# 最佳公交线路的选择

19 组　刘心雨　陈启源　谢芳艳

## 一、 符号定义与说明

| 符号 | 说明 |
|---|---|
| $n$ | 交通网络中公汽站台总数 |
| $A$ | 直达路线矩阵 |
| $B$ | 直达时间矩阵 |
| $\hat{B}$ | 融合直达时间矩阵 |
| $l_{ij}^{(k)}$ | 第 $k$ 条从站台 $i$ 直达站台 $j$ 的线路上的站台数 |
| $a$ | 公汽线路起点 |
| $b$ | 公汽线路终点 |
| $C$ | 直达费用矩阵 |
| $D$ | 换乘次数矩阵 |

部分符号会在文章第一次出现时予以解释

## 二、 模型假设

1. 附件中的所有数据均为真实数据，且准确无误；
2. 某线路的总花费时间仅考虑公交车的行驶时间及换乘和等待时间，不考虑其他因个人因素或外部因素产生的时间；
3. 乘客换乘的时间及公交车相邻两站的行驶时间均恒定，为题目中所给数据；
4. 所有公交车均能正常发车，不考虑交通堵塞、天气原因等突发情况；
5. 所有环形公汽线路均可双向行驶；
6. 乘客均为理性人，即乘客均希望换乘次数、总时间、总花费越小越好。

# 三、 模型建立与求解

## 3.1 模型分析

经资料分析与实际经验，我们以“总时间最少”、“总花费最少”、“换乘次数最少”为两公汽站之间线路选择的标准。考虑到不同人群有不同的需求，我们分别以 3 个标准为目标实现公汽的最优路线选择。并将城市公交网络抽象为有向赋权图，分别以直达时间、直达费用、换乘次数为边权，采用经典的 Dijkstra 算法对此图论模型进行求解。但考虑到实际情况，乘坐公交车花费不高，整体相差不多，且奥运期间人流密集，大部分乘客均以方便性和节约时间为首要原则，而在时间相差不大的情况下，多数乘客以方便性为主要原则，即换乘次数尽量少。基于上述分析，我们结合 3 种目标下的最优路线推荐最佳路线，即我们同时输出 3 种目标下的最优路线及推荐路线供乘客选择。分析过程如下图所示：

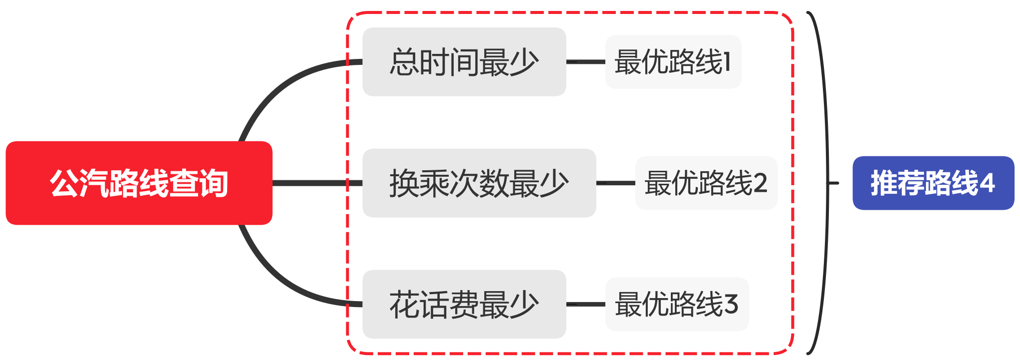


**图 1　公汽路线查询**

## 3.2 模型建立

**(1) 数据处理**

主要针对附件中 3 种公汽线路的数据进行处理。针对附件中出现的下行线是上行线原路返回的路线，我们将其抽象为两条路线，如：公交线路 L086：S2365-S1047-S2916-S1045-S0748-S2410-S3633-S0989-S0503-S0437，则另一条线路为 L086：S0437-S0503-S0989-S3633-S2410-S0748-S1045-S2916-S1047-S2365。

针对环形路线，经查阅资料，现实生活中多数环形线路可双向行驶，如下图所示：

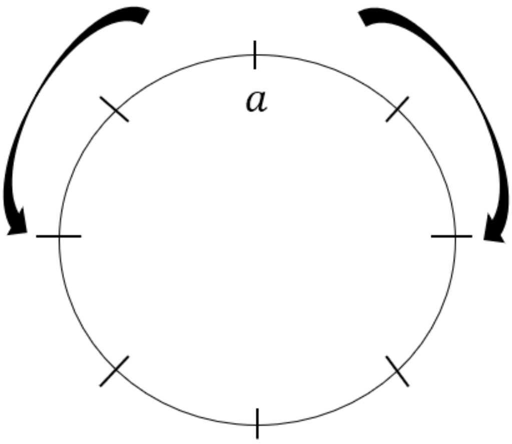


**图 2　环形线路双向行驶示意图**

即线路可从 $a$ 点顺时针行驶，然后回到 $a$ 点，也可从 $a$ 点逆时针行驶，回到 $a$ 点，故我们也将环形路线抽象为两条路线。

例如，公交线路 L089：S3295-S0704-S0705-S1337-S1831-S1749-S0314-S1734-S0532-S0325-S0317-S0327-S1341-S2285-S1333-S1334-S3265-S3295，则另一条线路为 L089：S3295-S3265-S1334-S1333-S2285-S1341-S0327-S0317-S0325-S0523-S1734-S0314-S1749-S1831-S1337-S0705-S0704-S3295。

**(2) 有向赋权图的建立**

由图论知识，我们将公汽网络抽象为有向赋权图 $\vec{G}=(V,E,W)$，其中 $V$ 为非空顶点集，其元素称为顶点，在此问题中 $V$ 中的顶点为 3957 个公汽站点。$E$ 为 $V\times V$ 的一个子集，它是带有方向的边的集合，称为弧集，$E$ 中的元素称为弧或有向边；若 $E$ 中的站点 $i$ 到站点 $j$ 间有直达路线，则称 $(i,j)\in E$，方向为从 $i$ 到 $j$。对于每条有向边，都对应一个边权，边权可根据不同的目标而选择。在此问题中，我们分别将直达时间、直达费用、换乘次数作为边权建立有向赋权图。有向赋权图的示意图如下：

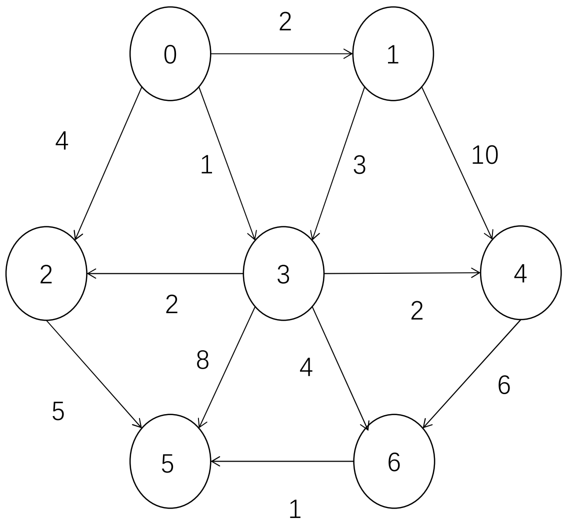


**图 3　有向赋权图示意图**

如图即为有向赋权图的示意图，0 到 1 之间的箭头表示存在顶点 0 到顶点 1 的弧，箭头上的数字 2 表示 0 到 1 这条边的权为 2。

$a)$ 直达时间

以矩阵 $A$ 表示直达路线矩阵, 元素 $a_{ij}$ 取值 0、1，1 表示存在从站点 $i$ 到站点 $j$ 的直达路线，0 表示不存在从站点 $i$ 到站点 $j$ 的直达路线，定义如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}1,i\to j\\0,i=j\quad or\quad i\nrightarrow j\end{cases}$$

以矩阵 $B$ 表示直达时间矩阵，元素 $b_{ij}$ 表示站台 $i$ 到站台 $j$ 的最小直达时间，定义如下：

$$b_{ij}=\begin{cases}\quad 0,i=j\\t_{ij},a_{ij}\neq 0\\\infty,otherwise\end{cases}$$

其中 $t_{ij}=\min\limits_{k}\{3(|l_{ij}^{(k)}|-1)\},1\leq k\leq n,|l_{ij}^{(k)}|$ 表示第 $k$ 条从 $i$ 直达 $j$ 的线路中的站台个数。

例如，若第 $k$ 条线路为 $i\to 2234\to 3452\to j$, 则此时 $l_{ij}^{(k)}=4$。进一步，$t_{ij}$ 表示所有线路中站台 $i$ 到站台 $j$ 的最短直达时间。

若将直达时间作为边权，求解此图论模型，则问题变为最短路问题，可解出最终总直达时间最少的公汽路线。但矩阵 $B$ 仅考虑了公汽站与公汽站之间的行驶时间，未考虑换乘情形下的换乘时间，导致模型存在一定问题。针对此现象，我们对矩阵 $B$ 进行“针对性融合处理”，即将换乘时间也考虑进直达时间矩阵，分析过程如下：

若某公汽路线为 $a \to s(1) \to s(2) \to \ldots \to s(m) \to \ldots \to s(w) \to b, 1 \le m \le w$, $s(1), s(2), \ldots, s(w)$ 均为经停站，为简化问题，我们将起点也作为经停站。当 $m \ne w$ 时，即 $s(m)$ 为不与终点相邻的经停站，此类经停站一旦向下一非终点的经停站行驶，便会存在换乘时间，如从 $s(m)$ 到 $s(m+1)$ 的时间为 $3+5$，需要加上换乘时间，当 $m = w$ 时，$s(w)$ 到 $b$ 的时间就仅为 3，因为此时到达终点站，路线停止，不存在换乘情况。故此时该路线的总时间为 $3(w+2)+5w$。基于上述分析，我们对矩阵 $B$ 改进如下：

当求 $a \to b$ 的最佳路线时，令

$$\hat{t}_{ij} = \begin{cases} t_{ij}+5, j \ne b \\ t_{ij}, j = b \end{cases}$$

$$\hat{b}_{ij} = \begin{cases} 0, i = j \\ \hat{t}_{ij}, a_{ij} \ne 0 \\ \infty, otherwise \end{cases}$$

$\hat{B} = (\hat{b}_{ij})_{n\times n}$，则 $\hat{B}$ 表示加入换乘时间的融合直达时间矩阵，且针对不同的终点融合直达时间矩阵也不同，故称“针对性融合处理”。再将融合直达时间作为边权，便可利用经典算法 Dijkstra 对此图论模型进行求解。

$b$) 直达费用

记

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, \text{单一票制 1 元} \\ 0, \text{分段计价格} \end{cases}$$

$$g_{ij} = \begin{cases} \min\limits_{k} \left\{ |l_{ij}^{(k)}| \right\} - 1, i \ne j \\ 0, i = j \end{cases}$$

其中 $|l_{ij}^{(k)}|$ 与 $a$) 定义相同，$g_{ij}$ 表示从站台 $i$ 直达到站台 $j$ 的最小经停站数。

以 $c_{ij}$ 定义为 $i \to j$ 的直达费用，则

$$c_{ij} = \begin{cases} 0, i = j \\ h_{ij}, a_{ij} \ne 0 \\ \infty, otherwise \end{cases}$$

其中

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, e_{ij} = 1 \\ 1, e_{ij} = 0, 1 \le g_{ij} \le 20 \\ 2, e_{ij} = 0, 21 \le g_{ij} \le 40 \\ 3, e_{ij} = 0, g_{ij} \ge 41 \end{cases}$$

$h_{ij}$ 反映了在单次乘车下不同计价方式产生的费用情况。

令 $C=(c_{ij})_{n\times n}$，则 $C$ 表示直达费用矩阵。

$c$) 换乘次数矩阵

依然以 $a$ 为起点，$b$ 为终点。记

$$s_{ij}=\begin{cases}1,j\neq b\\0,j=b\end{cases}$$

按照融合直达时间矩阵定义的思想，$s_{ij}$ 表示若站台 $i$ 不是直达终点，则存在一次换乘，若站台 $i$ 直达终点，则停止，不存在换乘。令

$$d_{ij}=\begin{cases}0,i=j\\s_{ij},a_{ij}\neq 0\\\infty,otherwise\end{cases}$$

则 $D=(d_{ij})_{n\times n}$ 表示换乘次数矩阵。

### 3.3 Dijkstra 算法求解

分别将直达时间、直达费用、换乘次数作为边权后，问题可抽象为最短路问题，即分别求解总时间最短、总费用最少、总换乘次数最少的最佳路线。故我们采用 Dijkstra 算法进行求解。主要步骤如下：

step1: 将带权有向图 $\vec{G}=(V,E,W)$ 的顶点集合 $V$ 分为两组，第一组为已求出最短路径的顶点集合，记为 $S$，初始时 $S$ 只包含起点 $a$。第二组为其余未确定最短路径的顶点集合，记为 $U$，$U$ 包含除 $a$ 外的其他顶点，且 $U$ 中顶点的距离为起点 $a$ 到该顶点的距离。如若存在 $a$ 到 $v$ 的弧，则 $a$ 到 $v$ 的距离即为 $(a,v)$ 边的权重；若不存在 $a$ 到 $v$ 的弧，则 $a$ 到 $v$ 的距离为 $\infty$。

step2: 从 $U$ 中选出距离最短的顶点 $u$，并将顶点 $u$ 加入到 $S$ 中；同时，从 $U$ 中移除顶点 $u$。

step3: 更新 $U$ 中各顶点到起点 $a$ 的距离。例如，若 $(a,v)$ 的距离大于 $(a,u)+(u,v)$ 的距离，则将 $(a,v)$ 的距离更新为 $(a,u)+(u,v)$ 的距离。

step4: 重复 step2 和 step3，直到遍历完所有顶点，即可求出起点 $a$ 到其他所有点的最短距离。

经 Dijkstra 算法输出，最终结果如下表所示，由于方案众多，我们只展示每种目标下的一种方案。根据优先原则，即当花费差距不超过 3 元时，优先考虑总时间及换乘次数最少的方案，且在总时间相差不超过 20min 的情况下，优先考虑换乘次数，我们同时输出 3 种方案的最优方案。以 $*$ 代表综合考虑后的推荐路线。推荐原则如下：

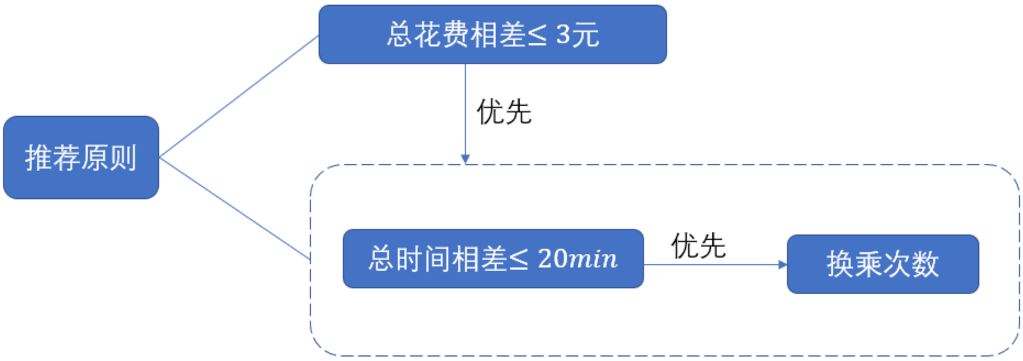


**图 4　推荐原则**

**表 1　S3359→S1828 路线**

| | 总时间 | 总费用 | 换乘次数 | 路线 | 总站数 |
|---|---|---|---|---|---|
| * 总时间最少 | 67 | 3 | 2 | $3359 \xrightarrow[1站]{L474} 2903 \xrightarrow[16站]{L485} 1784 \xrightarrow[1站]{L217} 1828$ | 18 |
| 总花费最少 | 119 | 3 | 1 | $3359 \xrightarrow[33站]{L436} 3512 \xrightarrow[4站]{L217} 1812$ | 37 |
| 换乘次数最少 | 119 | 3 | 1 | $3359 \xrightarrow[33站]{L436} 3512 \xrightarrow[4站]{L217} 1812$ | 37 |

**表 2　S1557→S0481 路线**

| | 总时间 | 总费用 | 换乘次数 | 路线 | 总站数 |
|---|---|---|---|---|---|
| * 总时间最少 | 102 | 4 | 3 | $1557 \xrightarrow[12站]{L363} 1919 \xrightarrow[3站]{L189} 3186 \xrightarrow[11站]{L317} 902 \xrightarrow[3站]{L516} 481$ | 29 |
| 总花费最少 | 160 | 3 | 2 | $1557 \xrightarrow[14站]{L84} 978 \xrightarrow[15站]{L47} 1402 \xrightarrow[20站]{L460} 481$ | 49 |
| 换乘次数最少 | 160 | 3 | 2 | $1557 \xrightarrow[14站]{L84} 978 \xrightarrow[15站]{L47} 1402 \xrightarrow[20站]{L460} 481$ | 49 |

**表 3　S0971→S0485 路线**

| | 总时间 | 总费用 | 换乘次数 | 路线 | 总站数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 总时间最少 | 105 | 4 | 3 | $971 \xrightarrow[9站]{L310} 1521 \xrightarrow[5站]{L137} 3501 \xrightarrow[14站]{L290} 2159 \xrightarrow[2站]{L469} 485$ | 30 |
| * 总花费最少 | 131 | 3 | 1 | $971 \xrightarrow[20站]{L13} 2184 \xrightarrow[21站]{L417} 485$ | 41 |
| 换乘次数最少 | 197 | 5 | 1 | $971 \xrightarrow[13站]{L41} 1215 \xrightarrow[22站]{L377} 485$ | 63 |

**表 4　S0008→S0073 路线**

| | 总时间 | 总费用 | 换乘次数 | 路线 | 总站数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 总时间最少 | 62 | 5 | 4 | $8 \xrightarrow[2站]{L43} 1690 \xrightarrow[5站]{L476} 2085 \xrightarrow[1站]{L406} 609 \xrightarrow[3站]{L328} 525 \xrightarrow[3站]{L118} 73$ | 14 |
| * 总花费最少 | 80 | 2 | 1 | $8 \xrightarrow[20站]{L159} 491 \xrightarrow[4站]{L459} 73$ | 24 |
| 换乘次数最少 | 119 | 3 | 1 | $8 \xrightarrow[1站]{L472} 1382 \xrightarrow[36站]{L282} 73$ | 37 |

**表 5　S0148→S0485 路线**

| | 总时间 | 总费用 | 换乘次数 | 路线 | 总站数 |
|---|---|---|---|---|---|
| * 总时间最少 | 105 | 3 | 2 | $148 \xrightarrow[14站]{L308} 1842 \xrightarrow[4站]{L123} 2266 \xrightarrow[12站]{L469} 485$ | 30 |
| 总花费最少 | 130 | 3 | 2 | $148 \xrightarrow[5站]{L24} 3217 \xrightarrow[17站]{L427} 2027 \xrightarrow[17站]{L469} 485$ | 39 |
| 换乘次数最少 | 130 | 3 | 2 | $148 \xrightarrow[5站]{L24} 3217 \xrightarrow[17站]{L427} 2027 \xrightarrow[17站]{L469} 485$ | 39 |

**表 6　S0087→S3676 路线**

| | 总时间 | 总费用 | 换乘次数 | 路线 | 总站数 |
|---|---|---|---|---|---|
| 总时间最少 | 49 | 3 | 2 | $87 \xrightarrow[1站]{L454} 88 \xrightarrow[10站]{L231} 427 \xrightarrow[1站]{L462} 3676$ | 12 |
| * 总花费最少 | 59 | 2 | 1 | $87 \xrightarrow[6站]{L216} 145 \xrightarrow[11站]{L506} 3676$ | 17 |
| 换乘次数最少 | 59 | 2 | 1 | $87 \xrightarrow[6站]{L216} 145 \xrightarrow[11站]{L506} 3676$ | 17 |