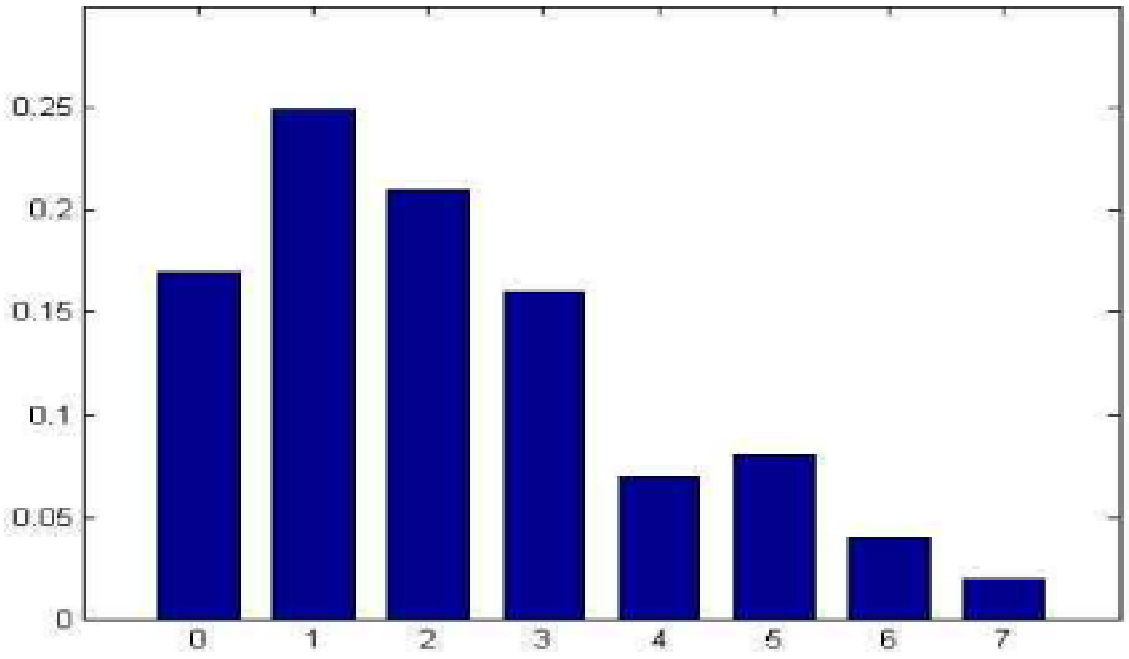
1、 完成课本习题 3.2(a)(b), 课本中文版《处理》第二版的 113 页。可以通过 matlab 帮助你分析理解。

(a) $S=T(r)=\dfrac{1}{1+(m/r)^{E}}$

2、一幅 8 灰度级图像具有如下所示的直方图，求直方图均衡后的灰度级和对应概率，并画出均衡后的直方图的示意图。（图中的 8 个不同灰度级对应的归一化直方图为[0.17 0.25 0.21 0.16 0.07 0.08 0.04 0.02]）



由公式可知，变换函数的离散形式为

k=0，1,2,3…L-1

所以

$S_0=0.17$ $S_1=S_0+0.25=0.42$ $S_2=S_1+0.21=0.63$ $S_3=S_2+0.16=0.79$

$S_4=S_3+0.07=0.86$ $S_5=S_4+0.08=0.94$ $S_6=S_5+0.04=0.98$ $S_7=S_6+0.02=1$

因为输出图像的灰度级是等间隔的，同时该图像具有 8 个灰度级 1/7,2/7,3/7,4/7,5/7,6/7,1

对之前求得的 S_k 进行修正

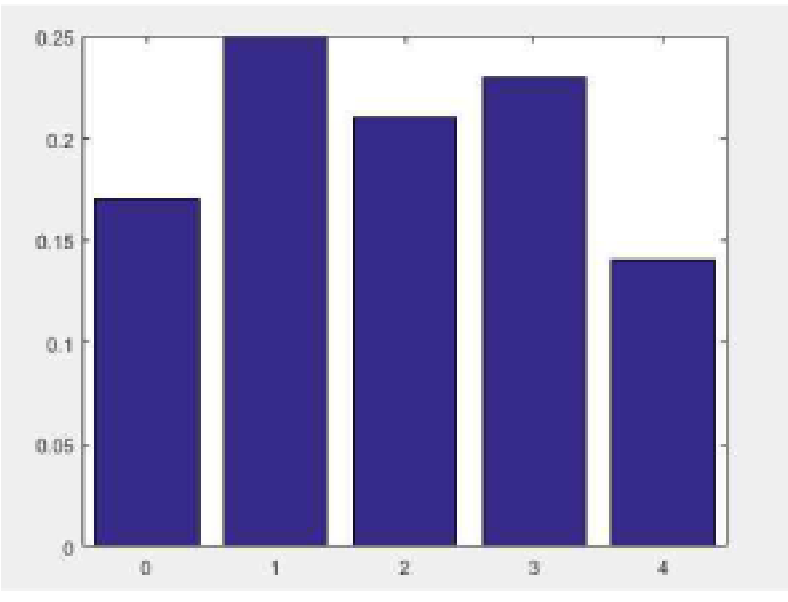
$S_0=1/7$ $S_1=3/7$ $S_2=4/7$ $S_3=6/7$ $S_4=6/7$ $S_5=1$ $S_6=1$ $S_7=1$

最后的灰度级仅有 5 个结果

$S_0=1/7$ $S_1=3/7$ $S_2=4/7$ $S_3=6/7$ $S_4=1$

与此相对应的概率为

$P_S(s_0)=0.17$ $P_S(s_1)=0.25$ $P_S(s_2)=0.21$ $P_S(s_3)=0.23$ $P_S(s_4)=0.14$



3. (选做题)课本习题 3.6。对于离散的情况，用 matlab 进行一下实验。

一样。直方图均衡化的结果一次到达极限。

对于离散的情况，设 n 为图像中像素的总和，n_{1k} 为输入图像中灰度级为 r_k 的像素的个数。

所以，直方图均衡化的转换公式为：

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=0}^{k} n_{1k} / n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k} n_{1k}$$

由于输入图像中灰度级为 r_k 的像素被映射到输出图像灰度级为 s_k 的对应像素得到，所以 $n_{1k} = n_{2k}$

那么，在第二次均衡化的过程中，转换函数为 $v_k = T(s_k) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{k} n_{2k}$

所以，两次转换过程 $n_k = v_k$，既结果相同。

4. 4 完成课本数字图像处理第二版 114 页，习题 3.10。

对于作图，$s = T_1(r) = \int_0^r p_r(w)dw = \int_0^r (-2w+2)dw = -r^2 + 2r$

对于右图，$v = T_2(z) = \int_0^z p_z(w)dw = \int_0^z 2wdw = z^2$

所以，$z = \sqrt{2r - r^2}$

4.请围绕本周课堂讲授的内容编写至少一道习题，并给出自己的分析解答。题目形式可以是填空题、选择题、判断对错题、计算题、证明题。发挥你的创造力吧。

利用 matlab 绘制幂次变换在不同 γ 下的曲线，并分析图像产生差异的原因和不同取值对变换结果产

幂次曲线中的 γ 的部分之吧输入的窄带暗值映射到宽带输出值上，相反，输入高值也对应成立。随着 γ 取值的变化，我们能够得到一组变换曲线，c=γ=1 时为正比变换，γ>1 时图像偏暗，γ<1 时图像偏亮。γ>1 时，从图中我们可以看到输出灰度级大部分被压缩在较低的水平上，γ<1 时，从图中我们可以看到输出灰度级大部分被压缩在较高的水平上。

2、 请计算如下两个向量与矩阵的卷积计算结果。

（1） [1 2 3 4 5 4 3 2 1] *[2 0 -2]

设向量 x_1=[**1** 2 3 4 5 4 3 2 1],向量 x_2=[**2** 0 -2]，添加下划线的元素设定为 0 位置

x1 **1** 2 3 4 5 4 3 2 1
-x2 -2 0 **2**

---

2 4 6 8 10 8 6 4 **2**
-2 -4 -6 -8 -10 -8 -6 -4 -2

-2 -4 -4 -4 -4 0 4 4 4 4 **2**
所以卷积结果为：2 4 4 4 4 0 -4 -4 -4 -4 -2

（2）

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

设题目给定的两个矩阵分别为 d 和 e，大小分别为 3x3 和 5x5，卷积结果为一个 7x7 的矩阵

根据卷积公式，$f(x,y)*h(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$

F(-3,-3)=e(-2,-2)d(-1,-1)=-1
F(-3,-2)=e(-2,-2)d(-1,0)+e(-2,-1)d(-1,-1)=1*0+3*(-1)=-3
F(-3,-1)=e(-2,-2)d(-1,1)+e(-2,-1)d(-1,0)+ e(-2,0)d(-1,-1)=-1
……
F(1,1)=1*1+2*2+1*0+(-1)*5+(-2)*4+(-1)*2=-10
F(1,2)=1*2+2*0+1*1=3
……

最终求得 F= $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 3 & -2 & 0 & 4 \\ -3 & -6 & -4 & 4 & -4 & 2 & 11 \\ -3 & -7 & -6 & 3 & -6 & 4 & 15 \\ -3 & -11 & -4 & 8 & -10 & 3 & 17 \\ -7 & -11 & 2 & 5 & -10 & 6 & 15 \\ -8 & -5 & 6 & -4 & -6 & 9 & 8 \\ -3 & -1 & 3 & -3 & -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

2. 完成课本数字图像处理第二版 116 页，习题 3.25，即拉普拉斯算子具有理论上的旋转不变性。

式 3.7.1 已知拉普拉斯算子 $\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

如果满足旋转不变，则 $\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$，既(x,y)和(x’,y’)所求得的拉普拉斯算子相同。

证明：
根据题目给定条件，x 是 x’和 y‘的函数，y 是 x’和 y’的函数
先求对(x’,y’)的一阶偏导：

$$\frac{\partial f}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial x}\bullet\frac{\partial x}{\partial x'}+\frac{\partial f}{\partial y}\bullet\frac{\partial y}{\partial x'}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

再求二阶偏导，其中 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 同样也是 x’和 y’的函数

$$\frac{\partial f^2}{\partial^2 x'}=\partial(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta)/\partial x$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos^2\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

同理，可以求得对 y’的二阶偏导：

$$\frac{\partial f^2}{\partial^2 y'}=\partial(-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta)/\partial y$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sin^2\theta-\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cos\theta\sin\theta-\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\sin\theta\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\cos^2\theta$$

所以，

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

综上所述，拉普拉斯变换满足旋转不变性。

1、高斯型低通滤波器在频域中的传递函数是

$$\mathbf{H(u,v)=Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}}$$

根据二维傅里叶性质，证明空间域的相应滤波器形式为

$$\mathbf{h(x,y)=A2\pi\sigma^2e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}}$$

（这些闭合形式只适用于连续变量情况。）

在证明中假设已经知道如下结论：函数$\mathbf{e^{-\pi(x^2+y^2)}}$的傅立叶变换为$\mathbf{e^{-\pi(u^2+v^2)}}$

已知：$e^{-\pi(x^2+y^2)}=e^{-\pi(u^2+v^2)}$

高斯低通滤波器的传递函数为：$H(u,v)=Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}$

对齐做傅里叶逆变换：

h(x,y)= $\int\limits_{u=-\infty}^{\infty}\int\limits_{v=-\infty}^{\infty}Ae^{-(u^2+v^2)/2\sigma^2}e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$

$$=\int\limits_{u=-\infty}^{\infty}\int\limits_{v=-\infty}^{\infty}Ae^{-\pi((\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma})^2+j2ux)}e^{-\pi((\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma})^2+j2vy)}dudv$$

$$=\int\limits_{u=-\infty}^{\infty}\int\limits_{v=-\infty}^{\infty}Ae^{-\pi((\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma})^2+j2ux-2\pi\sigma^2x^2+2\pi\sigma^2x^2)}e^{-\pi((\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma})^2+j2vy-2\pi\sigma^2y^2+2\pi\sigma^2y^2)}dudv$$

$$=\int\limits_{u=-\infty}^{\infty}\int\limits_{v=-\infty}^{\infty}Ae^{-\pi((\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}+j\sqrt{2\pi}\sigma x)^2+2\pi\sigma^2x^2)}e^{-\pi((\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma}+j\sqrt{2\pi}\sigma y)^2+2\pi\sigma^2y^2)}dudv$$

做变量替换，令$t=\frac{u}{\sqrt{2\pi}\sigma}+j\sqrt{2\pi}\sigma x\quad r=\frac{v}{\sqrt{2\pi}\sigma}+j\sqrt{2\pi}\sigma y$带入上式

$$=\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\int\limits_{r=-\infty}^{\infty}Ae^{-\pi(t^2+2\pi\sigma^2x^2)}e^{-\pi(r^2+2\pi\sigma^2y^2)}dtdr$$

$$=\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\int\limits_{r=-\infty}^{\infty}Ae^{-\pi t^2-2\pi^2\sigma^2x^2}e^{-\pi r^2-2\pi^2\sigma^2y^2}dtdr$$

上式是以 t 和 r 为积分变量的积分式，对上式进行处理

$$=\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\int\limits_{r=-\infty}^{\infty}Ae^{-\pi t^2}e^{-\pi r^2}e^{-2\pi^2\sigma^2x^2}e^{-2\pi^2\sigma^2y^2}dtdr$$

$$=Ae^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}\int\limits_{t=-\infty}^{\infty}\int\limits_{r=-\infty}^{\infty}e^{-\pi t^2}e^{-\pi r^2}dtdr$$

通过查积分公式，可以求得上式中的二重积分结果为$2\pi\sigma^2$

所以，上式$=A2\pi\sigma^2e^{-2\pi^2\sigma^2(x^2+y^2)}$，题目得证。

4.请围绕本周课堂讲授的内容编写至少一道习题，并给出自己的分析解答。题目形式可以是填空题、选择题、 判断对错题、计算题、证明题。发挥你的创造力吧。

试写出卷积和相关的公式，并说明卷积和相关之间的联系

$$f(x,y)*h(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(m,n)h(x-m,y-n)$$

$$f(x,y)\circ h(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f^*(m,n)h(x+m,y+n)$$

二维相关相当于旋转 180 度的滤波器矩阵的二维卷积，相关除了求解中的复共轭和第二项对掩膜的翻转，其余都和卷积有着相同的形式。考虑到一般处理的图像都是是函数，所以复共轭和原有形式是相同的

1、第二版课本习题 4.6

证明公式：$\Im[f(x,y)(-1)^{x+y}]=F(u-M/2,v-N/2)$

根据二维傅里叶变换的性质可知：$\Im[f(x,y)(-1)^{x+y}]=F(u-M/2,v-N/2)$

$(-1)^{x+y}$ 的结果具有如下性质：

当 x+y 为奇数时，结果为-1；当 x+y 为偶数时，结果为+1；

根据欧拉公式，可知：$e^{j\pi(x+y)}=\cos\pi(x+y)+j\sin\pi(x+y)$

当 x+y 为奇数时，结果为-1，当 x+y 为偶数时，结果为+1；

所以：$(-1)^{x+y}=e^{j\pi(x+y)}$

$\Im[f(x,y)(-1)^{x+y}]=\Im[f(x,y)e^{j\pi(x+y)}]$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{j\pi(x+y)}e^{-j2\pi(ux/M+vy/N)}=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{j\pi(x+y)-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{j2\pi(x/2+y/2)-j2\pi(ux/M+vy/N)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{j2\pi(x/2+y/2-ux/M-vy/N)}$$

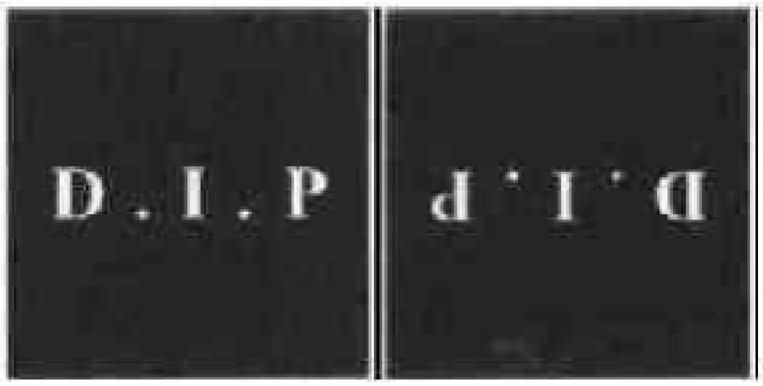
$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{j2\pi(\frac{\frac{x}{2}M}{M}+\frac{\frac{y}{2}N}{N}-ux/M-vy/N)}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{j2\pi(\frac{\frac{x}{2}M-ux}{M}+\frac{\frac{y}{2}N-vy}{N})}$$

$$=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{(u-M/2)x}{M}+\frac{(v-N/2)y}{N})}$$

$F(u-M/2,v-N)$

2、 观察如下所示图像。右边的图像这样得到：(a)在原始图像左边乘以$(-1)^{x+y}$；(b) 计算离散傅里叶变换(DFT)；(c) 对变换取复共轭；(d) 计算傅里叶反变换；(d) 结果的实部再乘以$(-1)^{x+y}$。(用数学方法解释为什么会产生右图的效果。)



根据二维傅里叶变换的共轭对称性可知：

$F(u,v)=F^*(-u.,-v)$，$F(-u,-v)=F^*(u.,v)$

在步骤 c 中，对变换取复共轭为：$F(u,v)=F^*(u.,v)$

在步骤 a 中，得到：$(-1)^{x+y}f(x,y)$

在步骤 b 中，得到 $F(u,v)=DFT[(-1)^{x+y}f(x,y)]$

经过步骤 c，取共轭得到 $F^*(u.,v)=F(-u,-v)$

在所 IDFT 得到 $(-1)^{x+y}f(-x,-y)$

在经过步骤 e 得到 $(-1)^{x+y}f(-x,-y)(-1)^{x+y}=f(-x,-y)$

既得到一副关于原点中心对称的图像，如右图所示。

3、第二版课本习题 4.21

没有区别。对所处理的图像进行补 0 延拓的目的是在 DFT 周期之间建议一个缓冲的区域，从而避免发生数据信号的混叠。将左侧的图像在空间域上做周期延拓，得到的结果均为中心图片和黑色的补 0 区域。同理，对右侧的图像做空间域上的周期延拓，也会得到结果为中心图片和黑色补 0 区域。同时考虑到两种处理方式下，0 的数量是相同的，因此，左右两种的延拓方式不会有区别。

3、假设我们有一个[0，1]上的均匀分布随机数发生器 U(0,1)，请基于它构造指数分布的随机数发生器，推导出随机数生成方程。

若我们有一个标准正态分布的随机数发生器 N(0,1)，请推导出对数正态分布的随机数生成方程。

(1)

利用给定的随机数发生器产生一个目标的随机数发生器，可以使用下述原理和方法实现：

假定给定的变量 X 服从某一种分布（例如高斯分布，均匀分布等），目标实现的随机数发生器服从分布 Y，设两种分布的的概率密度函数为 g(x)和 h(y)，需要满足 G(x)=H(y)，即：

$\int_a^x g(t)dt=\int_a^y h(t)dt$。并且在前式中，给出的 x 和 y 是一一对应的。通过第一步求得 G(x)=H(y)之后，我们可以求得 y 对 x 的反函数，既：$y=G^{-1}(H(x))$。综上所述，便可以通过 x 求得任意目标的随机数发生器。

在本题中，给定了一个[0,1]上的均匀分布，其概率密度函数为：

$$p(x)=\begin{cases}1\ [0,1]\\0\ 其他\end{cases}$$

指数分布的概率密度函数为

$$p(y)=\begin{cases} ae^{-az} & [0,+\infty) \\ 0 & (-\infty,0) \end{cases}$$

根据前述的实现原理，有：

$$\int_0^x 1dx=\int_0^y ae^{-az}dz$$

对等式两侧同时积分，可以求得 $x=1-e^{-ay}$，解之得： $y=-\dfrac{\ln(1-x)}{a}$

（2）

在本题中，给定了一个[0,1]上的标准正态分布，其概率密度函数为：

$$s\sim p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

对于对数正态分布，是指一个随机变量的对数服从正态分布，即 $x\sim p(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

所以有 $x=\sigma s+\mu\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以， $e^x=e^{\sigma s+\mu}\sim p(y)$

所以，随机数生成方程为： $z=e^{\sigma s+\mu}$ (s 为标准正态分布)

1、对于公式

$$\hat{f}(x,y)=\frac{\sum_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)^{Q}}$$

给出的逆谐波滤波回答下列问题：

（a）解释为什么当 Q 是正值时滤波对去除“胡椒”噪声有效？

（b）解释为什么当 Q 是负值时滤波对去除“盐”噪声有效？

对于题目给定的公式加以变形整理：

$$\hat{f}(x,y)=\frac{\sum g(s,t)^Q g(s,t)}{\sum g(s,t)^Q}$$

将求和号放到外边

$$\hat{f}(x,y)=\sum\frac{g(s,t)^Q g(s,t)}{\sum g(s,t)^Q}=\sum\frac{g(s,t)^Q}{\sum g(s,t)^Q}g(s,t)=\sum\frac{g(s,t)^Q}{A}g(s,t)$$

上式可看做求(x,y)邻域内所有(s,t)点的加权平均值，权重的分母$\sum_{(s,t)\in S_{xy}}g(s,t)^Q$是个常数，只需考虑分子$g(s,t)^Q$的大小。当 Q>0 时，g(s,t)越大，g(s,t)Q 值越大，对于 g(s,t)处的加权值结果也就越大，平滑处理后的结果接近最大值，此时，焦噪声被弱化，起到了滤除焦噪声的作用。反之，当 Q<0 的时候，g(s,t)越大，g(s,t)Q 值越小，对于 g(s,t)处的加权值结果也就越小，平滑处理后的结果接近最小值，此时，盐噪声被弱化，起到了滤除盐噪声的作用。

2、复习理解课本中最佳陷波滤波器进行图像恢复的过程，请推导出 w(x,y)最优解的计算过程，即从公式

$$\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial\omega(x,y)}=0$$ 到 $$\omega(x,y)=\frac{\overline{\eta(x,y)g(x,y)}-\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y)-\overline{\eta}^2(x,y)}$$

的推导过程。

根据公式 5.4.19：

$\sigma^2(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\{[g(x+s,y+t)-w(x,y)\eta(x+s,y+t)]-[\bar{g}(x,y)-w(x,y)\overline{\eta(x,y)}]\}^2$ 为了简化运算，此处令 $\sigma=\sigma(x,y)$， $g=g(x,y)$， $w=w(x,y)$， $\eta=\eta(x,y)$， $C=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}$

并对上式进行整理，可得：

$$
\begin{aligned}
\sigma^2&=C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\{[g(x+s,y+t)-w\eta(x+s,y+t)]-[\bar{g}-w\bar{\eta}]\}^2\\
&=C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\{g(x+s,y+t)-\bar{g}-w\eta(x+s,y+t)+w\bar{\eta}\}^2\\
&=C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\{g(x+s,y+t)-\bar{g}+w[\bar{\eta}-\eta(x+s,y+t)]\}^2
\end{aligned}
$$

将 $\sigma^2(x,y)$ 最小化，解 $\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial w(x,y)}=0$ 可得：

$$\frac{\partial\sigma^2}{\partial w}==\frac{\partial}{\partial w}\{C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\{g(x+s,y+t)-\bar{g}+w[\bar{\eta}-\eta(x+s,y+t)]\}^2\}$$

由于 $g(x,y),\eta(x,y)$ 与 $w(x,y)$ 无关，所以上式可以化简为：

$$
\begin{aligned}
&C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{\partial\{g(x+s,y+t)-\bar{g}+w[\bar{\eta}-\eta(x+s,y+t)]\}^2}{\partial w}\\
&=C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}2\{g(x+s,y+t)-\bar{g}+w[\bar{\eta}-\eta(x+s,y+t)]\}\bullet[\bar{\eta}-\eta(x+s,y+t)]=0
\end{aligned}
$$

可得：

$$
\begin{aligned}
&\{g(x+s,y+t)-\bar{g}+w[\bar{\eta}-\eta(x+s,y+t)]\}\bullet[\bar{\eta}-\eta(x+s,y+t)]=0\\
&\Rightarrow w=C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}-\frac{g(x+s,y+t)-\bar{g}}{\bar{\eta}-\eta(x+s,y+t)}=C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{\bar{g}-g(x+s,y+t)}{\bar{\eta}-\eta(x+s,y+t)}\\
&\Rightarrow w(x,y)=C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{\bar{g}(x,y)-g(x+s,y+t)}{\bar{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t)}\\
&\Rightarrow w(x,y)=C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{\bar{g}(x,y)-g(x+s,y+t)}{\bar{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t)}
\end{aligned}
$$

为了将求和号放入分子分母中，并打开，可以在分子分母中均乘 $\bar{\eta}(x,y)+\eta(x+s,y+t)$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow w(x,y)=C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{[\bar{g}(x,y)-g(x+s,y+t)][\bar{\eta}(x,y)+\eta(x+s,y+t)]}{[\bar{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t)][\bar{\eta}(x,y)+\eta(x+s,y+t)]}\\
&\Rightarrow C\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{[\bar{g}(x,y)\bar{\eta}(x,y)+\bar{g}(x,y)\eta(x+s,y+t)-g(x+s,y+t)\bar{\eta}(x,y)-g(x+s,y+t)\eta(x+s,y+t)]}{[\bar{\eta}^2(x,y)-\eta^2(x+s,y+t)]}
\end{aligned}
$$

将求和号放到分子和分母中

$$\Rightarrow \frac{[\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)+\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)-\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)-\overline{g(x,y)\eta(x,y)}]}{[\overline{\eta}^2(x,y)-\eta^2(x+s,y+t)]}$$

$$\Rightarrow \frac{[\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)-\overline{g(x,y)\eta(x,y)}]}{[\overline{\eta}^2(x,y)-\overline{\eta^2}(x,y)]}=\frac{\overline{g(x,y)\eta(x,y)}-\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y)-\overline{\eta}^2(x,y)}$$

得证。

3、请证明带通与带阻的频域关系公式，即课本中的关系公式

$$H_{bp}(u,v)=1-H_{br}(u,v)$$

根据数字信号处理的知识可知，空间域的信号可以经过一个双通道滤波器波实现信号的隔离与重建。这种思路同样可以运用到图像的空间域处理中。

带阻滤波器在空间域的函数为 $h_{br}(x,y)$，带通通滤波器在空间域的函数为 $h_{bp}(x,y)$，原始信号为 f(x,y)。则：

$f(x,y)=f(x,y)*h_{br}(x,y)+f(x,y)*h_{bp}(x,y)$

对空间域的表达两边同时做傅里叶变换，可得：

$F(u,v)=F(u,v)H_{br}(u,v)+F(u,v)H_{bp}(u,v)$

$F(u,v)=F(u,v)(H_{br}(u,v)+H_{bp}(u,v))$

$1=H_{br}(u,v)+H_{bp}(u,v)$

原式得证。

1 考虑在 x 方向均匀加速导致的图像模糊问题。如果图像在 t = 0 静止，并用均匀加速 $x_0(t)=at^2/2$ 加速，对于时间 T, 找出模糊函数 H(u, v), 可以假设快门开关时间忽略不计。

令 $f(x,y)$ 为原图像，$g(x,y)$ 为变换后的图像，设 T 为曝光时间

则：$g(x,y)=\int_0^T f[x-x_0(t),y-y\ \ (t)]$

经过傅里叶变换可得：$G(u,v)=F(u,v)\int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt$

令 $H(u,v)=\frac{G(u,v)}{F(u,v)}=\int_0^T e^{-j2\pi[ux_0(t)+vy_0(t)]}dt$

根据题意：$x_0(t)=at^2/2, y_0(t)=0$

带入上式：

$$H(u,v)=\frac{G(u,v)}{F(u,v)}=\int_0^T e^{-j2\pi[u\frac{at^2}{2}]}dt$$

利用 matlab-mupad 求解，得到结果为 $\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(T\sqrt{a\,\mathrm{pi}\,u\,\mathrm{i}}\right)}{2\sqrt{a\,\mathrm{pi}\,u\,\mathrm{i}}}$

4、已知一个退化系统的退化函数 H(u,v), 以及噪声的均值与方差，请描述如何利用约束最小二乘方算法计算出原图像的估计。

原始图像在频域的估计为：

$\hat{F}(u,v)=[\frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2+\gamma|P(u,v)|^2}]G(u,v)$。其中，P(u,v)是函数 p(x,y)的傅里叶变换

$$p(x,y)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 4 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

参数向量 $r=g-H\hat{f}$

由于 $\hat{F}(u,v)$ 是 γ 的函数，所以 $\hat{f}$，r 也是 γ 的函数，即：$\varphi(\gamma)=r^T r=\|r\|^2$

这是 γ 的单调递增函数，这里要做的事调整 γ 以实现 $\|r\|^2=\|\eta\|^2\pm a$，其中 a 是一个精确的参数。

在这里设：噪声的均值、方差分别为：m，σ^2 步骤如下：

1 指定初始的 γ 的值

2 计算 $\|r\|^2$

3 $\|r\|^2=\|\eta\|^2\pm a$ 如果成立，则停止，如果 $\|r\|^2<\|\eta\|^2\pm a$ 就增加 γ，如果大于，就减小 γ，返回第二部

4 使用 γ 新值，重新计算最佳估计值 $\hat{F}(u,v)$

3. 请列举出课堂讲授的各种颜色空间，并指出每个通道的含义。

RGB　Red 红色 Green 绿色 Blue 蓝色
YCbCr Y 为颜色的亮度成分、而 CB 和 CR 则为蓝色和红色的浓度偏移量成份
HSV Hue 色调 Saturation 饱和度 V 表示色彩的明亮程度 V 为 RGB 中 max
CMY　Cyan 青色　Magenta 洋红　Yellow 黄色
CMYK　Cyan 青色　Magenta 洋红　Yellow 黄色 K 打印黑色
HIS　Hue 色调 Saturation 饱和度　Intensity 亮度 I 为 RGB 的 Average

1、r,g,b 是 RGB 彩色空间沿 R,G,B 轴的单位向量，定义向量$\mathrm{u}=\frac{\partial R}{\partial x}r+\frac{\partial G}{\partial x}g+\frac{\partial B}{\partial x}b$ 和 $\mathrm{v}=\frac{\partial R}{\partial y}r+\frac{\partial G}{\partial y}g+\frac{\partial B}{\partial y}b$，

g_{xx}，g_{yy}，g_{xy}　定义为这些向量的点乘：

$$g_{xx}=\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}=\mathrm{u}^T\mathrm{u}=\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial B}{\partial x}\right|^2$$
$$g_{yy}=\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}=\mathrm{v}^T\mathrm{v}=\left|\frac{\partial R}{\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial B}{\partial y}\right|^2$$
$$g_{xy}=\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}=\mathrm{u}^T\mathrm{v}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}$$

推导出最大变换率方向Θ和(x,y)点在Θ方向上变化率的值F(θ)

利用数学知识，可知，函数在某点处的梯度是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值，即梯度是在坐标 P(x,y)处指向 f 最大变化率方向的向量。
设函数 f=f(x,y)

同时注意到$\frac{\partial f}{\partial x}=u=\frac{\partial R}{\partial x}r+\frac{\partial G}{\partial x}g+\frac{\partial B}{\partial x}b$，$\frac{\partial f}{\partial y}=v=\frac{\partial R}{\partial y}r+\frac{\partial G}{\partial y}g+\frac{\partial B}{\partial y}b$

需要注意到我们所求的最大变化率是指 RGB 三个空间中的在彩色图像坐标上值的和的最大变化率方向。

根据梯度定义可以：函数 f 在 P(x,y)点处的梯度（假设沿着方向$\vec{l}$ ）为

Grad $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P(x,y)}=f_x'(P)\cos\theta+f_y'(P)\cos\beta$，在 x-y 平面内，$\theta+\beta=\frac{\pi}{2}$

所以：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P(x,y)}=f_x'(P)\cos\theta+f_y'(P)\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$$

$$=f_x'(P)\cos\theta+f_y'(P)\sin\theta$$

$$=u\cos\theta+v\sin\theta$$

求梯度方向，可以转化为求满足$|u\cos\theta+v\sin\theta|^2$的最大的$\theta$

$$|u\cos\theta+v\sin\theta|^2=u^2\cos^2\theta+2uv\cos\theta\sin\theta+v^2\sin^2\theta$$

$$=g_{xx}\frac{1+\cos 2\theta}{2}+g_{xy}\sin 2\theta+g_{yy}\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(g_{xx}+g_{yy})+\frac{\cos 2\theta}{2}(g_{xx}-g_{yy})+g_{xy}\sin 2\theta$$

对上式求的θ偏导数，并令偏导数为 0

可得：$-\sin 2\theta(g_{xx}-g_{yy})+g_{xy}\cos 2\theta=0$

$$\theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2g_{xy}}{g_{xx}-g_{yy}}$$

对应的$F(\theta)=\left\{\frac{1}{2}[(g_{xx}+g_{yy})+(g_{xx}-g_{yy})\cos 2\theta+2g_{xy}\sin 2\theta]\right\}^{\frac{1}{2}}$

2、请根据课本中 **Z** 变换的定义，证明如下结论。

(1) 若 **x(n)**的 **Z** 变换为 **X(z)**，则$\mathbf{(-1)^n x(n)}$ 的 **Z** 变换为 **X(−z)**

(2) 若 **x(n)**的 **Z** 变换为**X(z)**，**x(−n)** 的 **Z** 变换为$\mathbf{X(\frac{1}{z})}$

(3) 若 **x(n)**的 **Z** 变换为**X(z)**，课本 **280** 页公式 **7.1.2**

（1）

Z 变换的定义为：$X(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$

那么$(-1)^n x(n)$的 z 变换$\sum_{-\infty}^{\infty}[(-1)^n x(n)]z^{-n}=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)(-1)^{-n}z^{-n}=\sum_{-\infty}^{\infty}x(n)(-z)^{-n}$，既 z 变换为 X(-z)

（2）

$x(-n)$的 z 变换为$\sum_{-\infty}^{\infty}[x(-n)]z^{-n}=\sum_{-\infty}^{\infty}[x(m)]z^{m}=\sum_{-\infty}^{\infty}[x(m)](z^{-1})^{-m}=\sum_{-\infty}^{\infty}[x(n)](z^{-1})^{-n}$ 既 z 变换为$X(z^{-1})$

（3）

$\sum_{-\infty}^{\infty} x(2n)z^{-n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(m)z^{-\frac{m}{2}}$ 此时 m 为偶数

取 $x(m) = \frac{1}{2}(1+(-1)^m)x(m)$

所以当 m 为偶数时，$\sum_{-\infty}^{\infty} x(m)z^{-\frac{m}{2}}$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(1+(-1)^m)x(m)z^{-\frac{m}{2}}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x(m)z^{-\frac{m}{2}} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(-1)^m x(m)z^{-\frac{m}{2}}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x(m)z^{-\frac{m}{2}} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}x(m)(-z^{\frac{1}{2}})^{-m}$$

$$= \frac{1}{2}[X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})]$$

3、若 $G_1(z) = -z^{-2K+1}G_0(-z^{-1})$ 成立，请证明

$g_1(n) = (-1)^n g_0(2K-1-n)$

已知一下 z 变换：$x(-n) \Leftrightarrow X(z^{-1})$，$x(n-k) \Leftrightarrow z^{-k}X(z)$，$(-1)^n x(n) \Leftrightarrow X(-z)$

$g_1(n) \Leftrightarrow G_1(z)$

我们从 $g_0(n) \Leftrightarrow G_0(z)$ 出发

$g_0(2K-1+n) \Leftrightarrow z^{2K-1}G_0(z)$

$g_0(2K-1-n) \Leftrightarrow z^{-(2K-1)}G_0(z^{-1})$

$(-1)^n g_0(2K-1-n) \Leftrightarrow (-z)^{-(2K-1)}G_0((-z)^{-1})$

$(-1)^n g_0(2K-1-n) \Leftrightarrow (-z)^{-2K+1}G_0(-z^{-1}) = G_1(z)$

所以：$(-1)^n g_0(2K-1-n) = g_1(n)$

4. 假设课本中给出完美重建滤波器的正交族对应的三个滤波器间的关系式是正确的，并以此为基础，推导 h_0, h_1 的关系。

根据输入的无失真重建，，经过整理和变换可以求得：$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(Z) \end{bmatrix} = \frac{2}{|H_m(z)|}\begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z) \end{bmatrix}$

对于 FIR 滤波器，调制矩阵的行列式是一个纯延时，既$|H_m(z)|= az^{-(2k+1)}$,因此，交叉调制的准确形式是 a 的函数，

$z^{-(2k+1)}$可以被认为是任意的，因为他只会改变滤波器的群延时。当 a 取 2 或-2 是进行下述讨论

a=2：

$g_0(n)=(-1)^n h_1(n)$，$g_1(n)=(-1)^{n+1} h_0(n)$，$g_1(n)=(-1)^n g_0(2K-1-n)$

所以：

$$g_1(n)=(-1)^{n+1} h_0(n)=(-1)^n g_0(2K-1-n)=(-1)^n (-1)^{2K-1-n} h_1(n)$$

$$\Rightarrow h_0(n)=(-1)^{2K-n} h_1(2K-1-n)=(-1)^n h_1(2K-1-n)$$

a=-2：

$g_0(n)=(-1)^{n+1} h_1(n)$，$g_1(n)=(-1)^n h_0(n)$，$g_1(n)=(-1)^n g_0(2K-1-n)$

所以：

$$g_1(n)=(-1)^n h_0(n)=(-1)^n g_0(2K-1-n)=(-1)^n (-1)^{2K-n} h_1(n)$$

$$\Rightarrow h_0(n)=(-1)^{2K-n} h_1(2K-1-n)=(-1)^n h_1(2K-1-n)$$

所以$h_0(n)=(-1)^n h_1(2K-1-n)$