2、 观察如下所示图像。右边的图像这样得到：(a)在原始图像左边乘以$(-1)^{x+y}$；(b) 计算离散傅里叶变换(DFT); (c) 对变换取复共轭; (d) 计算傅里叶反变换; (e) 结果的实部再乘以$(-1)^{x+y}$。(用数学方法解释为什么会产生右图的效果。)

解：我们首先设二维图像函数为 f(x,y), 其为实函数。
经过步骤 a，在原始图像左边乘以$(-1)^{x+y}$，我们可得到式子(1)：

$$(-1)^{x+y} f(x,y) \tag{1}$$

在步骤 b 中，对式(1)进行离散傅里叶变换(DFT)可得到式子(2)：

$$F(u,v) = \mathcal{DFT}[(-1)^{x+y} f(x,y)] \tag{2}$$

由二维傅里叶变换的共轭对称性有如下式子：

$$F(u,v) = F^*(-u,-v),\ F(-u,-v) = F^*(u,v) \tag{3}$$

在步骤 c 中，对式(2)的 $F(u,v)$ 取复共轭，故可得：

$$F^*(u,v) = F(-u,-v) \tag{4}$$

对式(4)进行反傅里叶变换，可得（证明见后注）：

$$(-1)^{x+y} f(-x,-y) \tag{5}$$

最后经过步骤 e，可得：

$$(-1)^{x+y}(-1)^{x+y} f(-x,-y) = f(-x,-y) \tag{6}$$

即 $f(x,y)$ 经过这五个步骤可得到 $f(-x,-y)$，即最终便可得到一幅如右图所示的中心对称的图像。

注：

$f(-x,-y)$的反傅里叶变换是F(-u,-v)，连续形式证明如下：

$$f(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)e^{j2\pi(uv+vy)}dudv$$

$$\therefore f(-x,-y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(u,v)e^{-j2\pi(ux+vy)}dudv$$

$$\text{令}u'=-u,v'=-v,$$

$$\therefore u=-u',v=-v'$$

$$\therefore f(-x,-y)=(-1)\int_{+\infty}^{-\infty}(-1)\int_{+\infty}^{-\infty}F(-u',-v')e^{-j2\pi(-u'x-v'y)}du'dv'$$

$$\therefore f(-x,-y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(-u',-v')e^{+j2\pi(u'x+v'y)}du'dv'$$

然后将u'换为u，v'换为v

$$\therefore f(-x,-y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}F(-u,-v)e^{+j2\pi(ux+vy)}dudv$$

故而可得 $f(-x,-y)$的反傅里叶变换是F(-u,-v)。