第 四 章 随 机 变 量 的数字特征

第二节 随机变量的方差

1、随机变量的方差

2、常见分布的方差

3、随机变量的方差的性质

4、小结、思考

应用实例

谁的技术水平发挥的更稳定

已知甲乙两名射击运动员的历史记录为:

X	10	9	8	7	6	5	0
$P(X=x_i)$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.05	0.05	0
Y	10	9	8	7	6	5	0
$P(Y=y_k)$	0.7	0.05	0.02	0.03	0.1	0.1	0

甲

乙

$E(X)$=10*0.5+9*0.2+8*0.1+7*0.1+6*0.05+5*0.05=8.85(环)

$E(Y)$=10*0.7+9*0.05+8*0.02+7*0.03+6*0.1+5*0.1=8.92(环)

考虑对其平均水平偏差平方的平均值:

甲 $$\sum_{i=5}^{10}(i-E(X))^2 P\{X=i\}=E\{[X-E(X)]^2\}=2.2275$$

乙 $$\sum_{k=5}^{10}(k-E(Y))^2 P\{Y=k\}=E\{[Y-E(Y)]^2\}=3.4860$$

■

这说明甲的技术水平发挥的更稳定

定义:

设 X是随机变量,　若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在，称

$$D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$$

为X的方差。称 $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$ 为X的标准差或均方差

注：1）$D(X)$是随机变量X的函数的数学期望。

当X为离散型时 $D(X)=\sum_{i=1}^{+\infty}[x_i-E(X)]^2 P\{X=x_i\}$

当X为连续型时 $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f_X(x)dx$

2）$D(X)\geq 0$

常用计算公式：$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$

1.若 $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X)=\lambda \quad D(X)=\lambda$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}k^2=\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k(k-1+1)}{(k-1)!}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!}+e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

$$=e^{-\lambda}\lambda^2 * e^{\lambda}+e^{-\lambda}\lambda * e^{\lambda}$$

$$=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2$$

$$=\lambda$$

■

2.若 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $E(X)=\mu \quad D(X)=\sigma^2$

证明：$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-\mu]^2 f(x)dx$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\underline{\underline{t=\frac{x-\mu}{\sigma}}}\ \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\,de^{-\frac{t^2}{2}}$$

$\underline{\underline{分部积分}}\quad \sigma^2$ ■

1. $X \sim P(\lambda)$ 则 $E(X)=\lambda$ $D(X)=\lambda$

2. $X \sim B(n,p)$ 则 $E(X)=np$ $D(X)=np(1-p)$

3. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ 则 $E(X)=\mu$ $D(X)=\sigma^2$

4.两点分布 $E(X)=p$ $D(X)=p(1-p)$

5.均匀分布 $E(X)=(b+a)/2$ $D(X)=(b-a)^2/12$

6.指数分布 $E(X)=\lambda^{-1}$ $D(X)=\lambda^{-2}$

例4.2.1 设随机变量X的分布律为

X	-1	0	1
P	1/2	1/3	1/6

1)求$D(X)$　　2) $Y=X^2+1$　求$D(Y)$

解：1)$E(X)=(-1)*1/2+0*1/3+1*1/6=-1/3$

$E(X^2)=(-1)^2*1/2+0^2*1/3+1^2*1/6=2/3$

$D(X)= E(X^2)-[E(X)]^2=5/9$

2)$E(Y)= E(X^2)+1=5/3$

$E(Y^2)=E(X^4+2X^2+1)=3$

$D(Y)= E(Y^2)-[E(Y)]^2=2/9$

■

例4.2.2： 设随机变量 X与Y相互独立，且$X, Y \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right)$

求$|X-Y|$ 的方差。

解：$\left.\begin{array}{l} X, Y\text{相互独立} \\ -Y \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right) \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{具有可加性}]{\text{正态分布}} X-Y \sim N(0,1)$

令$Z = X - Y$ 则$Z \sim N(0,1)$ $E(Z) = 0$ $D(Z) = 1$

$$E(|Z|) = \sqrt{2/\pi}$$

$$E\left(|Z|^2\right) = E\left(Z^2\right) = D(Z) + [E(Z)]^2 = 1$$

$$D(|X-Y|) = E\left(|Z|^2\right) - [E(|Z|)]^2 = 1 - \frac{2}{\pi}$$

■

练习：设一次试验成功的概率为p，进行100次独立重复试验，当$p=$ __1/2__ 时，成功次数的标准差的值最大，其值为 __5__

解：设成功次数为 X，则$X \sim B(100, p)$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{100p(1-p)} = 10\sqrt{p(1-p)}$$

$p = \dfrac{1}{2}$时取最大值

■

随机变量的方差的性质

设 $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ 是随机变量，c, b 是常数。

1）$E(c) = c$　　$D(c) = 0$

2）$E(a+bX) = a+bE(X)$　　$D(a+bX) = b^2 D(X)$

3）$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + 2\sum_{\substack{i=1\\ j>i}}^{n} E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，则 $D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i)$

若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，则 $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

4）$D(X) = 0 \Longleftrightarrow P\{X = E(X)\} = 1$

例 4.2.4 随机变量 X 的 $E(X), D(X)$ 存在，且 $D(X)>0$

令 $$X^{*}=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

证明： $E(X^{*})=0 \quad D(X^{*})=1$

证明： $$E(X^{*})=\frac{1}{\sqrt{D(X)}}E[X-E(X)]=0$$

$$D(X^{*})=\frac{1}{D(X)}D[X-E(X)]=\frac{D(X)}{D(X)}=1$$

称 X^{*} 为 X 的标准化随机变量。

特别地： $X\sim N(\mu,\sigma^{2})$，则 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ ■

例4.2.5 证明：(*Chebyshev*不等式)

若随机变量X的方差$D(X)$存在，则$\forall \varepsilon > 0$有

$$P\{|X-E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

(我们仅就 X为连续型的情况给出证　明)

证明：$P\{|X-E(X)| \geq \varepsilon\} = \int_{\{x \mid |x-E(X)| \geq \varepsilon\}} f(x)dx$

$$\leq \int_{\{x \mid |x-E(X)| \geq \varepsilon\}} \frac{|x-E(X)|^2}{\varepsilon^2} f(x)dx$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)dx$$

$$= \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

方 差

$\left(Chebyshev\ \text{不等式}\right)$若随机变量 X的方差 $D\left(X\right)$存在，

则$\forall\ \varepsilon > 0$有

$$P\left\{\left|X - E\left(X\right)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^{2}}$$

固定ε（一个较小的数）

若*X*的方差小，则事件{|*X*-*E*(*X*)|≥ε}发生的概率小

即事件{|*X*-*E*(*X*)|<ε}发生的概率大。

$$\left(P\left\{\left|X - E\left(X\right)\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D\left(X\right)}{\varepsilon^{2}}\right)$$

方差刻划了随机变量**X**围绕它的数学期望的偏离程度！

■

例4.2.7 设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，且 $E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，求 $\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)$ 的数学期望和方差

解：

$$E(\overline{X})=E\left[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)\right]$$

$$=\frac{1}{n}E(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i) \quad =\frac{1}{n}n\mu=\mu$$

$$D(\overline{X})=D\left[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)\right]$$

$$=\frac{1}{n^2}D(X_1+X_2+\ldots+X_n)$$

$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}n\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$$

■

小 结

1. 方差刻划了随机变量*X*围绕它的数学期望的偏离程度！

2. 方差计算与性质。

3. 要防止计算中的错误：

$$\cancel{D(cX) = cD(X)} \qquad \cancel{D(X \pm Y) = D(X) \pm D(Y)}$$

练 习

设随机变量(X,Y)服从顶点为(0,1) (1,0) (1,1)的三角形上的均匀分布，试求随机变量Z=X+Y的方差。

Answer:1/18