第 八 章 假设检验

第二节 参数的假设检验

1、单个正态总体的假设检验

2、两个正态总体的假设检验

§8.2 正态总体的参数检验

一、单个正态总体均值μ的检验

1.1) u 检验法

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma_0^2)$中抽取的样本，σ_0^2 已知，检验 $H_0: \mu=\mu_0 \quad H_1: \mu\neq\mu_0$

原假设成立时，$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

拒绝域为：$|u|>u_{\frac{\alpha}{2}}$

例：§8.1 中“包装机工作正常与否的判断”

1.2) t 检验法

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本， μ,σ^2未知，检验 $H_0: \mu = \mu_0$ $H_1: \mu \neq \mu_0$

原假设成立时，

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

拒绝域为：

$$|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

铁 水 温 度 的 测 量

例 炼钢厂为测定混铁炉铁水温度，用测温枪(主要装置为一种热电偶)测温6次，记录如下(单位：ºC)：

1318	1315	1308	1316	1315	1312

若用更精确的方法测的铁水温度为1310ºC(可视为铁水真正温度)，问这种测温枪有无系统误差？

解：根据题意要求，需作检验为：

H_0: $\mu=1310$ H_1 :$\mu\neq 1310$

由于σ^2 未知，故采用 t 检验法

当H_0成立时： $$T=\frac{\bar{X}-1310}{S/\sqrt{6}}\sim t(5)$$

$$\because \quad \bar{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=1314 \qquad s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=3.521$$

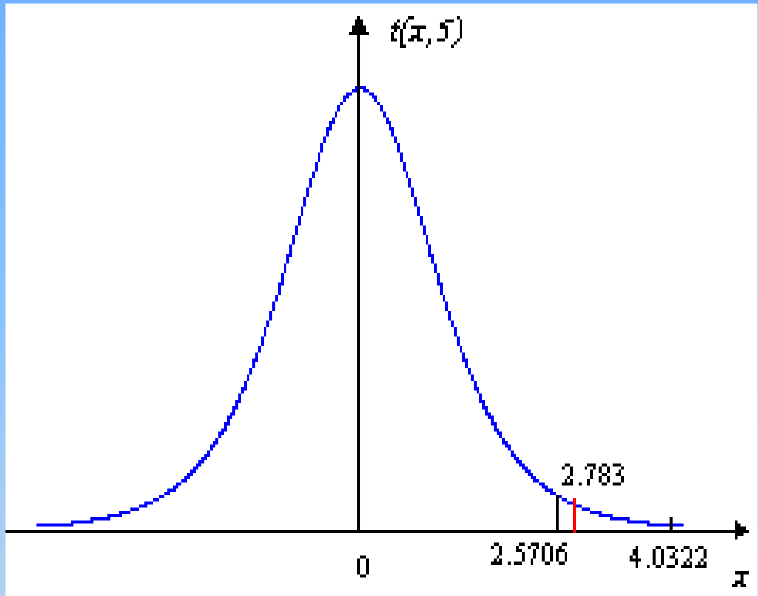
$$\therefore \quad t=\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n-1}}=\frac{1314-1310}{3.521/\sqrt{6}}=2.783$$

若取α=0.05，查t分布表可得

$t_{0.025}(5)=2.5706$

因为 $|t|=2.783>t_{0.025}(5)=2.5706$

所以在显著性水平0.05下，拒绝H_0，即可认为该种测温枪有系统误差。



若取α=0.01，查t分布表可得：$t_{0.005}(5)=4.0322$

因为 $|t|=2.783<t_{0.005}(5)=4.0322$

所以在显著性水平0.01下，接受H_0，即可认为该种测温枪没有系统误差。

由上可看出，采用不同的显著性水平α，常得到不同的结论。

即检验的结果依赖于显著性水平α的选择。

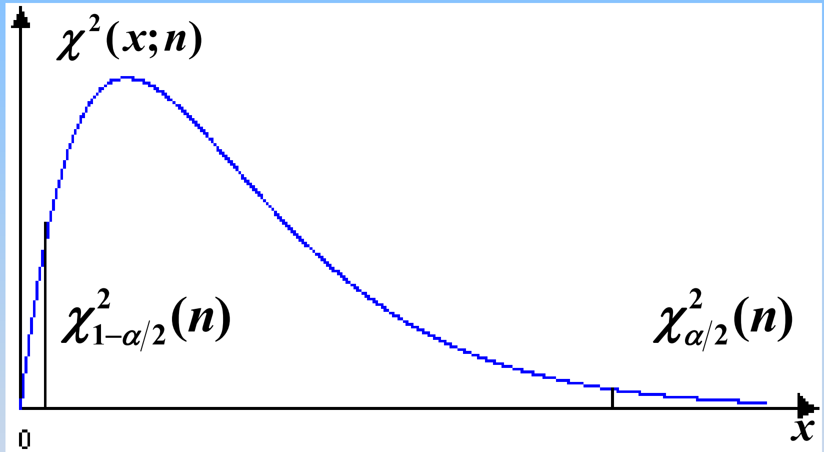
二、单个正态总体方差σ^2的检验

2.1) χ^2 检验法

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本，

检验 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

a) μ已知



原假设成立时，

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2(n)$$

拒绝域为：

$$\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) \quad 或 \quad \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$$

注意 $\chi^2_\alpha(n)$的定义：$P\{\chi^2 > \chi^2_\alpha(n)\} = \alpha$

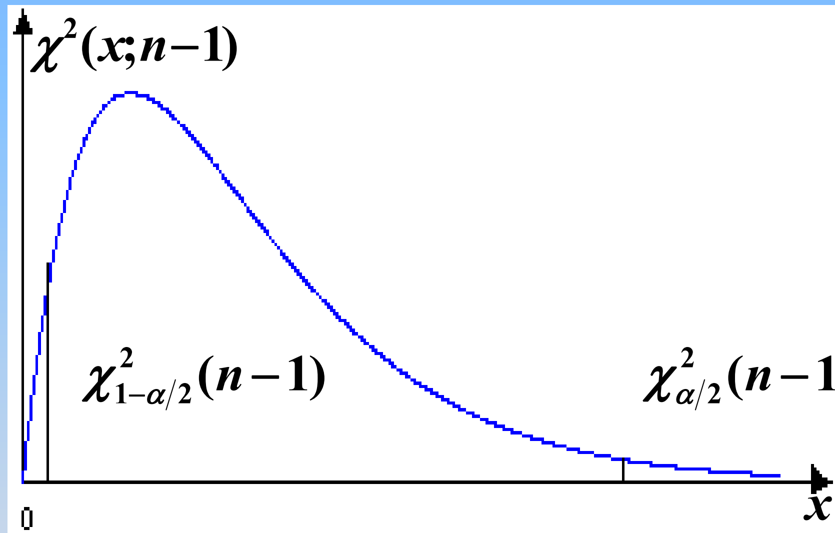
2) μ未知

$X_1,\ldots,X_n$是从正态总体$N(\mu,\sigma^2)$中抽取的样本，

检验 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

原假设成立时，

$$\chi^2 = (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$



拒绝域为：

$$\chi^2 > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \quad 或 \quad \chi^2 < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

三、 两个正态总体的均值检验

3.1) 双样本u 检验法

$X_1, \ldots, X_{n1}$是来自正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$的样本，$Y_1,\ldots,Y_{n2}$是正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$中的样本，

已知σ_1^2与σ_2^2，检验

$H_0: \mu_1 = \mu_2$（或$\mu_1-\mu_2=0$）; $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

原假设H_0成立时，

$$U = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$$

3.2） 双样本 t 检验法

1. $X_1,\ldots,X_{n1}$ 是从正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$中抽取的样本，
2. $Y_1,\ldots,Y_{n2}$ 是从正态总体$N(\mu_2,\sigma^2)$中抽取的样本，
3. μ,σ^2 未知，检验 H_0: $\mu_1=\mu_2$， H_1:$\mu_1\neq\mu_2$

原假设成立时，检验统计量

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

拒绝域为：

$$|t|>t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)$$

其中，$S_w^2 = \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right]$

$$= \frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\left(X_i-\overline{X}\right)^2+\sum_{j=1}^{n_2}\left(Y_j-\overline{Y}\right)^2\right]$$

TIPS

成年人红细胞数与性别的关系

例 为研究正常成年男、女红细胞的平均数之差别，检查某地正常成年男子 156名，正常成年女子74名，计算得男性红细胞平均数为465.13万/mm^3，样本标准差为54.976万/mm^3；女性红细胞平均数为422.16万/mm^3，样本标准差为49.536万/mm^3。

试检验该地正常成年人的红细胞平均数是否与性别有关(α=0.01)。

解：设X表示正常成年男性的红细胞数，$X\sim N(\mu_1,\sigma^2)$

Y表示正常成年女性的红细胞数，$Y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$

需作检验： $H_0: \mu_1=\mu_2$； $H_1: \mu_1\neq\mu_2$

由于σ^2未知，故采用 t 检验法，取检验统计量为：

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$$

当H_0成立时：

$$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

$$\because\quad n_1=156,\quad \bar{x}=465.13\text{万}/mm^3,\quad s_1=54.976\text{万}/mm^3$$

$$n_2=74,\quad \bar{y}=422.16\text{万}/mm^3,\quad s_2=49.536\text{万}/mm^3$$

$$\therefore S_w=\sqrt{\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2\right]}=53.295$$

$$t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}=\frac{465.13-422.16}{53.295\sqrt{\frac{1}{156}+\frac{1}{74}}}=5.712$$

α=0.01时可得：**$t_{\alpha/2}=t_{0.005}(228)=2.598$**

(查标准正态分布表：**$u_{0.005}=2.598$**)

于是，　**$|t|=5.712>2.598$**

所以在显著性水平**0.01**下拒绝假设H_0，即认为正常成年男、女性红细胞数有显著差异。

#

四、两个正态总体的方差检验

F 检验法

$X_1,\dots,X_{n1}$是从正态总体$N(\mu_1,\sigma_1^2)$中抽取的样本，

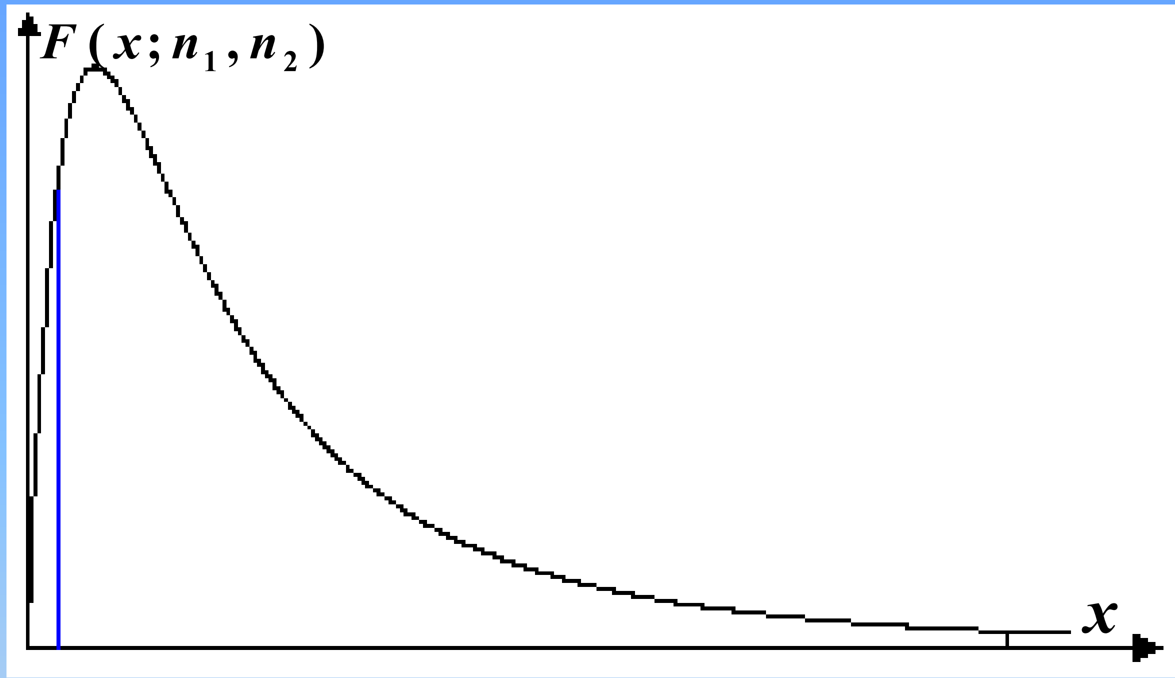
$Y_1,\dots,Y_{n2}$是从正态总体$N(\mu_2,\sigma_2^2)$中抽取的样本，

检验 H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$; H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

a) μ_1、μ_2 已知

原假设成立时，

$$F = \frac{n_2 \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{n_1 \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2} \sim F(n_1, n_2)$$



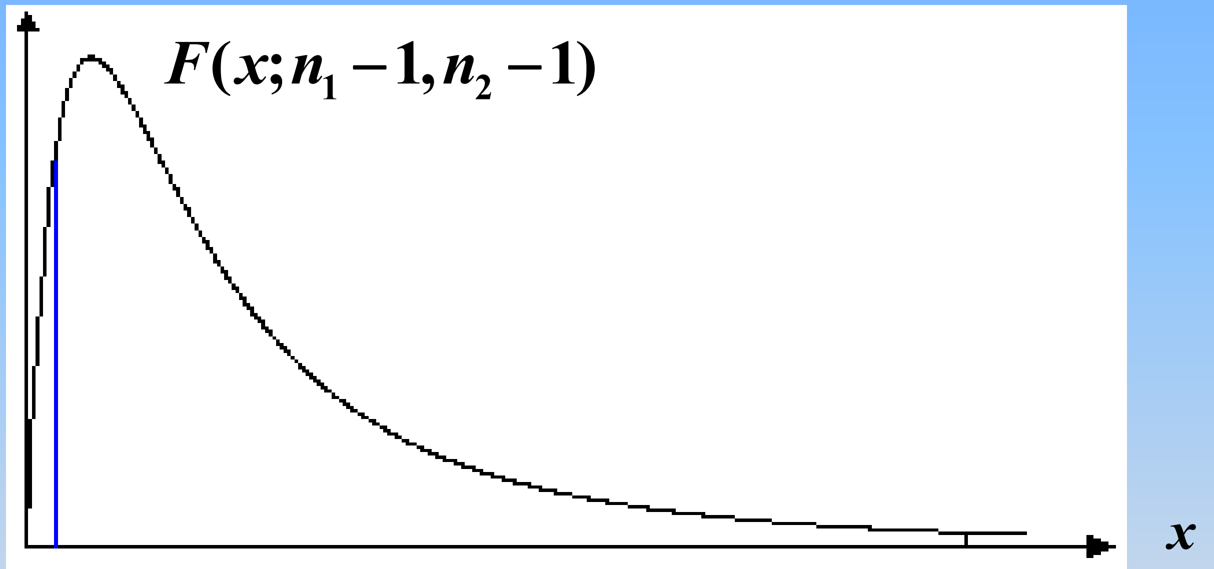
$F_{1-\alpha/2}(n_1,n_2)$ $F_{\alpha/2}(n_1,n_2)$

拒绝域为:

$$f > F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2) \quad \text{或} \quad f < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1,n_2)$$

b) μ_1 、 μ_2 未知

原假设成立时，
$$F=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2}=\frac{S_1^2}{S_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$$



$F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$　　$F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)$

拒绝域为：

$$f>F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$$ 或 $$f<F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)$$

成年人红细胞数与性别的关系(F 检验法)

例 为研究正常成年男、女学艺红细胞的平均数之差别，检查某地正常成年男子 **156**名，正常成年女子**74**名，计算得男性红细胞平均数为**465.13**万/mm^3，样本标准差为**54.976**万/mm^3；女性红细胞平均数为**422.16**万/mm^3，样本标准差为**49.536**万/mm^3。

试检验该地正常成年男子与女子的红细胞数标准差是否相等(α=0.1)。

解：设X表示正常成年男性的红细胞数，$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

Y表示正常成年女性的红细胞数，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

需作检验：$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$； $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

由于μ_1和μ_2未知，故采用 F 检验法，当H_0成立时：

$$F = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

$$\because \quad n_1 = 156 \quad s_1 = 54.976\text{万}/mm^3$$

$$n_2 = 74 \quad s_2 = 49.536\text{万}/mm^3$$

$$\therefore f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{54.976^2}{49.536^2} = 1.232$$

α=0.1 时可得：$F_{\alpha/2}=F_{0.05}(155,73)=0.726$

$F_{1-\alpha/2}=F_{0.95}(155,73)=1.41$

于是，$F_{0.95}(155,73)<f<F_{0.05}(155,73)$

在显著性水平0.1下，不能拒绝假设$H_0\ (\sigma_1^2=\sigma_2^2)$，即可认为成年男女的红细胞数的标准差无显著的差异。

#