S. 系统运动的稳定性

稳定性是系统的一个**基本结构特性**。对大多数情形，稳定是控制系统能够正常运行的**前提**

系统的稳定性分为**基于输入输出描述的外部稳定性**和**基于状态空间描述的内部稳定性**

在一定条件下，外部稳定性和内部稳定性才存在等价关系

参考书目：

1. H.K. Khalil，《Nonlinear Systems—非线性系统(译本)》，电子工业出版社，2005
2. 高为炳，《运动稳定性》，高等教育出版社，1988

S.1 外部稳定性和内部稳定性

外部稳定性

考虑以输入输出关系表征的线性因果系统

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

这里假定**初始条件为零**，以保证系统输入输出描述的惟一性

定义：称一个因果系统为外部稳定，是指对任何一个有界输入$u(t)$，即满足条件：

$$\|u(t)\|\leq \beta_1<\infty,\quad \forall t\in[t_0,+\infty)$$

的任意输入$u(t)$，对应的输出$y(t)$均为有界，即有

$$\|y(t)\|\leq \beta_2<\infty,\quad \forall t\in[t_0,+\infty)$$

注：外部稳定性，即为有界输入-有界输出稳定性，简称BIBO稳定性

线性系统的BIBO稳定性

结论：对零初始条件p维输入和q维输出连续LTV系统，$t\in[t_0,+\infty)$，则t_0时刻系统BIBO稳定的充分必要条件为，存在一个有限正常数β，使对一切$t\in[t_0,+\infty)$，脉冲响应矩阵$H(t,\tau)$所有元$h_{ij}(t,\tau)$均满足关系式

$$\int_{t_0}^{t}\left|h_{ij}(t,\tau)\right|d\tau\le\beta<\infty\quad i=1,2,\cdots q\quad j=1,2,\cdots p$$

证：利用输入输出关系式：

$$y(t)=\int_{t_0}^{t}H(t,\tau)u(\tau)d\tau$$

并根据BIBO稳定定义，容易证得本结论

结论：对零初始条件p维输入和q维输出连续LTI系统，令t_0=0，则系统BIBO稳定的充分必要条件为：存在一个有限正常数β，使脉冲响应矩阵$H(t)$所有元$h_{ij}(t)$均满足关系式

$$\int_{0}^{\infty}\left|h_{ij}(t)\right|dt\le\beta<\infty\quad i=1,2,\cdots q\quad j=1,2,\cdots p$$

证：前一结论的特例

LTI系统的BIBO稳定性

结论：对零初始条件p维输入和q维输出连续LTI系统，令初始时刻为$t_0=0$，则系统BIBO稳定的充分必要条件为：真或严真传递函数矩阵$G(s)$的所有极点均具有负实部

证：注意关系式

$$\begin{cases} H(t) \triangleq \left[h_{ij}(t)\right] = L^{-1}\left[G(s)\right] \\ G(s) \triangleq \left[g_{ij}(s)\right] = \cdots = \left[\sum_{\text{有限项和}} \dfrac{\beta_l}{(s-s_l)^{\alpha_{l_r}}}, \quad \begin{matrix} \beta_l\text{为零或非零常数} \\ s_l\text{为}G(s)\text{的极点} \\ \alpha_{l_r}=1,\cdots,\sigma_l \\ \sigma_l\text{为}s_l\text{的代数重数} \end{matrix}\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad h_{ij}(t) = L^{-1}\left[g_{ij}(s)\right] = \sum_{\text{有限项和}} \rho_{l_r} t^{\alpha_{l_r}-1} e^{s_l t}$$

$\Rightarrow$ 当且仅当极点s_l均具有负实部，$\rho_{l_r} t^{\alpha_{l_r}-1} e^{s_l t}$为绝对可积，即$h_{ij}(t)$为绝对可积

由前一结论，系统BIBO稳定

注：对传递函数矩阵$G(s)$，判别其极点是否具有负实部，广为采用**劳斯-霍尔维茨(*Routh-Hurwitz*)判据**，详见《运动稳定性》P.87-88

内部稳定性

考虑连续LTV系统，其**零输入**状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty)$$

且，系统满足解的存在惟一性条件

定义：称连续LTV系统在时刻t_0为**内部稳定**，如果由时刻t_0任意非零初始状态$x(t_0) = x_0$引起的零输入响应$x_{ou}(t)$对$t \in [t_0, +\infty)$有界，并**满足渐近属性**，即

$$\lim_{t \to \infty} x_{ou}(t) = 0$$

注：① 内部稳定性，意指自治系统(即，输入为零)状态运动的稳定性

② 内部稳定等同于*Lyapunov*意义下的渐近稳定性

内部稳定性

结论：对n维连续LTV自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x}(t_0) = x_0 \quad t \in [t_0, \infty)$$

系统在t_0时刻内部稳定的充分必要条件为：状态转移矩阵$\Phi(t,t_0)$对所有$t\in[t_0, +\infty]$为有界，并满足

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t, t_0) = 0$$

证：利用内部稳定定义，以及零输入响应关系式

$$x_{0u}(t) = \Phi(t, t_0)x_0, \quad t \in [t_0, \infty)$$

可直接证得本结论

结论：对n维连续LTI自治系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \quad \boldsymbol{x}(0) = x_0 \quad t \geq 0$$

内部稳定的充分必要条件为

$$\lim_{t\to\infty} e^{At} = 0$$

证：前一结论的特例

内部稳定性

结论：对n维连续LTI自治系统

$$\dot{x} = Ax \quad x(0) = x_0 \quad t \geq 0$$

内部稳定的充分必要条件为

矩阵A所有特征值均具有负实部，即成立$\mathrm{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0$

注：1. 对矩阵A，同样可采用*Routh-Hurwitz*判据，根据特征多项式

$$\alpha(s) =: \det(sI\text{-}A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

的系数$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$，直接判断判$A$所有特征值是否具有负实部，即系统是否稳定

2. 对连续LTV系统，**结论**“系统稳定，当且仅当矩阵$A(t)$的所有特征值$\lambda_0(t), \lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$ 对所有$t \in [t_0, \infty)$具有负实部”**一般是不正确的**，即前述结论一般不能推广到LTV系统

内部稳定性和外部稳定性的关系

结论：对n维连续LTI系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0$$

$$y = Cx + Du$$

若系统为内部稳定，则系统必为BIBO稳定即外部稳定

证：对连续LTI系统，脉冲响应矩阵$H(t)$的关系式为

$$H(t) \triangleq \left[h_{ij}(t) \right] = Ce^{At}B + D\delta(t)$$

由前结论可知，若LTI系统内部稳定必有

$$e^{At}\text{有界且}\lim_{t \to \infty} e^{At} = 0$$

$$\int_0^{\infty} \left| h_{ij}(t) \right| dt \leq \beta < \infty$$

即，可知系统为BIBO稳定。**证毕**

结论：对连续LTI系统，

① 系统BIBO稳定**不能保证**系统必为内部稳定

② 若系统能控且能观测，则BIBO稳定**当且仅当**内部稳定

证：利用系统结构规范分解的结论，易得本结论

S.2 李亚普诺夫意义下运动的稳定性的一些基本概念

*Lyapunov*方法适用于
- 线性系统和非线性系统
- 时变系统和时不变系统
- 连续时间系统和离散时间系统

*Lyapunov*第一方法　　*Lyapunov*第二方法

*Lyapunov*第一方法

即*Lyapunov*间接法，属于小范围稳定性分析方法

基本思路是，将非线性系统进行线性化，根据线性化系统特征值在复平面上的分布判断非线性系统在邻域内的稳定性

基本结论
- 若特征值均具有负实部，则非线性系统在邻域内稳定
- 若包含正实部特征值，则非线性系统在邻域内不稳定
- 若除负实部特征值外包含零实部单特征值，则非线性系统在邻域内是否稳定需要通过高此项分析进行判断

*Lyapunov*第二方法

即*Lyapunov*直接法，属于直接根据系统结构判断内部稳定性的方法

基本思路是，直接面对非线性系统，基于引入具有广义能量属性的*Lyapunov*函数和分析*Lyapunov*函数导数的定号性，建立判断系统稳定性的结论

后面详细阐述

自治系统、平衡状态、受扰运动

系统运动的稳定性，实质上归结为系统平衡状态的稳定性

平衡状态的稳定性，直观上是指偏离平衡状态的受扰运动能否只依靠系统内部的结构因素，

或者使之限制在平衡状态的有限邻域内

或者使之同时最终返回到平衡状态

(1) 自治系统

定义：自治系统定义为**没有输入作用**的一类动态系统

作为最一般的情形，对连续非线性时变系统，自治系统状态方程为

$$\dot{x} = f(x,t) \quad x(t_0) = x_0 \quad t \in [t_0,\infty)$$

$$\dot{x} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = Ax \quad \Leftarrow \quad \dot{x} = A(t)x$$

(2) 平衡状态

定义：对连续非线性时变系统，平衡状态定义为满足属性

$$\dot{\boldsymbol{x}}_e = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_e,t) = 0 \quad \forall t \in [t_0,\infty)$$

的一个状态，即平衡状态的各分量相对时间不再发生变化

平衡状态

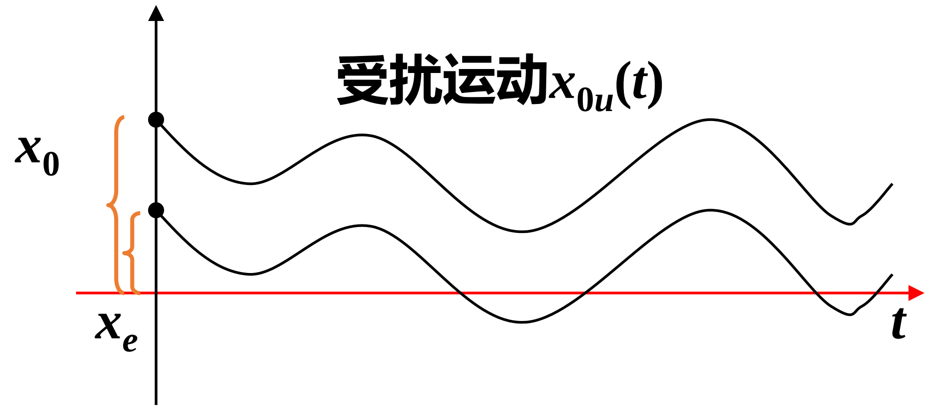
- 基本特征：$\dot{x}_e = 0$
- 不惟一性：自治系统平衡状态一般不惟一
- 零平衡状态：大多数情况下，$x_e = 0$即原点为系统的一个平衡状态
- 孤立平衡状态：状态空间中彼此分隔的孤立点形式平衡状态
- 对平衡状态的约定：稳定性分析主要针对孤立平衡状态

  随后稳定性分析，把**平衡状态设为原点**

(3) 受扰运动

定义：动态系统的受扰运动定义为自治系统由初始状态扰动x_0引起的一类状态运动

注：实质上，受扰运动就是系统的状态零输入响应。之所以称为受扰运动，是因为稳定性分析中**非零初始状态x_0看成为相对于平衡状态即$x_e = 0$的一个状态扰动**



受扰运动，习惯地表示为

$$x_{ou}(t) = \Phi(t; \boxed{x_0, t_0}) \qquad t \in [t_0, \infty)$$

导致运动的初始状态x_0及其作用时刻t_0

并且，$t = t_0$时有 $\Phi(t_0; x_0, t_0) = x_0$

李亚普诺夫意义下的稳定

定义：考虑自治系统

$$\dot{x} = f(x,t) \quad x(t_0) = x_0 \quad t \in [t_0, \infty)$$

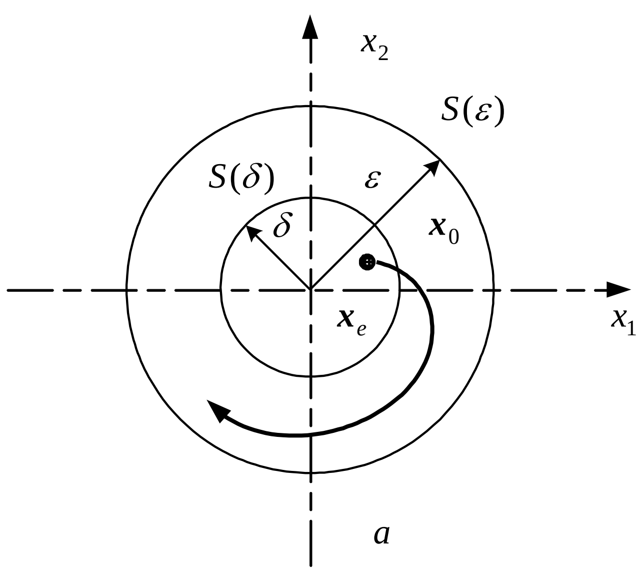
称孤立平衡状态$x_e = 0$**在时刻t_0为李亚普诺夫意义下稳定**，如果对任给一个实数$\varepsilon > 0$，都对应存在另一依赖于ε和t_0的实数$\delta(\varepsilon, t_0) > 0$，使得满足不等式

$$\|x_0 - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$$

的任一初始状态x_0出发的受扰运动$\phi(t; x_0, t_0)$都满足不等式：

$$\left\|\phi(t; \boldsymbol{x}_0, t_0) - \boldsymbol{x}_e\right\| \le \varepsilon \qquad \forall t \ge t_0$$

(1) 稳定的几何解释



李亚普诺夫意义下的稳定

(2) 李亚普诺夫意义下一致稳定

在李亚普诺夫意义下的稳定定义中，若对取自时间定义区间的任一初始时刻t_0，对任给一个实数$\varepsilon > 0$，都存在与初始时刻t_0无关的实数$\delta(\varepsilon) > 0$，使相应的受扰运动$\phi(t; x_0, t_0)$都满足不等式：

$$\left\| \phi(t; x_0, t_0) - x_e \right\| \le \varepsilon \qquad \forall t \ge t_0$$

即，只要δ与t_0无关，这种平衡状态x_e称为一致稳定的

注：通常时变系统的δ与t_0有关，时不变系统的δ与t_0无关

(3) 时不变系统的稳定属性

时不变系统李亚普诺夫意义下的稳定和一致稳定必为等价

(4) 李亚普诺夫意义下稳定的实质

① 只保证系统受扰运动相对应平衡状态的有界性，不能保证其渐近性

② 实质上是工程意义下的临界不稳定

渐近稳定

定义：考虑自治系统

$$\dot{x} = f(x,t) \quad x(t_0) = x_0 \quad t \in [t_0, \infty)$$

称孤立平衡状态$x_e = 0$在时刻t_0为**渐近稳定**，如果

i) $x_e = 0$在时刻t_0为李亚普诺夫意义下稳定;

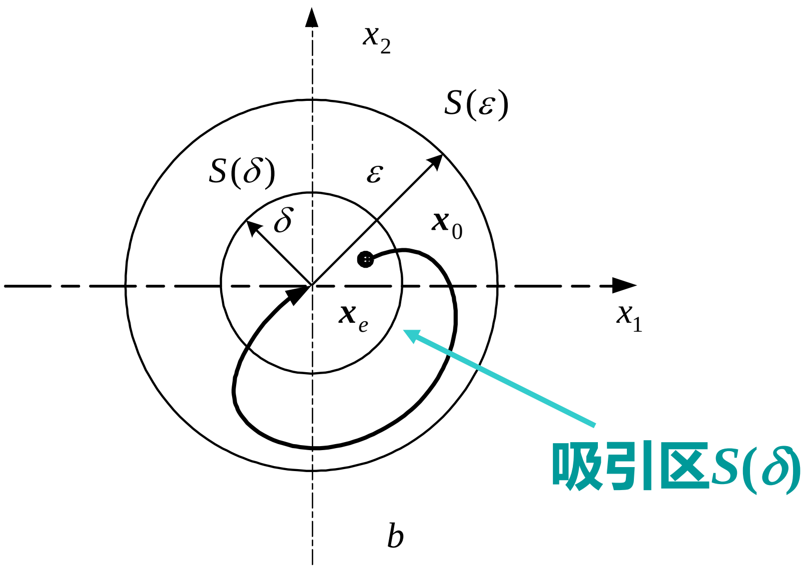
ii) 对实数$\delta(\varepsilon, t_0) > 0$和任给实数$\mu > 0$，都存在实数$T(\mu, \delta, t_0) > 0$使得满足不等式

$$\|x_0 - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$$

的任一初始状态x_0出发的受扰运动$\phi(t; x_0, t_0)$满足不等式

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \le \mu, \quad \forall t \ge t_0 + T(\mu, \delta, t_0)$$

(1) 渐近稳定的几何解释



渐近稳定

(2) 渐近稳定的等价定义

称 $x_e= 0$在时刻t_0为渐近稳定，如果

i) 由任一初始状态$x_0 \in S(\delta)$出发的受扰运动$\phi(t;\, x_0,\, t_0)$ 相对于$x_e= 0$对所有$t\in [t_0,\, \infty)$ 均为有界；

ii) 受扰运动$\phi(t;\, x_0,\, t_0)$相对于平衡状态$x_e = 0$满足渐近属性，即成立

$$\lim_{t\to\infty} \phi(t; x_0, t_0) = 0, \quad \forall x \in S(\delta)$$

(3) 一致渐近稳定：渐近稳定定义中，δ、T都与t_0无关

(4) 时不变系统的渐近稳定属性

渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 一致渐近稳定

(5) 小范围(局部)和大范围(全局)渐近稳定

(6) 大范围渐近稳定的必要条件：平衡状态x_e唯一

(7) 线性系统的渐近稳定属性

渐近稳定 $\Leftrightarrow$ 大范围渐近稳定

(8) 渐近稳定的工程含义

渐近稳定 = 工程意义下稳定

不稳定

定义：考虑自治系统

$$\dot{x} = f(x,t) \quad x(t_0) = x_0 \quad t \in [t_0, \infty)$$

称孤立平衡状态$x_e = 0$在时刻t_0为不稳定，如果

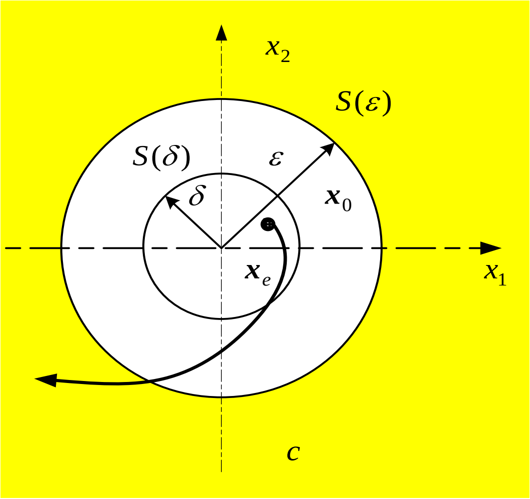
不管取实数$\varepsilon > 0$为多么大，都不存在对应一个实数$\delta(\varepsilon, t_0) > 0$，使得满足不等式

$$\|x_0 - x_e\| \le \delta(\varepsilon, t_0)$$

的任一初始状态x_0出发的受扰运动$\phi(t; x_0, t_0)$满足不等式

$$\|\phi(t; x_0, t_0) - x_e\| \le \varepsilon, \quad \forall t \ge t_0$$

不稳定的平衡状态



总结：

1. 不管初始偏差有多大，系统总是稳定的，则称系统是**大范围稳定**的
2. 不管初始偏差有多大，系统总是渐近稳定的，则称系统是**大范围渐近稳定**的。大范围渐近稳定的系统只能有一个平衡状态
3. 为了满足稳定条件，初始偏差有一定限制，则称系统是**小范围稳定**的
4. 对于**线性**系统，若在小范围稳定，则必大范围稳定；若在小范围渐近稳定，则必大范围渐近稳定

预备知识

设$x = [\, x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$，则实二次型可记为：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Q x$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}, \qquad q_{ij} = q_{ji}$$

Q称为二次型的矩阵

定义： (实)二次型是$x \in R^n$的标量函数 $f\ (x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T Q x$，式中$Q$为一实对称$n\times n$矩阵

$\forall x \neq 0$，若$x^T Q x > 0$，则称二次型f为正定的，Q称为正定矩阵，记为$Q > 0$

$\forall x \neq 0$，若$x^T Q x \geq 0$，则称二次型f为半正定的，Q称为半正定矩阵，记为$Q \geq 0$

若$x^T Q x < 0\ (\leq 0)$，称f为负定的(半负定的)，Q称为负定(半负定)矩阵，记为 $Q < 0 (\leq 0)$

若f 既不是半正定又不是半负定，则称为不定的

预备知识

二次型函数的定号性判别准则 —— *Sylvester*（希尔维斯特）判据：

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}, \quad q_{ij}=q_{ji}.$$

$$\boxed{f\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)=x^TQx}$$

$\Delta_i(i=1,2,\ldots,n)$为其各阶主子行列式：

$$\Delta_1=q_{11}, \quad \Delta_2=\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \quad \cdots, \quad \Delta_n=|Q|$$

矩阵Q定号性的充要条件是：

(1)若$\Delta_i>0\ (i=1,2,\ldots,n)$，则$Q$为正定的 $\qquad f\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)=x^TQx$正定

(2)若$\Delta_i\begin{cases} >0 & i\text{为偶数} \\ <0 & i\text{为奇数} \end{cases}$，则$Q$为负定的 $\qquad f\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)=x^TQx$负定

(3)若$\Delta_i\begin{cases} \geq 0 & i=(1,2,\ldots,n-1) \\ =0 & i=n \end{cases}$，则$Q$为半正定的 $\qquad f\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)=x^TQx$半正定

(4)若$\Delta_i\begin{cases} \geq 0 & i\text{为偶数} \\ \leq 0 & i\text{为奇数} \\ =0 & i=n \end{cases}$，则$Q$为半负定的 $\qquad f\ (x_1, x_2, \cdots, x_n)=x^TQx$半负定

S.3 李亚普诺夫第二方法的主要定理

基本思路：从能量观点进行稳定性分析：

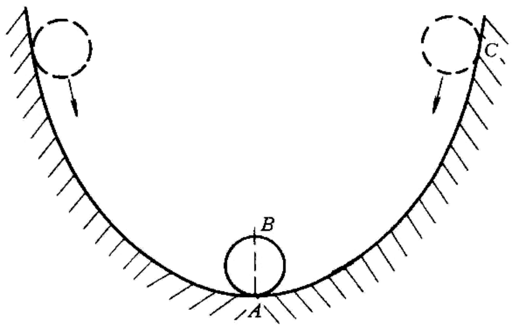
1) 如果一个系统被激励后，其储存的能量随时间的推移逐渐衰减，到达平衡状态时，能量将达最小值，则这个平衡状态是渐近稳定的；

2) 反之，如果系统不断地从外界吸收能量，储能越来越大，则这个平衡状态是不稳定的；

3) 如果系统的储能既不增加，也不消耗，则这个平衡状态就是*Lyapunov*意义下的稳定

由于实际系统的复杂性和多样性，往往不能直观地找到一个能量函数来描述系统的能量关系；

于是*Lyapunov*定义了一个**正定**的**标量**函数，作为虚构的广义能量函数，用其一阶微分的符号特征来判断系统的稳定性



大范围渐近稳定的判别定理

结论5.10： 对连续时间非线性**时变**自治系统

$$\dot{x} = f(x,t), \quad t \in [t_0, \infty)$$

$x = 0$为系统孤立平衡状态，若可构造对x和t具有连续一阶偏导数的标量函数$V(x, t)$，其中$V(0, t) = 0$，且对状态空间中所有**非零状态**x满足如下条件：

i) $V(x, t)$正定且有界，即存在两个连续的**非减标量函数**$\alpha(\|x\|)$和$\beta(\|x\|)$， $\alpha(0) = 0$，$\beta(0) = 0$，使对所有$t \in [t_0, \infty)$和$x \neq 0$有：

$$\beta(\|x\|) \geq V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) > 0$$

ii) $V(x, t)$对时间t的导数$\dot{V}(x,t)$负定且有界，即存在一个连续的**非减标量函数**$\gamma(\|x\|)$， $\gamma(0) = 0$，使对所有$t \in [t_0, \infty)$和$x \neq 0$有

$$\dot{V}(x,t) \leq \gamma(\|x\|) < 0$$

iii) 当$\|x\| \to \infty$，有$\alpha(\|x\|) \to \infty$即$V(x, t) \to \infty$

则系统的原点平衡状态$x = 0$为**大范围一致渐近稳定**

证明： 详见书P.225-227，自阅

大范围渐近稳定的判别定理

结论5.11：对连续时间非线性**时不变**自治系统

$$\dot{x} = f(x) \quad t \geq 0$$

$x = 0$为系统平衡状态，若可构造对x具有连续一阶偏导数的标量函数$V(x)$，$V(0)=0$，且对状态空间中所有**非零状态**x满足如下条件：

i) $V(x)$为正定

ii) $\dot{V}(x)$为负定

iii) 当$\|x\|\to\infty$，有$V(x)\to\infty$

则系统原点的平衡状态$x = 0$为大范围一致渐近稳定

注：与时变情形相比，时不变系统的$Lyapunov$稳定性定理的条件在形式和判断上都可得到很大的简化：

1) 判断标量函数$V(\cdot)$的正定性时，不再需要定义两个连续的**非减标量函数**$\alpha(\cdot)$和$\beta(\cdot)$

2) 判断标量函数$\dot{V}(\cdot)$的正定性时，不再需要定义一个连续的**非减标量函数**$\gamma(\cdot)$

大范围渐近稳定的判别定理—说明

(1) 普适性和直观性

*Lyapunov*主稳定性判据适用线性和非线性、时变和时不变等各类动态系统

(2) 物理含义

a. 从物理学角度，*Lyapunov*函数$V(x)$可视为“广义能量”，其导数视为“广义能量的变化率”

b. *Lyapunov*函数$V(x)$不等同于能量

(3) *Lyapunov*函数的选取

系统渐近稳定性的判别，归结为$V(x)$的选取，一般选取$V(x)$为状态x的二次型函数，如$\|x\|^2$，x^TQx，…

需要研究者的经验与技巧，缺少一般性的有效选取方法

(4) 充分属性

*Lyapunov*定理的条件只是保证系统稳定的一个充分条件，若不能找到满足定理条件的*Lyapunov*函数，不能对系统的稳定性作否定性结论

(5) 应用原则—“多次试取，退求其次”

大范围渐近稳定性→小范围渐近稳定→稳定→不稳定

例1：给定一个连续时间非线性时不变系统，状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1{}^2 + x_2{}^2)$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1{}^2 + x_2{}^2)$$

试确定该系统平衡状态的稳定性

解：首先，由平衡状态方程可得

$$\begin{cases} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases}$$

求解得唯一的平衡状态为$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, 即$x_e = 0$ 为坐标原点

其次，选取一正定的标量函数

$$V(x) = x_1{}^2 + x_2{}^2$$

可知，$V(x)$为正定，且$V(0) = 0$

例1：解

进而，通过计算可得

$$\dot{V}(x)=\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial V(x)}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}$$

$$=2x_1\dot{x}_1+2x_2\dot{x}_2 \quad \textbf{(代入状态方程计算)}$$

$$=2x_1\left[x_2-x_1(x_1^2+x_2^2)\right]+2x_2\left[-x_1-x_2(x_1^2+x_2^2)\right]$$

$$=-2(x_1{}^2+x_2{}^2)$$

容易看出，$\dot{V}(x)$**为一负定的标量函数**

又∵当$\|x\|\to\infty$**，有**$V(x)\to\infty$**，这里** $\|x\|=\sqrt{x_1{}^2+x_2{}^2}$

系统的平衡状态$x=0$**是大范围渐近稳定的**

注释：对为数不少的系统，前述**结论**中的条件"$\dot{V}(x)$ 为负定"是构造*Lyapunov*函数V(x)的主要困难，可适当放宽该条件

结论5.12：对连续时间非线性时不变自治系统

$$\dot{x} = f(x) \quad t \geq 0$$

若可构造对x具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(x)$，$V(0) = 0$，且对状态空间R^n中所有非零状态x，满足如下条件

(i) $V(x)$为正定；

(ii) $\dot{V}(x) \triangleq dV(x)/dt$ 为负半定；

(iii) 对任意非零$x_0 \in R^n$，$\dot{V}(\phi(t; x_0, 0)) \neq 0$

弱化条件 → $\dot{V}(x)$负定

(iv) 当$\|x\| \to \infty$时，有$V(x) \to \infty$；

则系统的原点平衡状态$x = 0$为大范围渐近稳定

注：本结论实质上是*LaSalle*不变原理的应用，其中条件(iii)等价于

除平凡解$x \equiv 0$外，没有其他解同样保持在$S = \left\{ x \in R^n \middle| \dot{V}(x) = 0 \right\}$内

例2：给定一个连续时间非线性系统，其状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(1+x_2)^2$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$为系统唯一的平衡状态，试确定该系统平衡状态的稳定性

解：首先，选取一正定的标量函数

$$V(x) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2}$$

进而，通过计算可得

$$\dot{V}(x) = 2(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2) = \cdots = -2x_2^2(1+x_2)^2 \le 0$$

可以看出，若设：$\dot{V}(x) \equiv 0$

$$\Rightarrow \quad x_2 \equiv 0 \qquad \text{或} \qquad x_2 \equiv -1$$

代入系统方程

$$\Rightarrow \quad x_1 \equiv 0 \qquad \text{或} \qquad \begin{aligned}\dot{x}_1 &= -1 \\ 0 &= -x_1\end{aligned} \quad \text{矛盾！}$$

从而，对系统所有的解，都有 $\dot{V}(x) \not\equiv 0$

又因$\|x\| \to \infty$，有$V(x) \to \infty$, 故系统的平衡状态是大范围渐近稳定的

小范围渐近稳定的判别定理—时变系统情形

结论5.13：对连续时间非线性**时变**自治系统

$$\dot{x} = f(x,t) \quad t \in [t_0, \infty)$$

若可构造对x和t具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(x, t)$，$V(0, t) = 0$，以及围绕状态空间原点的一个**吸引区Ω**，使对所有**非零状态**$x \in \Omega$和所有$t \in [t_0, \infty)$满足如下条件：

(i) $V(x, t)$为正定且有界；

(ii) $\dot{V}(x,t) \triangleq dV(x,t)/dt$为负定且有界；

则系统原点平衡状态$x = 0$在Ω域内为一致渐近稳定

注：结论5.13中条件应为 (详见《非线性系统》，P.107-109)：

(i) 存在Ω上连续正定函数$W_1(x)$和$W_2(x)$使成立

$$W_1(x) \le V(x, t) \le W_2(x)$$

(ii) 存在Ω上连续正定函数$W_3(x)$ 使成立

$$\dot{V}(x,t) \triangleq dV(x,t)/dt \le -W_3(x)$$

小范围渐近稳定的判别定理—时不变系统情形

结论5.14：对连续时间非线性**时不变**自治系统

$$\dot{x} = f(x) \quad t \geq 0$$

若可构造对x具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(x)$，$V(0) = 0$，以及围绕状态空间原点的一个**吸引区Ω**，使对所有**非零状态**$x \in \Omega$满足如下条件：

(i) $V(x)$为正定；

(ii) $\dot{V}(x) \triangleq dV(x)/dt$为负定；

则系统原点平衡状态$x = 0$在Ω域内为一致渐近稳定

结论5.15： 对连续时间非线性**时不变**自治系统，若可构造对x具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(x)$，$V(0)=0$，以及围绕状态空间原点的一个**吸引区Ω**，使对所有**非零状态**$x \in \Omega$满足如下条件：

(i) $V(x)$为正定；

(ii) $\dot{V}(x) \triangleq dV(x)/dt$ 为负半定；

(iii) 对任意非零$x_0 \in \Omega$， $\dot{V}(\phi(t; x_0, 0)) \neq 0$；

则系统的原点平衡状态$x = 0$在Ω域内为渐近稳定

李亚普诺夫意义下稳定的判别定理

结论5.16：对连续时间非线性时变自治系统

$$\dot{x} = f(x,t) \quad t \in [t_0, \infty)$$

若可构造对x和t具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(x, t)$，$V(0, t) = 0$，以及围绕状态空间原点的一个吸引区Ω，使对所有非零状态$x \in \Omega$和所有$t \in [t_0, \infty)$满足如下条件：

(i) $V(x, t)$为正定且有界；

(ii) $\dot{V}(x,t) \triangleq dV(x,t)/dt$为负半定且有界；

则系统原点平衡状态$x = 0$在Ω域内为一致稳定

结论5.17：对连续时间非线性时不变自治系统

$$\dot{x} = f(x) \quad t \geq 0$$

若可构造对x具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(x)$，$V(0) = 0$，以及围绕状态空间原点的一个吸引区Ω，使对所有非零状态$x \in \Omega$满足如下条件：

(i) $V(x,)$为正定；

(ii) $\dot{V}(x,t) \triangleq dV(x,t)/dt$为负半定；

则系统原点平衡状态$x = 0$在Ω域内为稳定

例3：给定一个连续时间非线性时不变系统，状态方程为

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1\end{cases}$$

试确定系统平衡状态的稳定性

解：容易看出，唯一的平衡状态为$x_1 = 0$, $x_2 = 0$, 即$x_e = 0$ 为坐标原点

首先，选取一正定的标量函数

$$v(x) = x_1^2 + 4x_2^2 > 0$$

其次，通过计算可得

$$\begin{aligned}\dot{v}(x) &= 2x_1\dot{x}_1 + 8x_2\dot{x}_2 \\ &= 8x_1x_2 - 8x_1x_2 \\ &= 0\end{aligned}$$

基此，可见系统在$x_e = 0$处是李亚普诺夫意义下的稳定

不稳定的判别定理

结论 5.18：对连续时间非线性时变自治系统

$$\dot{x} = f(x,t) \quad t \in [t_0, \infty)$$

若可构造对x和t具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(x,t)$，$V(0,t)=0$，以及围绕状态空间原点的一个吸引区域Ω，使对所有非零状态$x \in \Omega$和所有$t \in [t_0,\infty)$满足如下条件：

(i) $V(x,t)$为正定且有界；

(ii) $\dot{V}(x,t) \triangleq dV(x,t)/dt$为正定且有界；

则系统原点平衡状态$x = 0$为不稳定

结论5.19：对连续时间非线性时不变自治系统

$$\dot{x} = f(x) \quad t \geq 0$$

若可构造对x具有连续一阶偏导数的一个标量函数$V(x)$，$V(0)=0$，以及围绕状态空间原点的一个吸引区Ω，使对所有非零状态$x \in \Omega$满足如下条件：

(i) $V(x)$为正定；

(ii) $\dot{V}(x) \triangleq dV(x)/dt$为正定；

则系统原点平衡状态$x = 0$为不稳定

例4： 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

试确定系统平衡状态的稳定性

解： 显然，原点为系统的惟一平衡状态

首先，选取*Lyapunov*函数为

$$v(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

其次，通过计算可得

$$\Rightarrow \quad \dot{v}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$= 2x_1^2 + 2x_2^2$$

$$> 0$$

基此，可见系统在$x_e = 0$处是不稳定的

例5： 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

试确定系统平衡状态的稳定性

解： 显然，原点为系统的惟一平衡状态

首先，选取*Lyapunov*函数为

$$v(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

其次，通过计算可得

$$\Rightarrow \dot{v}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2$$

$$= 2x_2^2$$

$$\geq 0 \quad (\text{正半定})$$

由于当x_1为任意值，$x_2=0$时 $\dot{v}(x) = 0$，而

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2 = -x_1 \neq 0$$

所以$x_2=0$是暂时的，$\dot{v}(x) = 2x_2^2$不会恒等于零，故系统是不稳定的

例6： 设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - (1-|x_1|)x_2 \end{cases}$$

试确定系统平衡状态的稳定性

解： 显然，原点为系统的惟一平衡状态

首先，选取*Lyapunov*函数为

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

其次，通过计算可得

$$\Rightarrow \quad \dot{V}(x) = -2x_2^2(1-|x_1|)$$

$$\begin{cases} \text{当}|x_1| = 1\text{时，} \dot{V}(x) = 0 \\ \text{当}|x_1| > 1\text{时，} \dot{V}(x) > 0 \\ \text{当}|x_1| < 1\text{时，} \dot{V}(x) < 0 \end{cases}$$

系统在x_e= 0处是李亚普诺夫意义下的稳定

系统在x_e= 0处是不稳定的

系统在x_e= 0处是渐近稳定的

S.4 构造李亚普诺夫函数的规则化方法

- 构造李亚普诺夫函数，是李亚普诺夫第二方法的核心

- 规则化方法 $\begin{cases} \text{变量梯度法} \\ \text{克拉索夫斯基方法} \end{cases}$

- 可为某些较为复杂的系统，提供构造*Lyapunov*函数的非试凑性途径

- 但两种规则化方法，并不总是有效

变量梯度法

- **特点：采用基于反向思维的思路，构造*Lyapunov*函数**

- **构造原则：**
  - **先按定理条件构造候选李亚普诺夫函数的导数**
  - **在此基础上定出李亚普诺夫函数**
  - **进一步再判断候选李亚普诺夫函数的正定性**
    - ✓ **若判断成立则构造成功，否则构造失败**

- **考察n维连续时间非线性时不变系统，其状态方程为**

$$\dot{x} = f(x) \quad t \geq 0$$

其中，$f(0) = 0$，$x_e = 0$为系统孤立平衡状态

变量梯度法——构造思路和方法

$\dot{x} = f(x) \quad t \geq 0$

(1) 选取候选李亚普诺夫函数 $V(x)$ 的梯度 $\nabla V(x)$

$V(x)$ 的梯度 $\nabla V(x)$ 定义为

$$\nabla V(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1(x) \\ \vdots \\ \nabla V_n(x) \end{bmatrix}$$

形式上，$V(x)$ 的梯度 $\nabla V(x)$ 选取为

$$\nabla V(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

其中，a_{ij} = 常数或状态变量的函数

变量梯度法——构造思路和方法

$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad t \ge 0$

(2) 按稳定性

$$\nabla V(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla V_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ \nabla V_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}$$

利用 $0 >$

$$\frac{\partial \nabla V(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \nabla V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \nabla V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \nabla V_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \nabla V_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial \nabla V_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial \nabla V_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \nabla V_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

设梯度▽$V(x)$对应于有势场

矢量的积分

⟹ **关系式①** $\frac{dV(\boldsymbol{x})}{dt} < 0 \Leftrightarrow [\nabla V(\boldsymbol{x})]^T \dot{\boldsymbol{x}} < 0$

易知 $V(\boldsymbol{x}) = \int_0^{V(x)} dV(\boldsymbol{x}) = \int_0^t \frac{dV(\boldsymbol{x})}{dt} dt = \int_0^t [\nabla V(\boldsymbol{x})]^T \dot{\boldsymbol{x}} dt = \int_0^x [\nabla V(\boldsymbol{x})]^T d\boldsymbol{x}$

矢量的积分与路径无关 ⟹ **则旋度rot▽V(x)=0**

⟹ **关系式②** $\frac{\partial \nabla V_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial \nabla V_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \quad i \ne j$

(n×n-n)/2个方程

变量梯度法——构造思路和方法

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad t \ge 0$$

(3) 确定▽$V(x)$的待定系数a_{ij} (i, j =1, 2, …, n)

$$\frac{dV(x)}{dt} < 0 \Leftrightarrow \left[\nabla V(x)\right]^T \dot{x} < 0 \quad + \quad \frac{\partial \nabla V_j(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} = \frac{\partial \nabla V_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \quad i \ne j$$

(4) 定出对应梯度▽$V(x)$的候选李亚普诺夫函数$V(x)$

$$V(x) = \int_0^{V(x)} dV(x) = \int_0^t \frac{dV(x)}{dt} dt = \int_0^t [\nabla V(x)]^T \dot{x} dt$$

$$= \int_0^x \left[\nabla V_1(x) \quad \cdots \quad \nabla V_n(x)\right] dx$$

积分与路径无关

$$= \int_0^{x_1 (x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0)} \nabla V_1(x) dx_1$$

$$+ \int_0^{x_2 (x_1 = x_1, x_3 = \cdots = x_n = 0)} \nabla V_2(x) dx_2$$

$$+ \cdots + \int_0^{x_n (x_1 = x_1, \cdots, x_{n-1} = x_{n-1})} \nabla V_n(x) dx_n$$

(5) 判断$V(x)$计算结果的正定性 $V(x) > 0$

- ✓李亚普诺夫函数
- ×变量梯度法不成功

例1：试用变量梯度法确定下列非线性系统的李亚普诺夫函数，并分析平衡状态的稳定性

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}_1 = -\boldsymbol{x}_1 \\ \dot{\boldsymbol{x}}_2 = -\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2^2 \end{cases}$$

解： **(1) 选取候选李亚普诺夫函数$V(x)$的梯度$\triangledown V(x)$**

$$\nabla V(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla V_1(\boldsymbol{x}) \\ \nabla V_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix}$$

(2) 按稳定性结论给出的条件引入对梯度$\triangledown V(x)$的限制

① $$\frac{dV(x)}{dt} = [\nabla V(x)]^T \dot{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 + x_1 x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$= -a_{11}x_1^2 - (a_{12} + a_{21})x_1 x_2 - a_{22}x_2^2 + a_{21}x_1^2 x_2^2 + a_{22}x_1 x_2^3$$

$$< 0$$

② **旋度rot$\triangledown V(x)$ = 0** $\Rightarrow$ $$a_{12} = \frac{\partial \nabla V_1(x)}{\partial x_2} = \frac{\partial \nabla V_2(x)}{\partial x_1} = a_{21}$$

例1：解 **(3) 确定▽$V(x)$的待定系数a_{ij}（i, j=1, 2, …, n）**

$$\frac{dV(x)}{dt}<0 \Leftrightarrow \left[\nabla V(x)\right]^T \dot{x}<0 \qquad a_{12}=\frac{\partial \nabla V_1(x)}{\partial x_2}=\frac{\partial \nabla V_2(x)}{\partial x_1}=a_{21}$$

试选： $a_{11}= a_{22} = 1$，$a_{12} = a_{21}= 0$，则

$$\dot{V}(x)=-x_1^2-(1-x_1x_2)x_2^2$$

当$1-x_1x_2>0$即$x_1x_2<1$时,$\dot{V}(x)$是负定的

$$\boxed{\nabla V(x)=\begin{bmatrix}\nabla V_1(x)\\ \nabla V_2(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}}$$

(4) 定出对应梯度▽$V(x)$的候选李亚普诺夫函数$V(x)$

$$V(\boldsymbol{x})=\int_0^{x_1(x_2=0)}\nabla V_1(\boldsymbol{x})dx_1+\int_0^{x_2(x_1=x_1)}\nabla V_2(\boldsymbol{x})dx_2$$

$$=\int_0^{x_1(x_2=0)}x_1dx_1+\int_0^{x_2(x_1=x_1)}x_2dx_2=\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$$

是正定的。因此，在$x_1x_2 < 1$的范围内，平衡状态是渐近稳定的

是否为大范围渐近稳定的?

例1：解 **李亚普诺夫函数的选择是非唯一的**

由 $\dfrac{dV(\boldsymbol{x})}{dt} < 0 \Leftrightarrow [\nabla V(\boldsymbol{x})]^T \dot{\boldsymbol{x}} < 0$　　　$3x_2^2 = \dfrac{\partial \nabla V_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_2} = \dfrac{\partial \nabla V_2(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} = 3x_2^2$

再选： $a_{11} = 1$，$a_{22} = 3$，$a_{12} = x_2^2$，$a_{21} = 3x_2^2$，**则**

$$\nabla V(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \nabla V_1(\boldsymbol{x}) \\ \nabla V_2(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^3 \\ 3x_1 x_2^2 + 3x_2 \end{bmatrix}$$

$$V(\boldsymbol{x}) = \int_0^{x_1(x_2=0)} \nabla V_1(\boldsymbol{x}) dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} \nabla V_2(\boldsymbol{x}) dx_2$$

$$= \int_0^{x_1(x_2=0)} x_1 dx_1 + \int_0^{x_2(x_1=x_1)} (3x_1 x_2^2 + 3x_2) dx_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + x_1 x_2^3$$

是正定的。

$$\dot{V}(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 - x_1 x_2 (1 - 3x_1 x_2) x_2^2$$

当$0 < x_1 x_2 < \dfrac{1}{3}$时，则$\dot{V}(x)$是负定的

因此，在$0 < x_1 x_2 < 1/3$ 的范围内，平衡状态是渐近稳定的

哪一种选择好?

平衡状态是渐近稳定的范围越大越好!

克拉索夫斯基方法

- 特点：相对于状态导数 $\dot{x}$ 构造候选李亚普诺夫函数$V(x)$
- 考察n维连续时间非线性时不变系统，其状态方程为

$$\dot{x} = f(x) \quad t \geq 0$$

其中，$x_e = 0$为系统孤立平衡状态，再表系统雅可比矩阵为

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

- **命题1**　对连续非线性时不变系统和围绕原点平衡状态的一个域Ω，若原点$x = 0$为系统惟一平衡状态，则对$x \in \Omega$成立

$$f(x) \text{ 满足 } \begin{cases} = 0，\text{对} x = 0 \\ \neq 0，\text{对任意} x \neq 0 \end{cases}$$

克拉索夫斯基方法

- **命题2**　对连续非线性时不变系统和围绕原点平衡状态的一个域Ω，定义候选*Lyapunov*函数为

通常选取$B=I$

$$V(x) = f(x)^T B f(x)$$

其中，B是一个对称正定矩阵，则对$x\in\Omega$，$V(x)$正定即成立

$$V(x) = f(x)^T B f(x)\text{满足}\begin{cases} = 0,\ \text{对}x = 0 \\ > 0,\ \text{对任意}x \neq 0 \end{cases}$$

证：基于命题1并由B是对称正定矩阵，即可证得本命题

- **命题3**　对连续非线性时不变系统和围绕原点平衡状态的一个域Ω，若对称阵$S(x) = BF(x)+[BF(x)]^T < 0$即负定，则有

$$dV(x)/dt < 0\text{即负定}$$

克拉索夫斯基方法

➢ 证(命题3)：利用命题1，并由$S(x) = BF(x)+[BF(x)]^T < 0$即可证得

$$\frac{dV(x)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[f^T(x)Bf(x) \right] = \frac{df^T(x)}{dt}Bf(x) + f^T(x)B\frac{df(x)}{dt}$$

$$= \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\frac{dx}{dt} \right]^T Bf(x) + f^T(x)B\left[\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\frac{dx}{dt} \right]$$

$$= f^T(x)\left[F^T(x)B + BF(x) \right] f(x)$$

$$= f^T(x)S(x)f(x)\begin{cases} = 0, & x = 0 \\ < 0, & x \neq 0 \end{cases}$$ 即证得$dV(x)/dt$负定，证毕

➢ 克拉索夫斯基定理：对连续非线性时不变系统和围绕原点平衡状态的一个域Ω， 若存在一个对称正定矩阵B使$S(x)=BF(x)+[BF(x)]^T$是负定的，则平衡状态$x = 0$是渐近稳定的，且系统李雅普诺夫函数为

$$V(x) = f(x)^T Bf(x)$$

通常$B = I$

如果$||x||\to\infty$有$V(x) \to\infty$，那么平衡状态$x = 0$是大范围渐近稳定的

注意：克拉索夫斯基方法是充分条件

例2：给定一个连续时间非线性时不变系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3 \end{cases}$$

确定平衡状态$x = 0$的稳定性

解：首先，由 $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix}$**，容易定出**

$$F(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x^T} = \cdots = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

若取$B = I$，则有

$$S(x) = F(x) + F^T(x) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

为对称负定阵，所以平衡状态$x = 0$是渐近稳定的。又

$$V(x) = f^T(x)Bf(x) = x_1^2 + (x_1 - x_2 - x_2^3)^2$$

可知$\|x\| \to \infty$，有$V(x) \to \infty$ ⇨ **平衡状态$x = 0$是大范围渐近稳定的**

注：显然，上述形式的$V(x)$用经验法很难找到，这从一方面反映了规则化方法的效果

克拉索夫斯基方法

- **克拉索夫斯基定理：对连续时间LTI系统，其状态空间描述为**

$$\dot{x} = Ax$$

其中，矩阵A为非奇异。若$A + A^T$为负定，则原点平衡状态$x = 0$为大范围渐近稳定

例3：已知线性时不变系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

试判断平衡状态的稳定性

解：显然A非奇异，$x_e = 0$是唯一平衡状态。 又，容易计算得

$$A^T + A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

其顺序主子式为$A_{11} = -2 < 0$，$A_{22} = 3 > 0$

⇒ **$A + A^T$为负定**

⇒ **$x_e = 0$是大范围渐进稳定**

S. 系统运动的稳定性

S.5　连续时间线性系统的状态运动稳定性判据

LTI系统的稳定性判据

考察连续LTI系统，其状态空间描述为

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0$$

结论5.22 [特征值判据] 对连续LTI系统，原点平衡状态即$x = 0$是李亚普诺夫意义下稳定的充分必要条件为

① 矩阵A的特征值均具有非正实部，即实部为零或负

② 零实部特征值只能为A的最小多项式的单根

证： 由*Lyapunov*意义下稳定的定义可知，系统稳定等价于

$$\|e^{At}\| \leq \beta < \infty$$

$\xLeftrightarrow{\text{由}A\text{约当规范形}}$ 结论条件①②成立

结论5.23 [特征值判据] 对连续LTI系统，原点平衡状态$x = 0$是渐近稳定的充分必要条件为

矩阵A的特征值均具有负实部

证： 参见5.1节内部稳定性证明

LTI系统的稳定性判据

结论5.24 [李亚普诺夫判据] 对n维连续LTI系统，原点平衡状态$x_e = 0$是渐近稳定的**充分必要条件**为，对任给一个$n\times n$正定对称矩阵Q，

李亚普诺夫方程$A^TP+PA = -Q$有唯一$n\times n$正定对称解阵P

且候选李亚普诺夫函数为$V(x) = x^TPx$

证： 充分性：据$dV(x)/dt = \ldots = -x^TQx < 0$，由*Lyapunov*定理易得

必要性：对任意正定对称矩阵Q，可找到满足*Lyapunov*方程的惟一正定解P为

$$P = \int_0^{\infty} e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

…

$$\dot{X} = A^T X + XA, \quad X(0) = Q$$

$$\Rightarrow X(t) = e^{A^T t} Q e^{At} \text{存在惟一}$$

习题3.7，见P.133

LTI系统的稳定性判据

结论5.25 [李亚普诺夫判据推广形式]　对n维连续LTI系统和任给实数$\sigma\geq 0$，令矩阵A特征值为$\lambda_i(A)$, i=1, 2, …, n，则系统所有特征值均位于s平面的直线$-\sigma+j\omega$左半开平面上，即成立$\mathrm{Re}\lambda_i(A) < -\sigma$, i = 1, 2, …, n的**充分必要条件**为，对任给一个$n\times n$正定对称矩阵Q，

推广李亚普诺夫方程$2\sigma P + A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q$ 有唯一正定解阵P

证： 令$\tilde{A} = A +\sigma I$，则由前述结论5.24可知，①$\mathrm{Re}\lambda_i(\tilde{A}) < 0$等价于

$$\tilde{A}^{T}P+P\tilde{A} = -Q \text{ 有唯一正定解阵} P$$

$$\Updownarrow$$

$$2\sigma P + A^{\mathrm{T}}P + PA = -Q \text{ 有唯一正定解阵} P$$

又可知等价关系：② $\mathrm{Re}\lambda_i(\tilde{A}) < 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\lambda_i(A) < -\sigma$

故，基于等价关系①②可知结论成立，**证毕**

例1：给定一个连续LTI系统，其状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}x$$

其平衡状态在坐标原点，试判断该系统的稳定性

解：选$Q=I$，由$A^TP+PA=-Q$，$p_{ij}=p_{ji}$，可得

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1,1): & 2p_{11}+2p_{12}=-1\\ (1,2): & -3p_{11}-p_{12}+p_{22}=0\\ (2,1): & -3p_{11}-p_{12}+p_{22}=0\\ (2,2): & -6p_{12}-4p_{22}=-1\end{cases}$$

注：由于P的对称性，只有 $\dfrac{n^2-n}{2}+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ **个未知数**

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 0 & -6 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\\ p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\begin{bmatrix}p_{11}\\ p_{12}\\ p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -3 & -1 & 1\\ 0 & -6 & -4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$$

例1：解

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}p_{11}\\p_{12}\\p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & -2 & -\frac{1}{2}\\ 3 & 2 & \frac{1}{2}\\ -\frac{-9}{2} & -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-\frac{7}{2}\\ \frac{11}{2}\end{bmatrix},\quad \text{从而，可得 } P=\begin{bmatrix}3 & -\frac{7}{2}\\ -\frac{7}{2} & \frac{11}{2}\end{bmatrix}$$

利用*Sylvester*判据，可知

$$3>0\,,\quad \begin{vmatrix}3 & \frac{-7}{2}\\ -\frac{7}{2} & \frac{11}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}(66-49)>0$$

$\Rightarrow$ $P>0$**即为*Lyapunov*方程正定解阵**

$\Rightarrow$ **系统是渐近稳定的 ——*Lyapunov*判据**

注：原则上*Q*为任意正定对称阵，且系统渐近稳定性的判断结果与*Q*的不同选取无关。具体应用时，*Q*常常取为正定对角阵或单位阵，以简化计算结果

LTV系统的稳定判据

考察LTV系统，自治状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty), t_0 \in [0, \infty)$$

结论5.26 [基于状态转移矩阵的判据] 对连续LTV系统，系统原点平衡状态$x = 0$在时刻t_0是李亚普诺夫意义下稳定的充分必要条件为，存在依赖于t_0的一个实数$\beta(t_0) > 0$，使成立

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \beta(t_0) < \infty, \quad t \geq t_0$$

进一步，当且仅当对所有t_0都存在独立实数$\beta > 0$使上式成立，系统原点平衡状态$x = 0$为李亚普诺夫意义下的一致稳定

结论5.27 [基于状态转移矩阵的判据] 对连续LTV系统，系统惟一平衡状态$x = 0$在时刻t_0是渐近稳定的充分必要条件为，存在依赖于t_0的一个实数$\beta(t_0) > 0$，使同时成立

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \beta(t_0) < \infty, \quad t \geq t_0 \quad \text{和} \quad \lim_{t \to \infty}\|\Phi(t, t_0)\| = 0$$

进一步，当且仅当对所有t_0都存在独立实数$\beta_1 > 0$和$\beta_2 > 0$使成立，

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq \beta_1 e^{-\beta_2(t - t_0)}$$

系统原点平衡状态$x = 0$为一致渐近稳定

LTV系统的稳定判据

考察LTV系统，自治状态方程为

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, \infty), t_0 \in [0, \infty)$$

结论5.28 [李亚普诺夫判据] 对连续LTV系统，设$x = 0$为系统惟一平衡状态，$A(t)$的元均为分段连续的一致有界实函数，则原点平衡状态$x = 0$是**一致渐近稳定**的**充分必要条件**为，对任给的一个实对称、一致有界、一致正定的时变矩阵$Q(t)$，即存在两个实数$\beta_1 > 0$和$\beta_2 > 0$ 使成立

$$0 < \beta_1 I \le Q(t) \le \beta_2 I, \quad t \ge t_0$$

李亚普诺夫方程

$$-\dot{P}(t) = P(t)A(t) + A^T(t)P(t) + Q(t), \quad t \ge t_0$$

的解矩阵$P(t)$为实对称、一致有界、一致正定，即存在两个实数$\alpha_1 > 0$和$\alpha_2 > 0$ 使成立

$$0 < \alpha_1 I \le P(t) \le \alpha_2 I, \quad t \ge t_0$$

LTV系统的稳定性判据5.26-5.28，见书P.242-244，自阅

S.6　离散时间系统状态运动的稳定性及其判据

离散时间非线性时不变系统的*Lyapunov*主稳定性定理

考察n维离散时间非线性时不变系统

$$x(k+1) = f(x(k)),\ \ x(0) = x_0,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

其中，$f(0) = 0$即状态空间原点$x = 0$为系统平衡状态

结论5.33 [大范围渐近稳定判据]　对离散时间非线性时不变自治系统，若存在一个相对于离散状态$x(k)$的标量函数$V(x(k))$，使对任意$x(k) \in \boldsymbol{R}^n$满足：

(i) $V(x(k))$为正定；

(ii) 表$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$，$\Delta V(x(k))$为负定；

(iii) 当$\|x(k)\| \to \infty$时，有$V(x(k)) \to \infty$

则原点平衡状态即$x=0$为大范围渐近稳定

离散时间非线性时不变系统的*Lyapunov*主稳定性定理

结论5.34 [大范围渐近稳定判据] 对离散时间非线性时不变系统，若存在一个相对于离散状态$x(k)$的标量函数$V(x(k))$，使对任意$x(k)\in R^n$满足：

(i) $V(x(k))$为正定；

(ii) 表$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k))$，$\Delta V(x(k))$为负半定；

(iii) 对由任意非零初始状态$x(0) \in R^n$确定的所有自由运动$x(k)$的轨线，$\Delta V(x(k))$不恒为零；

(iv) 当$\|x(k)\|\to\infty$，有$V(x(k)) \to\infty$

则原点平衡状态即$x = 0$为大范围渐近稳定

结论5.35 [大范围渐近稳定判据] 对离散时间非线性时不变自治系统，若$f(x(k))$为收敛，即对$x(k)\neq 0$有：

$$\|f(x(k))\| < \|x(k)\|$$

则原点平衡状态即$x = 0$为大范围渐近稳定

证：此时只需取*Lyapunov*函数为$V(x(k)) = \|x(k)\|$

离散时间LTI系统的*Lyapunov*稳定判据

考察n维离散时间LTI系统，其自治状态方程为

$$x(k+1) = Gx(k),\ \ x(0) = x_0,\ \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

其中，$Gx_e = 0$的解x_e为系统平衡状态。若G奇异，则除原点平衡状态$x_e = 0$外还有非零平衡状态；若G非奇异，则原点$x_e = 0$为惟一平衡状态

结论5.36 [特征值判据]　对离散时间LTI自治系统，原点平衡状态即$x_e = 0$是李亚普诺夫意义下稳定的充分必要条件为

① G的全部特征值$\lambda_i(G)$（$i = 1, 2, \ldots, n$）的幅值均等于或小于1

② 且幅值等于1的特征值只能为G的最小多项式的单根

结论5.37 [特征值判据]　对离散时间线性时不变自治系统，原点平衡状态$x_e = 0$是渐近稳定的充分必要条件为

G的全部特征值的幅值均小于1

离散时间LTI系统的*Lyapunov*稳定判据

结论5.38 [李亚普诺夫判据] 对n维离散时间LTI自治系统，原点平衡状态$x_e = 0$渐近稳定的充分必要条件为，对任一给定$n \times n$正定对称矩阵Q，离散型李亚普诺夫方程

$$G^T P G - P = -Q$$

有唯一$n \times n$正定对称解阵P

结论5.39 [扩展李亚普诺夫判据] 对n维离散时间LTI自治系统，原点平衡状态$x_e = 0$以实数$\sigma > 0$为幂指数稳定，即G的特征值满足：

$$|\lambda_i(G)| < \sigma,\ 0 < \sigma \le 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

的充分必要条件为：对任一给定$n \times n$正定对称矩阵Q，扩展离散型李亚普诺夫方程

$$(1/\sigma)^2 G^T P G - P = -Q$$

有唯一$n \times n$正定对称解阵P

作业

1. 给定一个二阶连续时间非线性时不变系统为

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\sin(x_1) - x_2$$

试：i) 定出系统所有平衡状态；ii) 定出各平衡点处线性化状态方程，并分别判断是否为渐近稳定

2. 对下列连续时间非线性时不变系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2 x_2$$

试判断原点平衡状态$x_e = 0$是否为大范围渐近稳定

3. 对下列连续时间非线性时不变系统

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1^3 - x_2$$

试判断原点平衡状态$x_e = 0$是否为大范围渐近稳定

4. 判断下列连续时间非线性时不变系统是否为大范围渐近稳定

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^3$$

5. 给定渐近稳定的SISO连续LTI系统为

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx, \quad x(0) = x_0$$

其中，*u*(*t*)≡0。再表*P*为*Lyapunov*方程

$$PA + A^T P = -c^T c$$

的对称正定解。试证明：

$$\int_0^\infty y^2(t)dt = x_0^T P x_0$$