



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

第6章 状态观测器

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

1 6.1 观测器定义

2 6.2 全维状态观测器

- 6.2.1 全维状态观测器的设计
- 6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

1 6.1 观测器定义

2 6.2 全维状态观测器

- 6.2.1 全维状态观测器的设计
- 6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性



第6章

6.1 观测器定义

- 在第3章中, 已经证明, 若系统 (A, B) 是能控的, 则可以通过状态反馈使闭环稳定且任意配置极点
 - 显然, 状态反馈可改变系统的性能, 从而使之有很好的优越性

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.1 观测器定义

- 在第3章中, 已经证明, 若系统 (A, B) 是能控的, 则可以通过状态反馈使闭环稳定且任意配置极点
 - 显然, 状态反馈可改变系统的性能, 从而使之有很好的优越性
- 作状态反馈的前提是状态变量是可以全部被量测的, 但是, 实际中由于技术或经济上的原因, 使得我们不能够直接获取系统的全部状态
 - 从而, 使状态反馈性能上的优越性和物理上的不可实现性形成了尖锐的矛盾



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.1 观测器定义

- 在第3章中, 已经证明, 若系统 (A, B) 是能控的, 则可以通过状态反馈使闭环稳定且任意配置极点
 - 显然, 状态反馈可改变系统的性能, 从而使之有很好的优越性
 - 作状态反馈的前提是状态变量是可以全部被量测的, 但是, 实际中由于技术或经济上的原因, 使得我们不能够直接获取系统的全部状态
 - 从而, 使状态反馈性能上的优越性和物理上的不可实现性形成了尖锐的矛盾
- ➡ 怎么来解决这一矛盾呢?
- 途径之一就是通过重构系统的状态, 并且利用这个重构状态代替系统的真实状态来实现所要求的状态反馈, 此即状态重构问题, 也称观测器设计问题
 - 观测器设计问题正是在这种背景下提出的, 不仅有理论意义, 而且有应用价值



6.1 观测器定义

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

- 所谓观测器设计问题, 就是重新构造一个系统,
 - 利用原系统中可以直接量测到的输出向量和输入向量作为它的输入信号
 - 使其输出信号 $\hat{x}(t)$ 在一定提法下等价于原系统的状态 $x(t)$
- ➡ 通常, $\hat{x}(t)$ 为 $x(t)$ 的重构状态或估计状态, 称这个重新构造的系统为观测器



6.1 观测器定义

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

- 所谓观测器设计问题, 就是重新构造一个系统,
 - 利用原系统中可以直接量测到的输出向量和输入向量作为它的输入信号
 - 使其输出信号 $\hat{x}(t)$ 在一定提法下等价于原系统的状态 $x(t)$
- ➡ 通常, $\hat{x}(t)$ 为 $x(t)$ 的重构状态或估计状态, 称这个重新构造的系统为观测器
- 观测器设计问题的含义的直观说明见下图6.1

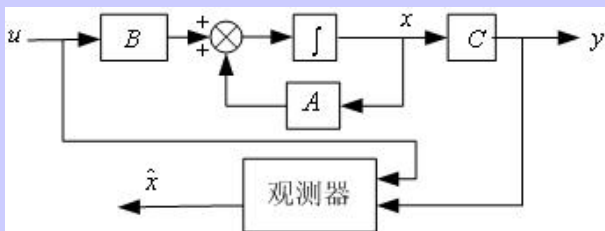


图6.1



6.1 观测器定义

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

- 对于线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{1}$$

其中, x 为 n 维状态变量, u 为 p 维输入变量, y 为 q 维输出变量, A, B, C 分别为 $n \times n, n \times p, q \times n$ 阶实常阵

- 其观测器也是一个线性系统, 状态空间描述一般可以表示为

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Fz + Gy + Hu, \\ \hat{x} &= Mz + Ny,\end{aligned}\tag{2}$$

其中, z 为观测器系统的状态变量, \hat{x} 为输出变量, F, G, H, M, N 分别为相应维数的实常阵



6.1 观测器定义

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

- 观测器按功能可以分为
 - 状态观测器
 - 函数观测器



6.1 观测器定义

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

- 观测器按功能可以分为
 - 状态观测器
 - 函数观测器
- 输出 \hat{x} 渐近等价于原系统状态 x 的观测器, 即以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0 \quad (3)$$

为性能指标综合得到的观测器, 称为状态观测器



6.1 观测器定义

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

- 观测器按功能可以分为
 - 状态观测器
 - 函数观测器
- 输出 \hat{x} 渐近等价于原系统状态 x 的观测器, 即以

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - x(t)) = 0 \quad (3)$$

为性能指标综合得到的观测器, 称为状态观测器

- 输出渐近等价于原系统状态的一个函数 $Kx(t)$ 的观测器, 即满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{x}(t) - Kx(t)) = 0 \quad (4)$$

的观测器, 称为函数观测器



6.1 观测器定义

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

注：对于状态观测器，按其结构可分为全维观测器和降维观测器

- 维数等同于原系统的状态观测器，称为全维观测器
- 维数小于原系统的状态观测器，称为降维观测器

显然，降维观测器在结构上要比全维观测器简单

- 本章我们就状态观测器的两种类型分别进行讨论，而对于函数观测器，可参见文献：
 - 郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社. 2002



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

1 6.1 观测器定义

2 6.2 全维状态观测器

- 6.2.1 全维状态观测器的设计
- 6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

1 6.1 观测器定义

2 6.2 全维状态观测器

• 6.2.1 全维状态观测器的设计

• 6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, x(0) = x_0, t \geq 0, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{5}$$

其中, x 为 n 维状态变量, u 为 p 维输入变量, y 为 q 维输出变量, A, B, C 分别为 $n \times n, n \times p, q \times n$ 阶实常阵



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, x(0) = x_0, t \geq 0, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{5}$$

其中, x 为 n 维状态变量, u 为 p 维输入变量, y 为 q 维输出变量, A, B, C 分别为 $n \times n, n \times p, q \times n$ 阶实常阵

- 状态 x 不能直接量测, 但是输出 y 和输入 u 是可以利用的
- 假定其全维状态观测器的形式为

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Fz + Gy + Hu, z(0) = z_0, \\ \hat{x} &= z,\end{aligned}\tag{6}$$

其中 z 为 n 维观测器的状态变量, F, G, H 分别为 $n \times n, n \times q, n \times p$ 待定实常阵

- 观测器状态 $z(t)$ 和系统状态 $x(t)$ 应满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - x(t)) = 0.\tag{7}$$



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

下面考虑 $(z(t) - x(t))$ (即, 观测器状态 $z(t)$ 和系统状态 $x(t)$ 的误差)

- 对其求导, 并考虑系统(5)和(6), 有

$$\begin{aligned}(\dot{z} - \dot{x}) &= Fz + Gy + Hu - Ax - Bu \\ &= F(z - x) + (F + GC - A)x + (H - B)u.\end{aligned}\tag{8}$$



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

下面考虑 $(z(t) - x(t))$ (即, 观测器状态 $z(t)$ 和系统状态 $x(t)$ 的误差)

- 对其求导, 并考虑系统(5)和(6), 有

$$\begin{aligned}(\dot{z} - \dot{x}) &= Fz + Gy + Hu - Ax - Bu \\ &= F(z - x) + (F + GC - A)x + (H - B)u.\end{aligned}\tag{8}$$

- 显然, 若

$$(1) H = B, (2) F = A - GC, (3) \operatorname{Re} \lambda_i(F) < 0, i = 1, 2, \dots, n, \tag{9}$$

则有

$$z(t) - x(t) = e^{Ft}(z(0) - x(0)),$$

从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - x(t)) = 0$ 成立



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

下面考虑 $(z(t) - x(t))$ (即, 观测器状态 $z(t)$ 和系统状态 $x(t)$ 的误差)

- 对其求导, 并考虑系统(5)和(6), 有

$$\begin{aligned}(\dot{z} - \dot{x}) &= Fz + Gy + Hu - Ax - Bu \\ &= F(z - x) + (F + GC - A)x + (H - B)u.\end{aligned}\quad (8)$$

- 显然, 若

$$(1) H = B, \quad (2) F = A - GC, \quad (3) \operatorname{Re} \lambda_i(F) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

则有

$$z(t) - x(t) = e^{Ft}(z(0) - x(0)),$$

从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - x(t)) = 0$ 成立

- 也就是说, 若 $A - GC$ 的特征值具有负实部, 则

$$\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu, \quad z(0) = z_0 \quad (10)$$

为系统(5)的一个全维观测器



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

下面考虑 $(z(t) - x(t))$ (即, 观测器状态 $z(t)$ 和系统状态 $x(t)$ 的误差)

- 对其求导, 并考虑系统(5)和(6), 有

$$\begin{aligned}(\dot{z} - \dot{x}) &= Fz + Gy + Hu - Ax - Bu \\ &= F(z - x) + (F + GC - A)x + (H - B)u.\end{aligned}\quad (8)$$

- 显然, 若

$$(1) H = B, \quad (2) F = A - GC, \quad (3) \operatorname{Re} \lambda_i(F) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

则有

$$z(t) - x(t) = e^{Ft}(z(0) - x(0)),$$

从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - x(t)) = 0$ 成立

- 也就是说, 若 $A - GC$ 的特征值具有负实部, 则

$$\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu, \quad z(0) = z_0 \quad (10)$$

为系统(5)的一个全维观测器

注: (10)中只有 G 是未知矩阵. 由定理4.9知, “若 (A, C) 能观, 一定存在 G 使 $A - GC$ 的特征根可任意配置”, 但这是(10)成为系统(5)的全维观测器的充分条件, 不是必要条件



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

为给出保证“存在 G 使得 $A - GC$ 的特征值具有负实部”的一个充分必要条件,引出如下定义

定义

定义6.1 称系统(5)或矩阵 (A, C) 是可检测的,若存在矩阵 G ,使得 $A - GC$ 的特征根全在左半平面.



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

为给出保证“存在 G 使得 $A - GC$ 的特征值具有负实部”的一个充分必要条件, 引出如下定义

定义

定义6.1 称系统(5)或矩阵 (A, C) 是可检测的, 若存在矩阵 G , 使得 $A - GC$ 的特征根全在左半平面.

根据对偶性原理和能观性结构分解, 不难建立如下的两个引理

引理

引理6.1 矩阵对 (A, C) 可检测的充分必要条件是 (A^T, C^T) 能稳.

引理

引理6.2 矩阵对 (A, C) 可检测的充分必要条件是系统不能观部分的特征根全部在左半平面.



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

下面, 给出 $\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu$ 为一个全维状态观测器的充分必要条件

定理

定理6.1 系统(5)存在形如(10)的全维状态观测器的充分必要条件是 (A, C) 可检测.



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

下面, 给出 $\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu$ 为一个全维状态观测器的充分必要条件

定理

定理6.1 系统(5)存在形如(10)的全维状态观测器的充分必要条件是 (A, C) 可检测.

必要性 由前述分析, 可知(10)即 $\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu$ 为系统(5)的全维状态观测器, 则存在 G 使得 $A - GC$ 特征根全在左半平面, 即 (A, C) 可检测(由定义6.1)

充分性 显然, 若 (A, C) 可检测, 根据引理6.1和6.2即可利用极点配置方法找到矩阵 G , 使得(10)即 $\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu$ 成为系统(5)的全维观测器



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.1 全维状态观测器的设计

下面, 给出 $\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu$ 为一个全维状态观测器的充分必要条件

定理

定理6.1 系统(5)存在形如(10)的全维状态观测器的充分必要条件是 (A, C) 可检测.

必要性 由前述分析, 可知(10)即 $\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu$ 为系统(5)的全维状态观测器, 则存在 G 使得 $A - GC$ 特征根全在左半平面, 即 (A, C) 可检测(由定义6.1)

充分性 显然, 若 (A, C) 可检测, 根据引理6.1和6.2即可利用极点配置方法找到矩阵 G , 使得(10)即 $\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu$ 成为系统(5)的全维观测器

? 若(6)是系统(5)的全维观测器它是否一定是(10)即 $\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu$ 的形式呢? 对此, 有如下结论:



6.2.1 全维状态观测器的设计

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

定理

定理6.2 系若统(5)能控可检测, 则对任意的 x_0, z_0 及输入 u , 系统(6)成为系统(5)的全维观测器的充分必要条件是:

- ① $F = A - GC,$
- ② $H = B,$
- ③ F 的特征值全部在左半平面.



6.2.1 全维状态观测器的设计

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

定理

定理6.2 系若统(5)能控可检测, 则对任意的 x_0, z_0 及输入 u , 系统(6)成为系统(5)的全维观测器的充分必要条件是:

- ① $F = A - GC,$
- ② $H = B,$
- ③ F 的特征值全部在左半平面.

证明: 充分性. 由前面的推导, 显然成立



6.2.1 全维状态观测器的设计

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

- 必要性. 采用反证法, 并考虑(8)即

$$\dot{z} - \dot{x} = F(z - x) + (F + GC - A)x + (H - B)u$$



6.2.1 全维状态观测器的设计

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

- 必要性. 采用反证法, 并考虑(8)即

$$\dot{z} - \dot{x} = F(z - x) + (F + GC - A)x + (H - B)u$$

- a) 若(3)不成立, 即“ F 的特征值不全部在左半平面”, 则对于 $z_0 - x_0 \neq 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $z(t) - x(t) \nrightarrow 0$
 - b) 若(2)不成立, 即“ $H \neq B$ ”, 则可找到一个 $u(t)$ 使得 $t \rightarrow \infty$ 时, $z(t) - x(t) \nrightarrow 0$
 - c) 若(1)不成立, 即“ $F \neq A - GC$ ”, 因为 (A, B) 能控, 则必可找到一个 $u(t)$ 而产生相应的 $x(t)$, 使当 $t \rightarrow \infty$ 时 $z(t) - x(t) \nrightarrow 0$
- ➡ 从而, 欲使 $z(t) - x(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ 时, 即 $z(t)$ 是 $x(t)$ 的渐近估计, 必须(1)~(3)成立
- 必要性得证. 证明完成





6.2.1 全维状态观测器的设计

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

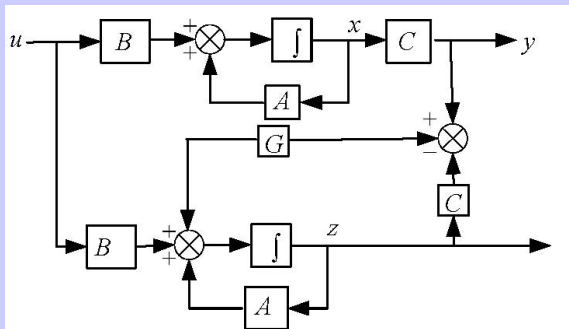


图6.2 全维状态观测器



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

1 6.1 观测器定义

2 6.2 全维状态观测器

- 6.2.1 全维状态观测器的设计

- 6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx,\end{aligned}\tag{11}$$

其中 x 为 n 维状态变量, u 为 p 维输入变量, y 为 q 维输出变量, A, B, C 分别为 $n \times n, n \times p, q \times n$, 阶实常阵

- (A, B) 能控, (A, C) 能观
- 其全维状态观测器为

$$\dot{z} = (A - GC)z + Gy + Bu,\tag{12}$$

其中 $A - GC$ 的特征根全在左半平面

- 用观测器状态 z 代替系统(11)的状态 x , 对系统(11)作反馈,

$$u = Kz + v,\tag{13}$$



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

➡ 则作用于系统构成的闭环系统为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v, \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

➡ 则作用于系统构成的闭环系统为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v, \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

- 闭环系统的状态变量为 $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$, 其为 $2n$ 维的. 显然, 状态观测器的引入, 提高了闭环系统的维数



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

➡ 则作用于系统构成的闭环系统为

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} v, \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}.\end{aligned}\quad (14)$$

- 闭环系统的状态变量为 $\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$, 其为 $2n$ 维的. 显然, 状态观测器的引入, 提高了闭环系统的维数
- 下面考察闭环系统(14)的特征值分布. 为此, 引入非奇异线性变换,

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{z} \end{bmatrix},$$

其中,

$$T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix},$$



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

➡ 则有

$$\begin{aligned} T^{-1} \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} T &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

➡ 则有

$$\begin{aligned} T^{-1} \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} T &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

- 因为矩阵的特征值在非奇异线性变换下不变, 显然, 由上式(15)可知闭环系统(14)的特征值为 $\lambda_i(A+BK) \cup \lambda_j(A-GC)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, 即故有如下特征根分离定理

定理

定理6.3(特征根分离定理) 基于全维状态观测器的输出动态反馈的闭环系统的特征值具有分离性, 即

- 基于全维状态观测器的输出动态反馈的闭环系统的特征值为系统直接状态反馈的闭环系统的特征值集合与其全维状态观测器的特征值集合的并集



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

注1: 特征值分离定理说明,

- 状态观测器的引入, 不影响由状态反馈阵 K 所配置的系统特征值, $\lambda_i(A + BK), i = 1, 2, \dots, n$
- 而状态反馈的引入, 也不影响已设计好的状态观测器的特征值 $\lambda_j(A - GC), j = 1, 2, \dots, n$.



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

注1: 特征值分离定理说明,

- 状态观测器的引入, 不影响由状态反馈阵 K 所配置的系统特征值, $\lambda_i(A + BK), i = 1, 2, \dots, n$
- 而状态反馈的引入, 也不影响已设计好的状态观测器的特征值 $\lambda_j(A - GC), j = 1, 2, \dots, n$.
- 因此, 对于基于全维状态观测器的输出动态反馈系统, 状态反馈控制律的设计和观测器的设计可独立地分开进行
 - 只要 (A, B) 能稳, (A, C) 可检测, 即可设计 K, G 使 $A + BK, A - GC$ 的特征值全部为负实部
 - 而若 (A, B, C) 能控, 能观, 即可设计 K, G 使 $A + BK, A - GC$ 的特征值任意配置



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

- 考察闭环系统(14)的传递函数

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

- 考察闭环系统(14)的传递函数. 由

$$\begin{aligned} T^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \\ [C \quad 0]T &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} = [C \quad 0] \end{aligned} \quad (16)$$

得闭环系统(14)的传递函数为:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= [C \quad 0] \left(sI_{2n} - \begin{bmatrix} A & BK \\ GC & A - GC + BK \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \\ &= [C \quad 0] \left(\begin{bmatrix} sI_n & 0 \\ 0 & sI_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A + BK & BK \\ 0 & A - GC \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} (sI_n - A - BK)^{-1} & * \\ 0 & (sI_n - A + GC)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= C(sI_n - A - BK)^{-1}B, \end{aligned} \quad (17)$$



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

- 而系统(14)直接状态反馈 $u = Kx + v$ 的闭环传递函数为:

$$G_k(s) = C(sI_n - A - BK)^{-1}B. \quad (18)$$



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

- 而系统(14)直接状态反馈 $u = Kx + v$ 的闭环传递函数为:

$$G_k(s) = C(sI_n - A - BK)^{-1}B. \quad (18)$$

➡ 显然, $G_c(s) = G_k(s)$, 也就是说,

- 全维状态观测器的引入, 并不改变原系统直接状态反馈的闭环传递函数



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

- 而系统(14)直接状态反馈 $u = Kx + v$ 的闭环传递函数为:

$$G_k(s) = C(sI_n - A - BK)^{-1}B. \quad (18)$$

➡ 显然, $G_c(s) = G_k(s)$, 也就是说,

- 全维状态观测器的引入, 并不改变原系统直接状态反馈的闭环传递函数

- 下面看一个例子

例6.2.1 设开环系统的传递函数 $G_o(s) = \frac{s-1}{s^2}$, 试作全维状态观测器, 并构造输出反馈, 使观测器极点 $-10 \pm j$, 闭环传函为 $G_c(s) = \frac{1}{s+1}$.



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

解: 传递函数 $G_o(s)$ 的最小实现为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

解: 传递函数 $G_o(s)$ 的最小实现为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 设计全维状态观测器. 取

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow A - GC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & 1 - g_1 \\ g_2 & -g_2 \end{bmatrix}$$



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

解: 传递函数 $G_o(s)$ 的最小实现为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 设计全维状态观测器. 取

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A - GC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & 1 - g_1 \\ g_2 & -g_2 \end{bmatrix}$$

● 由观测器极点为 $-10 \pm j$ 知

$$\det(sI - A + GC) = (s + 10)^2 + 1,$$

$$\det(sI - A + GC) = s^2 + (g_2 - g_1)s - g_2 = s^2 + 20s + 101,$$

$$\text{得 } g_1 = -121, g_2 = -101$$



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

解: 传递函数 $G_o(s)$ 的最小实现为:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 设计全维状态观测器. 取

$$G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A - GC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 & 1 - g_1 \\ g_2 & -g_2 \end{bmatrix}$$

- 由观测器极点为 $-10 \pm j$ 知

$$\det(sI - A + GC) = (s + 10)^2 + 1,$$

$$\det(sI - A + GC) = s^2 + (g_2 - g_1)s - g_2 = s^2 + 20s + 101,$$

$$\text{得 } g_1 = -121, g_2 = -101$$

- 进而, 可得 $A - GC = \begin{bmatrix} -121 & 122 \\ -101 & 101 \end{bmatrix}$



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

(2) 设计状态反馈控制律 K . 令 $K = [k_1 \ k_2]$.

$$\det(sI - (A + BK)) = s^2 - k_2s - k_1.$$



6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

(2) 设计状态反馈控制律 K . 令 $K = [k_1 \ k_2]$.

$$\det(sI - (A + BK)) = s^2 - k_2s - k_1.$$

● 另由状态反馈不改变系统的零点知, 闭环传函应为

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)(s - 1)}.$$

故, 可知

$$\begin{aligned} s^2 - k_2s - k_1 &= (s + 1)(s - 1) = s^2 - 1, \\ \Rightarrow \quad k_2 &= 0, \quad k_1 = 1, \quad k = [1 \ 0]. \end{aligned}$$



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

(2) 设计状态反馈控制律 K . 令 $K = [k_1 \ k_2]$.

$$\det(sI - (A + BK)) = s^2 - k_2s - k_1.$$

● 另由状态反馈不改变系统的零点知, 闭环传函应为

$$G(s) = \frac{s - 1}{(s + 1)(s - 1)}.$$

故, 可知

$$\begin{aligned} s^2 - k_2s - k_1 &= (s + 1)(s - 1) = s^2 - 1, \\ \Rightarrow \quad k_2 &= 0, \quad k_1 = 1, \quad k = [1 \ 0]. \end{aligned}$$

➡ 综合(1),(2)得系统的全维状态观测器及动态输出反馈为

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \begin{bmatrix} -121 & 122 \\ -101 & 101 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} -121 \\ -101 \end{bmatrix} y, \\ u &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} z + v. \end{aligned}$$



第6章

6.1 观测器定义

6.2 全维状态观测器

6.2.1 全维状态观测器的设计

6.2.2 基于全维状态观测器的输出动态反馈特性

● 教材:

程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 126–132