第 八 章 假设检验

第一节 假设检验的基本概念

1、基本概念

2、基本步骤

引　例

在一次社交聚会中，一位女士宣称她能区分在熬好的咖啡中，是先加奶还是先加糖，并当场试验，结果 8 杯中判断正确 7 杯。但因它未完全说正确，有人怀疑她的能力！该如何证明她的能力呢？

在场的一位统计学家给出了如下的**推理思路**：

设该女士判断正确的概率为p

- 原 假 设H_0：　$p=1/2$　即该女士凭猜测判断

  对立假设H_1：$p>1/2$　即该女士确有判断力
- 在假设H_0下，8杯中猜对7杯以上的概率为0.0352

  (用二项分布计算)
- 若H_0正确，则小概率事件发生！--------故拒绝H_0

  即认为该女士确有鉴别能力。

一、基本概念

任一个关于未知分布的假设称为统计假设或简称假设

第一个假设称为原假设或零假设，记为H_0

第二个假设称为对立假设或备择假设，记为H_1

仅涉及总体分布的未知参数的统计假设称为参数假设

仅对未知分布函数的类型或它的某些特征提出假设则称为非参数假设

判断统计假设H_0的方法称为假设检验

例 某车间有一台葡萄糖自动包装机，额定标准为每袋重500克。设每袋产品重量$X\sim N(\mu,15^2)$，某天开工后，为了检验包装机工作是否正常，随机取得9袋产品，称得重量为(单位：克)：

问：这天包装机是否工作正常？

497	506	518	524	498	511	520	515	512

分析：若$\mu=500$(克)，则包装机工作正常；否则不正常。

首先，根据实际问题提出一对假设

$$H_0:\ \mu=500=\mu_0 \qquad H_1:\ \mu\neq\mu_0$$

若依实际情况拒绝了H_0，则表明包装机工作不正常；否则，就表明包装机工作正常。

其次，构造适当的检验统计量

由于 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 是μ的良好估计量，且$\sigma_0^2=15^2$， 故

当H_0成立时，有 $\overline{X}\sim N(\mu_0,\sigma_0^2/n)$ 从而有

$$U=\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$$

然后，确定H_0的拒绝域

对给定的显著水平$\alpha(0<\alpha<1)$，

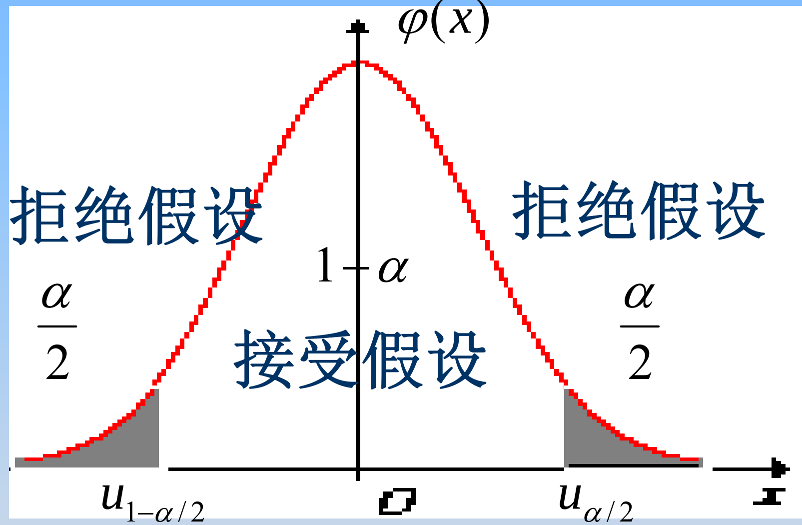
有正态分布表可查得u_α，使得

$$P\{|U|>u_{\alpha/2}\}=\alpha$$

即

$$P\{|U|\le u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$$

于是



$$C=\left\{(x_1,\ldots,x_n):\frac{|\overline{x}-\mu_0|}{\sigma_0/\sqrt{n}}>u_\alpha\right\}$$

称为H_0的拒绝域

(否定区域或临界区域)

最后，下结论(作判断)

对给定的样本值x_1，…，x_n，算出U的具体值

$$u=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}},\quad 其中\ \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

若$|u|>u_{\alpha/2}$(这等价于(x_1，…，x_n)∈C)，则拒绝H_0(而接受H_1)；否则，接受H_0。

该例中，若取α=0.05，查表得：$u_{\alpha/2}$=1.96
由样本可算得：

$$|u|=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=\frac{|511-500|}{15/3}=\frac{11}{5}=2.2$$

由于$|u|$=2.2> 1.96，故在显著性水平α=0.05 之下拒绝H_0，即认为包装机工作不正常。 #

二、两类错误

由前面可知：

假设检验的主要依据是“小概率事件原理”，而小概率事件并非绝对不发生。

统计检验方法是根据样本推断总体，样本只是总体的一个局部，不能完全反映整体特性。

因此，无论接受或拒绝原假设H_0，都可能做出错误的判断，其错误可分为两类：

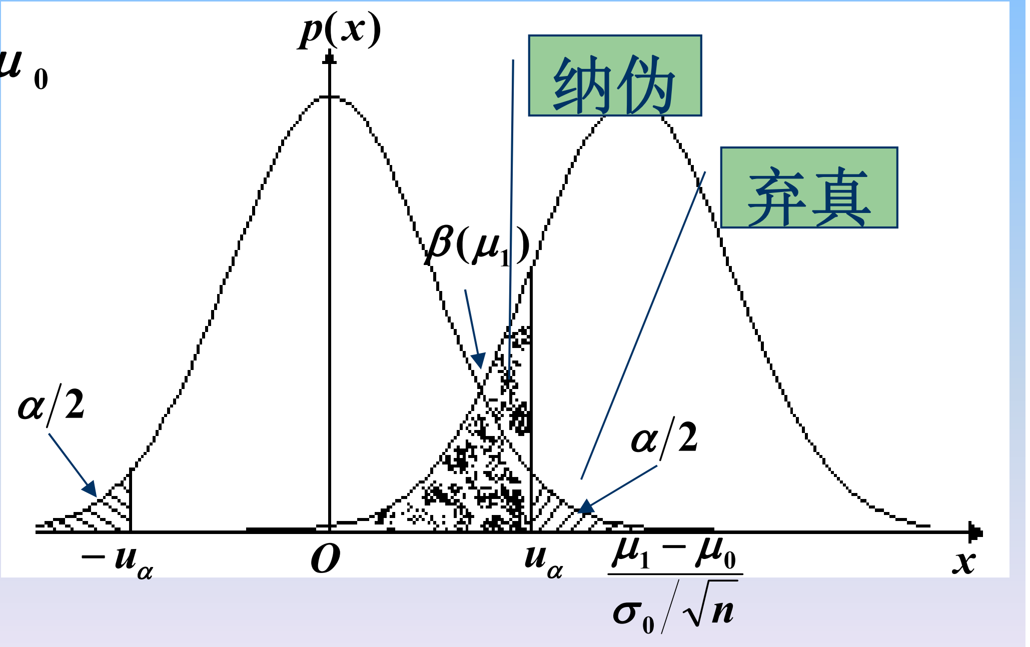
判断的正误 / 真实情况 / 判断	H_0 真	H_1 真
拒绝H_0	犯第一类错误（弃真）	判断正确
接受H_0	判断正确	犯第二类错误（纳伪）

人们希望什么错误都尽可能小，但这不可能！
这两种错误，减小其中一个，必然会使另一个增大

当H_0成立时，$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$ ， $P_{\mu_0}\{|U|>u_\alpha\}=\alpha$

当H_1成立时，(即$\mu\neq\mu_0$) $U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}+\dfrac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N\left(\dfrac{\mu-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}},1\right)$

$P_\mu\{|U|\le u_\alpha\}=\beta(\mu),\quad \mu\neq\mu_0$



图中带斜线的阴影部分面积为犯第一类错误的概率α，在$\mu=\mu_1(\mu_1>\mu_0)$时，斑点阴影部分面积为犯第二类错误的概率$\beta(\mu)$。

假设检验的通常做法是按照奈曼—皮尔逊(Neyman-Pearson)提出的原则：先控制犯第一类错误的概率α，然后再使犯第二类错误的概率尽可能地小$\beta(\mu)$ 。

假设检验的基本步骤

提出原假设：根据实际问题提出原假设H_0和备择假设H_1;

建立检验统计量：寻找一个参数的良好估计量，据此建立一个不带任何未知参数的统计量U作为检验统计量，并在H_0成立的条件下，确定U的分布(或近似分布)；

确定H_0的拒绝域：根据实际问题选定显著性水平α，依据检验统计量的分布和的H_0内容，确定的H_0拒绝域；

对H_0作判断：根据样本值算出检验统计量的统计值u，判断u是否落在拒绝域，以确定拒绝或接受H_0。