第 四 章　随 机 变 量 的数字特征

第一节 数学期望

1、随机变量的数学期望

2、常见分布的数学期望

3、随机变量的函数的数学期望

4、随机变量的数学期望的性质

5、小结、思考

赌博彩金问题中,庄家付出的彩金Y的分布律为:

Y	0	0.05	0.2	2
$P\{Y=y_i\}$	0.5001	0.3589	0.1282	0.0128

假设进行了100人次的赌博,则他可能需付出的彩金为:

0*0.5001*100+0.05*0.3589*100+0.2*0.1282*100+2*0.0128*100=1.7945+2.564+2.56=6.9185(元)

平均每人次付出的彩金为:

0.06919=0*0.5001+0.05*0.3589+0.2*0.1282+2*0.0128= $\sum_{i=1}^{4} y_i P\{Y=y_i\}$

■

一. 随机变量的数学期望

定义：

设 X是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X = x_i\} = p_i \qquad i = 1,2,3....$$

若： $\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i| p_i < +\infty$ 则称

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} x_i p_i$$ 为X的数学期望

设连续型随机变量X的概率密度为$f(x)$,若

若： $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<+\infty$ 称

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ 为X的数学期望（均值）

注：

并非所有的随机变量X都存在数学期望。

例4.1.1 1)设R.V.X服从拉普拉斯分布,其概率密度为:

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}\qquad -\infty<x<+\infty$$

求 E(X)

2)设R.V.Y服从柯西分布,其概率密度为:

$$f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\qquad -\infty<x<+\infty$$

求 E(X)

解: 1) $E(X)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-|x|}dx=0$

被积函数为奇函数且积分区间关于原点对称

被积函数为奇函数且积分区间关于原点对称

$$\cancel{2)\ E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}\frac{x}{1+x^2}dx=0}$$

■

1. $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X)=\lambda$

证明：$P\{X=k\}=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \quad k=0,1,2,\ldots.$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda$$

■

2. $X \sim B(n, p)$ 则 $E(X) = np$

证明：$P\{X = k\} = C_n^k (1-p)^{n-k} p^k \quad k = 0,1,2,\ldots,n$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k (1-p)^{n-k} p^k$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} p^{k-1}$$

$$= np[p + (1-p)]^{n-1}$$

$$= np$$

■

3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 则 $E(X) = \mu$

证明：$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$

$$\overset{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\mu + \sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sigma te^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mu e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$= \mu$$

■

4.两点分布

X	0	1
P	1-p	p

$E(X)=p$

5.均匀分布

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$E(X)=(b+a)/2$

6.指数分布

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad \lambda>0$$

$E(X)=\lambda^{-1}$

二. 随机变量的函数的数学期望

定理：设 Y是随机变量X的函数$Y=g(X)$, $g(x)$为连续函数

1) X是离散型随机变量，其分布律为

$$P\{X = x\} = p_i \qquad i = 1,2,3....$$

若： $\sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i$绝对收敛，则有

$$E(Y) = E[g(X)] = \sum_{i=1}^{+\infty} g(x_i)p_i$$

2) X是连续型随机变量，其概率密度为$f(x)$,

若： $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x)dx < +\infty$ 则

$$E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$$

例:4.1.2 设X,Y相互独立,且

$$P\{X=x_i\}=P_{i.} \quad i=1,2,\dots$$

$$P\{Y=y_j\}=P_{.j} \quad j=1,2,\dots$$

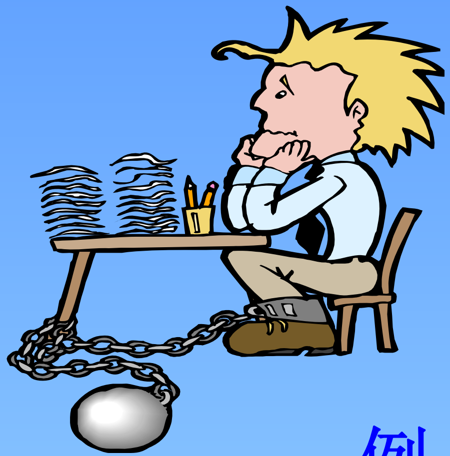
$E(X)$, $E(Y)$存在,求$E(XY)$

解: $$E(XY)=\sum_i\sum_j x_i y_j P\{X=x_i, Y=y_j\}$$

$$=\sum_i\sum_j x_i y_j P_{i.}P_{.j}=\sum_i x_i P_{i.}\sum_j y_j P_{.j}$$

$$=E(X)E(Y)$$

■



思考：一元函数的期望定理如何推广到二维甚至更多维的情况？

例： (X,Y)是连续型随机变量，其联合概率密度为$f(x,y)$,则当：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(x,y)\right| f(x,y)dxdy < +\infty$$

时，**有：**

$$E\big(G(X,Y)\big)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}G(x,y)f(x,y)dx\,dy$$

例:4.1.3 X ,Y相互独立,且服从$N(0,1)$分布.
试求$E[min(X,Y)]$

解: $E[min(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} min(x,y) f(x,y) dx\right] dy$

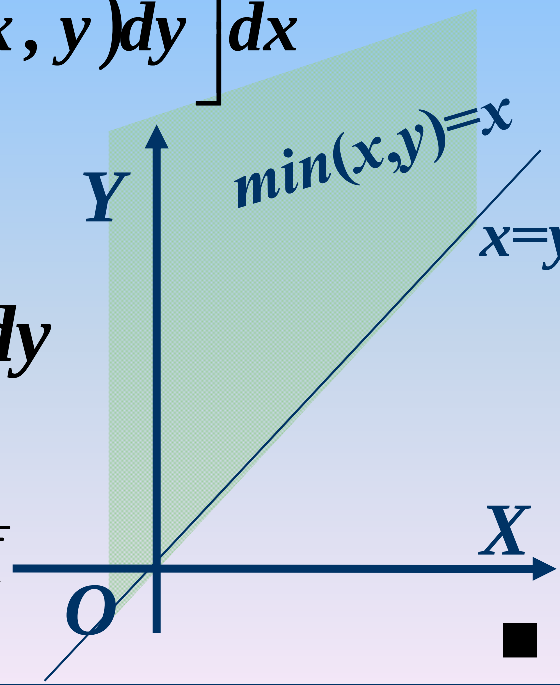
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y} xf(x,y)dx\right]dy + \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty} yf(x,y)dx\right]dy$$

$$\because \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{y}^{+\infty} yf(x,y)dx\right]dy = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{x} yf(x,y)dy\right]dx$$

又$\because f(x,y)$关于x,y对称

$$\therefore E[min(X,Y)] = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y} xf(x,y)dx\right]dy$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{y} x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dx\right]dy \quad = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$



■

练习：设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X, Y \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$

则 $E\left(|X-Y|\right) =$ ________

解法一：$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} \quad (x,y) \in R^2$

$$E\left(|X-Y|\right) = \iint_{R^2} |x-y| f(x,y) d\sigma = \cdots\cdots\cdots = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

解法二：$\left.\begin{array}{l} X, Y\text{相互独立} \\ -Y \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{具有可加性}]{\text{正态分布}} X - Y \sim N(0,1)$

$$E\left(|X-Y|\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[-e^{-\frac{z^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \blacksquare$$

三. 随机变量的数学期望的性质

设X , $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是随机变量，c,b 是常数。

1）$E(cX+b)=cE(X)+b$

2）$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

3）若$X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立，则

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

例:4.1.4

证明: $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}= E(XY)- E(X)E(Y)$

$$\text{证明:左边} = E\{XY - YE(X) - XE(Y) + E(X)E(Y)\}$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y)$$
$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

■

例:4.1.5 随机变量X 的分布为：

$$P\{X=m\}=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n \quad m=0,1,2,\ldots,n \quad n\le M\le N$$

试求 $E(X)$

原始模型：N个球中有M个红球，余下为白球，从中任取n个球，n个球中的红球数为X

分析：1）显然直接求解很困难。因此应该想到用数学期望的性质求解。

2）可以设想这n个球是逐个不放回抽取的，共取了n次。令X_i表示第i次取到红球的个数。$i=1,2,..n$

则$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$

3) 由抽签的公平性有：$P\{X_i=1\}=M/N$

例:4.1.5随机变量X 的分布律为：

$$P\{X=m\}=C_M^m C_{N-M}^{n-m}/C_N^n \quad m=0,1,2,\ldots,n \quad n\le M\le N$$

试求 $E(X)$

原始模型：N个球中有M个红球，余下为白球，从中任取n个球，n个球中的红球数为X

解：设想这n个球是逐个不放回抽取的，共取了n次。

令X_i表示第i次取到红球的个数。$i=1,2,..n$

则$X=X_1+X_2+\ldots.+X_n$

由抽签的公平性有：$P\{X_i=1\}=M/N$

从而$E(X_i)=1*M/N+0*(1-M/N)=M/N$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{nM}{N}$$

■

例:4.1.6 向某一目标进行射击，直至命中k次为止。已知命中率为$p>0$.求射击次数X的数学期望。

分析：X的分布律为：

$$P\{X=i\}=C_{i-1}^{k-1}p^k(1-p)^{i-k}\qquad i=k,k+1,\ldots$$

$$E(X)=\sum_{i=k}^{+\infty}iC_{i-1}^{k-1}p^k(1-p)^{i-k}$$

直接计算是一件很困难的事。因此考虑用数学期望的性质$X=X_1+X_2+\ldots+X_n$进行求解。

$$\underset{\text{- -}}{1\quad 2\quad \cdot\quad \cdot\quad i\quad \cdot\quad \cdot\quad k}$$

X_i表示第i-1次命中以后，到第i次命中的射击次数。

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_k$$

X_i的分布律为：

X_i	1	2	…..	m	……
$P\{X_i=m\}$	p	$(1-p)p$	…..	$(1-p)^{m-1}p$	……

$$E(X_i)=\sum_{m=1}^{+\infty} m(1-p)^{m-1}p$$

$$=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty} mx^{m-1}\right]_{x=1-p}=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty} x^{m}\right]'_{x=1-p}$$

例:4.1.7 向某一目标进行射击，直至命中k次为止。已知命中率为$p>0$.求射击次数X 的数学期望。

解：设X_i表示第i-1次命中以后，到第i次命中的射击次数。则有$X=X_1+X_2+\ldots.+X_k$ ，X_i的分布律为：

X_i	1	2	…..	m	……
$P\{X_i=m\}$	p	$(1-p)p$	…..	$(1-p)^{m-1}p$	……

$$E(X_i)=\sum_{m=1}^{+\infty}m(1-p)^{m-1}p=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty}mx^{m-1}\right]_{x=1-p}=p\left[\sum_{m=1}^{+\infty}x^{m}\right]'_{x=1-p}=\frac{1}{p}$$

从而 $E(X)=E(X_1)+E(X_2)+\ldots+E(X_k)$

$$=\frac{1}{p}k$$

■