第三节 条件分布

1、条件分布律

2、条件分布函数与条件概率密度

3、小结、思考

一.条件分布律

设(X,Y)的联合分布律为:

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij} \quad i,j=1,2,\ldots.$$

若$P\{Y=y_j\}>0$ 则称

$$\boxed{P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad i=1,2,\ldots. \qquad (*)}$$

为在$Y=y_j$ 的条件下,R.V.X 的条件分布律.

条件分布律具有分布律的性质:

1) $P\{X=x_i \mid Y=y_j\}\geq 0 \quad i=1,2,\ldots.$

2) $\sum_{i=1}^{+\infty} P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=1$

判断两个离散型R.V.X,Y相互独立的方法:

$$1)\ F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

$$2)\ P_{ij}=P_{i.}P_{.j}$$

$$3)\ P\{X=i\}=P\{X=i|Y=j\}$$

$$4)\ P\{Y=j\}=P\{Y=j|X=i\}$$

$$(i,j=1,2,\ldots)$$

例3.3.1： 在1,2,3,4 中随机取出一数 X,再随机地从1~X中取 一数Y,求在X=3的条件下,Y的条件分布律.

解： 由古典概率有:

$$P\{Y=j|X=3\}=\frac{1}{3} \qquad j=1,2,3$$

■

例3.3.2 记X为某医院一天出生的婴儿个数,记Y为男婴的个数设(X,Y)的联合分布律为:

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{e^{-14}(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}$$

$$j=0,1,\dots,i \qquad i=0,1,\dots$$

求: 1) 边缘分布律; 2) 条件分布律; 3)X=20时Y的条件分布律.

解:

$$1)\ P\{X=i\}=P\{X=i,Y<+\infty\}$$

$$=\sum_{j=0}^{i}p_{ij}=\frac{e^{-14}}{i!}\sum_{j=0}^{i}\frac{i!(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}$$

$$=\frac{e^{-14}}{i!}(7.14+6.86)^i=\frac{14^i}{i!}e^{-14} \qquad i=0,1,\dots$$

$$X\sim P(14)$$

$$P\{Y=j\}=P\{X<+\infty,Y=j\}$$

$$=\sum_{i=j}^{+\infty}p_{ij}=\frac{e^{-14}}{j!}\sum_{i=j}^{+\infty}\frac{(7.14)^j(6.86)^{i-j}}{(i-j)!}$$ 令 $i-j=k$

$$=\frac{e^{-14}}{j!}(7.14)^j\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{6.86^k}{k!}$$

$$=\frac{(7.14)^j}{j!}e^{-7.14} \qquad j=0,1,\ldots$$

$$Y\sim P(7.14)$$

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{e^{-14}(7.14)^{j}(6.86)^{i-j}}{j!(i-j)!}$$

$$2)\ P\{X=i|Y=j\}=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(Y=j)}$$

$$=\frac{e^{-6.86}(6.86)^{i-j}}{(i-j)!}\qquad i=j,j+1,\ldots$$

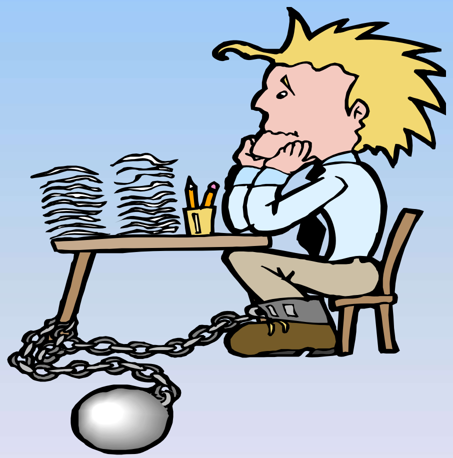
$$P\{Y=j|X=i\}=\frac{P(X=i,Y=j)}{P(X=i)}$$

$$=C_i^j\left(\frac{7.14}{14}\right)^j\left(\frac{6.86}{14}\right)^{i-j}\qquad j=0,1,\ldots i$$

$$3)\quad P\{Y=j|X=20\}=\frac{P(X=20,Y=j)}{P(X=20)}$$

$$=C_{20}^{j}\left(\frac{7.14}{14}\right)^{j}\left(\frac{6.86}{14}\right)^{20-j}\qquad j=0,1,\ldots 20$$

$$Y\sim B\left(20,\frac{7.14}{14}\right)$$



思考：随机变量 X 与 Y 是否相互独立?

不相互独立

$$P\{Y=j\}\neq P\{Y=i|X=i\}$$

■

二. 问题

在二维连续型R.V.(X,Y)中,一个R.V.Y取某个确定值y_0的条件下,另一个R.V.X的分布如何?

$$P\left\{X \le x \middle| Y = y_0\right\}$$

由于不能保证P(Y=y_0)>0.所以在一般情况下,就不能用条件概率的定义来直接求此概率.

这时需采用极限的方法来定义.

二.条件分布函数与条件概率密度

定义:

给定$y_0 \in R$ 及任意 $\Delta y > 0$ 若$P\{y_0 - \Delta y < Y \le y_0\} > 0$,且对任意$x \in R$,极限

$$\lim_{\Delta y \to 0^+} P\left\{X \le x \middle| y_0 - \Delta y < Y \le y_0\right\}$$

存在,称此极限函数为在 $Y=y_0$ 的条件下,R.V.X 的条件分布函数.记作 $F_{X|Y}(x|y_0)$

定理：设(X,Y)是连续型R.V.,且满足$f(x,y)$, $f_Y(y)$ 在(x,y_0)附近连续,且$f_Y(y_0)>0$ 则有

$$F_{X|Y}\left(x|y_0\right)=\int_{-\infty}^{x}\frac{f\left(u,y_0\right)}{f_Y\left(y_0\right)}du$$

证明:

$$F_{X|Y}\left(x|y_0\right)=\lim_{\Delta y\to 0^+}P\left\{X\le x|y_0-\Delta y<Y\le y_0\right\}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{P\left\{X\le x,y_0-\Delta y<Y\le y_0\right\}}{P\left\{y_0-\Delta y<Y\le y_0\right\}}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0^+}\frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y_0-\Delta y}^{y_0}f(u,v)dvdu}{\int_{y_0-\Delta y}^{y_0}f_Y(v)dv}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u, y_0 - \theta_1 \Delta y) \Delta y du}{f_Y(y_0 - \theta_2 \Delta y) \Delta y}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u, y_0)}{f_Y(y_0)} du$$

我们称

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y_0) = F'_{X|Y}(x|y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}}$$

为在 $Y=y_0$ 的条件下R.V.X 的条件概率密度.

例3.3.3 设(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x & 0\le x\le 1, 0<y<x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求: P(Y≤1/8 |X=1/4)

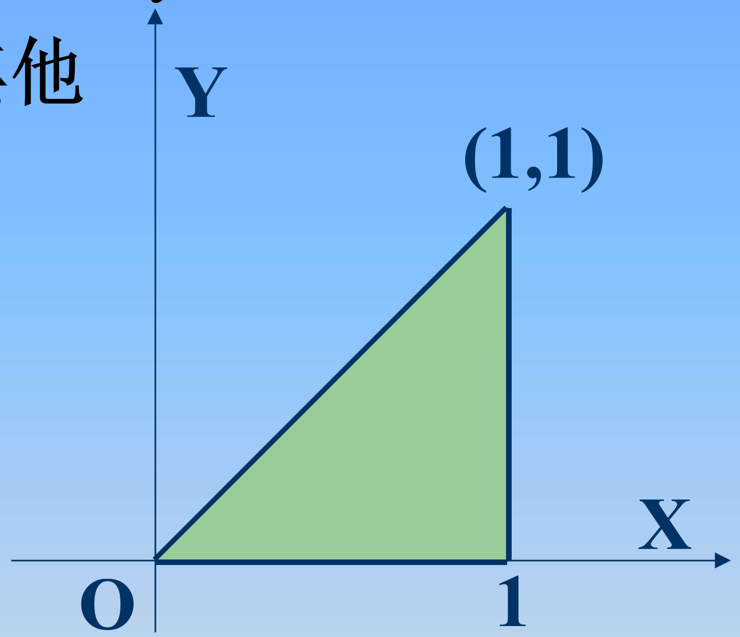
分析: 1) 所求值是在X=1/4的条件下,Y的条件分布函数在1/8处的函数值.

2) 利用条件概率密度求解. 先求X的边缘概率密度,再求Y的条件概率密度,最后积分求解.

例3.3.3 设(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}3x & 0\le x\le 1,0<y<x\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求: P(Y≤1/8 |X=1/4)



解: X的边缘概率密度为:

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_0^x 3xdy & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}3x^2 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

故当$0<x_0<1$时，$f_{Y|X}(y|x_0)=\dfrac{f(x_0,y)}{f_X(x_0)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x_0} & 0<y<x_0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

$$P\{Y \le 1/8 \mid X = 1/4\}$$

$$= F_{Y|X}\left(1/8 \mid 1/4\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{1/8} f_{Y|X}\left(y \mid 1/4\right) dy$$

$$= \int_0^{1/8} 4\,dy = \frac{1}{2}$$

■

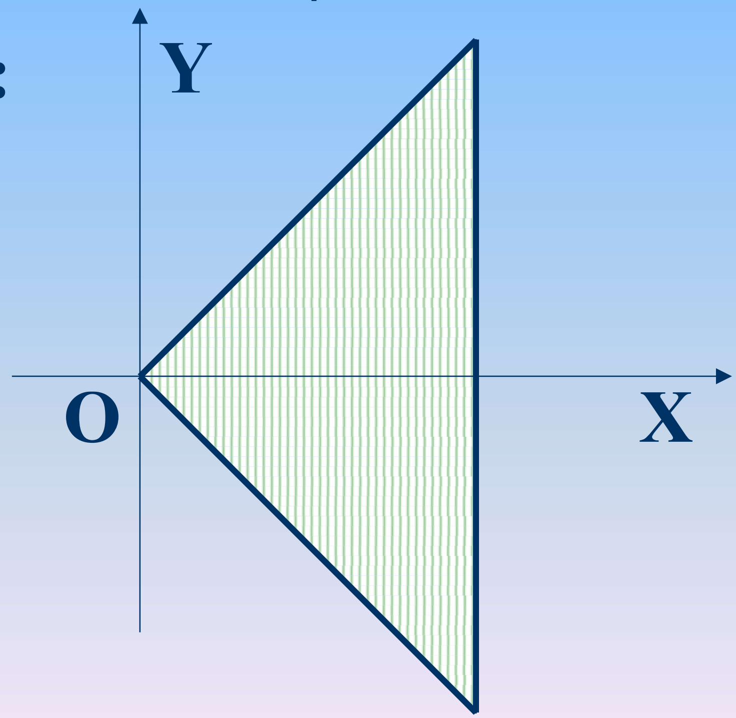
例3.3.4 设(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & |y|<x,0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求: 1) 求条件概率密度

2) P(| Y | <1/3 |X=1/2)　　P(Y <1/3 |X=-1/2)

解: 1) 先求X,Y的边缘概率密度:



$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$=\begin{cases}\int_{-x}^{+x} 1\,dy=2x & 0<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}1+y & -1<y<0\\ 1-y & 0<y<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当 $0<x<1$时,$f_X(x)>0$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2x} & -x<y<x\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

当 $-1<y<1$时,$f_Y(y)>0$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-|y|} & |y|<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

2) $P(|Y|<1/3\ |X=1/2)$

$$=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f_{Y|X}\left(y\middle|\frac{1}{2}\right)dy=\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} dy=\frac{2}{3}$$

$P(Y<1/3\ |X=-1/2)$

$$=\int_{-\infty}^{\frac{1}{3}} f_{Y|X}\left(y\middle|-\frac{1}{2}\right)dy=0$$

■

判断两个连续型R.V.X,Y相互独立的方法:

$$1)\ F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

$$2)\ f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

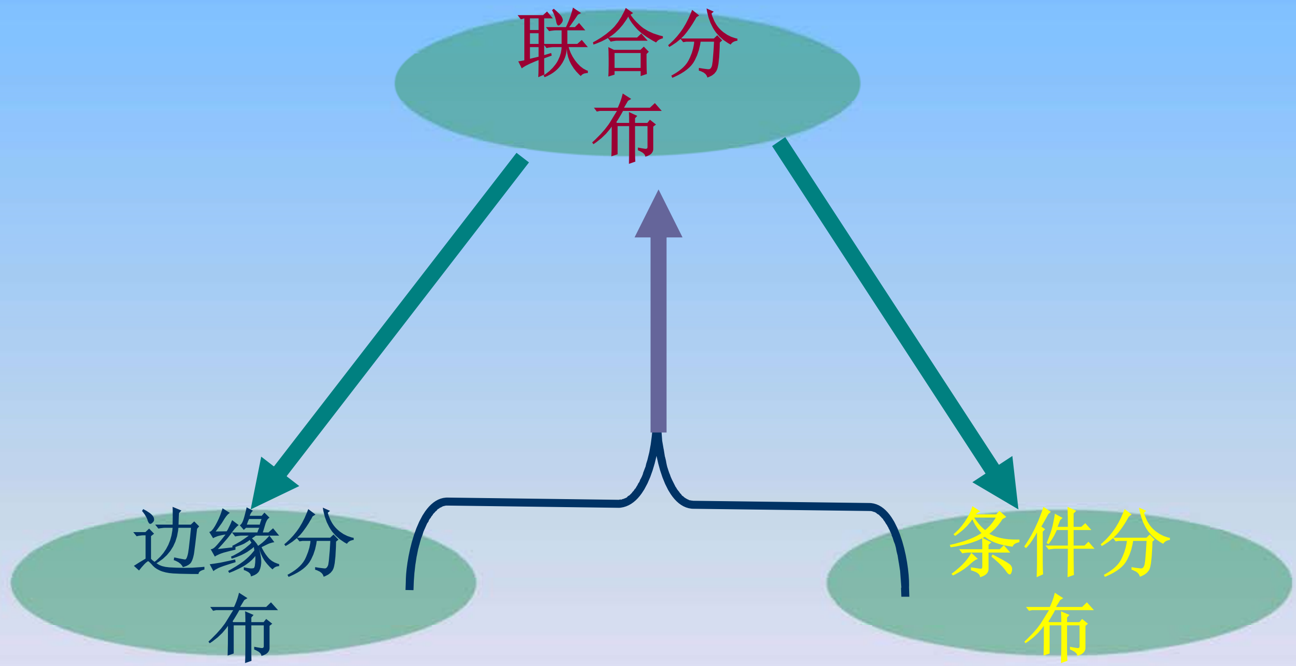
$$3)\ f_X(x)=f_{X|Y}(x|y)$$

$$4)\ f_Y(y)=f_{Y|X}(y|x)$$

$x,y\in \mathbf{R}$

小　结

联合分布、边缘分布、条件分布三者之间的关系.



练　习

设(X,Y)的联合概率密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x & 0 \le x \le 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求: P(Y≤1/8 |X<1/4)