第4章　线性定常系统的能观性

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 4.5 对偶性原理
   - 4.5.1 对偶系统
   - 4.5.2 对偶性原理

2. 4.6 线性定常离散系统的能观性
   - 4.6.1 能观定义及判据
   - 4.6.2 线性定常连续系统时间离散化后的能观性

4.5 对偶性原理

- 从前面对能控性和能观性的讨论可以看出,
  - 无论在概念上还是判据形式上都是很相似的.
- 这种现象不是偶然的,而是由系统的对偶性原理所决定的.
  - 对偶性原理不但揭示了控制系统的两个基本特性间的对偶关系,而且指明了系统的控制问题和估计问题之间的内在联系.

4.5.1 对偶系统

给定两个n维线性定常连续系统$\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$和$\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2)$,

- 若有$A_1^T = -A_2$, $B_1^T = C_2$, $C_1^T = B_2$, 则称这两个系统是互为对偶的两个系统

4.5.1 对偶系统

给定两个n维线性定常连续系统$\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$和$\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2)$,

- 若有$A_1^T = -A_2$, $B_1^T = C_2$, $C_1^T = B_2$, 则称这两个系统是互为对偶的两个系统
- 若记系统Σ_1为

$$\begin{aligned} \dot{x} =& A_1 x + B_1 u, \\ y =& C_1 x, \end{aligned} \tag{1}$$

其中x为n 状态向量, u 为p 维输入向量, y 为q 维输出向量, A_1, B_1, C_1 分别为$n \times n, n \times p, q \times n$常阵

➥ 则系统Σ_2应为

$$\begin{aligned} \dot{z} =& -A_1^T z + C_1^T v, \\ \omega =& B_1^T z, \end{aligned} \tag{2}$$

其中z为n维状态向量, v 为q 维控输入向量, ω 为p 维输出向量.

- 互为对偶系统的关系如下图4.2所示.

4.5.1 对偶系统

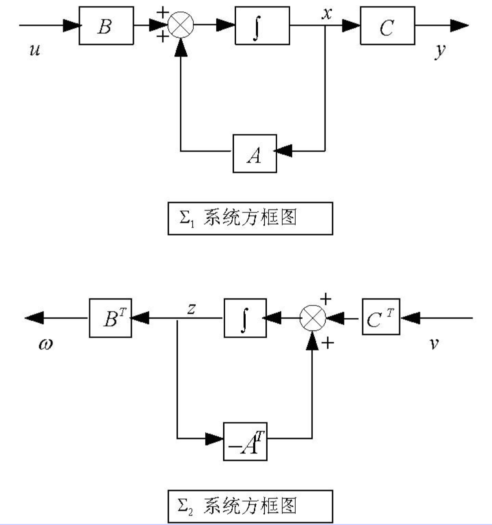

图4.2 对偶系统方框图

定理

定理4.13 设n维线性定常系统$\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$与$\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2)$是互为对偶的两个系统，则必有

1. 系统Σ_1的状态完全能控等同于系统Σ_2状态完全能观.
2. 系统Σ_1的状态完全能观等同于系统Σ_2状态完全能控.

4.5.2 对偶性原理

定理

定理4.13 设n维线性定常系统$\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1)$与$\Sigma_2 = (A_2, B_2, C_2)$是互为对偶的两个系统, 则必有

1. 系统Σ_1的状态完全能控等同于系统Σ_2状态完全能观.
2. 系统Σ_1的状态完全能观等同于系统Σ_2状态完全能控.

证明: 显然,只需证明定理的第一部分, 则第二部分自然得证.

4.5.2 对偶性原理

- 已知系统Σ_1 完全能控, 则由秩判据, 可知
  - 能控性矩阵$\begin{bmatrix} B_1 & A_1 B_1 & \cdots & A_1^{n-1} B_1 \end{bmatrix}$满秩.

4.5.2 对偶性原理

- 已知系统Σ_1 完全能控, 则由秩判据, 可知
  - 能控性矩阵$\begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \end{bmatrix}$满秩.
- 由Σ_1和Σ_2对偶知$A_1 = -A_2^T, B_1 = C_2^T$, 则$\Sigma_2$的能观性矩阵满足

$$
\begin{bmatrix} C_2 \\ C_2A_2 \\ \vdots \\ C_2A_2^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2^T & A_2^TC_2^T & \cdots & (A_2^T)^{n-1}C_2^T \end{bmatrix}^T
$$

$$
= \begin{bmatrix} C_2^T & -A_2^TC_2^T & \cdots & (-A_2^T)^{n-1}C_2^T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & & & \\ & (-1)I & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{n-1}I \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} B_1 & A_1B_1 & \cdots & A_1^{n-1}B_1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & & & \\ & (-1)I & & \\ & & \ddots & \\ & & & (-1)^{n-1}I \end{bmatrix} \quad (3)
$$

即为满秩. 根据定理4.5, 即得系统Σ_2完全能观. 证毕 ■

注1: 对偶性定理说明

- (A, C)的能观性即是(A^T, C^T)的能控性, 故关于能观性的判据都可以通过对偶的原理得到.

注2: 事实上,关于能观性分解、能观性规范型也都与能控性分解、能控性规范型对偶，即满足对偶原理.

4.6.1 能观定义及判据

考虑线性定常离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k),\ k = 0, 1, 2, \cdots \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \tag{4}$$

其中,$x(k)$为n维状态变量,$y(k)$为q维输出变量,G, C分别为$n \times n, q \times n$常阵.

4.6.1 能观定义及判据

考虑线性定常离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k), \ k = 0, 1, 2, \cdots \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \tag{4}$$

其中,$x(k)$为n维状态变量,$y(k)$为q维输出变量,G, C分别为$n \times n, q \times n$常阵.

定义

定义4.4 对于系统(4), 给定一非零初始值$x(0) = x_0$,

- 若自x_0出发的系统轨线$x(k)$的输出$y(k), k = 0, 1, \cdots, n-1, \cdots$恒为零,则称$x_0$ 为不能观状态
- 若状态中所有的非零状态都不是不能观状态, 则称系统(4)是完全能观(或能观的)
- 若存在一个或一些非零状态是不能观的, 则称系统是不完全能观的

4.6.1 能观定义及判据

- 由定义4.4知，若x_0是(4)的不能观状态，则有

$$y(0) = Cx(0) = Cx_0 = 0,$$
$$y(1) = CGx(0) = CGx_0 = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$y(n-1) = CG^{n-1}x(0) = CG^{n-1}x_0 = 0,$$
$$\cdots\cdots$$

注：由凯莱-哈密顿定理，当$k \geqslant n$时，G^k可由$I, G, \cdots, G^{n-1}$线性表示，故若x_0是不能观状态，只要$y(0) = y(1) = \cdots = y(n-1) = 0$即可(也从而有$y(k) = 0, \forall k \geq n$)

- 由定义4.4知，若x_0是(4)的不能观状态，则有

$$
\begin{aligned}
y(0) &= Cx(0) = Cx_0 = 0, \\
y(1) &= CGx(0) = CGx_0 = 0, \\
&\cdots\cdots \\
y(n-1) &= CG^{n-1}x(0) = CG^{n-1}x_0 = 0, \\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

注: 由凯莱-哈密顿定理，当$k \geqslant n$时，G^k可由$I, G, \cdots, G^{n-1}$线性表示，故若x_0是不能观状态，只要$y(0) = y(1) = \cdots = y(n-1) = 0$即可(也从而有$y(k) = 0, \forall k \geq n$)

- 此即，不能观状态x_0满足

$$
\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = 0. \tag{5}
$$

显然, 由上式(5)可见

- 不能观状态构成$\mathbb{R}^n$中的子空间, 称为不能观子空间, 记为X_{NO}
- 不能观子空间的正交余空间, 称为能观子空间, 记为X_O

4.6.1 能观定义及判据

显然, 由上式(5)可见

- 不能观状态构成$\mathbb{R}^n$中的子空间, 称为不能观子空间, 记为X_{NO}
- 不能观子空间的正交余空间, 称为能观子空间, 记为X_O

于是由(5), 有如下结论:

定理

定理4.14 对系统(4),

- 不能观子空间X_{NO}是(5)的解空间
- 能观子空间X_O为

$$X_O = span\begin{bmatrix} C^T & (CG)^T & \cdots & (CG^{n-1})^T \end{bmatrix}.$$

4.6.1 能观定义及判据

显然, 由上式(5)可见

- 不能观状态构成$\mathbb{R}^n$中的子空间, 称为不能观子空间, 记为X_{NO}
- 不能观子空间的正交余空间, 称为能观子空间, 记为X_O

于是由(5), 有如下结论:

定理

定理4.14 对系统(4),

- 不能观子空间X_{NO}是(5)的解空间
- 能观子空间X_O为

$$X_O = span\begin{bmatrix} C^T & (CG)^T & \cdots & (CG^{n-1})^T \end{bmatrix}.$$

注: 与连续系统一致, 见定理4.2和4.3(pp. 84-85)

定理

定理4.15 系统(4)完全能观的充要条件是

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} = n. \tag{6}$$

定理

定理4.15 系统(4)完全能观的充要条件是

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} = n. \tag{6}$$

- 若记系统(5)的能观Gram矩阵$W_O(n)$为

$$W_O(n) = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n-1}(CG^j)^T(CG^j), \tag{7}$$

则对于系统(4)的能观性, 还有如下定理

定理

定理4.16 系统(4) 完全能观的充要条件是$W_O(n)$非奇异

定理

定理4.16 系统(4) 完全能观的充要条件是$W_O(n)$非奇异

基于定理4.16，还可得如下定理

定理

定理4.17 系统(4) 完全能观的充要条件为：任一状态初值x_0能由n个输出值$y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$唯一确定

4.6.1 能观定义及判据

定理

定理4.16 系统(4) 完全能观的充要条件是$W_O(n)$非奇异

基于定理4.16，还可得如下定理

定理

定理4.17 系统(4) 完全能观的充要条件为: 任一状态初值x_0能由n个输出值$y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$唯一确定

证明: 必要性. 假设系统完全能观, 则$W_O(n)$非奇异, 于是

$$W_O^{-1}(n)\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = W_O^{-1}(n)\begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = x_0,$$

即可见, x_0由n个输出值$y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$唯一确定

4.6.1 能观定义及判据

- 充分性. 反证法, 假设系统不完全能观, 则不能观子空间维数大于零.

- 充分性. 反证法, 假设系统不完全能观, 则不能观子空间维数大于零.

➥ 对任一$x_0 \in \mathbb{R}^n$, 令$x_0 = x_0^{(1)} + x_0^{(2)}$, $x_0^{(1)}$属于能观子空间X_O, $x_0^{(2)}$属于不能观子空间X_{NO}, 则有

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} (x_0^{(1)} + x_0^{(2)}) = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x_0^{(1)},$$

- 充分性. 反证法, 假设系统不完全能观, 则不能观子空间维数大于零.

➥ 对任一$x_0 \in \mathbb{R}^n$, 令$x_0 = x_0^{(1)} + x_0^{(2)}$, $x_0^{(1)}$属于能观子空间X_O, $x_0^{(2)}$属于不能观子空间X_{NO}, 则有

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} (x_0^{(1)} + x_0^{(2)}) = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x_0^{(1)},$$

- 即, $y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$既可看作为是自$x_0$出发的轨线的输出, 也可看作是自$x_0^{(1)}$出发的轨线的输出.

- 充分性. 反证法, 假设系统不完全能观, 则不能观子空间维数大于零.

➥ 对任一$x_0 \in \mathbb{R}^n$, 令$x_0 = x_0^{(1)} + x_0^{(2)}$, $x_0^{(1)}$属于能观子空间X_O, $x_0^{(2)}$属于不能观子空间X_{NO}, 则有

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} (x_0^{(1)} + x_0^{(2)}) = \begin{bmatrix} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix} x_0^{(1)},$$

- 即, $y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$既可看作为是自$x_0$出发的轨线的输出, 也可看作是自$x_0^{(1)}$出发的轨线的输出.

➥ 故由$y(0), y(1), \cdots, y(n-1)$不能唯一确定$x_0$, 与已知条件矛盾. 故充分性得证

4.6.2 线性定常连续系统时间离散化后的能观性

考虑线性定常连续系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \ t \geqslant 0, \\ y &= Cx. \end{aligned} \tag{8}$$

- 以T为采样周期的时间离散系统为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k), \\ y(k) &= Cx(k), \end{aligned} \tag{9}$$

其中$G = e^{AT}, H = \int_0^T e^{At} dtB$

不加证明地可给出如下结论(分析过程可参见线性定常连续系统时间离散化后的保持能控性)

定理

定理4.18 系统(9)是能观的, 则线性定常连续系统(8)能观.

不加证明地可给出如下结论(分析过程可参见线性定常连续系统时间离散化后的保持能控性)

定理

定理4.18 系统(9)是能观的, 则线性定常连续系统(8)能观.

定理

定理4.19 令$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\sigma$为$A$的全部特征值, 且当$i \neq j$时, $\lambda_i \neq \lambda_j$, 若系统(A, C)能观, 则离散系统(9)能观的一个充分条件是: 对一切满足

$$Re(\lambda_i - \lambda_j) = 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, \sigma \tag{10}$$

的特征值, 采样周期T应成立

$$T \neq \frac{2l\pi}{Im(\lambda_i - \lambda_j)}, l = \pm 1, \pm 2, \cdots . \tag{11}$$

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 99–102