第1章　线性定常系统的状态空间描述及运动分析

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 1.1 线性定常系统的传递函数描述
   - 1.1.1 单变量情形回顾
   - 1.1.2 传递函数矩阵
2. 1.2 线性定常系统的状态空间描述
   - 1.2.1 状态和状态空间
   - 1.2.2 动态系统的状态空间描述
   - 1.2.3 线性定常系统的状态空间描述

线性定常系统的基本数学描述方式

- 控制系统的数学模型有两种基本类型:
  - 一种是描述系统输入输出特性的
    - 这种描述将系统看做一个"黑箱", 只反映系统外部变量间的因果关系, 而不表征系统的内部结构和内部变量
    - 具有完全不同结构的两个系统, 也可能具有相同的外部(输入输出)特性
    - 这种描述只是对系统的一种不完全描述
    - 经典控制理论中的微分方程及对应的传递函数就属于这种类型
  - 另一种描述则是系统的完全描述, 即状态空间描述
    - 这种描述将系统看做一个"白箱", 它反映了系统输入、输出变量和内部变量之间的关系, 包含了系统动态性能的全部信息, 揭示了系统内在的运动规律
    - 现代控制理论中的状态空间表达式就是这样一种描述

1.1 线性定常系统的传递函数描述

在讨论线性系统的状态空间描述前，本小节首先介绍一下传递函数描述

1.1 线性定常系统的传递函数描述

在讨论线性系统的状态空间描述前，本小节首先介绍一下传递函数描述

- 在控制系统的分析与设计中，第一步就是建立系统的数学模型，对所研究的对象给予适当的数学描述，用传递函数描述系统就是一种行之有效的方法
- 传递函数描述的是系统的输入—输出关系，用它描述系统时，假定对系统结构的内部信息一无所知，能够得到的只是系统的输入信息和输出信息
  - 这种情况下，对我们来说，系统的内部结构就像一个“黑箱”一样．因此，传递函数只能刻画系统的输入—输出特性，它被称为系统的输入—输出描述和外部描述
  - 使用传递函数方法描述系统所用的数学工具主要是拉普拉斯(Laplace) 变换

    因此，它主要适用于描述线性、定常系统

- 已知由下列常系数微分方程描述的定常系统

$$
\begin{aligned}
&y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\
=&b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u
\end{aligned}
\tag{1}
$$

1.1.1 单变量情形回顾

- 已知由下列常系数微分方程描述的定常系统

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\ =& b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \end{aligned} \tag{1}$$

其中

- $y(t)$ 叫做系统的输出
- $u(t)$ 叫做系统的输入
- t 为时间
- $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}, u^{(j)} = \frac{d^j u}{dt^j}$
- a_i, b_j 均为常数, $i = 0, 1, \cdots, n, j = 0, 1, \cdots, m, m \leqslant n$

- 若假定系统的初始变量为零, 即

$$\begin{aligned} y(0) = y^1(0) = \cdots = y^{(n-1)}(0) = 0 \\ u(0) = u^1(0) = \cdots = u^{(m-1)}(0) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

1.1.1 单变量情形回顾

- 对(1)两边取拉普拉斯变换, 得

$$
\begin{aligned}
&(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) \\
=&(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s)
\end{aligned}
$$

其中, $Y(s)$和$U(s)$分别为$y(t)$和$u(t)$的拉普拉斯变换

- 对(1)两边取拉普拉斯变换, 得

$$
\begin{aligned}
&(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) \\
=&(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s)
\end{aligned}
$$

其中, $Y(s)$和$U(s)$分别为$y(t)$和$u(t)$的拉普拉斯变换

➥ 那么,

$$
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{3}
$$

称为系统(1)的传递函数

- 对(1)两边取拉普拉斯变换，得

$$
\begin{aligned}
&(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) \\
=&(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s)
\end{aligned}
$$

其中，$Y(s)$和$U(s)$分别为$y(t)$和$u(t)$的拉普拉斯变换

➥ 那么，

$$
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \qquad (3)
$$

称为系统(1)的传递函数

- 如果传递函数$G(s)$为s的真有理分式，则称系统(1)为物理能实现的

- 对(1)两边取拉普拉斯变换, 得

$$
\begin{aligned}
&(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)Y(s) \\
=&(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0)U(s)
\end{aligned}
$$

其中, $Y(s)$和$U(s)$分别为$y(t)$和$u(t)$的拉普拉斯变换

➥ 那么,

$$
G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{3}
$$

称为系统(1)的传递函数

- 如果传递函数$G(s)$为s的真有理分式, 则称系统(1)为物理能实现的
- 单输入—单输出系统(1)的传递函数必为真有理分式(注: 假设了$m \le n$)

- 系统(1)的特征多项式为:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{4}$$

1.1.1 单变量情形回顾

- 系统(1)的特征多项式为:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{4}$$

- 系统(1)的特征方程为:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5}$$

1.1.1 单变量情形回顾

- 系统(1)的特征多项式为:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{4}$$

- 系统(1)的特征方程为:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5}$$

- 系统(1)的极点为:

特征方程(5)的根(或者说特征方程(5)的零点)

1.1.1 单变量情形回顾

- 系统(1)的特征多项式为:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{4}$$

- 系统(1)的特征方程为:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5}$$

- 系统(1)的极点为:

特征方程(5)的根(或者说特征方程(5)的零点)

- 系统(1)的零点为:

多项式 $b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ 的零点.

- 系统(1)的特征多项式为:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{4}$$

- 系统(1)的特征方程为:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \tag{5}$$

- 系统(1)的极点为:

特征方程(5)的根(或者说特征方程(5)的零点)

- 系统(1)的零点为:

多项式 $b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0$ 的零点.

- 若系统(1)有相同的零点和极点, 则称系统有零极点相消

➥ 零极相消后剩下的系统的零点和极点分别为传递函数的零点和极点

考虑多输入—多输出的线性定常系统

1.1.2 传递函数矩阵

考虑多输入—多输出的线性定常系统

- 令输入变量组为$\{u_1, u_2, \cdots, u_p\}$, 输出变量组为$\{y_1, y_2, \cdots, y_q\}$, 且假设系统的初始条件为零
- 用$Y_i(s)$ 和$U_j(s)$ 分别表示y_i和u_j的拉普拉斯变换, g_{ij} 表示系统的由第j个输入端到第i个输出端的传递函数, 其中$i = 1, \cdots, q; j = 1, \cdots, p$

➥ 则由**系统的线性属性（即满足叠加原理）**可以导出:

$$
\begin{cases}
Y_1(s) = g_{11}(s)U_1(s) + g_{12}(s)U_2(s) + \cdots + g_{1p}(s)U_p(s) \\
Y_2(s) = g_{21}(s)U_1(s) + g_{22}(s)U_2(s) + \cdots + g_{2p}(s)U_p(s) \\
\qquad\vdots \\
\qquad\vdots \\
Y_q(s) = g_{q1}(s)U_1(s) + g_{q2}(s)U_2(s) + \cdots + g_{qp}(s)U_p(s)
\end{cases}
\tag{6}
$$

1.1.2 传递函数矩阵

- 其向量方程的形式则为

$$
Y(s)=\begin{bmatrix} Y_1(s)\\ Y_2(s)\\ \vdots \\ Y_q(s)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1p}(s)\\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & \cdots & g_{2p}(s)\\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(s) & g_{q2}(s) & \cdots & g_{qp}(s)\end{bmatrix}}\begin{bmatrix} U_1(s)\\ U_2(s)\\ \vdots \\ U_p(s)\end{bmatrix} \qquad (7)
$$

$$
=G(s)U(s)
$$

——形式上与SISO描述$y(s)=g(s)u(s)$一致

- 由式(7)所定义的$G(s)$为系统的传递函数矩阵，是$q\times p$的一个有理分式矩阵

1.1.2 传递函数矩阵

- 其向量方程的形式则为

$$Y(s)=\begin{bmatrix}Y_1(s)\\Y_2(s)\\\vdots\\Y_q(s)\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}g_{11}(s)&g_{12}(s)&\cdots&g_{1p}(s)\\g_{21}(s)&g_{22}(s)&\cdots&g_{2p}(s)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\g_{q1}(s)&g_{q2}(s)&\cdots&g_{qp}(s)\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}U_1(s)\\U_2(s)\\\vdots\\U_p(s)\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$=G(s)U(s)$$

——形式上与SISO描述$y(s)=g(s)u(s)$一致

- 由式(7)所定义的$G(s)$为系统的传递函数矩阵，是$q\times p$的一个有理分式矩阵
- 当$G(s)$的元传递函数$g_{ij}(s)$ $(i=1,\cdots,q;j=1,\cdots,p)$为严格真的或真的有理分式，(即$g_{ij}(s)$的分子次数低于或等于分母次数)时，称$G(s)$为严格真的或真有理分式矩阵
- 通常，当且仅当$G(s)$为真的或严格真的时，它才是物理上可实现的

作为一个判断准则

- 当且仅当

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \text{零阵} \tag{8}$$

时, $G(s)$为严格真的

- 当且仅当

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = \text{非零常阵} \tag{9}$$

时, 传递函数矩阵$G(s)$为真的

1.2 线性定常系统的状态空间描述

- 系统的状态空间描述是建立在“状态和状态空间”概念的基础上的
  - 状态和状态空间本身, 并不是一个新的概念, 长期以来在质点和刚体动力学中得到了广泛的应用
  - 随着将他们引入到系统和控制理论中来, 并使之适应于描述系统的动态过程, 两个概念才有了更为一般的含义

定义

定义*1.1* 动力学系统的状态定义为:

完全表征系统时间域行为的一个最小内部变量组

- 组成这个变量组的变量$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$, 称为系统的状态变量, 其中$t \geqslant t_0$, t_0为初始时刻
- 由状态变量构成的列向量

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \ t \geqslant t_0 \tag{10}$$

  称为系统的状态向量, 简称状态
- 状态空间则定义为: 状态向量取值的数域上的一个向量空间

1.2.1 状态和状态空间

为了正确理解状态和状态空间的定义，对其定义作如下几点解释：

- 状态变量组可完全的表征系统行为的属性
  - 只要给定这组变量$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 在初始时刻t_0的值，以及输入变量$u_1(t), u_2(t), \cdots, u_p(t)$ 在$t \geqslant t_0$ 各瞬时的值，则系统中任何一个变量在$t \geqslant t_0$ 时的运动行为也就随之完全的确定了
- 状态变量组的最小性
  - 状态变量组$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$是为完全表征系统行为所必需的系统向量的最少个数，减少变量数将破坏表征的完全性，而增加变量数将是完全表征系统行为所不需要的
- 系统变量组在数学上的特征
  - 状态变量组$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$构成系统变量中线性无关的一个极大变量组

1.2.1 状态和状态空间

(续) 系统变量组在数学上的特征

- 考虑到状态变量$x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$只能取为实数值, 因此状态空间是建立在实数域上的向量空间, 其维数即为n
- 对于确定的某个时刻, 状态表示为状态空间中的一个点; 而状态随时间的变化过程, 则构成了状态空间中的一条轨迹

- 状态变量组包含了系统的物理特征
  - 当组成状态的变量个数n为有穷正整数时, 相应的系统为有穷维系统, 且称n为系统的阶次; 当n为无穷大时, 相应的系统则为无穷维系统
  - 一切集中参数系统都属于有穷维系统, 一切分布参数系统则属于无穷维系统
- 状态变量组选取上的不唯一性
  - 由于系统中变量的个数一般大于n, 而其中仅有n个线性无关的, 因此决定了状态向量组在选取上的不唯一性

1.2.1 状态和状态空间

定理

定理1.1 系统任意选取的两个状态变量组之间为线性非奇异关系

- 回顾: R^n空间中任意两组基的关系是什么?

证明： 设x和$\bar{x}$为任意选取的两个状态变量,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

证明： 设x和$\bar{x}$为任意选取的两个状态变量,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

- 则根据状态的定义可知, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$ 为线性无关

➥ 因此可将$x_1, x_2, \cdots, x_n$的每个变量表示为$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n$的线性组合, 且表示唯一, 并记为:

$$\begin{cases} x_1 = p_{11}\bar{x}_1 + \cdots + p_{1n}\bar{x}_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_n = p_{n1}\bar{x}_1 + \cdots + p_{nn}\bar{x}_n. \end{cases} \tag{12}$$

引入系数矩阵, 令

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

引入系数矩阵，令

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

➡ 则(12)还可以表示为

$$x = P\bar{x} \tag{14}$$

➡ 同理，由于$x_1, x_2, \cdots, x_n$也为线性无关，因此又有

$$\bar{x} = Qx \tag{15}$$

- 从而由(14), (15)可导出：

$$PQ = QP = I \tag{16}$$

- 式(16)表明P和Q互为逆，也即任意选取的两个状态x和$\bar{x}$为线性非奇异变换. 定理结论得证 ■

- 在引入了状态和状态空间概念的基础上，就可以建立动力学系统的状态空间描述
- 从系统结构的角度，一个动力学系统可用图1.1所示的方框图来表示

1.2.2 动态系统的状态空间描述

- 在引入了状态和状态空间概念的基础上，就可以建立动力学系统的状态空间描述
- 从系统结构的角度，一个动力学系统可用图1.1所示的方框图来表示

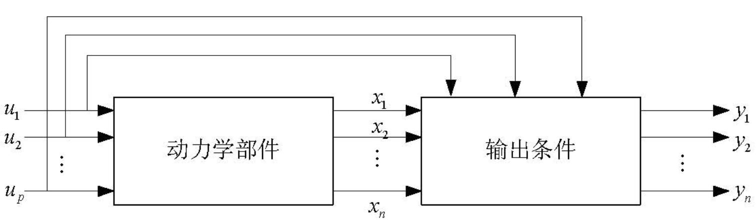

图1.1 动力学系统的结构示意图

- 其中，$x_1, x_2, \cdots, x_n$是表征系统行为的状态变量组；$u_1, u_2, \cdots, u_p$和$y_1, y_2, \cdots, y_q$分别为系统的输入变量组和输出变量组

- 和输入—输出描述不同，状态空间描述中把系统动态过程的描述考虑为一个更为细致的过程，输入引起系统状态的变化，而状态和输入则决定了输出的变化

(1) 输入引起状态的变化是一个运动的过程，数学上必须采用微分方程或者差分方程来表征，并且称这个数学方程为系统的状态方程

- 就连续动态系统而言，考虑最为一般的情况，则其状态方程为如下的一个一阶非线性时变微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p, t), \\ \quad \cdots\cdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p, t), \end{cases} \quad t \geqslant t_0 \tag{17}$$

- 进而，在引入向量表示的基础上，还可将状态方程简洁地表示为向量方程的形式：

$$\dot{x} = f(x, u, t), \ t \geqslant t_0 \tag{18}$$

(续) 其中

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(x,u,t) = \begin{bmatrix} f_1(x,u,t) \\ f_2(x,u,t) \\ \vdots \\ f_n(x,u,t) \end{bmatrix} \tag{19}$$

(2) 状态和输入决定输出的变化是一个变量间的转换过程, 描述这种转换过程的数学表达式为变换方程, 并且称之为系统的输出方程或量测方程

- 最为一般情况下, 一个连续的动力学系统的输出方程具有以下的形式:

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p, t), \\ \qquad \cdots\cdots \\ y_q = g_q(x_1, x_2, \cdots, x_n, u_1, u_2, \cdots, u_p, t), \end{cases} \tag{20}$$

- 表示为向量方程的形式为

$$y = g(x, u, t) \tag{21}$$

其中

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}, \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x, u, t) \\ g_2(x, u, t) \\ \vdots \\ g_q(x, u, t) \end{bmatrix} \tag{22}$$

注: '系统状态空间描述由状态方程和输出方程组成'的优点:

- 由于采用向量方程的形式, 当状态变量、输入变量和输出变量的数目增加时, 并不增加状态空间描述在表达形式上的复杂性

- 讨论离散动态过程的状态空间描述:
  - 离散动态过程的一个重要特点是,系统的各个变量都被处理成为只在离散时刻取值,其状态空间描述只反映离散时刻的变量组间的因果关系和转换关系
  - 用$k = 0, 1, 2, \cdots$来表示离散的时刻,则离散时刻系统(简称离散系统)的状态方程和输出方程的最一般形式为:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k), \\ y(k) = g(x(k), u(k), k) \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{23}$$

- 通常,可采用两条可能的途径来形成系统状态空间描述:
  - 一是分析途径,适用于结构和参数已知的系统
  - 二是辨识途径,适用于结构和参数难于搞清楚的系统

限于考虑线性定常系统的连续动态过程

- 此时, 在系统的状态方程和输出方程中, 向量函数$f(x,u,t)$和$g(x,u,t)$均为关于x,u的线性函数, 且不显含时间t
- 从而线性定常系统的状态空间描述的表达式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases} \tag{24}$$

其中
- $x(t)$为n维状态向量, n为系统的阶; $u(t)$为p维控制输入向量; $y(t)$为q维输出向量
- A为$n \times n$系统矩阵; B为$n \times p$输入矩阵; C为$q \times n$输出矩阵; D为$q \times p$前馈矩阵; A,B,C,D统称为系统的系数矩阵, 均为实常阵

- 线性定常系统也叫做线性时不变系统, 完全由系数矩阵决定, 简记为(A,B,C,D)

- 对于线性定常连续系统(24),
  - 我们分别称系统矩阵A的特征值、特征向量、若当标准型、特征方程、特征多项式为系统(24)的特征值、特征向量、若尔当标准型、特征方程、特征多项式, 系统的特征值也称作系统的极点
  - 若$p = 1$, 则系统(24)为单输出线性定常系统; 若$p = q = 1$, 系统(24) 为单输入-单输出系统, 或单变量系统
- 对于线性定常离散系统的状态空间描述, 其一般形式为:

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \\ y(k) = Cx(k) + Du(k), \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \tag{25}$$

其中

- $x(k)$为n维状态向量, $u(k)$为p维输入向量, $y(k)$为q维输出向量; G, H, C, D分别为$n \times n$, $n \times p$,$q \times n$, $q \times p$阶实常阵
- 系统(25)简记为(G, H, C, D)

致谢

- 教材:

程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 1–7