第4章　线性定常系统的能观性

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

对不完全能观的系统，通过结构分解，可以明显地将其区分为两部分，即

- 能观测部分—能观测子系统
- 不能观测部分—不能观测子系统

引理

引理4.1 系统(A, C)的能观测性在非奇异变换下保持不变.

4.3.1 能观性在非奇异线性变换下的属性

引理

引理4.1 系统(A, C)的能观测性在非奇异变换下保持不变.

证明: 考虑系统的状态空间描述为

$$\dot{x} = Ax, \ y = Cx.$$

- 引入非奇异线性变换$x = P\bar{x}$, P为非奇异阵, 则与其代数等价的状态空间描述为

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x}, \ y = \bar{C}\bar{x}.$$

其中,

$$\bar{A} = P^{-1}AP, \ \bar{C} = CP.$$

- 考察(A, C)和$(\bar{A}, \bar{C})$的能观测性矩阵, 则有

$$\bar{Q}_O = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP \\ CAP \\ \vdots \\ CA^{n-1}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P = Q_O P.$$

4.3.1 能观性在非奇异线性变换下的属性

- 考察(A, C)和$(\bar{A}, \bar{C})$的能观测性矩阵, 则有

$$\bar{Q}_O = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}\bar{A} \\ \vdots \\ \bar{C}\bar{A}^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CP \\ CAP \\ \vdots \\ CA^{n-1}P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P = Q_O P.$$

- 由P非奇异, 故可得

$$rank\bar{Q}_O = rankQ_O,$$

此即说明系统的能观性在非奇异变换下保持不变

- 引理得证. ■

考虑不完全能观测的线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, y为q维输出向量, A, B, C 分别为$n \times n, n \times p, q \times n$ 阶实常阵.

考虑不完全能观测的线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，x为n维状态向量，u为p维控制向量，y为q维输出向量，A, B, C 分别为$n \times n, n \times p, q \times n$ 阶实常阵.

- 考察系统(1)的能观性矩阵Q_O，并记

$$rankQ_O = rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = m < n,$$

- 任选Q_O的m个线性无关的行$h_1, h_2, \cdots, h_m$, 记

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_m \end{bmatrix},$$

由定理4.3, H_1^T的列构成X_O的基底.

- 任选Q_O的m个线性无关的行$h_1, h_2, \cdots, h_m$, 记

$$H_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdots \\ h_m \end{bmatrix},$$

由定理4.3, H_1^T的列构成X_O的基底.

- 再任取$n-m$个与H_1 线性无关的行向量$h_{m+1}, \cdots, h_n$, 记

$$H_2 = \begin{bmatrix} h_{m+1} \\ \cdots \\ h_n \end{bmatrix},$$

4.3.2 按能观性结构分解

- 令

$$T=\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

为非奇异, 并记$T^{-1}=\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$, 则由$TT^{-1}=I$，可推得

$$H_1T_2=0.$$

- 令

$$T=\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

为非奇异, 并记$T^{-1}=\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$, 则由$TT^{-1}=I$, 可推得

$$H_1T_2=0.$$

- 由此, 考虑H_1^T的列构成X_O的基底, 可知T_2的各列属于X_{NO}.又由推论4.1, X_{NO}是A的不变子空间, 故有

$$H_1AT_2=0$$

- 令

$$T = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

为非奇异, 并记$T^{-1} = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$, 则由$TT^{-1} = I$, 可推得

$$H_1 T_2 = 0.$$

- 由此, 考虑H_1^T的列构成X_O的基底, 可知T_2的各列属于X_{NO}.又由推论4.1, X_{NO}是A的不变子空间, 故有

$$H_1 A T_2 = 0$$

➥ 对系统(1)作非奇异线性变换$x = T^{-1}\hat{x}$, 则系统(1)等价地转化为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u,$$
$$y = \hat{C}\hat{x},$$

- 其中，

$$
\begin{aligned}
\hat{A} &= TAT^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} H_1AT_1 & 0 \\ H_2AT_1 & H_2AT_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \\
\hat{B} &= TB \\
&= \begin{bmatrix} H_1B \\ H_2B \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \\
\hat{C} &= CT^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} CT_1 & CT_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} CT_1 & 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

4.3.2 按能观性结构分解

综合上面的推导有下面的结论.

定理

定理4.11 对于不完全能观系统(1), 存在非奇异线性变换$x = T^{-1}\hat{x}$, 使系统结构按能观性分解的规范表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中, $\hat{x}_1$ 为m 维能观分状态, $\hat{x}_2$ 为$n-m$ 维不能观分状态.

综合上面的推导有下面的结论.

定理

定理4.11 对于不完全能观系统(1), 存在非奇异线性变换$x = T^{-1}\hat{x}$, 使系统结构按能观性分解的规范表达式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\hat{x}}_1 \\ \dot{\hat{x}}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{3}$$

其中, $\hat{x}_1$ 为m 维能观分状态, $\hat{x}_2$ 为$n-m$ 维不能观分状态.

证明: 由前分析可见, 若取T如(2), 即有系统(1)的结构分解为(3)

- 考察(A_{11}, C_1)的能观性. 那么, 由

$$m = rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_1A_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_1A_{11}^{n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

可得

$$rank\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_{11} \\ \vdots \\ C_1A_{11}^{n-1} \end{bmatrix} = m$$

- 考察(A_{11}, C_1)的能观性. 那么, 由

$$m = rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ C_1A_{11} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ C_1A_{11}^{n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

可得

$$rank\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_{11} \\ \vdots \\ C_1A_{11}^{n-1} \end{bmatrix} = m$$

- 又由凯莱-哈密尔顿定理, 可知

$$rank\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_{11} \\ \vdots \\ C_1A_{11}^{m-1} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} C_1 \\ C_1A_{11} \\ \vdots \\ C_1A_{11}^{n-1} \end{bmatrix} = m,$$

- 从而, (A_{11}, C_1)能观, 故$\hat{x}_1$为能观分状态. 证毕. ■

➡ 从而, (A_{11}, C_1)能观, 故$\hat{x}_1$为能观分状态. 证毕. ■

利用定理4.11, 可知

- m维子系统

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1 &= A_{11}\hat{x}_1 + B_1 u, \\ y_1 &= C_1\hat{x}_1, \end{aligned}$$

是完全能观的, 其中$y_1 = y$

- $n-m$维子系统

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_2 &= A_{21}\hat{x}_1 + A_{22}\hat{x}_2 + B_2 u, \\ y_2 &= 0, \end{aligned}$$

是完全不能观的.

考虑完全能观的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx, \tag{4}$$

其中, A 为 $n \times n$ 常阵, b 为 $n \times 1$ 常阵, c 为 $1 \times n$ 常阵.

考虑完全能观的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad y = cx, \tag{4}$$

其中, A为$n \times n$常阵, b为$n \times 1$常阵, c为$1 \times n$常阵.

- 其特征多项式表示为

$$\det(sI - A) = \alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0. \tag{5}$$

- 定义n个常数

$$\begin{aligned} \beta_{n-1} &= cb, \\ \beta_{n-2} &= cAb + \alpha_{n-1}cb, \\ &\cdots\cdots \\ \beta_1 &= cA^{n-2}b + \alpha_{n-1}cA^{n-3}b + \cdots + \alpha_2 cb, \\ \beta_0 &= cA^{n-1}b + \alpha_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + \alpha_1 cb. \end{aligned} \tag{6}$$

- 又因为系统(4)完全能观, 故有

$$rank\begin{bmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{bmatrix} = n. \tag{7}$$

➥ 构造变换矩阵

$$Q = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^{n-1} \\ cA^{n-2} \\ \vdots \\ c \end{bmatrix}. \tag{8}$$

- 显然, 当且仅当系统完全能观时, Q非奇异.

定理

定理4.12 对完全能观单输入—单输出系统(4), 引入线性非奇异变换$\hat{x} = Qx$, 则可导出其能观规范型为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A_o\hat{x} + b_o u, \\ y &= c_o\hat{x} \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$A_o = QAQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \ b_o = Qb = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

$$c_o = cQ^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

证明: (1) 推导A_o的形式, 由$A_o = QAQ^{-1}$推得

$$A_oQ = QA = \begin{bmatrix} e_1A \\ e_2A \\ \vdots \\ e_nA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^n \\ cA^{n-1} \\ \vdots \\ cA \end{bmatrix} \tag{11}$$

证明: (1) 推导A_o的形式, 由$A_o = QAQ^{-1}$推得

$$A_oQ = QA = \begin{bmatrix} e_1A \\ e_2A \\ \vdots \\ e_nA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^n \\ cA^{n-1} \\ \vdots \\ cA \end{bmatrix} \tag{11}$$

- 利用凯莱-哈密顿定理$\alpha(A) = 0$和Q的定义式(8)推得

$$\begin{aligned} e_1A &= cA^n + \alpha_{n-1}cA^{n-1} + \cdots + \alpha_1 cA = c\alpha(A) - c\alpha_0 \\ &= -\alpha_0 e_n, \\ e_2A &= cA^{n-1} + \alpha_{n-1}cA^{n-2} + \cdots + \alpha_2 cA + \alpha_1 c - \alpha_1 c \\ &= e_1 - \alpha_1 e_n, \\ &\cdots\cdots \\ e_{n-1}A &= cA^2 + \alpha_{n-1}cA + \cdots + \alpha_{n-2}c - \alpha_{n-2}c \\ &= e_{n-2} - \alpha_{n-2}e_n, \\ e_nA &= cA + \alpha_{n-1}c - \alpha_{n-1}c = e_{n-1} - \alpha_{n-1}e_n. \end{aligned} \tag{12}$$

- 将上式(12)代入(11), 于是有

$$A_oQ = \begin{bmatrix} -\alpha_0 e_n \\ e_1 - \alpha_1 e_n \\ \vdots \\ e_{n-1} - \alpha_{n-1} e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & & & -\alpha_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

- 将上式(12)代入(11), 于是有

$$A_oQ=\begin{bmatrix}-\alpha_0 e_n\\ e_1-\alpha_1 e_n\\ \vdots\\ e_{n-1}-\alpha_{n-1}e_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & -\alpha_0\\ 1 & & & -\alpha_1\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{bmatrix}$$

- 由$Q=\begin{bmatrix}e_1\\ e_2\\ \vdots\\ e_n\end{bmatrix}$非奇异, 两边右乘以$Q^{-1}$, 即得

$$A_o=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & -\alpha_0\\ 1 & & & -\alpha_1\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & -\alpha_{n-1}\end{bmatrix}$$

- (2) 推导b_o的形式. 由(6), 直接计算

$$b_o = Qb = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^{n-1} \\ cA^{n-2} \\ \vdots \\ c \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

- (2) 推导b_o的形式. 由(6), 直接计算

$$b_o = Qb = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \alpha_{n-1} \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^{n-1} \\ cA^{n-2} \\ \vdots \\ c \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{bmatrix}$$

- (3) 推导c_o的形式. 由

$$c_o Q = c = e_n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix},$$

两边右乘以Q^{-1}, 即可得c_o. 证毕 ■

例4.4.1 给定能观单输入-单输出系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x.$$

求其能观规范型及变换矩阵.

例4.4.1 给定能观单输入-单输出系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x.$$

求其能观规范型及变换矩阵.

解: 其特征多项式为

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^2 - 5s + 4$$

- 求常数

$$\beta_2 = cb = 3,$$
$$\beta_1 = cAb + \alpha_2 cb = 4,$$
$$\beta_0 = cA^2 b + \alpha_2 cAb + \alpha_1 cb = 0.$$

- 利用(9), (10)直接可得系统的能观规范型为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}.$$

其中, $\hat{x} = Qx$, 由(8)可求得变换阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^2 \\ cA \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 利用(9), (10)直接可得系统的能观规范型为

$$\dot{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}.$$

其中, $\hat{x} = Qx$, 由(8)可求得变换阵

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cA^2 \\ cA \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

注: 对于能观规范型, 作如下说明:

- 对于代数等价的完全能观单输入—单输出线性定常系统, 具有相同的能观规范型.

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 92–98