陈升平

2020280147280006

中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

2、解：已知性能指标为 $J=\int_0^{\infty}(2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+u^2)dt$

$$J=\int_0^{\infty}\left\{[x_1\ \ x_2]\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+u^2\right\}dt$$

∴可得 $Q=\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}>0$ 正定，　$R=1>0$，正定.

$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

$Q_c=[B\ \ AB]=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$. $\mathrm{rank}\ Q_c=2$. ∴ (A,B) 能控.

又∵ $Q>0$ ∴ (A,C) 能观.

令 $P=\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{12}&P_{22}\end{bmatrix}$，则最优控制 $u^*(t)=-R^{-1}B^TPx(t)=-P_{12}x_1(t)-P_{22}x_2(t)$.

P 为 Riccati 方程的唯一正定解.

即 $PA+A^TP+Q-PBR^{-1}B^TP=0$

$$\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{12}&P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{12}&P_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{12}&P_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}[1\ \ 0]\begin{bmatrix}P_{11}&P_{12}\\P_{12}&P_{22}\end{bmatrix}=0$$

可推导出：$P_{11}P_{12}=2$，$P_{12}^2=P_{11}+1$　$2P_{12}+1=P_{22}P_{12}$

∴可推导得出：$P_{12}^3-P_{12}-2=0$，$P_{11}=\frac{2}{P_{12}}$，$P_{22}=\frac{2P_{12}+1}{P_{12}}$

对于第一个~~三次方~~方程，我们可以使用matlab求解（roots函数）得出：

$P_{12}=1.5214$

∴ $P_{11}=1.3146$，$P_{22}=2.6573$

故而Riccati方程的解阵为：

$$P=\begin{bmatrix}1.3146&1.5214\\1.5214&2.6573\end{bmatrix}$$

陈帅平
2020280147280?

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

从而最优控制为 $u^*(t)=-1.5214x_1(t)-2.6573x_2(t)$

最优性能指标:

$$J^*=x_0^T P x_0$$

$$J^*=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1.3146 & 1.5214\\ 1.5214 & 2.6573\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=18.0294.$$

陈帅平
202028014728006

7.5 解: $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $C=[1,\ 2]$ $\quad x(0)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

$Q=1$, $Q_1=C^TQC=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$, $R=2$.

$\because \operatorname{rank}Q_c=\operatorname{rank}[B\ \ AB]=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=2$, $\therefore (A,B)$ 能控.

$\operatorname{ran}Q_o=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&2\\1&4\end{bmatrix}=2$, $\therefore (A,C)$ 能观

设 $P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}$, 则最优控制为 $u^*(t)=-R^{-1}B^TPx(t)$.

$$u^*(t)=-\frac{1}{2}[1\ \ 1]\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$$

P 为 Riccati 方程的唯一正定解.

即 $PA+A^TP+Q_1-PBR^{-1}B^TP=0$ 的唯一正定解.

$$\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{2}\cdot[1\ \ 1]\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}=0$$

使用matlab可解出: $P=\begin{bmatrix}72.0439&-89.0785\\-89.0785&120.2194\end{bmatrix}$

故而最优控制为:

$$u^*(t)=8.5173x_1(t)-15.5704x_2(t)$$

最优指标值为 $J^*=x_0^TPx_0=52.0812$

最优闭环为 $\dot{x}_1=x_1+8.5173x_1-15.5704x_2=9.5173x_1-15.5704x_2$

$\dot{x}_2=2x_2+8.5173x_1-15.5704x_2=8.5173x_1-13.5704x_2$

$\therefore$ 系统矩阵为 $\cancel{\begin{bmatrix}9.5173&-15.5704\\8.5173&-13.5704\end{bmatrix}}$ $\begin{bmatrix}9.5173&-15.5704\\8.5173&-13.5704\end{bmatrix}$

特征值为 $\lambda_{1,2}=-2.0266\pm11.3363i$, 均为负实部 故闭环渐近稳定