第 三 章　多 维 随 机 变 量

第二节 随机变量的独立性

1、二维随机变量的独立性

2、判定独立性的等价条件

3、多维随机变量的独立性

4、小结、思考

§ 3.2 随机变量的独立性

一. 二维随机变量的独立性

定义:

设(X,Y)是二维随机变量, 若对任意实数对(x,y)

均有 $$P\{X\le x, Y\le y\}=P\{X\le x\}P\{Y\le y\}$$

成立，称 X 与 Y 相互独立。

意义：对任意实数对(x,y)，随机事件$\{X\le x\}$与随机事件$\{Y\le y\}$相互独立。

例3.2.1 设随机变量 X 的概率密度为：

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|} \qquad -\infty < x < +\infty$$

问 X 与 $|X|$ 是否相互独立。

分析：1) 判断 X 与 $|X|$ 是相互独立。需验证

$$P\{X \le a, |X| \le b\} = P\{X \le a\}P\{|X| \le b\}$$

对任意的 a,b 都成立。

若判断不相互独立

则只需找到一对 a,b 使得上式不成立．

例3.2.1　设随机变量 X 的概率密度为:

$$f(x)=\tfrac{1}{2}e^{-|x|} \qquad -\infty < x < +\infty$$

问 X 与 $|X|$ 是否相互独立。

解：对于任意给定的正实数 a 有

$$\{|X|\le a\}\cap\{X\le -a\}=\{X=-a\}$$

从而 $P\{X\le -a, |X|\le a\}=0$

$$< P\{X\le -a\}P\{|X|\le a\}$$

即 X 与 $|X|$ 不相互独立。

■

等价条件:

1. X与 Y 相互独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

2. (离散型)X与Y相互独立 $\Leftrightarrow$

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\,P\{Y=y_j\}$$

3. (连续型)X与Y相互独立 $\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ 在平面上除去“面积”为0 的集合外成立。

例3.2.2 已知二维随机变量(X,Y)的概率密度为:

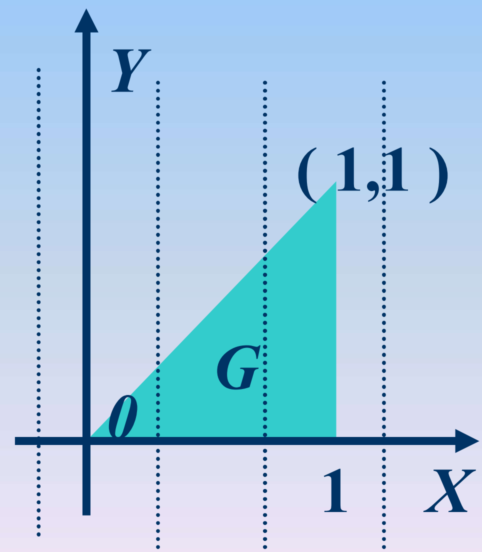
$$f(x,y)=\begin{cases} 8xy & 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

问 X,Y 是否相互独立?

解: $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$

$$=\begin{cases} 0 & x<0 \text{ or } x>1 \\ \int_0^x 8xy\,dy & 0\le x\le 1 \end{cases}$$

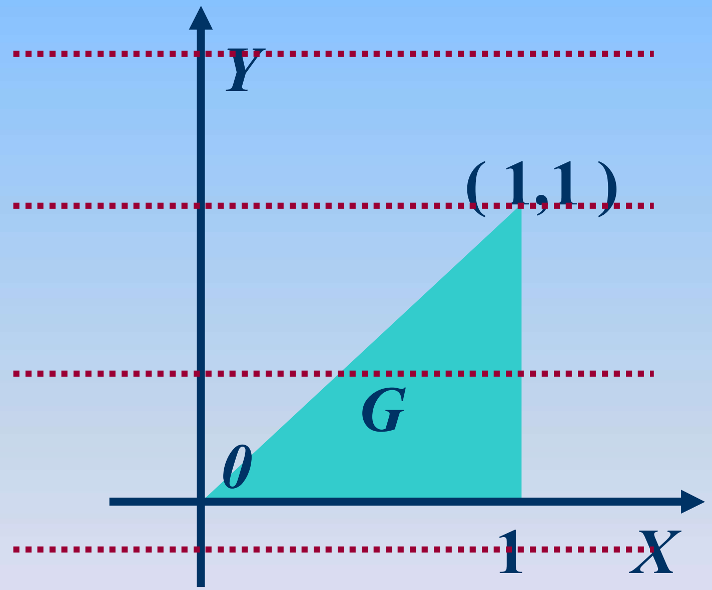
$$=\begin{cases} 0 & x<0 \text{ or } x>1 \\ 4x^3 & 0\le x\le 1 \end{cases}$$



同理

$$f_Y(y)=\begin{cases}0 & y<0\ or\ y>1\\ 4y-4y^3 & 0\le y\le 1\end{cases}$$

记 $G=\{(\mathrm{x,y})|0\le y\le x\le 1\}$



在区域 G 中

$$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

故X,Y不相互独立。

■

例3.2.4 设随机变量 X, Y 相互独立，$X\sim U(0, a)$

$Y\sim U(0, \pi/2)$ 且 $0<b<a$ 试求 $P\{X<b\cos Y\}$

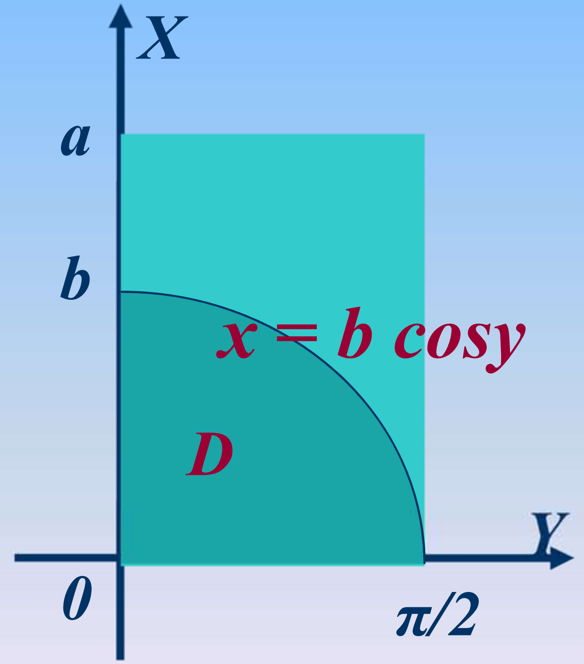
解:

$$f_X(x)=\begin{cases}1/a & 0<x<a\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}2/\pi & 0<y<\pi/2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因为随机变量 X, Y 相互独立，则

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

$$=\begin{cases}2/a\pi & o<x<a,\ 0<y<\pi/2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$



$$P\{X<b\cos Y\}=\iint_D \frac{2}{a\pi}\,dxdy$$

$$=\frac{2}{a\pi}S(D)=\frac{2b}{a\pi}$$

■

练习：设随机变量 X 与 Y 相互独立，填出空白处的数值.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$p_{i\cdot}$
x_1	1/24	1/8	1/12	1/4
x_2	1/8	3/8	1/4	3/4
$p_{\cdot j}$	1/6	1/2	1/3	1

若(X,Y)的联合分布律中某$P_{ij}=0$ 问X,Y是否相互独立?

不相互独立

$$0 < p_{i\cdot}p_{\cdot j} \neq P_{ij} = 0$$

■

二. 多维随机变量的独立性

定义：设 n 维随机变量（$X_1, X_2, \ldots X_n$）的联合分布函数为 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 若对任意实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 均有

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x_i)$$ $F_i(x_i)$为X_i的边缘分布函数

称$X_1, X_2, \ldots X_n$ 相互独立。

定理：若n 维随机变量（$X_1, X_2, \ldots X_n$）相互独立，则

1). 任意k个随机变量($2 \le k \le n$)也相互独立.

2). 随机变量 $g_1(X_1), g_2(X_2), \ldots, g_n(X_n)$也相互独立.

3). $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与（$X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n$）也相互独立.

且随机变量 $h(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ 与 $g(X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n)$ 也相互独立.

例:3 维随机变量X_1, X_2, X_3相互独立，则

X_1^2, X_2^2, X_3^2也相互独立.

X_1+X_2与X_3也相互独立.

$\sin X_1$与X_3也相互独立.

X_1+X_2与X_1-X_2不一定相互独立.

随机变量的独立性本质上是事件的独立性

小　结

1.随机变量的独立性本质上是事件的独立性。

2. 掌握独立性的判定方法：

1）$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$

2）$\forall i,j\ \ P_{ij}=P_{i\cdot}P_{\cdot j}$

3）$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$在平面上除去“面积”为0 的集合外成立。

练　习

设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为:

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件{X=0}与{X+Y=1}相互独立

则：a=___0.4___，b=___0.1___。