第 四 章 随 机 变 量 的数字特征

第三节 协方差、相关系数与矩

1、协方差的定义

2、协方差的性质与计算公式

3、协方差矩阵及其性质

4、相关系数及其性质

5、矩

6、小结、思考

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\underline{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}$$

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\underline{E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}}$$

一.协方差

定义： 若$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$存在，称

$$cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

为随机变量X,Y的协方差。

$$D(X)= cov(X,X)$$

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2cov(X,Y)$$

协方差的性质：

$$cov(X,Y) = cov(Y,X)$$

$$cov(aX,bY) = ab\, cov(X,Y)$$

$$cov(X_1+X_2,Y) = cov(X_1,Y)+cov(X_2,Y)$$

常用计算公式：

$$cov(X,Y) = E(XY)-E(X)E(Y)$$

定义：设n维随机变量$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的协方差

$$C_{ij} = cov(X_i,X_j)$$

均存在。称矩阵

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

为$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$的协方差矩阵。

协方差矩阵的性质：

1）$c_{ii} = D\left(X_i\right) \qquad i = 1,2,\ldots,n$

2）$c_{ij} = c_{ji} \qquad i, j = 1,2,\ldots,n$

二。相关系数

定义：设二维随机变量X,Y的$D(X)>0,D(Y)>0$

称
$$\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$
为随机变量X与Y的相关系数。

注：1）ρ_{XY}是一无量纲的量。

2）$$\rho_{XY}=E\left[\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}*\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right]$$
$$=E\left[X^* * Y^*\right]=\mathrm{cov}\left(X^*,Y^*\right)=\rho_{X^*Y^*}$$

性质：设随机变量X,Y的相关系数ρ存在，则

1）$|\rho|\le 1$

2）$|\rho|=1 \Longleftrightarrow$ X与Y依概率为1线性相关。即

$$\exists\,\alpha,\beta\ (\alpha\ne 0)\quad s.t$$

$$P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$$

3）若$\xi=a_1X+b_1$，$\eta=a_2Y+b_2$ 则

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\rho_{XY}$$

相关系数是衡量两个随机变量之间线性相关程度的数字特征。

定义：设随机变量X,Y的相关系数存在。

1）$\rho_{XY}=1$ 称 X,Y正相关。

2）$\rho_{XY}=-1$ 称 X,Y负相关。

3）$\rho_{XY}=0$ 称 X,Y不相关。

注：$\rho_{XY}=0$仅说明X,Y之间没有线性关系，但可以有其他非线性关系。

定理：若随机变量X与Y相互独立，则X与Y不相关。

即 $\rho_{XY}=0$

注：1）此定理的逆定理不成立。即由$\rho_{XY}=0$我们不能得到X与Y相互独立。

2）$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma^2{}_1;\mu_2,\sigma^2{}_2;\rho)$则

X,Y相互独立 $\longleftrightarrow$ $\rho=0$

协 方 差 . 相 关 系 数 与 矩
性质证明

1） $|\rho|\le 1$

证明：$0 \le D\left(X^* \pm Y^*\right) = D\left(X^*\right) + D\left(Y^*\right) \pm 2cov\left(X^*, Y^*\right)$

$$= 2 \pm 2\rho_{XY} \quad = 2\left(1 \pm \rho_{XY}\right)$$

$$\therefore \pm\rho_{XY} \le 1$$

$$\therefore \left|\rho_{XY}\right| \le 1$$

■

2） $|\rho|=1 \Longleftrightarrow$ X与Y依概率为1线性相关。即

$$\exists\ \alpha,\beta\ (\alpha\neq 0)\quad s.t$$

$$P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$$

证明："$\Rightarrow$"必要性

$\rho=-1$时　由1）有

$$D\left(X^*+Y^*\right)=0 \qquad E\left(X^*+Y^*\right)=0$$

由方差的性质　4）得

$$P\left\{X^*+Y^*=E\left(X^*+Y^*\right)\right\}=1 \quad \text{即}$$

$$P\left\{X^*+Y^*=0\right\}=1$$

$$P\left\{Y=-\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}X+\frac{\sqrt{D(Y)}}{\sqrt{D(X)}}E(X)+E(Y)\right\}=1$$

对$\rho=1$　同理可得。

"$\Leftarrow$"充分性

$$P\{Y=\alpha X+\beta\}=1$$

$$E(Y)=\alpha E(X)+\beta$$

$$D(Y)=\alpha^2 E(X)$$

$$cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E\{[X-E(X)][\alpha X+\beta-E(\alpha X+\beta)]\}$$

$$=\alpha D(X)$$

$$\rho_{XY}=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}=\pm 1$$

■

3）若$\xi = a_1X+b_1$ ，$\eta = a_2Y+b_2$ 则

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{a_1 a_2}{|a_1 a_2|}\rho_{XY}$$

证明：$D(\xi)=a_1^2D(X)\quad D(\eta)=a_2^2D(Y)$

$$cov(\xi,\eta)=E\{[\xi-E(\xi)][\eta-E(\eta)]\}$$
$$=E\{[a_1X-a_1E(X)][a_2Y-a_2E(Y)]\}$$
$$=a_1a_2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$
$$=a_1a_2\,cov(X,Y)$$

$$\rho_{\xi\eta}=\frac{cov(\xi,\eta)}{\sqrt{D(\xi)}\sqrt{D(\eta)}}=\frac{a_1a_2}{\sqrt{(a_1a_2)^2}}\rho_{XY}=\frac{a_1a_2}{|a_1a_2|}\rho_{XY}$$

■

例1. (X,Y)在以原点为圆心的单位圆内服从均匀分布。

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}dy=\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}\qquad -1\le x\le 1$$

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}\frac{1}{\pi}dx=\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi}\qquad -1\le y\le 1$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\pi}dx=0$$

同理：$E(Y)=0$

例2. (X,Y)在以原点为圆心的单位圆内服从均匀分布。

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\frac{xy}{\pi}dxdy$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\sin\theta\cos\theta\, d\theta dr=0$$

可以验证 $D(X)>0\,, D(Y)>0$

从而 $\rho_{XY}=0$

但在单位圆内 $f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$

不相关不一定相互独立。

■

例3. 假设二维随机变量（X,Y）在矩形

G={（x,y）|0≤x≤2，0≤y≤1}上服从均匀分布.

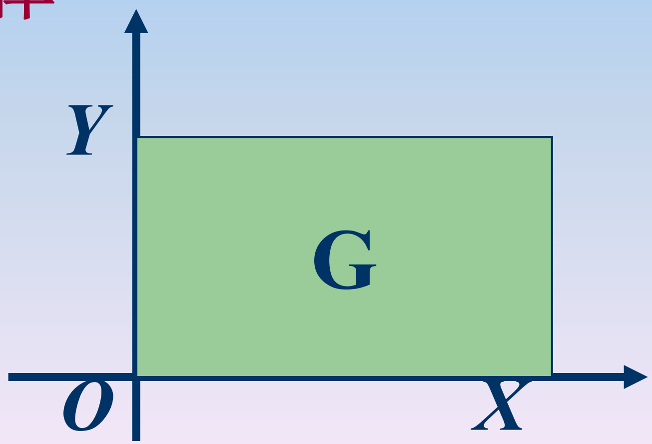
记

$$U=\begin{cases}0 & X\le Y\\ 1 & X>Y\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0 & X\le 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases}$$

求ρ_{UV}

分析：$\rho_{UV}=\dfrac{cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\dfrac{E(UV)-E(U)E(V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$

关键是求$E(UV)$ ⟶ 求出UV分布律



例4. 设二维随机变量（X,Y）在矩形 $G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 1\}$ 上服从均匀分布.

记

$$U=\begin{cases}0 & X\le Y\\ 1 & X>Y\end{cases}\qquad V=\begin{cases}0 & X\le 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases}$$

求 ρ_{UV}

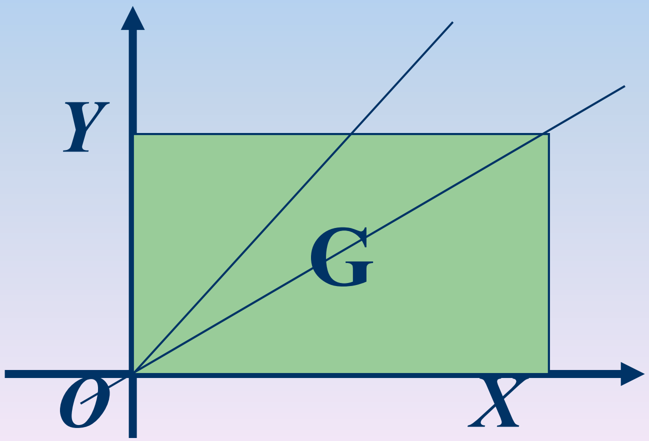
解：由已知可得

$$f(x,y)=\begin{cases}1/2 & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(U)=P\{X>Y\}=\int_0^1\left[\int_y^2 f(x,y)dx\right]dy=3/4$$

$$D(U)=p(1-p)=3/16$$

同理 $E(V)=1/2\quad D(V)=1/4$



UV 的分布律为:

$$UV=\begin{cases}0 & X\le 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases}=V$$

故$E(UV)=E(V)=1/2$

从而

$$\rho_{UV}=\frac{cov(U,V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}=\frac{E(UV)-E(U)E(V)}{\sqrt{D(U)}\sqrt{D(V)}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{16}\times\frac{1}{4}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

■

练习：将一枚硬币重复抛掷n次, X,Y分别表示正面朝上和反面朝上的次数,

则$\rho_{XY}=$ **-1**

三.矩

定义:设X为随机变量，若$E(|X|^k) < +\infty$,则称

$$\gamma_k = E(X^k) \qquad k=1,2,3\ldots..$$

为X的k阶原点矩.

称$\alpha_k = E(|X|^k) \qquad k=1,2,3\ldots..$

为X的k阶绝对原点矩.

定义：设X为随机变量，若$E[|X-E(X)|^k] < +\infty$,则称

$$\mu_k = E\{[X-E(X)]^k\} \quad k=1,2,3\ldots..$$

为X的k阶中心矩.

称 $\beta_k = E[|X-E(X)|^k] \qquad k=1,2,3\ldots..$

为X 的k阶绝对中心矩.

$$\gamma_1 = E(X) \quad \gamma_2 = \gamma_1^2 + \mu_2$$

$$\mu_1 = 0 \qquad \mu_2 = D(X)$$

γ_k与 μ_k的关系：

$$\gamma_k = E\left(X^k\right) = E\left\{\left[X - E(X) + E(X)\right]^k\right\} = E\left\{\left[\left(X - \gamma_1\right) + \gamma_1\right]^k\right\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \gamma_1^i E\left[\left(X - \gamma_1\right)^{k-i}\right]$$

$$= \sum_{i=0}^{k} C_k^i \gamma_1^i \mu_{k-i}$$

$$\mu_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} C_k^i \gamma_1^{k-i} \gamma_k$$

小　结

1. 协方差描述两个随机变量线性相关程度的大小；

2. 相互独立则一定不相关，反之未必成立，但对于二维正态分布，不相关与相互独立等价；

3. 计算协方差的关键是求**E(XY)**。