第5章　能控性, 能观性与传递函数

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 5.3 最小实现
   - 5.3.1 传递函数的能控形实现, 能观形实现
   - 5.3.2 最小实现

1 5.3 最小实现

- 5.3.1 传递函数的能控形实现, 能观形实现
- 5.3.2 最小实现

- 对于线性定常系统, 给定其传递函数矩阵$G(s)$,
  - 如果可以找到一个状态空间描述

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{1}$$

使其满足关系式

$$C(sI - A)^{-1}B + D = G(s), \tag{2}$$

则称此状态空间描述或(A, B, C, D)为给定传递函数矩阵$G(s)$的一个实现, 且

- A的维数称为实现的维数

- 对于线性定常系统, 给定其传递函数矩阵$G(s)$,
  - 如果可以找到一个状态空间描述

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du\end{aligned} \tag{1}$$

  使其满足关系式

$$C(sI - A)^{-1}B + D = G(s), \tag{2}$$

  则称此状态空间描述或(A, B, C, D)为给定传递函数矩阵$G(s)$的一个实现, 且
  - A的维数称为实现的维数
- 那么, 对于给定的传递函数矩阵$G(s)$, 它的实现是否一定存在呢? 若存在, 又有什么性质呢?

1. 5.3 最小实现
   - 5.3.1 传递函数的能控形实现, 能观形实现
   - 5.3.2 最小实现

考虑严格真传递函数矩阵$G(s)$, 其有理分式矩阵形式描述为

$$G(s) = (g_{ij}(s)),\ i = 1, \cdots, q,\ j = 1, \cdots, p. \tag{3}$$

考虑严格真传递函数矩阵$G(s)$, 其有理分式矩阵形式描述为

$$G(s) = (g_{ij}(s)),\ i = 1, \cdots, q,\ j = 1, \cdots, p. \tag{3}$$

- 令$d(s)$为$g_{ij}(s)(i = 1, \cdots, q,\ j = 1, \cdots, p)$的最小公分母, 且

$$d(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \tag{4}$$

则可将$G(s)$表示为

$$G(s) = \frac{C(s)}{d(s)} = \frac{C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 S + C_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \tag{5}$$

其中, $C_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$为$q \times p$常阵

基于上述表达式(5), 我们有如下能控形实现的结论

定理

定理5.7 给定传递函数矩阵$G(s)$如(5)所示, 则下述(A, B, C)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I_p & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & I_p \\ -a_0 I_p & -a_1 I_p & \cdots & -a_{n-1} I_p \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{bmatrix}$$

即为$G(s)$的一个能控形实现

基于上述表达式(5), 我们有如下能控形实现的结论

定理

定理5.7 给定传递函数矩阵$G(s)$如(5)所示, 则下述(A,B,C)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & I_p & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & I_p \\ -a_0I_p & -a_1I_p & \cdots & -a_{n-1}I_p \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_p \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$C=\begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{bmatrix}$$

即为$G(s)$的一个能控形实现

证明: 先证明(A,B,C)是$G(s)$的一个实现

- 令

$$V(s) = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ \vdots \\ V_n(s) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$V_i(s)(i = 1, 2, \cdots, n)$为$p \times p$矩阵

- 由此可导出

$$(sI - A)V(s) = B \quad \text{或} \quad sV(s) = AV(s) + B, \tag{8}$$

- 令

$$V(s) = (sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} V_1(s) \\ \vdots \\ V_n(s) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$V_i(s)(i = 1, 2, \cdots, n)$为$p \times p$矩阵

- 由此可导出

$$(sI - A)V(s) = B \quad \text{或} \quad sV(s) = AV(s) + B, \tag{8}$$

- 将(6)中A, B代入(8), 故由上式进而可推得

$$\begin{cases} V_2(s) = sV_1(s), \\ V_3(s) = sV_2(s) = s^2 V_1(s), \\ \quad \cdots\cdots \\ V_n(s) = sV_{n-1}(s) = s^{n-1} V_1(s) \end{cases} \tag{9}$$

以及

$$sV_n(s) = -a_0 V_1(s) - a_1 V_2(s) - \cdots - a_{n-1} V_n(s) + I_p, \tag{10}$$

- 将(9)代入上式(10), 又可导出:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)V_1(s) = d(s)V_1(s) = I_p, \tag{11}$$

即

$$V_1(s) = \frac{I_p}{d(s)}. \tag{12}$$

- 将(9)代入上式(10), 又可导出:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)V_1(s) = d(s)V_1(s) = I_p, \tag{11}$$

即

$$V_1(s) = \frac{I_p}{d(s)}. \tag{12}$$

- 将(12)代入(9), 有

$$V_i(s) = \frac{1}{d(s)} s^{i-1} I_p,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{13}$$

- 将(9)代入上式(10), 又可导出:

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)V_1(s) = d(s)V_1(s) = I_p, \tag{11}$$

即

$$V_1(s) = \frac{I_p}{d(s)}. \tag{12}$$

- 将(12)代入(9), 有

$$V_i(s) = \frac{1}{d(s)}s^{i-1}I_p, \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{13}$$

➥ 于是

$$\begin{aligned} C(sI - A)^{-1}B &= CV(s) \\ &= C_0V_1(s) + C_1V_2(s) + \cdots + C_{n-1}V_n(s) \\ &= \frac{1}{d(s)}(C_0 + C_1 s + \cdots + C_{n-1}s^{n-1}) \\ &= G(s). \end{aligned} \tag{14}$$

即(A, B, C)是$G(s)$的一个实现

下面, 证明(A, B, C)能控

5.3.1 传递函数的能控形实现, 能观形实现

下面, 证明(A, B, C)能控

- 因为

$$
\begin{aligned}
& rank[sI - A\ B] \\
&= rank \begin{bmatrix} sI_p & -I_p & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & & \cdots \\ & & & sI_p & -I_p & 0 \\ a_0 I_p & a_1 I_p & \cdots & a_{n-2} I_P & aI_p + a_{n-1} I_p & I_p \end{bmatrix} \qquad (15) \\
&= np,\ \forall s \in \mathbb{C},
\end{aligned}
$$

➥ 则, 由PBH判据知(A, B)能控. 证毕 ■

下面, 证明(A,B,C)能控

- 因为

$$
\begin{aligned}
& rank[sI - A \ B] \\
&= rank \begin{bmatrix} sI_p & -I_p & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \cdots \\ & & \ddots & \ddots & & \cdots \\ & & & sI_p & -I_p & 0 \\ a_0 I_p & a_1 I_p & \cdots & a_{n-2} I_P & aI_p + a_{n-1} I_p & I_p \end{bmatrix} \qquad (15) \\
&= np, \ \forall s \in \mathbb{C},
\end{aligned}
$$

➥ 则, 由PBH判据知(A,B)能控. 证毕 ■

注: 容易看出, 也可采用能控性秩判据, 验证(A,B)的能控性

与定理5.7对偶地, 我们也可建立如下能观性实现的结论

定理

定理5.8 给定传递函数矩阵$G(s)$如(5)所示, 则下述(A, B, C)为$G(s)$的一个能观形实现:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 I_q \\ I_q & \ddots & & -a_1 I_q \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & I_q & -a_{n-1} I_q \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & I_q \end{bmatrix}.$$

5.3.1 传递函数的能控形实现, 能观形实现

与定理5.7对偶地, 我们也可建立如下能观性实现的结论

定理

定理5.8 给定传递函数矩阵$G(s)$如(5)所示, 则下述(A, B, C)为$G(s)$的一个能观形实现:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 I_q \\ I_q & \ddots & & -a_1 I_q \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & I_q & -a_{n-1} I_q \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & I_q \end{bmatrix}.$$

注1: 定理5.7和5.8说明, 给定任意严格真的传递函数矩阵$G(s)$,

- 其实现一定存在, 但是不唯一, 而且维数也可以不同, 不同实现之间不具有代数等价关系
- 不管$G(s)$是不是既约的, 其能控形实现不一定是完全能观的. 反之, 亦然

注2: 若传递函数矩阵$G(s)$为真的, 可首先令

$$D = \lim_{s\to\infty} G(s), \tag{16}$$

然后, 令

$$\tilde{G}(s) = G(s) - D, \tag{17}$$

则$\tilde{G}(s)$为严格真的

➥ 可按定理5.7和5.8求出$\tilde{G}(s)$能控形实现或能观形实现(A, B, C), 则

- $G(s)$的实现即为(A, B, C, D)

1. 5.3 最小实现
   - 5.3.1 传递函数的能控形实现，能观形实现
   - 5.3.2 最小实现

5.3.2 最小实现

- 给定真传递函数矩阵$G(s)$的维数最小的实现, 称为最小实现, 也称为不可简约实现

5.3.2 最小实现

- 给定真传递函数矩阵$G(s)$的维数最小的实现, 称为最小实现, 也称为不可简约实现
- 因为最小实现有着简单的结构, 因此, 无论是理论上还是应用上, 都是最重要和最有意义的实现. 最小实现与能控性能观性有着密切的联系, 如下述定理所示

定理

定理5.9 设(A, B, C)为严格真传递函数矩阵$G(s)$的一个实现, 则其为最小实现的充分必要条件是(A, B)能控且(A, C)能观

5.3.2 最小实现

- 给定真传递函数矩阵$G(s)$的维数最小的实现, 称为最小实现, 也称为不可简约实现
- 因为最小实现有着简单的结构, 因此, 无论是理论上还是应用上, 都是最重要和最有意义的实现. 最小实现与能控性能观性有着密切的联系, 如下述定理所示

定理

定理5.9 设(A, B, C)为严格真传递函数矩阵$G(s)$的一个实现, 则其为最小实现的充分必要条件是(A, B)能控且(A, C)能观

证明: 必要性: (A, B, C)为最小实现, 证其必为能控能观的

- 反证法. 假设(A, B, C) 不是能控能观的, 则对其进行规范分解, 找出其能控能观部分(A_{22}, B_2, C_2), 且成立

$$\begin{cases} C(sI - A)^{-1}B = C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2, \\ \dim(A) > \dim(A_{22}). \end{cases} \tag{18}$$

5.3.2 最小实现

- 上式(18)表明, (A, B, C)不是$G(s)$的最小实现. 和已知条件矛盾, 故假设不成立, 即(A, B, C)为能控且能观. 必要性得证

5.3.2 最小实现

➥ 上式(18)表明, (A, B, C)不是$G(s)$的最小实现. 和已知条件矛盾, 故假设不成立, 即(A, B, C)为能控且能观. 必要性得证

- 充分性：(A, B, C)为能控能观, 证明其必为最小实现

  反证法. 假设(A, B, C)不是最小实现, 则必存在另一个最小实现$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, 且有

$$n = \dim(A) > \dim(\bar{A}) = \bar{n}. \tag{19}$$

- 上式(18)表明, (A, B, C)不是$G(s)$的最小实现. 和已知条件矛盾, 故假设不成立, 即(A, B, C)为能控且能观. 必要性得证

- 充分性: (A, B, C)为能控能观, 证明其必为最小实现

反证法. 假设(A, B, C)不是最小实现, 则必存在另一个最小实现$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, 且有

$$n = \dim(A) > \dim(\bar{A}) = \bar{n}. \tag{19}$$

- 因为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B},$$

从而有

$$CA^jB = \bar{C}\bar{A}^j\bar{B}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots . \tag{20}$$

由(20)又可得

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

- 记

$$Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \; Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$
$$\bar{Q}_O = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \; \bar{Q}_C = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

则由(21)可导出

$$Q_O Q_C = \bar{Q}_O \bar{Q}_C. \tag{23}$$

- 记

$$Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}, \; Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$
$$\bar{Q}_O = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}, \; \bar{Q}_C = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}, \tag{22}$$

则由(21)可导出

$$Q_O Q_C = \bar{Q}_O \bar{Q}_C. \tag{23}$$

- 因为(A, B, C)能控能观, 故结合Sylvester定律可得

$$rank Q_O = rank Q_C = rank Q_O Q_C = n. \tag{24}$$

- 从而由上两式, 即$Q_O Q_C = \bar{Q}_O \bar{Q}_C$和$rank Q_O Q_C = n$, 可得

$$
\begin{aligned}
rank \bar{Q}_O &\geq rank \bar{Q}_O \bar{Q}_C = n \\
rank \bar{Q}_C &\geq rank \bar{Q}_O \bar{Q}_C = n
\end{aligned}
\tag{25}
$$

5.3.2 最小实现

- 从而由上两式, 即$Q_O Q_C = \bar{Q}_O \bar{Q}_C$和$rank Q_O Q_C = n$, 可得

$$\begin{aligned} rank \bar{Q}_O \geq rank \bar{Q}_O \bar{Q}_C = n \\ rank \bar{Q}_C \geq rank \bar{Q}_O \bar{Q}_C = n \end{aligned} \tag{25}$$

- 又因为$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$为最小实现, 故$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$能控能观(必要性已证). 从而有

$$rank \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} = \bar{n}. \tag{26}$$

- 又由

$$rank \bar{Q}_O = rank \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix}, rank \bar{Q}_C = rank \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} \tag{27}$$

- 并考虑(19), 可推得

$$rank\bar{Q}_O = rank\bar{Q}_C = \bar{n} < n.$$

- 并考虑(19), 可推得

$$rank\bar{Q}_O = rank\bar{Q}_C = \bar{n} < n.$$

- 上式与(25), 即$rank\bar{Q}_O \geq n, rank\bar{Q}_C \geq n$, 形成矛盾. 从而, 假设不成立, 即不存在维数比(A, B, C)更小的实现

➥ 故(A, B, C)为最小实现, 充分性得证. 定理得证 ■

5.3.2 最小实现

定理

定理5.10 对于给定的严格真传递函数矩阵，若(A,B,C)和$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$为$G(s)$的任意两个最小实现，则它们必代数等价

定理

定 理5.10 对于给定的严格真传递函数矩阵，若(A,B,C)和$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$为$G(s)$的任意两个最小实现，则它们必代数等价

证明：已知(A,B,C)和$(\bar{A},\bar{B},\bar{C})$均为最小实现，由定理5.9知，它们都是能控能观的，从而有

$$rankQ_O = rankQ_C = rank\bar{Q}_O = rank\bar{Q}_C = n, \tag{28}$$

其中$n = \dim(A) = \dim(\bar{A})$, $Q_O, Q_C, \bar{Q}_O, \bar{Q}_C$如(22)所示

- 进而知$\bar{Q}_O^T\bar{Q}_O$, $\bar{Q}_C\bar{Q}_C^T$非奇异
- 再由

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B = \bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B},$$

类似于定理5.9可导出

$$Q_OQ_C = \bar{Q}_O\bar{Q}_C. \tag{29}$$

5.3.2 最小实现

- 故有

$$\bar{Q}_C = (\bar{Q}_O^T\bar{Q}_O)^{-1}\bar{Q}_O^T Q_O Q_C = \bar{T}Q_C \tag{30}$$

$$\bar{Q}_O = Q_O Q_C \bar{Q}_C(\bar{Q}_C^T\bar{Q}_C)^{-1} = Q_O T \tag{31}$$

其中

$$\bar{T} = (\bar{Q}_O^T\bar{Q}_O)^{-1}\bar{Q}_O^T Q_O, \quad T = Q_C^T\bar{Q}_C(\bar{Q}_C\bar{Q}_C^T)^{-1} \tag{32}$$

- 故有

$$\begin{aligned} \bar{Q}_C &= (\bar{Q}_O^T\bar{Q}_O)^{-1}\bar{Q}_O^T Q_O Q_C \\ &= \bar{T} Q_C \end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_O &= Q_O Q_C \bar{Q}_C(\bar{Q}_C^T\bar{Q}_C)^{-1} \\ &= Q_O T \end{aligned} \tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{T} &= (\bar{Q}_O^T\bar{Q}_O)^{-1}\bar{Q}_O^T Q_O \\ T &= Q_C^T\bar{Q}_C(\bar{Q}_C\bar{Q}_C^T)^{-1} \end{aligned} \tag{32}$$

- 再因为

$$\begin{aligned} \bar{T}T &= (\bar{Q}_O^T\bar{Q}_O)^{-1}\bar{Q}_O^T Q_O Q_C \bar{Q}_C^T(\bar{Q}_C\bar{Q}_C^T)^{-1} \\ &= (\bar{Q}_O^T\bar{Q}_O)^{-1}\bar{Q}_O^T \bar{Q}_O \bar{Q}_C \bar{Q}_C^T(\bar{Q}_C\bar{Q}_C^T)^{-1} \\ &= I_n \end{aligned} \tag{33}$$

知$\bar{T}$, T非奇异, 且

$$\bar{T} = T^{-1}. \tag{34}$$

- 再由

$$\begin{aligned}\bar{Q}_C &= \begin{bmatrix}\bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B}\end{bmatrix} \\ &= T^{-1}Q_C \\ &= T^{-1}\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{35}$$

及

$$\begin{aligned}\bar{Q}_O &= \begin{bmatrix}\bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1}\end{bmatrix} \\ &= Q_O T \\ &= \begin{bmatrix}C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1}\end{bmatrix} T.\end{aligned} \tag{36}$$

得

$$\bar{B} = T^{-1}B,\ \bar{C} = CT. \tag{37}$$

- 下证$\bar{A} = T^{-1}AT$. 由

$$CA^jB = \bar{C}\bar{A}^j\bar{B}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{38}$$

可得

$$\begin{aligned} Q_O A Q_C &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= \bar{Q}_O \bar{A} \bar{Q}_C \end{aligned} \tag{39}$$

5.3.2 最小实现

- 下证$\bar{A} = T^{-1}AT$. 由

$$CA^jB = \bar{C}\bar{A}^j\bar{B}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{38}$$

可得

$$\begin{aligned} Q_OAQ_C &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= \bar{Q}_O\bar{A}\bar{Q}_C \end{aligned} \tag{39}$$

➥ 由此可导出

$$\bar{A} = (\bar{Q}_O^T\bar{Q}_O)^{-1}\bar{Q}_O^TQ_OAQ_C\bar{Q}_C^T(\bar{Q}_C\bar{Q}_C^T)^{-1} = T^{-1}AT. \tag{40}$$

- 下证$\bar{A} = T^{-1}AT$. 由

$$CA^jB = \bar{C}\bar{A}^j\bar{B}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, \tag{38}$$

可得

$$\begin{aligned} Q_OAQ_C &= \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} \bar{A} \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix} \\ &= \bar{Q}_O\bar{A}\bar{Q}_C \end{aligned} \tag{39}$$

➥ 由此可导出

$$\bar{A} = (\bar{Q}_O^T\bar{Q}_O)^{-1}\bar{Q}_O^TQ_OAQ_C\bar{Q}_C^T(\bar{Q}_C\bar{Q}_C^T)^{-1} = T^{-1}AT. \tag{40}$$

- 联合(37), (40)知定理结论得证 ■

注: 通过上面的讨论知, 最小实现有着很好的特性. 那么,

- 若给定一个传递函数矩阵$G(s)$, 如何求它的最小实现呢?
- 定理5.9给出了我们求最小实现的一种方法, 只要求它的一个能控能观实现即是最小实现

5.3.2 最小实现

注: 通过上面的讨论知, 最小实现有着很好的特性. 那么,

- 若给定一个传递函数矩阵$G(s)$, 如何求它的最小实现呢?
- 定理5.9给出了我们求最小实现的一种方法, 只要求它的一个能控能观实现即是最小实现

➥ 下面我们分几种情形讨论

(1) 单输入单输出系统. 传递函数

$$G(s) = \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{41}$$

为不可简约, 其中$a_i, c_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$为实常数

- 给出其能控形实现为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n-1} \end{bmatrix} \tag{42}$$

- 因为$G(s)$的分母的最高次数恰为实现(A, B, C)的维数
  - 由定理5.6, (A, B, C)为能观能控, 故是(41)的一个最小实现

- 因为$G(s)$的分母的最高次数恰为实现(A, B, C)的维数
  - 由定理5.6, (A, B, C)为能观能控, 故是(41)的一个最小实现
- 同理, (41)的能观形实现

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

也是一个最小实现.

(2) 单输入多输出系统. 传递函数矩阵

$$G(s) = \frac{C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{44}$$

为不可简约, 其中$a_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$ 为实常数, $C_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$ 为$q \times 1$ 实常阵

(2) 单输入多输出系统. 传递函数矩阵

$$G(s) = \frac{C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{44}$$

为不可简约, 其中$a_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$ 为实常数, $C_i, i = 0, 1, \cdots, n-1$ 为$q \times 1$ 实常阵

- 给出能控形实现

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{45}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{bmatrix}$$

其中, A, B, C分别为$n \times n, n \times 1, q \times n$常阵, $G(s)$的分母次数恰为系统(A, B, C) 的状态维数

➥ 则由定理5.6, (A, B, C)能控能观, 实现(45)为(44) 的最小实现

(3) 单输出多输入系统. 传递函数矩阵

$$G(s) = \frac{C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{46}$$

为不可简约, 其中a_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$ 为实常数, C_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$ 为$1 \times p$ 常阵

(3) 单输出多输入系统. 传递函数矩阵

$$G(s) = \frac{C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{46}$$

为不可简约, 其中a_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$ 为实常数, C_i, $i = 0, 1, \cdots, n-1$ 为$1 \times p$ 常阵

- 给出能观形实现为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{n-1} \end{bmatrix} \tag{47}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中, A, B, C分别为$n \times n, n \times p, 1 \times n$ 常阵, $G(s)$的分母次数恰为系统(A, B, C) 的状态维数

➡ 由定理5.6知, (A, B, C)能控能观, 实现(47)为(46)的最小实现

(4) 给定$q\times p$严格真传递函数矩阵$G(s)$, $G(s)$有n个极点$s_1, s_2, \cdots, s_n$且均为单的,实的. 则传递函数矩阵可写为

$$G(s) = \frac{P_1}{s-s_1} + \frac{P_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{P_n}{s-s_n}, \tag{48}$$

其中

$$P_i = \lim_{s\to s_i}(s-s_i)G(s). \tag{49}$$

(4) 给定$q\times p$严格真传递函数矩阵$G(s)$, $G(s)$有n个极点$s_1, s_2, \cdots, s_n$且均为单的,实的. 则传递函数矩阵可写为

$$G(s) = \frac{P_1}{s-s_1} + \frac{P_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{P_n}{s-s_n}, \qquad (48)$$

其中

$$P_i = \lim_{s\to s_i}(s-s_i)G(s). \qquad (49)$$

- 对P_i进行满秩分解

$$P_i = C_iB_i,\ C_i \in \mathbb{R}^{q\times r_i},\ B_i \in \mathbb{R}^{r_i\times p},\ i = 1, 2, \cdots, n \qquad (50)$$

其中

$$rankB_i = rankC_i = rankP_i = r_i,\ i = 1, 2, \cdots, n. \qquad (51)$$

- 则有

$$A = \begin{bmatrix} s_1 I_{r_1} & & & \\ & s_2 I_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n I_{r_n} \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

即为(48)的一个最小实现

➥ 则有

$$A = \begin{bmatrix} s_1 I_{r_1} & & & \\ & s_2 I_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s_n I_{r_n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_n \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix}$$

即为(48)的一个最小实现

(5) 对于一般情况, 可以

- 首先, 给出能控形实现或能观形实现
- 然后, 进行能观或能控分解

➥ 得能控能观子系统, 即为最小实现

5.3.2 最小实现

例5.3.1 求下列传递函数的最小实现:

$$(1)\ G(s)=\frac{3s+1}{s^2+2s+1}$$

$$(2)\ G(s)=\frac{s+1}{s^2+2s+1}$$

$$(3)\ G(s)=\frac{s^2}{s^2+2s+1}$$

例5.3.1 求下列传递函数的最小实现:

$$(1)\ G(s) = \frac{3s+1}{s^2+2s+1}$$

$$(2)\ G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1}$$

$$(3)\ G(s) = \frac{s^2}{s^2+2s+1}$$

解 (1) 传函$G(s)$为不可简约的, 其能控形实现即为最小实现, 即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

例5.3.1 求下列传递函数的最小实现:

$$(1)\ G(s) = \frac{3s+1}{s^2+2s+1}$$

$$(2)\ G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1}$$

$$(3)\ G(s) = \frac{s^2}{s^2+2s+1}$$

解 (1) 传函$G(s)$为不可简约的, 其能控形实现即为最小实现, 即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(2) 传函$G(s)$为可简约的, 先将其化为不可简约的:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{s+1}.$$

- 则由能控或能观形即为最小实现, 可得最小实现为$A = -1, B = 1, C = 1$

(3) 容易看出, $G(s)$为真的, 即

$$D = \lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{s^2 + 2s + 1} = 1.$$

(3) 容易看出, $G(s)$为真的, 即

$$D = \lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{s^2+2s+1} = 1.$$

- 令

$$\tilde{G}(s) = G(s) - 1 = \frac{-2s-1}{s^2+2s+1},$$

则, $\tilde{G}(s)$为不可简约, 则其能控形实现即为最小实现, 即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix},$$

(3) 容易看出, $G(s)$为真的, 即

$$D = \lim_{s\to\infty} G(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{s^2+2s+1} = 1.$$

- 令

$$\tilde{G}(s) = G(s) - 1 = \frac{-2s-1}{s^2+2s+1},$$

则, $\tilde{G}(s)$为不可简约, 则其能控形实现即为最小实现, 即

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix},$$

➥ 故, $G(s)$的最小实现为(A, B, C, D)

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 115–123