות.
* עבור המקרים בהם , כלומר כאשר
* הפונקציה עדיין גזירה ביחס לb בנקודות אלו כיוון שהנגזרות מימין מתלכדות עם הנגזרות משמאל.

סה״כ מאחר והפונקציה גזירה ביחס לb על כל התחום נוכל לחשב את הנגזרות החלקיות בנפרד:

נחשב כל חלק בנפרד:

1. :
2. *Otherwise :*

*נקבל :*

(Q2)

נניח שיש לנו m זוגות של דוגמאות ותיוגים, כאשר כל דוגמה ממימד d כלומר :

נסמן את האלמנטים של דוגמה מסוימת, באופן הבא:

אזי נגדיר את המטריצה ונגדיר את וקטור העמודה .

עבור וקטור נגדיר פונקציית אינדיקטור באופן הבא

: .

עבור וקטור נגדיר פונקציית אינדיקטור באופן הבא

: , כאשר הוא האלמנט במיקום הi בוקטור z .

נשים לב כי

בנוסף, עבור וקטור נגדיר פונקציית אינדיקטור באופן הבא

: , כאשר הוא האלמנט במיקום הi בוקטור z .

אזי נוכל לבטא את באופן הבא:

נבדוק שהנוסחה חוקית:

* = היא מכפלה חוקית ונותנת לנו וקטור עמודה בעל m מימדים, לכן גם הסכום () כיוון שכל הוקטורים שייכים ל.
* הקלט ל הוא ואכן והפלט הוא גם כן וקטור
* מכפלת הדמרד (איבר – איבר) בין ובין

ולידית כי שניהם מאותו מימד והפלט הוא גם כן ב

* ולכן חוקי להכפיל בין המטריצה לווקטור

ונקבל פלט של וקטור בגודל המצופה לוקטור גרדיאנט כיוון שאנו גוזרים לפי .

* סה״כ הביטוי מחזיר לנו כפי שאנחנו רוצים.
* הביטוי הוא ולידי כיוון שראינו כי ולכן חישוב ההפרש בין 2 בוקטורים הוא לידי ומתקבל וקטור ששייך ל .
* לפי איך שהגדרנו את sign לוקטורים ממימד m, אזי הביטוי הוא ולידי ומחזיר וקטור ששייך ל .
* ולידי כיוון שאנו מבצעים מכפלה איבר-איבר בין שני וקטורים ממימד m.

כמו קודם, גם המכפלה חוקית כיוון שכופלים בוקטור מימד m. נקבל פלט של וקטור בגודל המצופה לוקטור גרדיאנט כיוון שאנו גוזרים לפי .

* סה״כ נקבל מהסכום של 2 הביטויים, 2 וקטורים ממימד d, לכן פעולת החיבור הזו היא אכן ולידית ואנחנו מקבלים וקטור גרדיאנט ממימד d כמצופה.

כעת נפתח נוסחה עבור

נבדוק שהנוסחה חוקית:

* = היא מכפלה חוקית ונותנת לנו וקטור עמודה בעל m מימדים, לכן גם הסכום () כיוון שכל הוקטורים שייכים ל.
* הקלט ל הוא ואכן והפלט הוא גם כן וקטור
* ולידי מאחר ומדובר במכפלה פנימית בין 2 וקטורים מימד m ובסופו של דבר הפלט מהמכפלה הזו הוא מספר כפי שהיינו מצפים.
* גם הביטוי הוא מספר , כמצופה.
* הביטוי הוא ולידי כיוון שראינו כי ולכן חישוב ההפרש בין 2 בוקטורים הוא לידי ומתקבל וקטור ששייך ל .
* לפי איך שהגדרנו את sign לוקטורים ממימד m, אזי הביטוי הוא ולידי ומחזיר וקטור ששייך ל .
* ולידי מאחר ומדובר במכפלה פנימית בין 2 וקטורים מימד m ובסופו של דבר הפלט מהמכפלה הזו הוא מספר כפי שהיינו מצפים.
* *סה״כ הביטוי מחזיר מספר ממשי.*
* *לכן הסכום בין שני הביטויים של הנגזרות לפי b חוקי ומחזיר לנו מספר ממשי , כמצופה.*