第 七 章 参数估计

第二节 估计量的优良性准则

1、无偏性

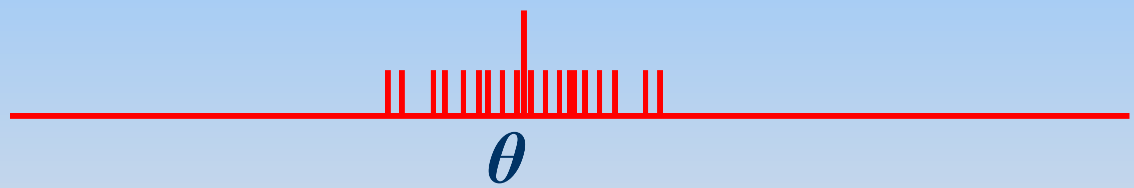
2、有效性

3、相合性

§ 7.2　估计量的优良性准则

1.　　无偏性

定义：设 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 是未知参数 θ 的估计量，若 $E(\hat{\theta}) = \theta$ ，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计。



例　设总体的方差$D(X)=\sigma^2>0$，则样本方差S^2是σ^2的无偏估计。

分析：关键在于$E(S^2)=\sigma^2$是否成立。

证明：$$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2$$

$$(n-1)E(S^2)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)-nE(\overline{X}^2)=nE(X^2)-nE(\overline{X}^2)$$

$$=n\{D(X)+E(X)^2\}-n\{D(\overline{X})+E(\overline{X})^2\}$$

$$=n(\sigma^2+\mu^2)-n(\frac{\sigma^2}{n}+\mu^2)\quad=(n-1)\sigma^2$$

$$\therefore E(S^2)=\sigma^2$$

#

注意：

$$\boxed{M_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \text{不是 } \sigma^2\text{的无偏估计}}$$

$$\because M_2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\frac{n-1}{n}S^2$$

$$\Rightarrow E(M_2)=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

μ已知时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$是$\sigma^2$的无偏估计

A_k 是 γ_k 的 无 偏 估 计 量

无 偏 估 计 量的不唯一性

注：

1)样本的k阶原点矩是总体k阶原点矩的无偏估计量。

2)一个未知参数可有不同的无偏估计量。

2. 有效性

思考：下列估计量是否是$\mu=E(X)$ 的无偏估计量？哪个更好？

1. $\bar{X}$	2. X_1	3. X_1+X_2	4. $0.1X_1+0.2X_2+0.7X_3$

由上例可见，一个参数的无偏估计可以有很多；

无偏估计只能保证无系统误差， $E(\hat{\theta}-\theta)=0$

但是却可能有极大的偏差。

一个优良的估计量，其方差应该较小。

定义：设 $\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 和 $\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是未知参数 θ 的两个无偏估计量，若对θ 的所有可能取值都有 $D(\hat{\theta}_1)\le D(\hat{\theta}_2)$ 则称 $\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$有效。

设$\hat{\theta}_0$是θ 的无偏估计，如果对θ 的任何一个无偏估计量都有 $D(\hat{\theta}_0)\le D(\hat{\theta})$

则称$\hat{\theta}_0$ 为θ 的最小方差无偏估计量.(有效估计量）

证明无偏性并判断哪个有效

例 设总体$X\sim U[0,\theta]$， $\theta>0$ 未知，(X_1, X_2, X_3)是取自X的一个样本：

试证 $\hat{\theta}_1=\frac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3}X_i,\ \hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\le i\le 3}X_i$ 都是θ的无偏估计；

上述两个估计量中哪个方差最小？

分析：	要判断是否无偏估计，需要计算期望 要计算期望，需知道概率密度函数

证明： 1) X的分布函数为：

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0\le x<\theta\\ 1, & x\ge\theta\end{cases}$$

令$Y=\max\limits_{1\le i\le 3} X_i, Z=\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$　则Y的分布函数为：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{\max_{1\le i\le 3}X_i\le y\}$$

$$=P\{X_1\le y, X_2\le y, X_3\le y\}$$

$$=P\{X_1\le y\}\cdot P\{X_2\le y\}\cdot P\{X_3\le y\}$$

$$=[F_X(y)]^3$$

$$\therefore f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{\theta}\cdot\left(\frac{y}{\theta}\right)^2, & 0\le y\le\theta\\ 0\ , & else\end{cases}$$

$$\therefore E(Y)=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta y^3dy$$

$$=\frac{3}{4}\theta$$

同理可得, $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{\theta}\cdot\left(1-\frac{z}{\theta}\right)^2, & 0\le z\le\theta\\ 0\ , & else\end{cases}$

$$\therefore E(Z)=\frac{3}{\theta^3}\int_0^\theta z\cdot(\theta-z)^2dz=\frac{1}{4}\theta$$

从而，$E(\frac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i)=E(4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i)=\theta$

即 $\frac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 和 $4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 都是 θ 的无偏估计

2) $\because D(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{3}{80}\theta^2$

$$D(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=\frac{3}{80}\theta^2$$

$$\therefore D(\frac{4}{3}Y)\le D(4Z)$$

即 $\frac{4}{3}\max\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 比 $\hat{\theta}_2=4\min\limits_{1\le i\le 3} X_i$ 的方差小 #

3.　相合性

定义：设 $\hat{\theta}(X_1, X_2, ..., X_n)$ 是未知参数θ 的估计量，若对任意的ε>0，有 $\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1$

则称 $\hat{\theta}$ 为θ 的相合估计量。

$\overline{X}$ 是μ的相合估计量；（要求总体方差存在？）

S^2和M_2都是σ^2的相合估计量。

注：

由于相合性是在极限意义下定义的。因此，只有当样本容量充分大时，才显示出优越性，而在实际生活中往往难以增大样本容量，而且证明估计量的相合性并非容易，因此，在实际生活中常常使用无偏性和有效性这两个标准。