陈帅平
715班
202028014728006

10. 求~~解~~系统的状态变量 解 $x_1(t), x_2(t)$.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}u,\quad \begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},$$

$u(t)=e^{-t},\ t\geq 0.$

解：已知系统矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$.

故 $e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$.

其中 $(sI-A)=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$，故 $(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s+3}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{(s+2)(s+1)}\\ \frac{-2}{(s+2)(s+1)} & \frac{s}{(s+2)(s+1)}\end{bmatrix}$

$$\therefore e^{At}=\mathcal{L}^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$
$$=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$$

系统在初始状态与外输入同时作用下的状态运动表达式为

$$\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}2e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)}-e^{-2(t-\tau)}\\ -2e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)}+2e^{-2(t-\tau)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}e^{-\tau}d\tau$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ \cancel{2e^{-t}}-e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}4e^{-t}-2e^{-2t}e^{\tau}\\ -4e^{-t}+4e^{-2t}e^{\tau}\end{bmatrix}d\tau$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t}-e^{-2t}\\ -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4te^{-t}-2e^{-2t}(e^{t}-1)\\ -4te^{-t}+4e^{-2t}(e^{t}-1)\end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4te^{-t}-2e^{-t}+2e^{-2t}+e^{-t}-e^{-2t}\\ -4te^{-t}+4e^{-t}-4e^{-2t}+(-e^{-t}+2e^{-2t})\end{bmatrix}$$

故系统的状态变量为 $\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(4t-1)e^{-t}+e^{-2t}\\ (-4t+3)e^{-t}-2e^{-2t}\end{bmatrix}$

陈帅平
715班
2020280147728006

15. 已知系统差分方程：

$$y(k+2)+3y(k+1)+2y(k)=2u(k+1)+3u(k).$$

试写出离散动态方程.

解：对上述给出的差分方程做Z变换，可得：

$$z^2Y(z)+3zY(z)+2Y(z)=2zU(z)+3U(z).$$

$$故\ \frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}.$$

令 $Y(z)=(2z+3)X(z)$,

$U(z)=(z^2+3z+2)X(z)$.

令 $x_1(k)=x(k)$, ~~$x_1(k+1)=$~~ $x_2(k)=x_1(k+1)$.

故可得如下状态方程：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u(k)$$

$$y(k)=\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

陈帅卒
715班
202028014728006

16. 试求下面连续系统的离散化状态方程

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u, \quad T=2$$

解. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

由 $e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$，而其 $sI-A=\begin{bmatrix}s & -1\\ 0 & s\end{bmatrix}$

$\therefore (sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^2}\begin{bmatrix}s & 1\\ 0 & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s^2}\\ 0 & \frac{1}{s}\end{bmatrix}$

$\therefore e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$

$=\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$G=e^{AT}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$H=\int_0^T\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}dt\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\int_0^2\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}dt\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\int_0^2\begin{bmatrix}t\\ 1\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}$

则 $x(k+1)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix}u(k)$