陈帅华
202028014728006

13. 求出下列单输入-单输出系统的能观规范型和变换阵.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

解. 首先求该系统的能观性判别矩阵 Q_0.

$$Q_0 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$$

其中 $CA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

$CA^2 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}$

$\therefore Q_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore \mathrm{rank}\, Q_0 = 3$ 即该系统能观

而其特征多项式为 $\alpha(s) = \det(sI - A) = s^3 + s^2 + s + 3$

$\beta_2 = cb = 2$

$\beta_1 = CAb + \alpha_2 cb = -1$

$\beta_0 = CA^2 b + \alpha_2 CAb + \alpha_1 cb = -3$

故可得系统的能观规范型为:

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}$$

而变换阵 Q 可由如下式子求出:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} CA^2 \\ CA \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

陈帅卒

2020280147280060

中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

17. 线性定常系统为 $\dot{x}=Ax+Bu$，$y=Cx$，当控制 u 取为 y 的线性函数

$$u=Fy+v$$

称为输出反馈，闭环系统为

$$\dot{x}=(A+BFC)x+Bv,\ y=Cx$$

试证明：$(A+BFC,B,C)$ 能控能观的充要条件为：(A,B,C) 能控能观。

证明：对于系统能控的PBH秩判据：

$$[sI-(A+BFC)\quad B]=[sI-A\quad B]\begin{bmatrix} I & 0 \\ -FC & I \end{bmatrix}$$

显然 $\operatorname{rank}[sI-(A+BFC)\quad B]=\operatorname{rank}[sI-A\quad B]$

即 $(A+BFC,B)$ 能控的充要条件为 (A,B) 能控

同理，对于系统的能控性：

$$\begin{bmatrix} sI-(A+BFC) \\ C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & -BF \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix}$$

显然 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-(A+BFC) \\ C \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix}$

即 $(A+BFC,C)$ 能观的充要条件为 (A,C) 能观

综上所述即可得：$(A+BFC,B,C)$ 能控能观的充要条件为 (A,B,C) 能控能观。

年　月　日

陈帅平
202028014728006

18. 开环系统 (A,B,C)，$A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$C=[1\ \ 0]$，显然此系统能控能观，证明找不到输出反馈阵 K，使 $A+BKC$ 稳定（特征根全在左半平面）

证明：显然 $[B\ \ AB]=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

系统能控能观

题中所描述的为输出反馈 $u=Ky+v$

假设存在输出反馈阵 K。

则 $A+BKC=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}K[1\ \ 0]$

$=\begin{bmatrix}0&1\\K-1&0\end{bmatrix}$

则其特征多项式为：

$\det(sI-(A+BKC))=s^2-(K-1)$

故特征值为：$s=\begin{cases}\pm\sqrt{K-1} & K\geq 1\\ \pm i\sqrt{1-K} & K<1\end{cases}$

故而我们可以知道：

无论 K 如何取，$A+BKC$ 的特征值中总有特征值实部大于等于 0，

故而找不到 K，使得 $A+BKC$ 稳定。（特征值并不全在左半平面）