3、高斯型低通滤波器在频域中的传递函数是

$$H(u,v)=Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$$

根据二维傅里叶性质，证明空间域的相应滤波器形式为

$$h(x,y)=A2\pi\sigma^2e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}$$

（这些闭合形式只适用于连续变量情况。）

在证明中假设已经知道如下结论：函数$e^{-\pi(x^2+y^2)}$的傅立叶变换为$e^{-\pi(u^2+v^2)}$

解：对于高斯型低通滤波器在频域中的传递函数：

$$H(u,v)=Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$$

我们对 H(u,v)进行反傅里叶变换：

$$h(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-((\frac{u}{\sqrt{2}\sigma})^2+(\frac{v}{\sqrt{2}\sigma})^2)}e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-\pi((\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma})^2+(\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma})^2)}e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

对于上式所得的结果，我们令 $u'=\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma},v'=\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ ，因此我们可得 $u=\sqrt{2\pi}\sigma u',v=\sqrt{2\pi}\sigma v'$ 。继续对 h(x,y)进行如下的运算：

$$h(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}A\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{2\pi}\sigma e^{-\pi(u'^2+v'^2)}e^{j2\pi(\sqrt{2\pi}\sigma u'x+\sqrt{2\pi}\sigma v'y)}du'dv'$$

$$=A2\pi\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi(u'^2+v'^2)}e^{j2\pi(\sqrt{2\pi}\sigma u'x+\sqrt{2\pi}\sigma v'y)}du'dv'$$

接着，我们令 $x'=\sqrt{2\pi}\sigma x,y'=\sqrt{2\pi}\sigma y$ ，所以：

$$h(x,y)=A2\pi\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi(u'^2+v'^2)}e^{j2\pi(u'x'+v'y')}du'dv'$$

然后令 $u=u',v=v'$ ，故而上式可写为：

$$h(x,y)=A2\pi\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi(u^2+v^2)}e^{j2\pi(ux'+vy')}dudv$$

由于我们已知函数$e^{-\pi(u^2+v^2)}$的反傅立叶变换为$e^{-\pi(x^2+y^2)}$，所以上式可进一步为：

$$
\begin{aligned}
h(x,y) &= A2\pi\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi(u^2+v^2)}e^{j2\pi(ux'+vy')}dudv \\
&= A2\pi\sigma^2 e^{-\pi(x'^2+y'^2)} \\
&= A2\pi\sigma^2 e^{-\pi((\sqrt{2\pi}\sigma x)^2+(\sqrt{2\pi}\sigma y)^2)} \\
&= A2\pi\sigma^2 e^{-\pi(2\pi\sigma^2x^2+2\pi\sigma^2y^2)} \\
&= A2\pi\sigma^2 e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}
\end{aligned}
$$

因此可以证明$H(u,v) = Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$的空间域相应滤波器形式为$h(x,y) = A2\pi\sigma^2e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}$。