第 四 章 随 机 变 量 的数字特征

第四节 n维正态随机变量

1、 n维正态随机变量的定义

2、 n维正态随机变量的性质

定义：设 n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的协方差矩阵

$C=(C_{ij})$是n阶正定对称矩阵,其联合概率密度为

$$\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

其中 $X=(x_1,x_2,\ldots x_n)'$ $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_n)'$

则称n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$服从n维正态分布

注：

1) $E(X_i)=\mu_i$ $D(X_i)=\sigma_i^2$

2) $\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$

n维正态随机变量$(X_1,X_2,\ldots.X_n)$的性质：

1) 相互独立的正态随机变量的有限非零线性组合仍服从正态分布.(正态分布具有可加性)

2) n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots.X_n)$服从正态分布的充分必要条件是：$X_1,X_2,\ldots.X_n$的任意非零线性组合

$$l_1X_1+l_2X_2+\ldots.\ l_nX_n$$

服从正态分布. $(l_1, l_2,\ldots., l_n$不全为0)

3) $X_1,X_2,\ldots.X_n$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$ $\rho_{ij}=0\ \ (i\neq j)$

4) $X_1,X_2,\ldots.X_n$ 相互独立 $\Longleftrightarrow$ 协方差矩阵为对角阵.

5) $$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \sim N(B\mu, BCB^T)$$

例: (X_1,X_2,X_3)是三维正态随机变量.则

$X_1+X_2-X_3$， X_1-X_2 服从正态分布.

$(X_1+X_2$， $X_1-X_2)$是二维正态随机变量.

若X_1,X_2,X_3两两独立,则X_1,X_2,X_3相互独立.

综　述

1.随机变量X的数学期望E(X) (离散型，连续型).

2.随机变量X的函数g(X)的数学期望 E(g(X)) .

3.二维随机变量(X,Y)的函数 g(X,Y) 的数学期望 E(g(X,Y)) .

4.数学期望的性质.

5.随机变量X 的方差D(X)(离散型，连续型).

6.方差的性质.

7.随机变量X 的k阶原点矩 $\nu_k(X)=E(X^k)$

8.随机变量X的k阶中心矩 $\mu_k(X)=E\{[X-E(X)]^k\}$

9.随机变量X与Y的协方差及其性质

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=E(XY)-E(X)E(Y)$$

10.随机变量X与Y的相关系数及其性质

$$R(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

11.切比雪夫不等式

$$P\left[\left|X-E(X)\right|\geq\varepsilon\right]\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$