# Cálculo del factor de Gamow mediante la ecuación de Schrödinger

## Para el decaimiento alfa de uranio 238

Alejandro Bravo    Camila Henríquez

FCFM-Uchile
Profesor: Hugo Arellano
Auxiliar: Matías Escobari

FI6012-1 Introducción a la Física Nuclear

# Tabla de contenidos

# Tabla de contenidos

# Problema a resolver

Se busca resolver la ecuación de Schrödinger. Se plantea un potencial tipo pozo con 3 zonas: zona 1 y zona 3 sin potencial. Zona 2 cuenta con un potencial.

- Ecuación zona 1: $\frac{-\hbar^2}{2m}\phi_1'' = E\phi_1$; cuya solución es $\phi_1(x) = A * e^{iKx} + B * e^{-iKx}$, con $K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.

# Problema a resolver

Se busca resolver la ecuación de Schrödinger. Se plantea un potencial tipo pozo con 3 zonas: zona 1 y zona 3 sin potencial. Zona 2 cuenta con un potencial.

- Ecuación zona 1: $\frac{-\hbar^2}{2m}\phi_1'' = E\phi_1$; cuya solución es $\phi_1(x) = A * e^{iKx} + B * e^{-iKx}$, con $K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.
- Ecuación zona 3: $\frac{-\hbar^2}{2m}\phi_3'' = E\phi_3$; cuya solución es $\phi_3(x) = F * e^{iKx}$.

# Problema a resolver

Ecuación zona 2: $\frac{-\hbar^2}{2m}\phi_2'' + V(x)\phi_2 = E\phi_2$.
$V(x) \sim \frac{1}{x}$

# Problema a resolver

Ecuación zona 2: $\frac{-\hbar^2}{2m}\phi_2'' + V(x)\phi_2 = E\phi_2$.
$V(x) \sim \frac{1}{x}$
Se plantean dos soluciones L.I. $u_1(x)$ y $u_2(x)$ tales que
$\phi_{2(x)} = C * u_1 + D * u_2$.

# Tabla de contenidos

# Decaimiento alfa a estudiar

Se elige decaimiento uranio 238: ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + +\alpha + Q_\alpha$.

- $Q_\alpha$ por AME 2016: $\Delta({}^{238}U) - \Delta({}^{234}Th) - \Delta({}^{4}\alpha) = 4.27[MeV]$.

# Decaimiento alfa a estudiar

Se elige decaimiento uranio 238: ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + +\alpha + Q_\alpha$.

- $Q_\alpha$ por AME 2016: $\Delta({}^{238}U) - \Delta({}^{234}Th) - \Delta({}^{4}\alpha) = 4.27[MeV]$.
- $Q_\alpha = E$.

# Decaimiento alfa a estudiar

Se elige decaimiento uranio 238: ${}^{238}_{92}U \rightarrow^{234}_{90} Th + +\alpha + Q_\alpha$.

- $Q_\alpha$ por AME 2016: $\Delta({}^{238}U) - \Delta({}^{234}Th) - \Delta({}^{4}\alpha) = 4.27[MeV]$.
- $Q_\alpha = E$.
- $R = R_{Th} + R_\alpha = 9.3[fm]$.

# Decaimiento alfa a estudiar

Se elige decaimiento uranio 238: ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + +\alpha + Q_\alpha$.

- $Q_\alpha$ por AME 2016: $\Delta({}^{238}U) - \Delta({}^{234}Th) - \Delta({}^{4}\alpha) = 4.27[MeV]$.
- $Q_\alpha = E$.
- $R = R_{Th} + R_\alpha = 9.3[fm]$.
- $V_{coul}(r) = \frac{e^2 Z_{Th} Z_\alpha}{r}$.

# Decaimiento alfa a estudiar

Se elige decaimiento uranio 238: ${}^{238}_{92}U \rightarrow^{234}_{90} Th + +\alpha + Q_\alpha$.

- $Q_\alpha$ por AME 2016: $\Delta({}^{238}U) - \Delta({}^{234}Th) - \Delta({}^{4}\alpha) = 4.27[MeV]$.
- $Q_\alpha = E$.
- $R = R_{Th} + R_\alpha = 9.3[fm]$.
- $V_{coul}(r) = \frac{e^2 Z_{Th} Z_\alpha}{r}$.
- $V_{coul}(R_c) = Q_\alpha$.

# Decaimiento alfa a estudiar

Se elige decaimiento uranio 238: ${}^{238}_{92}U \rightarrow {}^{234}_{90}Th + +\alpha + Q_\alpha$.

- $Q_\alpha$ por AME 2016: $\Delta({}^{238}U) - \Delta({}^{234}Th) - \Delta({}^{4}\alpha) = 4.27[MeV]$.
- $Q_\alpha = E$.
- $R = R_{Th} + R_\alpha = 9.3[fm]$.
- $V_{coul}(r) = \frac{e^2 Z_{Th} Z_\alpha}{r}$.
- $V_{coul}(R_c) = Q_\alpha$.
- $R_c = 60.616[fm]$.

# Tabla de contenidos

# Resolución numérica

Sistema de 4 ecuaciones (continuidad en bordes) y 5 incognitas (constantes A,...,F)

- $\phi_1(0) = \phi_2(0)$
- $\phi_1'(0) = \phi_2'(0)$
- $\phi_2(R_c) = \phi_3(R_c)$
- $\phi_2'(R_c) = \phi_3'(R_c)$

Donde factor G $= |D/A|^2$

# Resolución numérica

Ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -u_1(0) & -u_2(0) & 0 \\ 0 & 0 & u_1(R_c) & u_2(R_c) & exp(ikR_c) \\ ik & -ik & -u_1'(0) & -u_2'(0) & 0 \\ 0 & 0 & u_1'(R_c) & u_2'(R_c) & -ikexp(ikR_c) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Lo que da un valor del factor de Gamow: $G_{num} = 75.79$

# Resolución numérica

Masa reducida $m = \frac{m_\alpha m_{Th}}{m_\alpha + m_{Th}}$.

```python
"""
Solución factor de Gamow para átomo de Uranio-238
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy.lib import scimath as SM

m = 3662.634                    # Masa reducida sistema en MeV
hbar = 197                      # hbar*c
E = 4.27                        # energia particula alfa de U-235
Z_th = 90
Z_alfa = 2                      # numero protones atomo elegido
e = np.sqrt(hbar/137)           # carga electron

r_a = 9.3 - 9.3                 # 9.3 fm radio inicio de integracion en fm
r_b = 60.616  - 9.3            # radio fin de integracion
h = 0.1                         # paso
r = np.arange(r_a, r_b, h)
```

Figure: Código 1° parte

# Resolución numérica

```python
def potencial(r):
    return Z_th * Z_alfa * e*e / (r + 9.3)


def paso_verlet(h, phi_0, phi_1, r):
  phi_2 = h**2 * 2*m/hbar**2 * (potencial(r)-E)*phi_1 + 2*phi_1 - phi_0
  return phi_2


def verlet(ci0, ci1, h, r):
  verlet_array = np.zeros(len(r))
  verlet_array[0] = ci0
  verlet_array[1] = ci1
  for i in range(2, len(r)):
    verlet_array[i] = paso_verlet(h, verlet_array[i-2], verlet_array[i-1], r[i])
  return verlet_array

# Sol dentro de potencial  u = C*u1 + D*u2
u1 = verlet(0, 0.1, h, r)
u2 = verlet(0.1, 0.1, h, r)
```

Figure: Código 2° parte

# Resolución numérica

```
# visualizacion funciones u1 y u2
r = np.arange(r_a, r_b*2, h)
u1 = verlet(0, 0.1, h, r)
u2 = verlet(0.1, 0.1, h, r)
plt.figure()
plt.clf()
plt.plot(r, u1, label='u1(r)')
plt.plot(r, u2, label='u2(r)')
plt.xlabel('r [fm]')
plt.ylabel('phi(r)')
plt.legend()
plt.show()
```

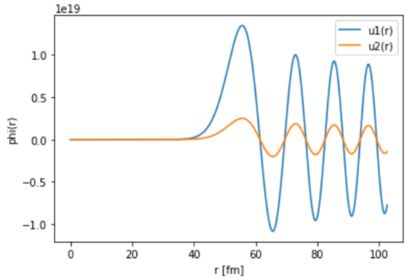


Figure: Código 3° parte

# Resolución numérica

```
[58] # Valores de las derivadas en bordes r=0 y r= r_b
     u1_dot0 = (u1[1] - u1[0]) / h
     u2_dot0 = (u2[1] - u2[0]) / h
     u1_dotR = (u1[-1] - u1[-2]) / h
     u2_dotR = (u2[-1] - u2[-2]) / h
```

```
[61] k1 = np.sqrt(2*m*E/hbar**2)
     v0 = 0.
     k3 = SM.sqrt((E-v0)*2*m/hbar**2)
     # Sistema de ecuaciones
     eq1 = np.array([1, 1, -u1[0], -u2[0], 0])
     eq2 = np.array([0, 0, u1[-1], u2[-1], -np.exp(k3*r_b*1j)])
     eq3 = np.array([k1*1j, -k1*1j, -u1_dot0, -u2_dot0, 0])
     eq4 = np.array([0, 0, u1_dotR, u2_dotR, -1j*k3*np.exp(k3*r_b*1j)])
     eq5 = np.array([0, 0, 0, 1, 0])   # eq auxiliar

     M = np.array([eq1, eq2, eq3, eq4, eq5])
     b = np.zeros(5)
     b[4] = 1       # imponemos valor sobre D para obtener razon

     sol = np.linalg.solve(M, b)
```

Figure: Código 4° parte

```python
# sol = [A, B, C, D, F]
A = sol[0]
D = sol[3]
razon = np.abs(D/A)**2
print('Valor calculado de Factor de Gamow U-235:', round(razon, 2))
print('Valor teorico de Factor de Gamow U-235: 85.8')
```

```
Valor calculado de Factor de Gamow U-235: 75.79
Valor teorico de Factor de Gamow U-235: 85.8
```

Figure: Código 5° parte

# Tabla de contenidos

# Comparación con valor encontrado en clases

Gamow: $G = 2\int_{R}^{R_c} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{coul} - Q_\alpha)}\, dr$.

- Cambio de variable: $r = R_c * y$. Queda: $G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{\frac{R}{R_c}}^{1} \sqrt{\frac{Q_\alpha}{y} - Q_\alpha} R_c\, dy$.

# Comparación con valor encontrado en clases

Gamow: $G = 2\int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{coul} - Q_\alpha)}\, dr$.

- Cambio de variable: $r = R_c * y$. Queda:
  $G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{\frac{R}{R_c}}^{1} \sqrt{\frac{Q_\alpha}{y} - Q_\alpha} R_c\, dy$.
- Resolviendo, se obtiene:
  $G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \sqrt{Q_\alpha} R_c (arccos(\sqrt{\frac{R}{R_c}}) - \sqrt{\frac{R}{R_c}}\sqrt{1 - \frac{R}{R_c}})$.

# Comparación con valor encontrado en clases

Gamow: $G = 2\int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_{coul} - Q_\alpha)}\, dr$.

- Cambio de variable: $r = R_c * y$. Queda: $G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{\frac{R}{R_c}}^{1} \sqrt{\frac{Q_\alpha}{y} - Q_\alpha} R_c\, dy$.
- Resolviendo, se obtiene: $G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{Q_\alpha} R_c(arccos(\sqrt{\frac{R}{R_c}}) - \sqrt{\frac{R}{R_c}}\sqrt{1 - \frac{R}{R_c}})$.
- Se usa $\frac{R}{R_c} << 1$.
- Evaluando: $G = 85.8$.