第 三 章　多 维 随 机 变 量

第一节　二维随机变量及其分布

1、联合分布函数及其性质

2、联合分布律及其性质

3、联合概率密度及其性质

4、二维均匀分布

5、二维正态分布

6、小结、思考

多维随机变量的概念

§3.1二维随机变量及其分布

一.联合分布函数

定义： 设随机试验E的样本空间为Ω，对于每一样本点$\omega\in\Omega$，有两个实数$X(\omega)$，$Y(\omega)$与之对应，称它们构成的有序数组(X,Y)为二维随机变量。

注：X，Y都是定义在Ω上的随机变量.

$$F_X(x)=P\{X\le x\}\qquad F_Y(y)=P\{Y\le y\}$$

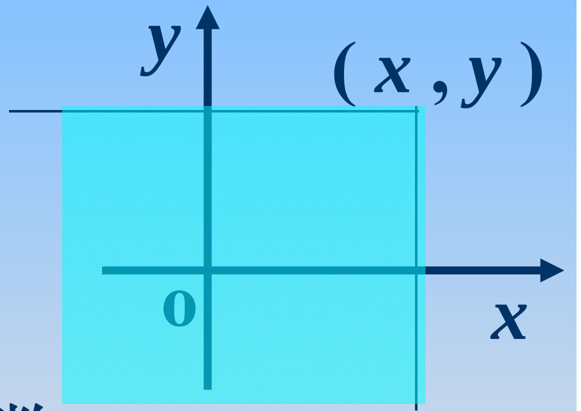
定义: 对任意实数对 $(x, y) \in R^2$ 记

$$\{X \le x, Y \le y\} = \{X \le x\} \cap \{Y \le y\}$$

称二元函数 $F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$

为(X, Y)的联合分布函数。

一维随机变量 X、Y 的分布函数$F_X(x)$与 $F_Y(y)$称为(X, Y) 的边缘分布函数。



联合分布函数的几何意义:

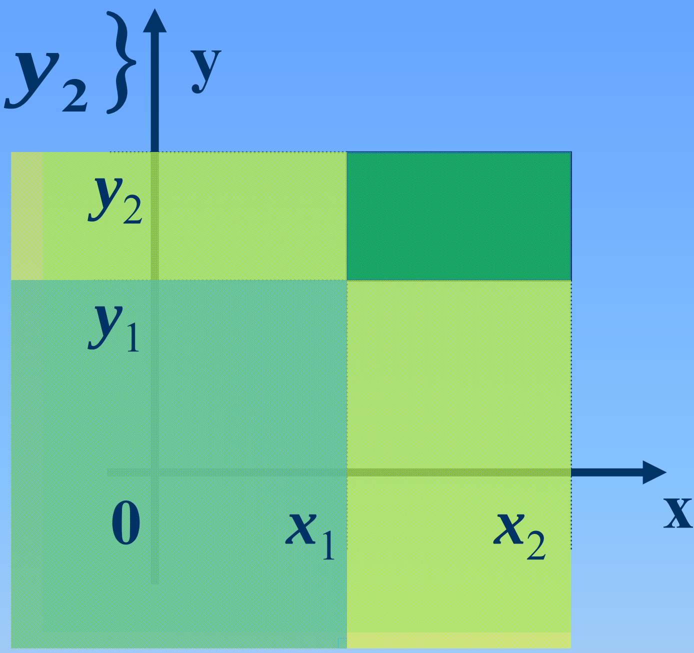
1. 由联合分布函数可确定边缘分布函数

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = \lim_{y \to +\infty} F(x, y)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = \lim_{x \to +\infty} F(x, y)$$

2. $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$



练习：

(X,Y)的联合分布函数为

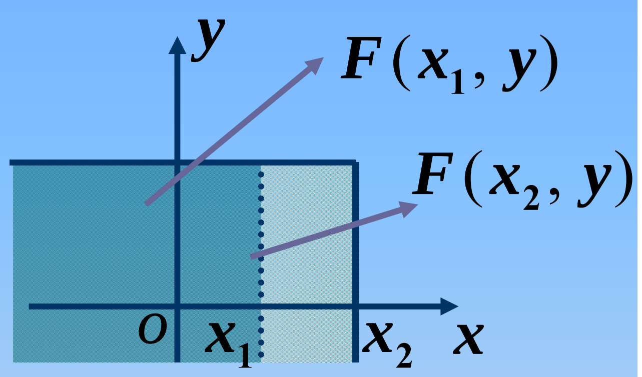
$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}) & x\ge 0, y\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-2x} & x\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \quad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-3y} & y\ge 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

联合分布函数的性质：

1：单调不减性：$F(x,y)$分别对x ,y单调不减。

$$x_1 < x_2 \quad F(x_1, y) \le F(x_2, y) \quad \forall y \in R^1$$



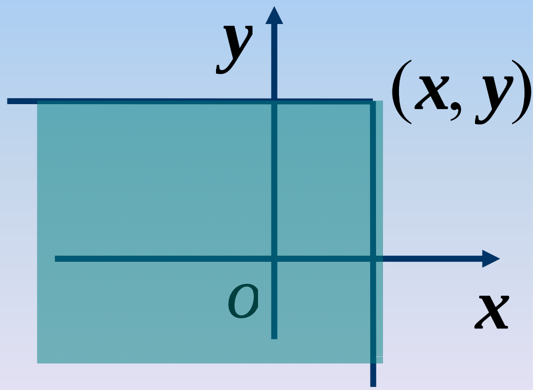
$$y_1 < y_2 \quad F(x, y_1) \le F(x, y_2) \quad \forall x \in R^1$$

2：有界性： $0 \le F(x ,y) \le 1$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x, y) = 0$$

$$\lim_{y\to-\infty} F(x, y) = 0$$

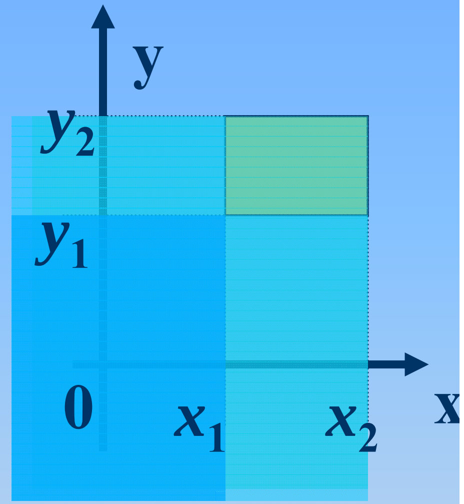
$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} F(x, y) = 1$$



3：右连续性：$F(x,y)$ 分别关于x 或 y为右连续。

$$\lim_{x\to x_0^+} F(x,y)=F(x_0,y) \qquad \lim_{y\to y_0^+} F(x,y)=F(x,y_0)$$

4：相容性：对任意 $x_1<x_2,y_1<y_2$，



有：

$$F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)\geq 0$$

注：如果二元函数 $F(x,y)$ 满足上述4个性质，则必存在二维随机变量(X,Y)以$F(x,y)$为分布函数。

定义：　n维随机变量$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合分布函数

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \ldots X_n \le x_n\}$$

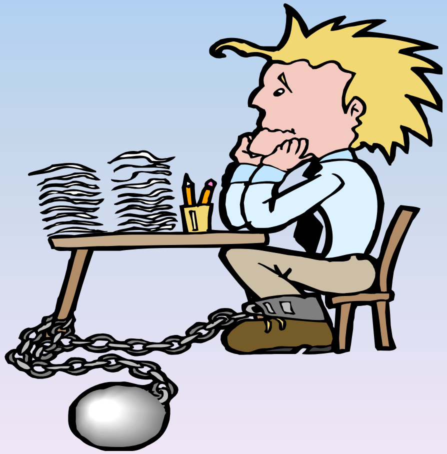
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ 为n个任意实数。

由$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$的联合分布函数，可确定其中任意k 个分量的联合分布函数，称为k维边缘分布函数.

例如：

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, +\infty, +\infty, \cdots, +\infty)$$

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F(x_1, x_2, +\infty, \cdots, +\infty)$$



思考：一维分布函数与二维分布函数的联系与区别？

二. 联合分布律

定义：设二维随机变量(X,Y)至多取可列对数值：

$$(x_i, y_j) \quad i, j = 1,2,\dots \qquad \text{记}$$

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij} \quad i, j = 1,2,\dots \qquad (*)$$

若 1）$p_{ij} \geq 0 \qquad i, j = 1,2,\dots$

2）$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$

称(X,Y)为二维离散型随机变量，称式$(*)$为(X,Y)的联合分布律。

$$F(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$$

由联合分布律可得随机变量 X,Y 的分布律。

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{i\cdot} \quad i=1,2,\ldots$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij}=p_{\cdot j} \quad j=1,2,\ldots$$

用表格表示联合分布律和边缘分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例3.1.1：在1,2,3,4 中随机取出一数 X ,再随机地从1~X 中取 一数Y，求(X, Y)的联合分布律。

解： X, Y 的所有可能取值均为1，2，3，4

X 的分布律为:

X	1	2	3	4
$P\{X=x\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$p_{ij} = P\{X=i, Y=j\} = P(\{X=i\} \cap \{Y=j\})$$

$$= P\{X=i\} P\{Y=j | X=i\}$$

$$= \begin{cases} 0 & j > i \\ \frac{1}{4}\frac{1}{i} & j \le i \end{cases} \qquad i, j = 1,2,3,4$$

X \ Y	1	2	3	4	
1	1/4	0	0	0	1/4
2	1/8	1/8	0	0	1/4
3	1/12	1/12	1/12	0	1/4
4	1/16	1/16	1/16	1/16	1/4
	25/48	13/48	7/48	1/16	1

■

例：(两点分布)

用一细绳将一小球悬挂于空中,现用一剪刀随机的去剪细绳一次.剪中的概率为p . 设剪中的次数为X ,小球下落的次数为Y,试写出(X, Y)的联合分布律.

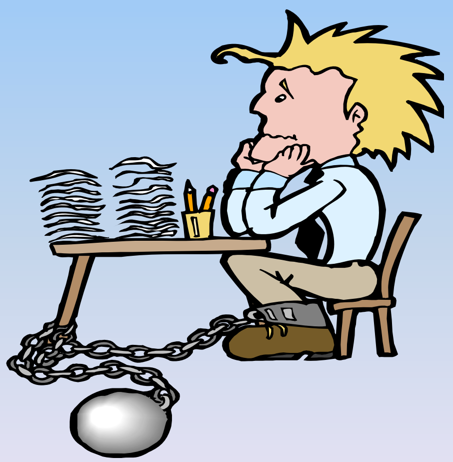
X \ Y	0	1
0	**1-p**	**0**
1	**0**	**p**

称(X, Y)服从二维两点分布.

■

思考：能否用边缘分布律来确定联合分布律，原因是什么？

多维随机变量的联合分布不仅与每个分量的边缘分布有关，而且还与每个分量之间的联系有关！



三. 联合概率密度

定义： 二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为$F(x,y)$如果存在非负的函数$f(x,y)$使得对任意实数对(x,y)有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)dudv$$

称(X,Y)是连续型随机变量，$f(x,y)$称为(X,Y)的联合概率密度。

性质：

1) $f(x,y)\geq 0$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$

3) 若$f(x,y)$在(x,y)处连续。则

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)$$

4) 若$G \subset R^2$,有

$$p\{(X,Y) \in G\} = \iint_G f(x,y)d\sigma$$

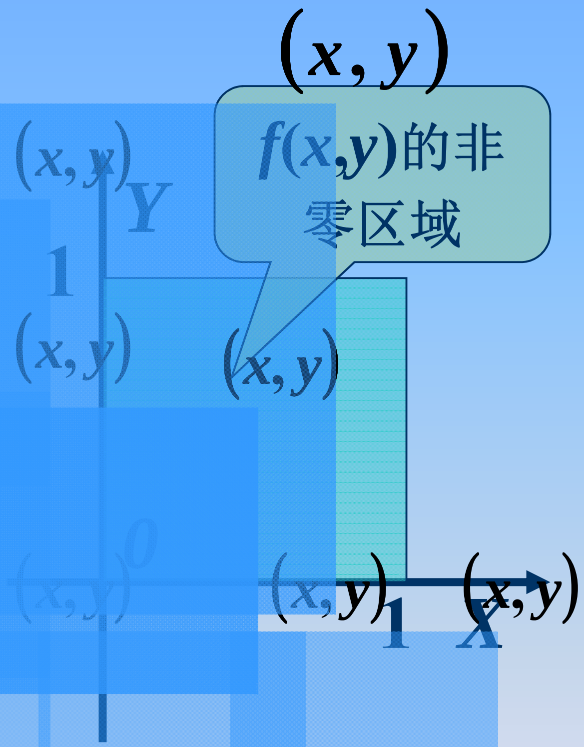
5) X,Y的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

例3.1.3： 已知二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

试写出(X, Y)的联合分布函数。



解： $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,dudv$

1）当 $x<0$ 或 $y<0$ 时

$F(x,y)=0$

2）当 $0\le x\le 1$，$0\le y\le 1$ 时

$$F(x,y)=4\int_0^x\int_0^y uv\ dudv = x^2y^2$$

3）当 $0\le x\le 1$，$y\ge 1$ 时

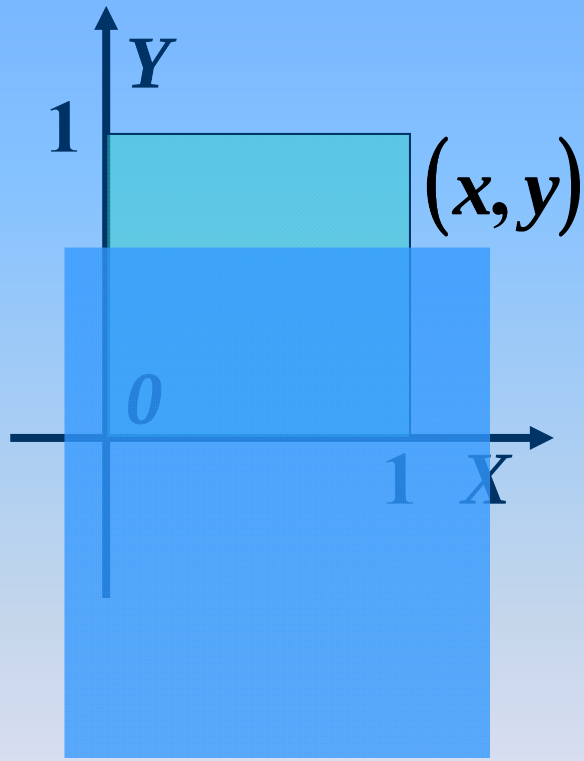
$$F(x,y)=4\int_0^x\int_0^1 uv\ dudv = x^2$$

4）当 $0\le y\le 1$，$x\ge 1$ 时

$$F(x,y)=4\int_0^1\int_0^y uv\,dudv=y^2$$

5）当 $x, y>1$ 时

$$F(x,y)=1$$



综上所述得：

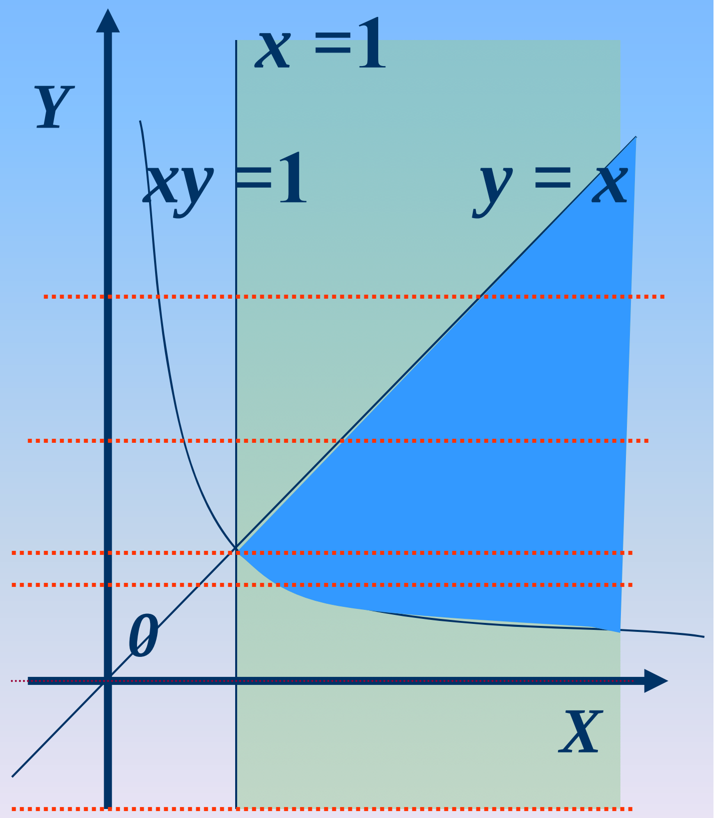
$$F(x,y)=\begin{cases}0 & x<0 \text{ 或 } y<0\\ x^2y^2 & 0\le x,y\le 1\\ x^2 & 0\le x\le 1;y\ge 1\\ y^2 & x\ge 1;0\le y\le 1\\ 1 & x,y>1\end{cases}$$

■

例3.1.4：已知二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x^2y} & 1\le x<+\infty, \dfrac{1}{x}\le y\le x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求关于Y的边缘概率密度$f_Y(y)$



分析： $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

求Y的边缘概率密度，就是固定

y 对 x 求积分。

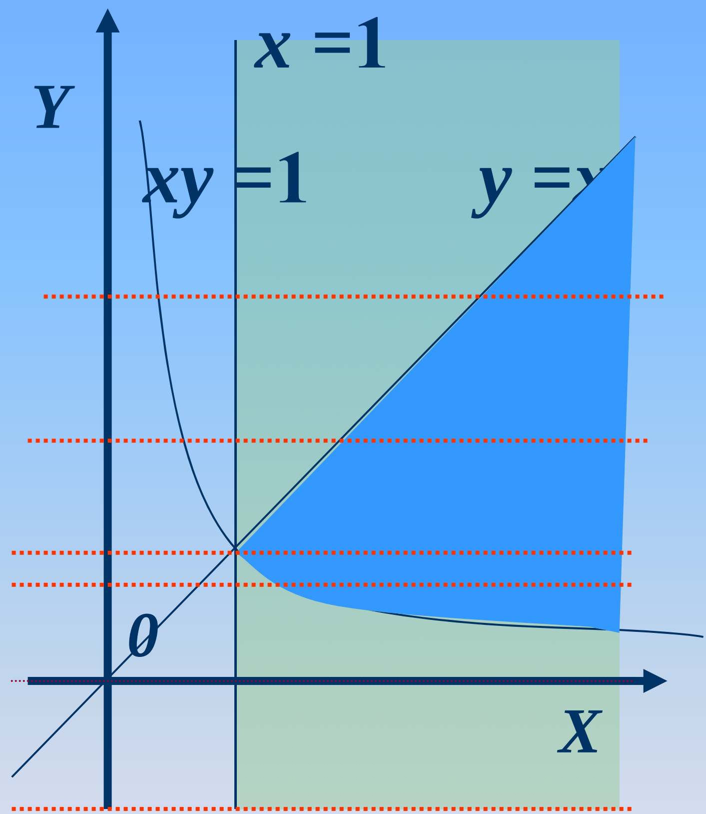
实质上是求含参变量的积分。

对于y取不同的值，$f_Y(y)$的积分上下限是不相同的。

解：$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$
=\begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} \dfrac{1}{2x^2 y}dx & 0 < y \le 1 \\ \int_{y}^{+\infty} \dfrac{1}{2x^2 y}dx & 1 < y \end{cases}
$$

$$
=\begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 1/2 & 0 < y \le 1 \\ 1/2y^2 & 1 < y \end{cases}
$$



■

例3.1.5： 已知二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} a(3x^2+xy) & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

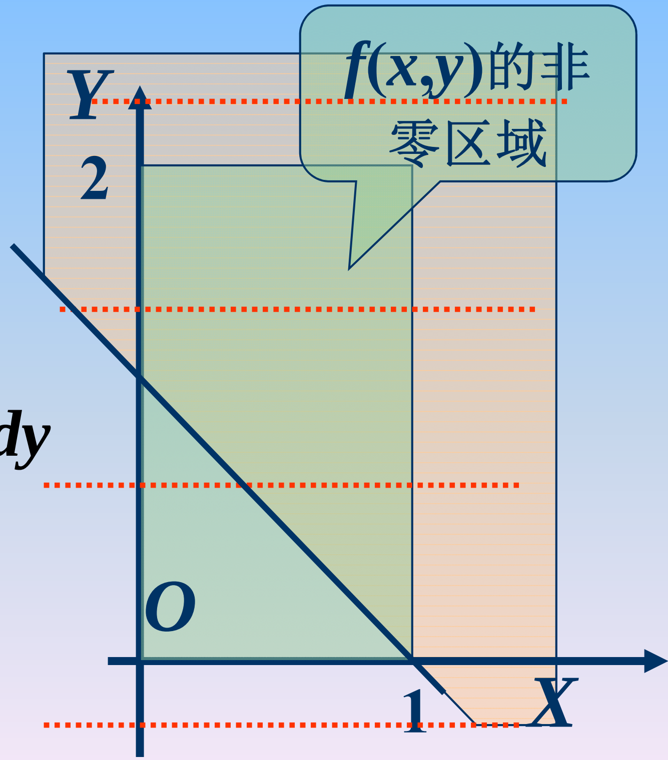
求：1）a　　　　2）边缘概率密度

3）$P\{X+Y>1\}$

分析：1）利用$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$

2）

3）$P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)\,dxdy$



$$f(x,y)=\begin{cases} a(3x^2+xy) & 0\le x\le 1, 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解：1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy = 1$ 得

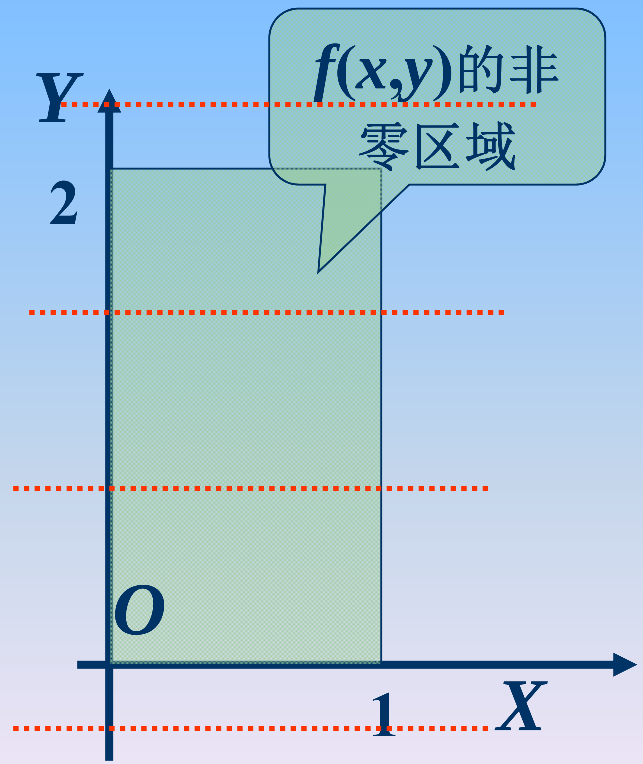
$$\int_0^1\left[\int_0^2 a(3x^2+xy)dy\right]dx=\int_0^1(6ax^2+2ax)dx$$

$$=3a=1$$

$$a=1/3$$

2) $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

$$=\begin{cases} \int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)dx & 0\le y\le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



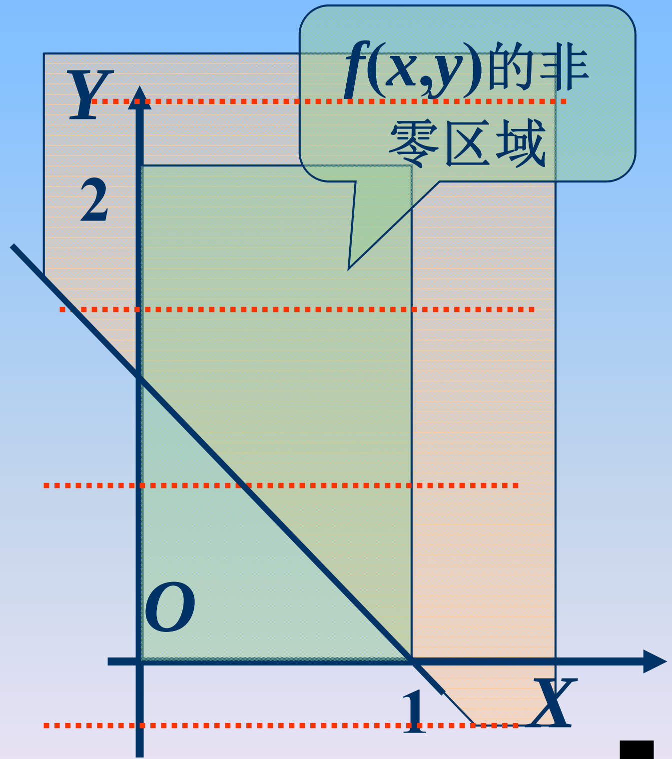
$$=\begin{cases} \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}y & 0 \le y \le 2 \\ 0 & 其它 \end{cases}$$

3) $P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1} f(x,y)dxdy$

$$=\int_0^1\left[\int_{1-x}^2 f(x,y)dy\right]dx$$

$$=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x+\frac{4}{3}x^2+\frac{5}{6}x^3\right]dx$$

$$=\frac{65}{72}$$



■

对边缘概率密度的求解, 实质上是求带参变量的积分.

其难点是: 定积分的上下限.

我们可以通过图形来很好的解决这个问题.

四. 二维均匀分布

设$G\subset R^2$,面积为$S(G)$,若二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S(G)} & (x,y)\in G\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X,Y)在G上服从均匀分布。

1. (X,Y)在G上服从均匀分布, 设$D\subset G$则有

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint_D \frac{1}{S(G)}d\sigma=\frac{S(D)}{S(G)}$$

设$X\sim U(a,b)$, $(c,d)\subset(a,b)$则

$$P\{c<X\le d\}=\frac{d-c}{b-a}=\frac{(c,d)\text{的长度}}{(a,b)\text{的长度}}$$

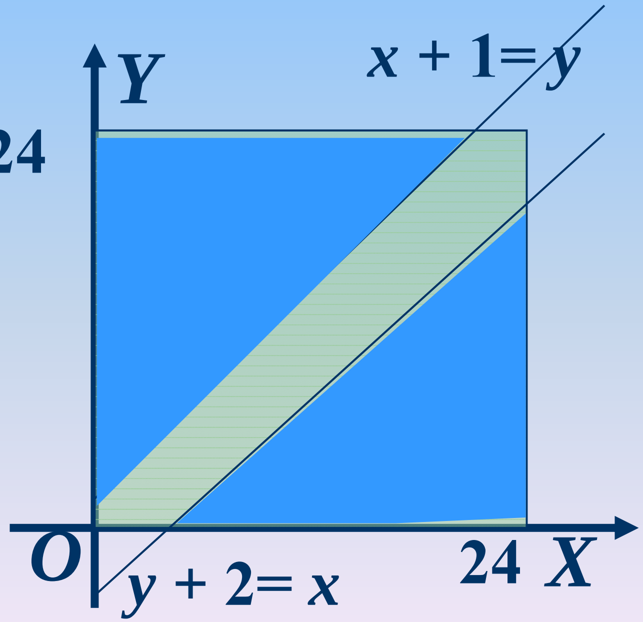
例3.1.6 (约会问题): 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头停泊。它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的。如果甲的停泊时间为1小时，乙的停泊时间为二小时。求它们中的任意一艘都不须等待码头空出的概率。

分析： 设甲在一昼夜到达的时刻为X，乙在一昼夜到达的时刻为Y. 所求的概率为：

$$P\{X+1\le Y \text{ 或 } Y+2\le X\}$$

设 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 24\}$

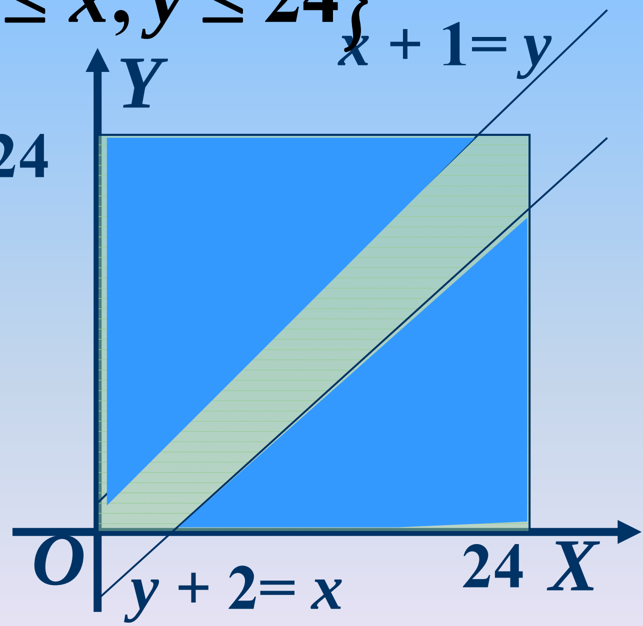
(X,Y)在 G上服从均匀分布。



解：设甲在一昼夜到达的时刻为X，乙在一昼夜到达的时刻为Y．所求的概率为：$P\{X+1\le Y \text{ 或 } Y+2\le X\}$

令 $G=\{(x,y)\,|\,0\le x,y\le 24\}$ 则 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布。

令 $D=\{x+1\le y \text{ 或 } y+2\le x; 0\le x,y\le 24\}$



$$
\begin{aligned}
&P\{X+1\le Y \text{ 或 } Y+2\le X\}\\
&=P\{(X,Y)\in D\}\\
&=\frac{S(D)}{S(G)}=\frac{0.5*23^2+0.5*22^2}{24^2}\\
&\approx 0.88
\end{aligned}
$$

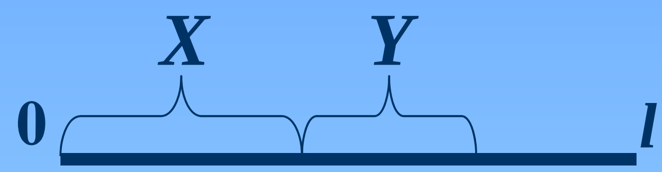
■

例3.1.7： 把长为 l 的木棒，任意折成3段，求它们能构成一个三角形的概率。

分析： 1)可设第一段的长度为 X，第二段的长度为 Y

$$0<X<l\,,0<Y<l$$

$$X+Y<l$$



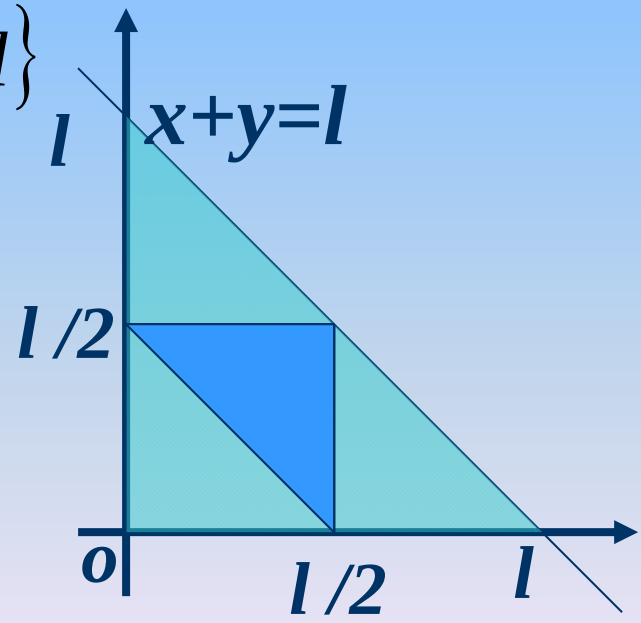
2) (X,Y) 在三角形

$$G=\{(x,y)\,|\,0<x<l,0<y<l,x+y<l\}$$

上服从均匀分布。

3) 能构成三角形的充要条件为：

$$\begin{cases} 0<x<\frac{l}{2} \\ 0<y<\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2}<x+y<l \end{cases}$$



解：设第一段的长度为 X，第二段的长度为 Y

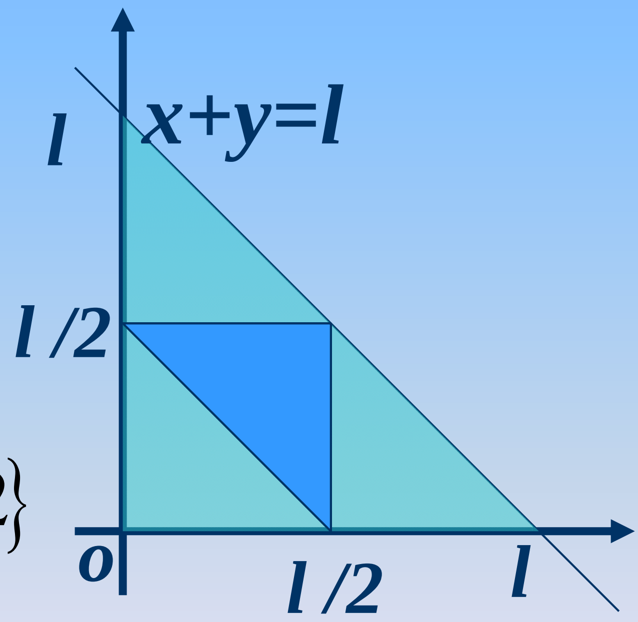
(X,Y) 在三角形

$$G=\{(x,y)\mid 0<x<l,0<y<l,x+y<l\}$$

上服从均匀分布。

能构成三角形的充要条件为：

$$\begin{cases} 0<x<\frac{l}{2} \\ 0<y<\frac{l}{2} \\ \frac{l}{2}<x+y<l \end{cases}$$



所求概率为：

$$p=p\{X<l/2,Y<l/2,X+Y<l/2\}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}l^2}=\frac{1}{4}$$

■

五. 二维正态分布

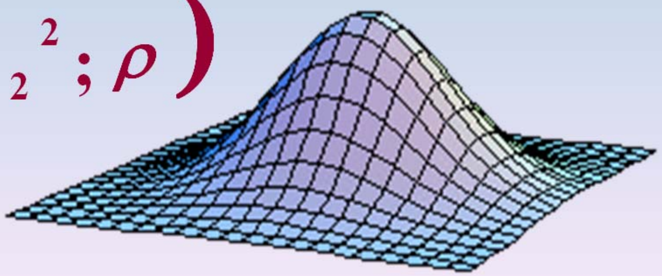
定义：二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}\quad x\in R,y\in R$$

其中μ_1，μ_2，σ_1，σ_2，ρ 均为常数，且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1$

称(X,Y)服从二维正态分布，记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$$



例 3.1.8 设 (X,Y)服从二维正态分布 $N(0,1;0,1;\rho)$

求 X,Y 的边缘概率密度.

解：(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2-2\rho xy+y^2\right)}\qquad x,y\in R$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(x^2-2\rho xy+y^2\right)}dy$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}}dy$$

$$\frac{\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}=t}{\quad} \qquad \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

即 $X \sim N(0,1)$

同理 $Y \sim N(0,1)$

注: 1)二维正态分布的边缘分布为正态分布.

2)正态分布的联合概率密度与ρ有关.

边缘概率密度与ρ无关.

3)边缘分布不能唯一确定联合分布.

■

<u>命题</u> **3.1.1** 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$ 则

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2) \qquad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

小　结

1.随机变量的联合分布函数能完整地描述它们的取值规律。

2.联合分布率与联合概率密度分别用来描述离散型与连续型随机变量的概率分布。

3.已知联合分布可以求边缘分布。

4.二维均匀分布与二维正态分布是两个常见分布，它们有很多特殊性质，要理解参数意义。

练　习

设二维随机变量(X,Y)的概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, 0\le x\le y\le 1\\ 0, \quad\quad others\end{cases}$$

则：P{X+Y≤1}=<u>1/4</u>。