第四节 随机变量的函数及其分布

1、离散型随机变量的函数及其分布律

2、连续型随机变量的函数及其概率密度

3、几种特殊函数的分布

4、小结、思考

A :炮击某一目标O，已知弹着点(X,Y)服从二维正态分布. 点(X,Y)与目标O的距离$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 服从什么分布?

B ：由统计物理学,气体分子运动速率 v 服从马克斯维尔分布.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{\alpha^3\sqrt{\pi}}e^{\frac{-x^2}{\alpha^2}} & x>0,\alpha>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

分子运动动能 $\eta=\frac{1}{2}mv^2$ 服从什么分布?

一.离散型随机变量的函数及其分布律

离散型随机变量X 的分布律为

$$P\{X = x_i\} = p_i \qquad i = 1,2,\ldots$$

Y=g(X) 则

$$P\{Y = y_j\} = P\{g(X) = y_j\}$$

$$= \sum_{x_i \in S_j} P\{X = x_i\} \qquad j = 1,2,\ldots$$

其中：$S_j = \{x_i | g(x_i) = y_j\}$

离散型随机变量(X, Y)的分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \qquad i, j = 1,2,\ldots$$

$Z = G(X, Y)$ 则

$$P\{Z = z_k\} = P\{G(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{(x_i, y_j) \in T_k} P\{X = x_i, Y = y_j\} \qquad k = 1,2,\ldots$$

$$T_k = \{(x_i, y_j) \mid G(x_i, y_j) = z_k\}$$

定理:设随机变量(X, Y)是离散型随机变量,X,Y相互独立其分布律为:

$$P\{X = k\} = p(k) \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$P\{Y = r\} = q(r) \quad r = 0,1,2,\ldots$$

则$X+Y$的分布律为:

$$P\{X+Y=m\} = \sum_{k=0}^{m} p(k) q(m-k) \quad m = 0,1,2,\ldots$$

例3.4.1设(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	3/10	3/10
1	3/10	1/10

试求 1) $\sin X$ 2) $X+Y$ 3) XY 4) $Max\,(X,Y)$的分布律.

解:由(X,Y)的分布律得

P	3/10	3/10	3/10	1/10
(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
X	0		1	
$\sin X$	0		$\sin 1$	
$X+Y$	0	1	1	2
XY	0	0	0	1
$Max\,(X,Y)$	0	1	1	1

P	3/10	3/10	3/10	1/10
X	0		1	
$\sin X$	0		$\sin 1$	
(X,Y)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
$X+Y$	0	1	1	2
XY	0	0	0	1
$Max\ (X,Y)$	0	1	1	1

$\sin X$	0	$\sin 1$
P	0.6	0.4

$X+Y$	0	1	2
P	0.3	0.6	0.1

XY	0	1
P	0.9	0.1

$Max\ (X,Y)$	0	1
P	0.3	0.7

■

例3.4.2设X,Y相互独立,且$X\sim B(n_1,p)$，$Y\sim B(n_2,p)$ 则

$X+Y\sim B(n_1+n_2,p)$

证：$P\{X=k\}=C_{n_1}^k p^k(1-p)^{n_1-k} \qquad k=0,1,..n_1$

$$P\{Y=r\}=C_{n_2}^r p^r(1-p)^{n_2-r} \qquad r=0,1,..n_2$$

$$P\{X+Y=m\}=\sum_{k=0}^{m} C_{n_1}^k p^k(1-p)^{n_1-k} C_{n_2}^{m-k} p^{m-k}(1-p)^{n_2-m+k}$$

$$=p^m(1-p)^{n_1+n_2-m}\sum_{k=0}^{m} C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k}$$ 利用 $\sum_{k=0}^{m} C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k}=C_{n_1+n_2}^m$

$$=p^m(1-p)^{n_1+n_2-m}C_{n_1+n_2}^m \qquad m=0,1,..,n_1+n_2$$

二项分布具有可加性

■

二项分布具有可加性

泊松分布具有可加性

若$X_1, X_2,\ldots ,X_n$相互独立, 且$X_i \sim B(1, p)$则

$$X_1+ X_2+\ldots+ X_n \sim B(n, p)$$

反之　若 $X\sim B(n, p)$ 则存在相互独立的　$X_i \sim B(1, p)$

$i=1,2,\ldots n$　　$s.t$

$$X = X_1+ X_2+\ldots+ X_n$$

二.连续型随机变量的函数及其概率密度

设X是连续型随机变量 若$Y=g(X)$也是连续型随机变量

$$F_Y(y)=P\{g(X)\le y\}=\int_{\{x|g(x)\le y\}}f_X(x)dx$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}F_Y'(y) & f_Y(y)\text{的连续点}\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

对于二维的情形可类似给出.

定理: 设随机变量X具有概率密度$f_X(x)$ $-\infty<x<+\infty$ 又设函数$g(x)$处处可导且**恒有$g'(x)>0$** (或$g'(x)<0$) 则$Y=g(X)$是连续型随机变量,其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]|h'(y)| & \alpha<y<\beta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$\alpha=\min(g(-\infty),g(+\infty))\quad \beta=\max(g(-\infty),g(+\infty))$$

例3.4.3 :设$X\sim N(0,1)$，求$Y=X^2$的概率密度

分析:求随机变量的函数的概率密度我们一般是通过求分布函数得到的.

解: 当$y\le 0$ $F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=0$

当$y>0$ $F_Y(y)=P\{X^2\le y\}=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

此时 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2}}\left(\sqrt{y}\right)'-e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2}}\left(-\sqrt{y}\right)'\right]$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}} & y>0\\ o & y\le 0\end{cases}$$

■

例3.4.4设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为:

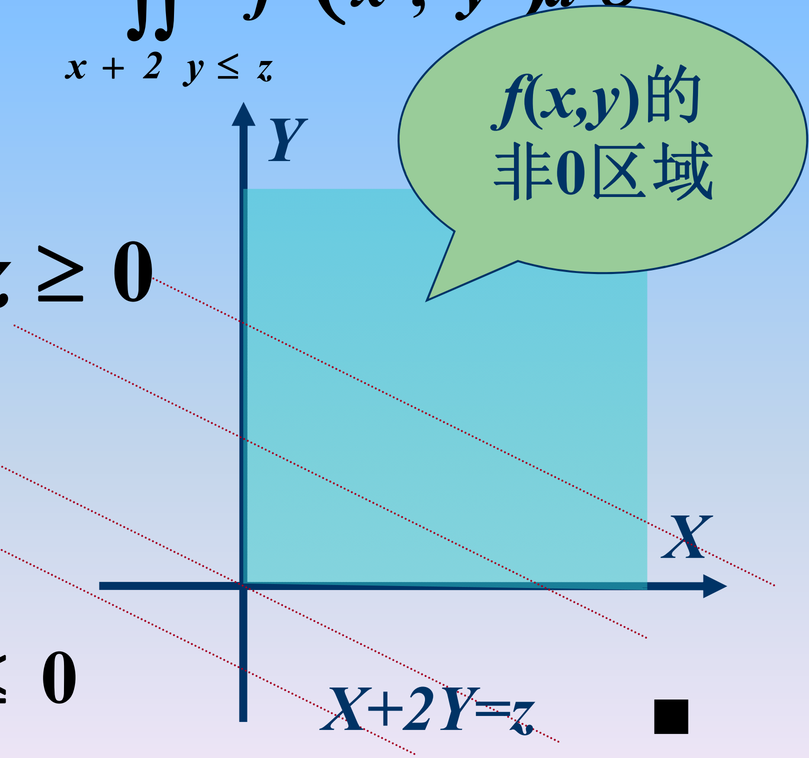
$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(x+2y)} & x,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

求随机变量$Z=X+2Y$的分布函数和概率密度.

解:$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}=\iint\limits_{x+2y\le z} f(x,y)\,d\sigma$

$$=\begin{cases}0 & z<0\\ \int_0^z\left[\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-(x+2y)}dy\right]dx & z\ge 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0 & z<0\\ 1-e^{-z}-ze^{-z} & z\ge 0\end{cases}$$



$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0 & z\le 0\\ ze^{-z} & z>0\end{cases}$$

■

三.几种特殊函数的分布

一般原则：对于二维连续型随机变量（X,Y）的函数$Z=G$（X,Y）的概率密度$f_z(z)$。我们一般是先求出 Z 的分布函数 $F_Z(Z)$

再对$F_Z(Z)$微分得到 $f_z(z)$

$$1.\ M = max\,(X,Y)\quad N = min\,(X,Y)$$

$$F_M(z) = P\{max(X,Y) \le z\}$$
$$= P\{X \le z, Y \le z\} = F(z,z)$$
$$F_N(z) = P\{min(X,Y) \le z\} = P\{X \le z \text{或} Y \le z\}$$
$$= P\{X \le z\} + P\{Y \le z\} - P\{X \le z, Y \le z\}$$
$$= F_X(z) + F_Y(z) - F(z,z)$$

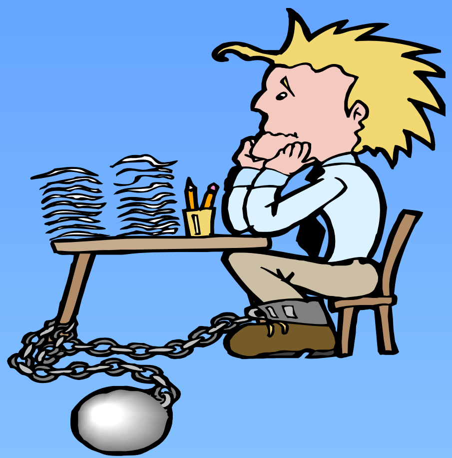
若 X 与 Y 相互独立有：

$$F_M(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

若 X 与 Y 相互独立且具有相同分布有：

从而：

$$F_M(z) = [F_X(z)]^2$$
$$f_M(z) = 2F_X(z)f_X(z)$$



思考：

我们已经知道

$$F_N(z) = P\{min(X,Y) \le z\}$$

$$= P\{X \le z\} + P\{Y \le z\} - P\{X \le z, Y \le z\}$$

若 X 与 Y 相互独立有：

$$f_N(z) = \boxed{f_X(z) + f_Y(z) - f_X(z)F_Y(z) - f_Y(z)F_X(z)}$$

$$\boxed{= f_X(z)[1 - F_Y(z)] + f_Y(z)[1 - F_X(z)]}$$

若 X 与 Y 相互独立且具有相同分布有：

$$\boxed{f_N(z) = 2[1 - F_X(z)]\, f_X(z)}$$

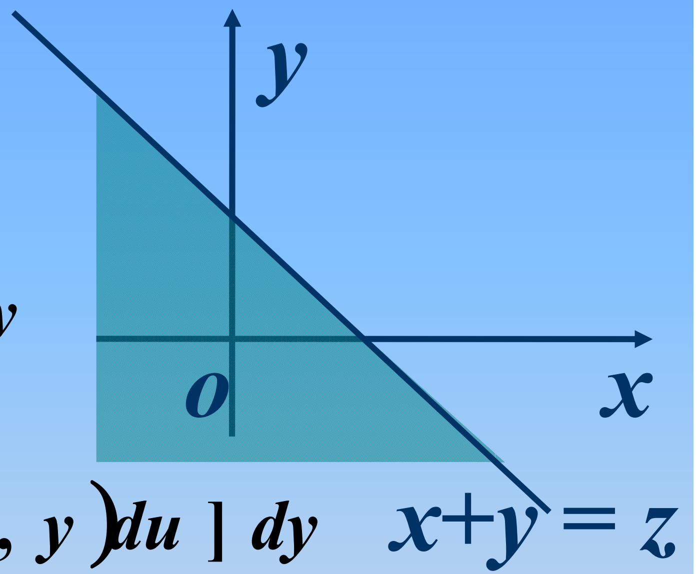
2. $Z=X+Y$ 的分布

设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$

$$F_Z(z)=P\{X+Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-y} f(x,y)dx\right]dy$$



作积分变量变换， 令 $x=u-y$,

则 $$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(u-y,y)du\right]dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u-y,y)dy\right]du$$

由分布函数(连续型)定义 $F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z} f_z(u)\,du$

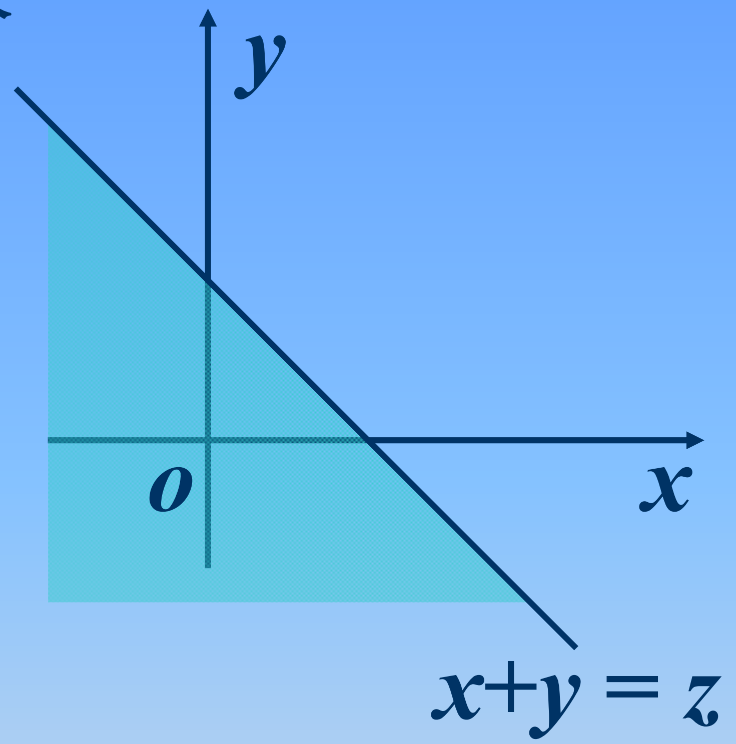
得到公式：$$\boxed{f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy}$$

对于 $Z=X+Y$ 作积分变量变换,令

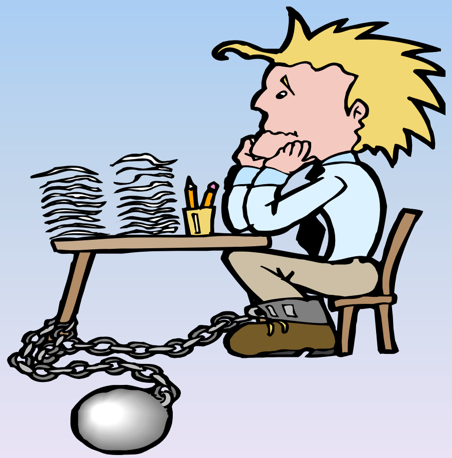
$x = u - y$

得到公式:

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$$



思考:

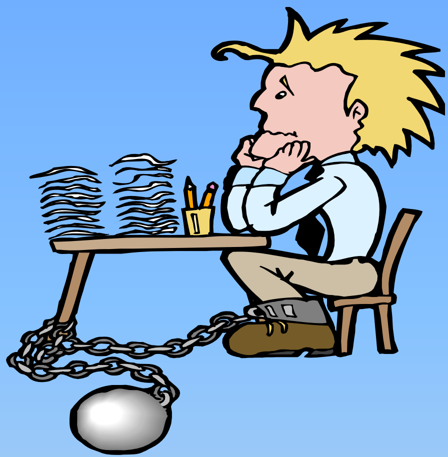


若作积分变量变换, 令

$y = u - x$ 则

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$$

思考：



若随机变量X, Y相互独立，

则有公式：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy$$

或者

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx$$

已知随机变量（X,Y）的联合概率密度 $f(x,y)$ 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_z(z)$我们可以利用下面公式求解

$$\boxed{f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx}$$

$$\boxed{y=z-x}$$

例3.4.5　设随机变量X, Y相互独立，均服从区间$(0,1)$上的均匀分布，求：$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$。

分析：1. X, Y相互独立，所以有：

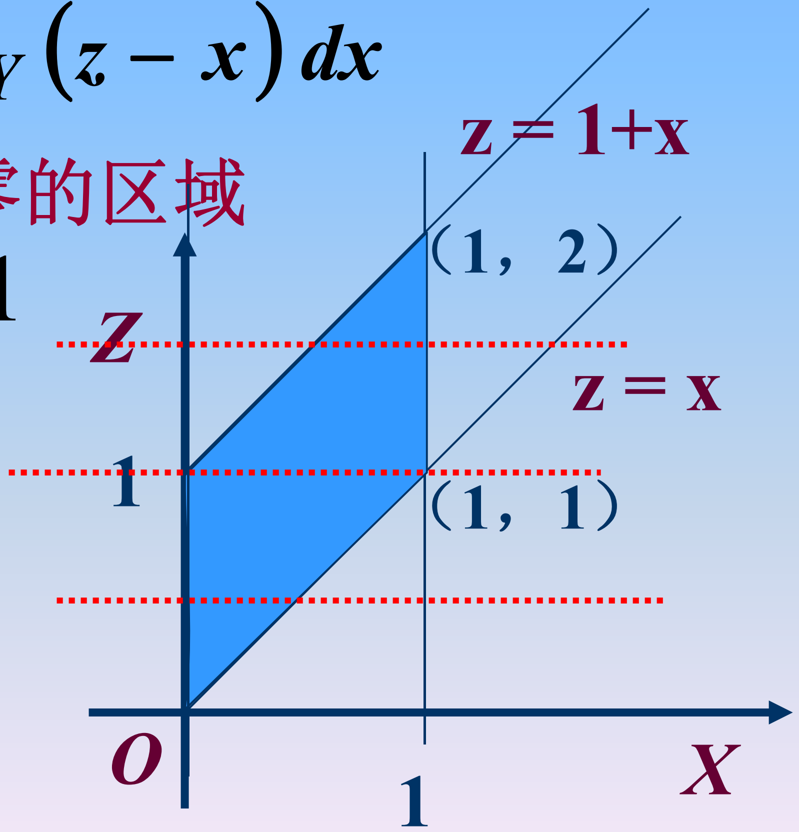
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

2. 使$f_X(x)\,f_Y(z\text{-}x)$为非零的区域为：　$0\le x\le 1\quad 0\le z-x\le 1$

3. $f_Z(z)$的非零区域为：

$0\le z\le 2$

4.在不同的区间段 积分的上下限是不相同的。



例3.4.5：设随机变量X, Y相互独立,均服从区间$(0，1)$上的均匀分布，求：$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$。

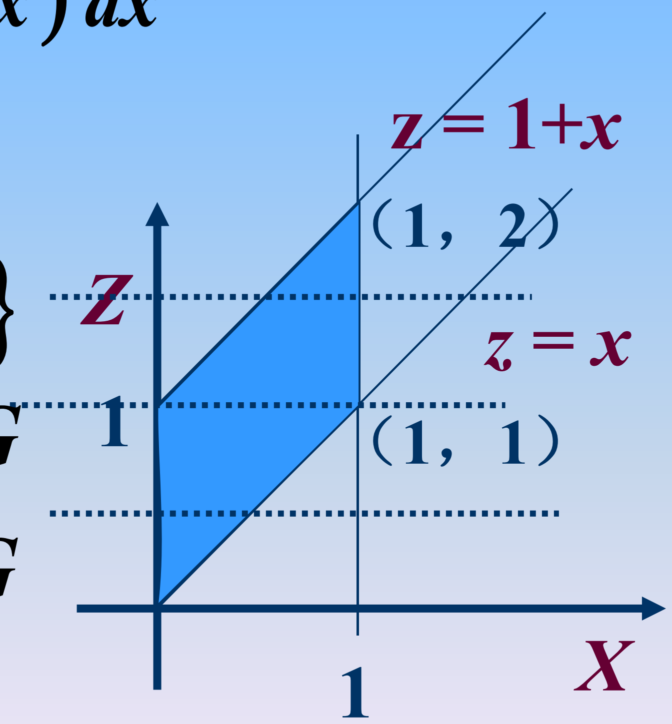
解：$\because$ 随机变量 X, Y相互独立

$$\therefore\ f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

在XOZ平面上作出区域G

$$G=\{(x,z)\mid 0\le x\le 1, 0\le z-x\le 1\}$$

$$f_X(x)f_Y(z-x)=\begin{cases}0 & (x,z)\notin G\\ 1 & (x,z)\in G\end{cases}$$



当$z \le 0$ 或 $z > 2$ 时 $f_Z(z) = 0$

当$0 < z \le 1$时

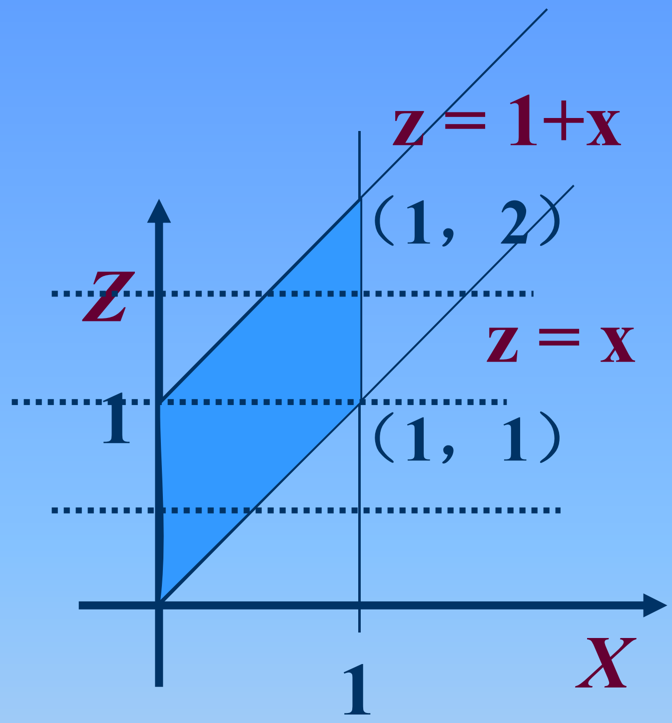
$$f_Z(z) = \int_0^z 1\ dx$$

$$= z$$

当$1 < z \le 2$时

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^1 1\ dx$$

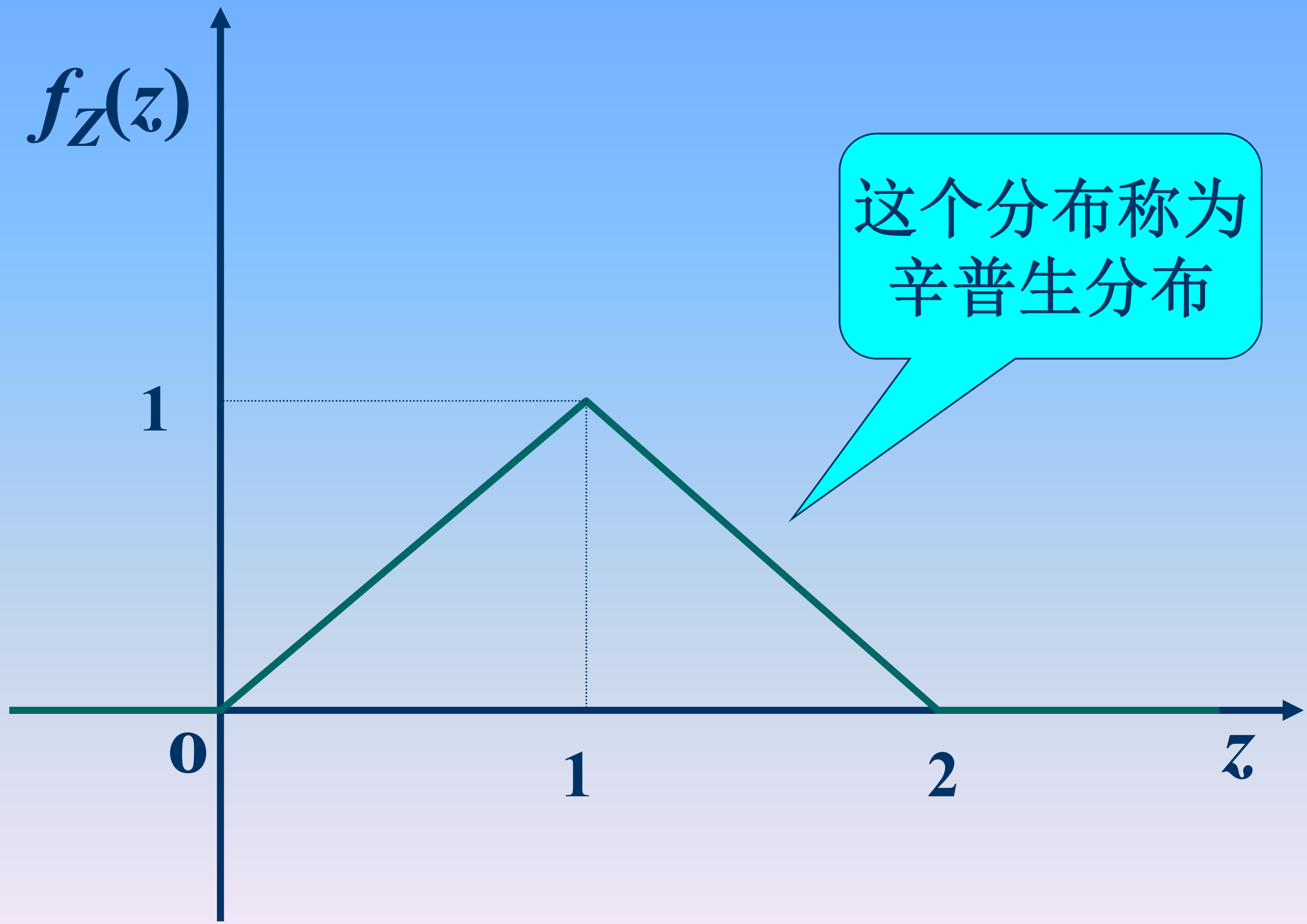
$$= 2 - z$$



综上得$Z = X + Y$的概率密度为：

$$f_Z(z) = \begin{cases} z & 0 < z \le 1 \\ 2 - z & 1 < z \le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$Z = X + Y$ 的概率密度曲线为



解题步骤:

1）在 XOZ平面上作出 $f(x, z-x)$ 的非零区域 G

2）从区域 G 中确定$f_z(z)$非零区域

3）在$f_z(z)$非零区域中，逐段确定$f_z(z)$的表达式。

4）写出$f_z(z)$的完整表达式。

例3.4.6已知二维随机变量（X,Y）的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2(x+y) & 0\le x\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

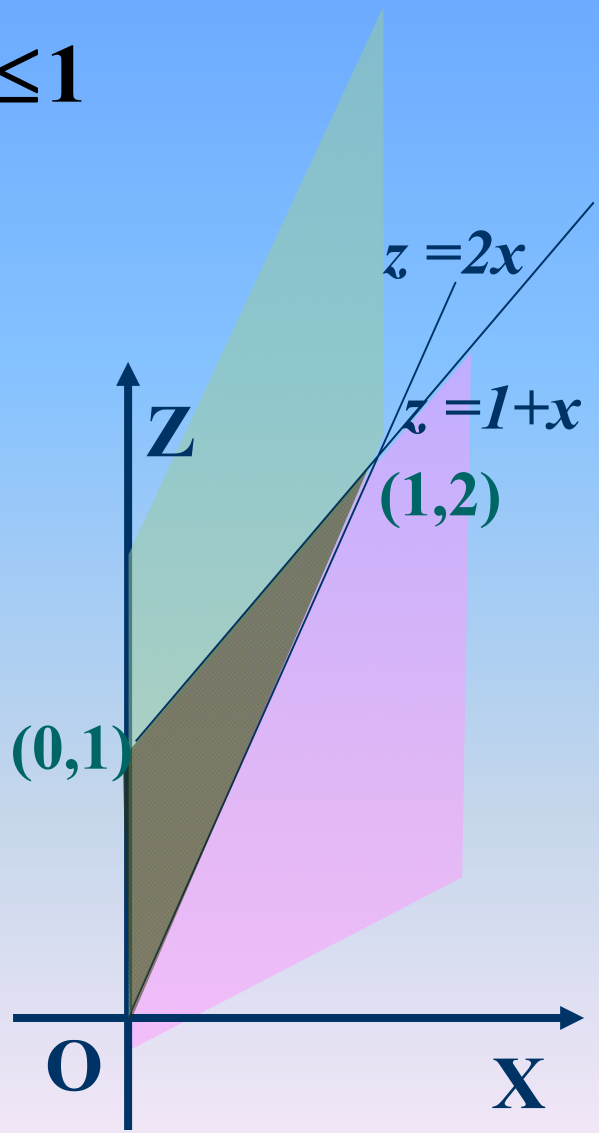
求： $Z=X+Y$ 的概率密度。

解: 在XOZ平面上作出区域

$$G=\{(x,z)|0\le x\le z-x\le 1\}$$

$$=\{(x,z)|0\le x\le 1,\ 2x\le z\le 1+x\}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}2z & (x,z)\in G\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



当$z\le 0$ 或 $z>2$ 时 $f_Z(z)=0$

当$0<z\le 1$时

$$f_Z(z)=\int_0^{z/2} 2z\,dx$$

$$=z^2$$

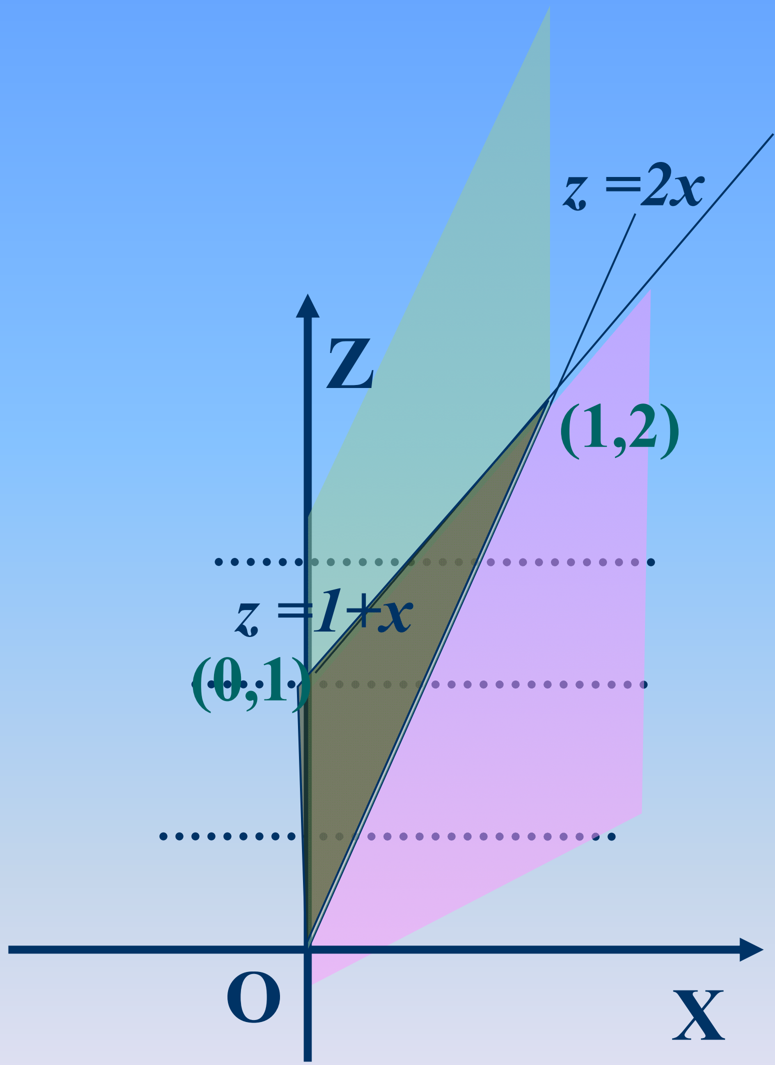
当$1<z\le 2$时

$$f_Z(z)=\int_{z-1}^{z/2} 2z\,dx$$

$$=2z-z^2$$

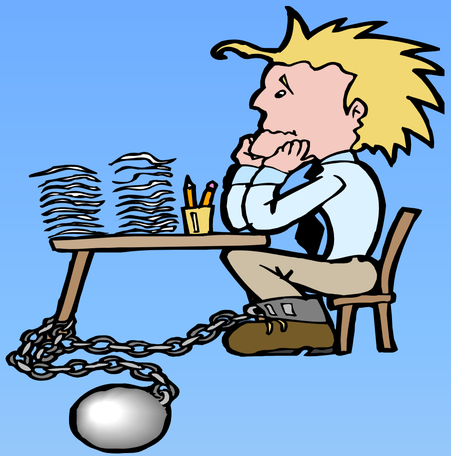
综上得$Z=X+Y$的概率密度为：

$$f_Z(z)=\begin{cases} z^2 & 0<z\le 1 \\ 2z-z^2 & 1<z\le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$



■

思考：



在求$Z=X+Y$的概率密度 $f_z(z)$时，我们是否可以通过YOZ平面来求解？

答案：可以

这时所引用的公式为：

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy$$

$x=z-y$

正态分布具有可加性。

3.$Z=X/Y$的分布

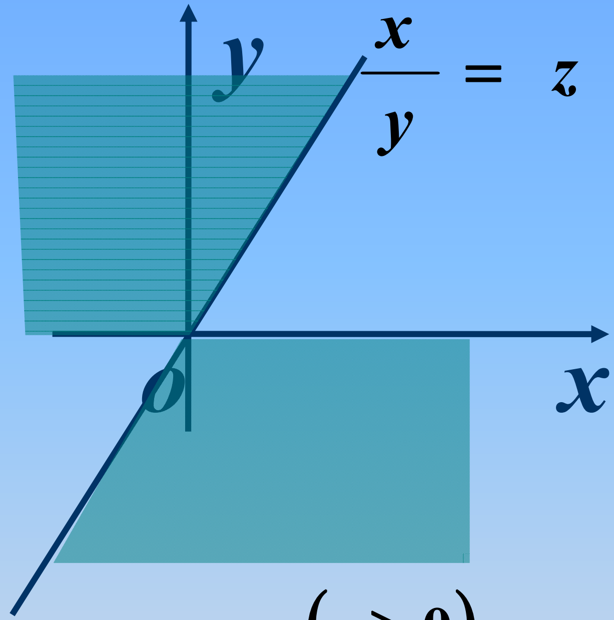
设随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为$f(x,y)$

$$F_Z(z)=P\{X/Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x/y\le z} f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\left[\int_{yz}^{+\infty} f(x,y)dx\right]dy$$

$$+\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{yz} f(x,y)dx\right]dy$$



$(z\ge 0)$

作积分变量变换，令 $x=yu$，则有公式：

$$\boxed{f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(zy,y)\,dy}$$

例3.4.8　已知随机变量X,Y相互独立同分布.

$$f_X(x)=f_Y(x)=\begin{cases} e^{-x} & x>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

求:X/Y的分布.

解 : 令 $G=\{(y,z): yz>0, y>0\}=\{(y,z): y>0, z>0\}$

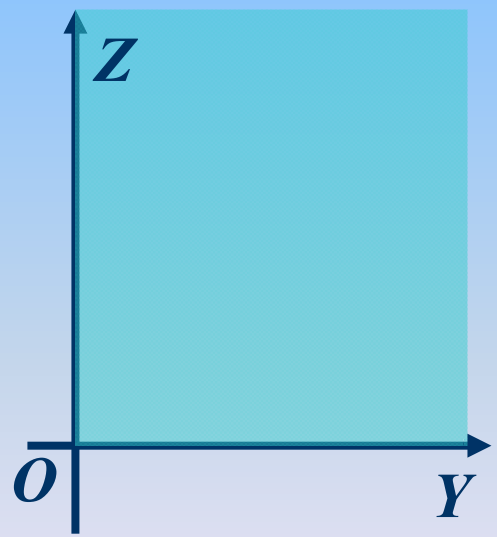
$$f(yz,y)=f_X(yz)f_Y(y)$$

$$=\begin{cases} e^{-yz-y} & (y,z)\in G \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,z)dy$$

$$=\begin{cases} \int_0^{+\infty} ye^{-yz-y}dy & z>0 \\ 0 & z\le 0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \frac{1}{(z+1)^2} & z>0 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$



■

小　结

1. 离散型随机变量的函数 $Y=g(X)$ 的分布

若 X 的分布律为 ：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=g(X)$的分布律为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

2. 连续型随机变量的函数 $Y=g(X)$ 的分布

若 X 的概率密度为 $f_X(x)$,

则 $Y=g(X)$的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}$$

$$=\int_{g(x)\le y} f_X(x)\,\mathrm{d}x,\quad (-\infty<x<+\infty),$$

再对 $F_Y(y)$ 求导得到 Y 的密度函数 $f_Y(y)$.

3. 若二维离散型随机变量 的联合分布律为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

则随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布律为

$$P\{Z = z_k\} = P\{g(X, Y) = z_k\}$$

$$= \sum_{z_k = g(x_i, y_j)} p_{ij}, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

4. $Z = X + Y$ 的分布

设随机变量（X, Y）的联合概率密度为$f(x,y)$

或：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y)\,dy$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x)\,dx$$

X与Y相互独立时：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,dy$$

或者

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,dx$$

5. $Z_1 = \max(X, Y), Z_2 = \min(X, Y)$ 的分布

$$\{Z_1 \le z\} \Leftrightarrow \{X \le z, Y \le z\}$$

$$\{Z_2 \le z\} \Leftrightarrow \{X \le z \text{或} Y \le z\}$$

6. $Z = X / Y$ 的分布

$$\boxed{f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(z\,y, y)\, dy}$$

练　习

设两个相互独立的随机变量$X\sim N(0,1)$,$Y\sim N(1,1)$

则：

a. $P\{X+Y\le 0\}=0.5$

b. $P\{X+Y\le 1\}=0.5$

c. $P\{X-Y\le 0\}=0.5$

d. $P\{X-Y\le 1\}=0.5$