

3、请证明第二版课本习题 4.5 中提及的频域内高通滤波器与低通滤波器的关系式子。

证明：对于一幅图像 $f(x,y)$, 我们知道它是由低频部分 $f_{lp}(x,y)$ 和 高频部分 $f_{hp}(x,y)$ 两部分组成，即：

$$f(x,y) = f_{lp}(x,y) + f_{hp}(x,y)$$

低频部分可以通过低频滤波器对原图像进行滤波得到：

$$f_{lp}(x,y) = f(x,y) * H_{lp}(x,y)$$

高频部分可以通过高频滤波器对原图像进行滤波得到：

$$f_{hp}(x,y) = f(x,y) * H_{hp}(x,y)$$

因此：

$$f(x,y) = f_{lp}(x,y) + f_{hp}(x,y)$$

$$f(x,y) = f(x,y) * H_{lp}(x,y) + f(x,y) * H_{hp}(x,y)$$

对其进行傅里叶变换可得：

$$F(u,v) = F(u,v)H_{lp}(u,v) + F(u,v)H_{hp}(u,v)$$

$$F(u,v) = F(u,v)(H_{lp}(u,v) + H_{hp}(u,v))$$

$$\therefore 1 = H_{lp}(u,v) + H_{hp}(u,v)$$

$$\therefore H_{hp}(u,v) = 1 - H_{lp}(u,v)$$

故而 4.5 中提及的频域内高通滤波器与低通滤波器的关系式子得证。