第7章 线性二次型最优控制与系统输入输出解耦

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 7.4 系统的输入输出解耦
   - 7.4.1 动态输入输出解耦
   - 7.4.2 稳态输入输出解耦

1 7.4 系统的输入输出解耦

- 7.4.1 动态输入输出解耦
- 7.4.2 稳态输入输出解耦

1 7.4 系统的输入输出解耦

- 7.4.1 动态输入输出解耦
- 7.4.2 稳态输入输出解耦

(1) 问题的描述

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx, \tag{1}$$

其中x为n维状态, u为p 维控制, y 为q 维输出, A, B, C 分别为$n \times n$, $n \times p$, $q \times n$ 实常阵

- 假定$p = q$
- 对系统(1), 作状态反馈及输入满秩变换

$$u = Kx + Lv, \tag{2}$$

L为非奇异矩阵, 则(2)与(1)构成的闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{x} &=(A + BK)x + BLv, \\ y &=Cx. \end{aligned} \tag{3}$$

闭环系统(3)的传递函数为

$$G_{KL}(s) = C[sI - (A + BK)]^{-1}BL. \tag{4}$$

定义

定义7.1 若存在矩阵对(K, L), 使得闭环系统(3)的传递函数$G_{KL}(s)$为非奇异对角阵, 即

$$G_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \frac{q_1(s)}{p_1(s)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{q_p(s)}{p_p(s)} \end{bmatrix}, \quad q_i(s) \neq 0, i = 1, 2, \cdots, p, \qquad (5)$$

则称系统(1)能经状态反馈和输入满秩变换实现动态输入输出解耦

7.4.1 动态输入输出解耦

定义

定义7.1 若存在矩阵对(K,L), 使得闭环系统(3)的传递函数$G_{KL}(s)$为非奇异对角阵, 即

$$G_{KL}(s)=\begin{bmatrix}\frac{q_1(s)}{p_1(s)} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{q_p(s)}{p_p(s)}\end{bmatrix},\quad q_i(s)\neq 0, i=1,2,\cdots,p, \tag{5}$$

则称系统(1)能经状态反馈和输入满秩变换实现动态输入输出解耦

- 显然, 实现了动态输入输出解耦的系统(3), 由于其传递函数为非奇异对角阵, 则

  其第i个输出只依赖于第i个输入端子, 而不依赖于其他的输入端子

  这样系统的输入输出关系比较简单, 并且便于调整

(2) 闭环系统的传递函数与开环系统传递函数之间的关系

- 开环系统(1) 的传递函数为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B. \tag{6}$$

- 考察闭环系统(3) 的传递函数

$$\begin{aligned} G_{KL}(s) &= C[sI - (A + BK)]^{-1}BL, \\ &= C(sI - A)^{-1}[sI - (A + BK) + BK][sI - (A + BK)]^{-1}BL, \\ &= C(sI - A)^{-1}[I + BK[sI - (A + BK)]^{-1}]BL, \\ &= C(sI - A)^{-1}B[I + K[sI - (A + BK)]^{-1}]L, \\ &= C(sI - A)^{-1}B[I - K(sI - A)^{-1}B]^{-1}L. \end{aligned} \tag{7}$$

➥ 显然, 由(6), (7)可得

$$G_{KL}(s) = G(s)[I - K(sI - A)^{-1}B]^{-1}L \tag{8}$$

(3) 可解耦的条件

引理

引理7.8 传递函数$G_{KL}(s)$非奇异的必要条件为:

(1) C行满秩

(2) B列满秩

(3) $G(s)$各行非零

(3) 可解耦的条件

引理

引理7.8 传递函数$G_{KL}(s)$非奇异的必要条件为:

(1) C行满秩

(2) B列满秩

(3) $G(s)$各行非零

证明: 因为L为非奇异矩阵, 故若$G_{KL}(s)=G(s)\left[I-K(sI-A)^{-1}B\right]^{-1}L$为非奇异, 则

- 必有$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$为非奇异
- 基此, 即可得引理7.8的结论 ■

7.4.1 动态输入输出解耦

- 此外, 再由

$$
\begin{aligned}
(sI-A)^{-1} &= [s(I-\frac{A}{s})]^{-1} \\
&= \frac{1}{s}[I+\frac{A}{s}+\frac{A^2}{s^2}+\cdots] \\
&= \frac{I}{s}+\frac{A}{s^2}+\frac{A^2}{s^3}+\cdots, \quad \left|\lambda\left(\frac{A}{s}\right)\right|<1
\end{aligned} \tag{9}
$$

- 基于(9), 若令$C=\begin{bmatrix} C_1^T & C_2^T & \cdots & C_p^T \end{bmatrix}^T$, $C_i=\begin{bmatrix} c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{1\times n}$, 则可得$G(s)$的第$i$行为

$$
\begin{aligned}
G_i(s) &= C_i(sI-A)^{-1}B \\
&= C_i\left[\frac{I}{s}+\frac{A}{s^2}+\frac{A^2}{s^3}+\cdots\right]B, \quad |s|>|\lambda(A)|.
\end{aligned} \tag{10}
$$

➥ 若$G_{KL}(s)$的第i行不为0, 那么由(8)可知必有$G(s)$的第i行不为0, 从而有如下引理

引理

引理7.9 传递函数$G_{KL}(s)$的第i行不为0的必要条件为

$$C_iB,\ C_iAB,\ \cdots,\ C_iA^{n-1}B,\ i=1,2,\cdots,p \tag{11}$$

至少有一个不为0.

引理

引理7.9 传递函数$G_{KL}(s)$的第i行不为0的必要条件为

$$C_iB,\ C_iAB,\ \cdots,\ C_iA^{n-1}B,\ i=1,2,\cdots,p \tag{11}$$

至少有一个不为0.

- 基于引理7.9, 考察$C_iB,\ C_iAB,\ \cdots,\ C_iA^{n-1}B$, 设从左至右第$\sigma_i$个为最先不为0者, 即

$$\begin{aligned} &C_iB=0,\ C_iAB=0,\ \cdots,\ C_iA^{\sigma_i-2}B=0\\ &C_iA^{\sigma_i-1}B\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,p \end{aligned} \tag{12}$$

- 若记

$$E=\begin{bmatrix} C_1A^{\sigma_1-1}B\\ C_2A^{\sigma_2-1}B\\ \vdots\\ C_pA^{\sigma_p-1}B \end{bmatrix} \tag{13}$$

则, 可得如下引理

7.4.1 动态输入输出解耦

引理

引理7.10 传递函数$G_{KL}(s)$非奇异, 则E的各行非零.

引理

引理7.10 传递函数$G_{KL}(s)$非奇异, 则E的各行非零.

- 考察$G_i(s)$, 由(12)知

$$G_i(s) = C_i\left[\frac{A^{\sigma_i-1}}{s^{\sigma_i}} + \frac{A^{\sigma_i}}{s^{\sigma_i+1}} + \cdots\right]B,\ |s| > |\lambda(A)|, i = 1, 2, \cdots, p \tag{14}$$

则由σ_i定义, 可得

$$\begin{aligned}&\left(s^{\sigma_i} + \alpha_{i1}s^{\sigma_i-1} + \cdots + \alpha_{i\sigma_i}\right)G_i(s)\\ =\ & C_iA^{\sigma_i-1}B + C_i\left(A^{\sigma_i} + \alpha_{i1}A^{\sigma_i-1} + \cdots + \alpha_{i\sigma_i}I\right)(sI - A)^{-1}B,\\ & |s| > |\lambda(A)|, i = 1, 2, \cdots, p.\end{aligned} \tag{15}$$

- 若记

$$D = \begin{bmatrix} C_1(A^{\sigma_1} + \alpha_{11}A^{\sigma_1-1} + \cdots + \alpha_{1\sigma_1}I) \\ \vdots \\ C_p(A^{\sigma_p} + \alpha_{p1}A^{\sigma_p-1} + \cdots + \alpha_{p\sigma_p}I) \end{bmatrix} \tag{16}$$

7.4.1 动态输入输出解耦

- 则由(13), (15), (16)可推得

$$\begin{bmatrix} s^{\sigma_1}+\alpha_{11}s^{\sigma_1-1}+\cdots & & \\ & \ddots & \\ & & s^{\sigma_p}+\alpha_{p1}s^{\sigma_p-1}+\cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_1(s) \\ \vdots \\ G_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(s^{\sigma_1}+\alpha_{11}s^{\sigma_1-1}+\cdots\right)G_1(s) \\ \vdots \\ \left(s^{\sigma_p}+\alpha_{p1}s^{\sigma_p-1}+\cdots\right)G_p(s) \end{bmatrix}$$

$$= E + D(sI-A)^{-1}B$$

- 从而, 可知传递函数$G(s)$表示为

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\sigma_1}+\alpha_{11}s^{\sigma_1-1}+\cdots+\alpha_{1\sigma_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{\sigma_p}+\alpha_{p1}s^{\sigma_p-1}+\cdots+\alpha_{p\sigma_p}} \end{bmatrix} \times [E + D(sI-A)^{-1}B], \tag{17}$$

其中, $\alpha_{ij}, i=1,2,\cdots,p, j=1,2,\cdots,\sigma_i$为待定常数, 用以确定传递函数$G_{KL}(s)$的极点配置

7.4.1 动态输入输出解耦

下面考察矩阵E与传递函数$G_{KL}(s)$可解耦的关系

(i) 若矩阵E非奇异, 则取

$$L = E^{-1},\ K = -E^{-1}D, \tag{18}$$

则有

$$\begin{aligned}[I - K(sI - A)^{-1}B]^{-1}L &= [I + E^{-1}D(sI - A)^{-1}B]^{-1}E^{-1} \\ &= [E + D(sI - A)^{-1}B]^{-1}.\end{aligned} \tag{19}$$

➥ 由(8), (17), (19)即可推得传递函数$G_{KL}(s)$为

$$G_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^{\sigma_1} + \alpha_{11}s^{\sigma_1-1} + \cdots + \alpha_{1\sigma_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{\sigma_p} + \alpha_{p1}s^{\sigma_p-1} + \cdots + \alpha_{p\sigma_p}} \end{bmatrix} \tag{20}$$

即, 存在矩阵对(K, L), 使得传递函数$G_{KL}(s)$实现输入输出解耦

(ii) 若存在矩阵对(K, L), L非奇异, 使得$G_{KL}(s)$为非奇异对角阵, 这里不妨设(其中, $*$代表适当关于s的多项式)

$$G_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{*}{s^{d_1} + \beta_{11}s^{d_1-1} + \cdots + \beta_{1d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{*}{s^{d_p} + \beta_{p1}s^{d_p-1} + \cdots + \beta_{pd_p}} \end{bmatrix} \tag{21}$$

- 若令

$$W(s) = \begin{bmatrix} s^{\sigma_1} + \alpha_{11}s^{\sigma_1-1} + \cdots + \alpha_{1\sigma_1} & & \\ & \ddots & \\ & & s^{\sigma_p} + \alpha_{p1}s^{\sigma_p-1} + \cdots + \alpha_{p\sigma_p} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

则由(8), (17)推得

$$\begin{aligned} W(s)G_{KL}(s) &= W(s)G(s)[I - K(sI - A)^{-1}B]^{-1}L \\ &= [E + D(sI - A)^{-1}B][I - K(sI - A)^{-1}B]^{-1}L. \end{aligned} \tag{23}$$

- 对上式(23)两端，当$s \to \infty$时取极限，可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to\infty} W(s)G_{KL}(s) &= \lim_{t\to\infty}[E + D(sI - A)^{-1}B][I - K(sI - A)^{-1}B]^{-1}L \\
&= EL
\end{aligned}
\tag{24}
$$

- 再由(21)可知

$$
W(s)G_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{(s^{\sigma_1} + \alpha_{11}s^{\sigma_1 - 1} + \cdots + \alpha_{1\sigma_1})*}{s^{d_1} + \beta_{11}s^{d_1 - 1} + \cdots + \beta_{1d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{(s^{\sigma_p} + \alpha_{p1}s^{\sigma_p - 1} + \cdots + \alpha_{p\sigma_p})*}{s^{d_p} + \beta_{p1}s^{d_p - 1} + \cdots + \beta_{pd_p}} \end{bmatrix}
\tag{25}
$$

为对角形式

7.4.1 动态输入输出解耦

第7章

- 由上式(25)知，极限$\lim_{s\to\infty} W(s)G_{KL}(s)$必为对角形矩阵，不妨设为

$$\lim_{s\to\infty} W(s)G_{KL}(s) = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix}. \tag{26}$$

- 由(24), (26)推得

$$EL = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix}. \tag{27}$$

从而

$$E = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix} L^{-1}. \tag{28}$$

- 因为E的各行均不为零，从而$r_i, i = 1, 2, \cdots, p$均不为零

➥ 故E为非奇异矩阵

第7章
7.4 系统的输入输出解耦
7.4.1 动态输入输出解耦
7.4.2 稳态输入输出解耦

综合前述(i), (ii)的分析, 可得如下结论

定理

定理7.5 系统(1)(或(A, B, C))能动态输入输出解耦的充分必要条件为矩阵E为非奇异.

7.4.1 动态输入输出解耦

综合前述(i), (ii)的分析, 可得如下结论

定理

定理7.5 系统(1)(或(A, B, C))能动态输入输出解耦的充分必要条件为矩阵E为非奇异.

- 若设传递函数$G_{KL}(s)$为

$$G_{KL}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{r_{10}s^{q_1} + r_{11}s^{q_1-1} + \cdots + r_{1q_1}}{s^{d_1} + \beta_{11}s^{d_1-1} + \cdots + \beta_{1d_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{r_{p0}s^{q_p} + r_{p1}s^{q_p-1} + \cdots + r_{pq_p}}{s^{d_p} + \beta_{p1}s^{d_p-1} + \cdots + \beta_{pd_p}} \end{bmatrix} \tag{29}$$

其中, $r_{i0} \neq 0, i = 1, 2, \cdots, p$, 则由(25), (26)知必有

$$q_i + \sigma_i = d_i,\ i = 1, 2, \cdots, p. \tag{30}$$

- 若$q_i = 0$, 则$d_i = \sigma_i, i = 1, 2, \cdots, p$. 这说明闭环传递函数$G_{KL}(s)$最多能任意配置极点的个数为$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_p$

7.4.1 动态输入输出解耦

注: 从结论上看, 受控系统(A, B, C) 能否实现动态输出解耦, 完全决定于$\sigma_i, i = 1, 2, \cdots, p$和矩阵$E$ 的非奇异性

- 从表面上看, 系统的能控性在解耦过程中似乎没有起到什么作用, 但是, 从解耦后的系统具有任意期望的闭环极点而言, 能控性仍然是一个不可缺少的条件

7.4.1 动态输入输出解耦

注: 从结论上看, 受控系统(A, B, C) 能否实现动态输出解耦, 完全决定于$\sigma_i, i = 1, 2, \cdots, p$和矩阵$E$ 的非奇异性

- 从表面上看, 系统的能控性在解耦过程中似乎没有起到什么作用, 但是, 从解耦后的系统具有任意期望的闭环极点而言, 能控性仍然是一个不可缺少的条件

(4)解耦的算法

- 考察线性定常系统(1)(或(A, B, C))实现动态输入输出解耦, 并使闭环系统具有期望极点的算法

7.4.1 动态输入输出解耦

1. 计算σ_i和$C_iA^{\sigma_i-1}B, i = 1, 2, \cdots, p$
2. 判别E矩阵的非奇异性

$$E = \begin{bmatrix} C_1A^{\sigma_1-1}B \\ \vdots \\ C_pA^{\sigma_p-1}B \end{bmatrix}.$$

若E非奇异，则能解耦;若为奇异，则不能解耦

3. 根据指定的$G_{KL}(s)$的极点位置，由(20)确定$\alpha_{ij}, i = 1, 2, \cdots, p, j = 1, 2, \cdots, \sigma_j$
4. 计算E^{-1}和矩阵D

$$D = \begin{bmatrix} C_1(A^{\sigma_1} + \alpha_{11}A^{\sigma_1-1} + \cdots + \alpha_{1\sigma_1}I) \\ \vdots \\ C_p(A^{\sigma_p} + \alpha_{p1}A^{\sigma_p-1} + \cdots + \alpha_{p\sigma_p}I) \end{bmatrix}.$$

5. 取变换矩阵$L = E^{-1}, K = -E^{-1}D$，即可使闭环系统实现输入输出解耦并有期望极点

例7.4.1 设系统(A,B,C), 其中

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

能否找到K,L实现输入输出解耦? 若能, 找到K,L, 使闭环系统实现输入输出解耦, 并使闭环传递函数有极点$-1,-2$.

例7.4.1 设系统(A,B,C), 其中

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\-1&-2&-3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

能否找到K,L实现输入输出解耦? 若能, 找到K,L, 使闭环系统实现输入输出解耦, 并使闭环传递函数有极点$-1,-2$.

解: 容易计算得$rank[B\ AB]=3$, 故(A,B)能控

- 又由

$$C_1=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix},\ C_1B=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix},\ C_2B=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}$$

故$\sigma_1=\sigma_2=1,\ E=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$非奇异, 能找到$K,L$实现输入输出解耦

- 由闭环传递函数有极点$-1,-2$, 故

$$G_{KL}(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+2}\end{bmatrix}$$

$$s^{\sigma_1}+\alpha_{11}=s+\alpha_{11}=s+1,\quad\Rightarrow\quad\alpha_{11}=1$$

$$s^{\sigma_2}+\alpha_{21}=s+\alpha_{21}=s+2,\quad\Rightarrow\quad\alpha_{21}=2$$

- 由

$$D=\begin{bmatrix}C_1(A+\alpha_{11}I)\\ C_2(A+\alpha_{21}I)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix},$$

可得

$$L=E^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ K=-E^{-1}D=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

1 7.4 系统的输入输出解耦

- 7.4.1 动态输入输出解耦
- 7.4.2 稳态输入输出解耦

7.4.2 稳态输入输出解耦

(1) 问题的提出

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{31}$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$为状态, $u \in \mathbb{R}^p$为输入, $y \in \mathbb{R}^q$为输出, A, B, C 为相应维数的常阵

- 假定$q = p$

第7章
7.4 系统的输入输出解耦
7.4.1 动态输入输出解耦
7.4.2 稳态输入输出解耦

(1) 问题的提出

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{31}$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$为状态, $u \in \mathbb{R}^p$为输入, $y \in \mathbb{R}^q$为输出, A, B, C 为相应维数的常阵

- 假定$q = p$

定义

定义7.2 若存在K和L, L非奇异, 使得经由$u = Kx + Lv$与系统(31)构成的闭环系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + Bk)x + BLv, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{32}$$

定义

满足下面两个条件:

1. 闭环系统(32)特征根满足

$$Re\lambda_i(A+BK)<0, i=1,2,\cdots,n \tag{33}$$

   其中, $\lambda_i(\cdot)$ 表示矩阵的特征值

2. 对任一阶跃输入, 闭环的稳态输出$y(\infty)$与输入之间实现

$$y(\infty)=\lim_{t\to\infty}y(t)=\begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix} v \tag{34}$$

   其中, $R=diag\{r_1,\cdots,r_p\}$为非奇异常阵

则称系统(31)能经K,L实现稳态输入输出解耦

稳态输入输出的频域特点

- 闭环系统(32)的传递函数为

$$G_{KL}(s) = C[sI - (A + BK)]^{-1}BL. \tag{35}$$

- 由$v(t) = \begin{bmatrix} \beta_1 1(t) \\ \vdots \\ \beta_p 1(t) \end{bmatrix}$, 其中$1(t)$为单位阶跃函数, $Y(s) = G_{KL}(s)V(s)$得

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} y(t) &= \lim_{s\to 0} sG_{KL}(s)V(s) = \lim_{s\to 0} sG_{KL}(s)\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}\frac{1}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} G_{KL}(s)\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{36}$$

7.4.2 稳态输入输出解耦

- 由$\beta_1, \cdots, \beta_p$的任意性，可知

$$\lim_{s\to 0} G_{KL}(s) = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix} \tag{37}$$

- (37)说明系统(31)实现输入输出解耦，则$\lim_{s\to 0} G_{KL}(s)$必为非奇异对角矩阵

- 由$\beta_1,\cdots,\beta_p$的任意性，可知

$$\lim_{s\to 0} G_{KL}(s)=\begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix} \tag{37}$$

- (37)说明系统(31)实现输入输出解耦，则$\lim_{s\to 0} G_{KL}(s)$必为非奇异对角矩阵

(2)可解耦条件

定理

定理7.6 存在输入变换和状态反馈矩阵对(K,L)，其中L为非奇异，可使系统(31)实现稳态输入输出解耦的充分必要条件为

1. (A,B)能稳
2. 秩关系

$$rank\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}=n+p \tag{38}$$

7.4.2 稳态输入输出解耦

证明：由

$$\begin{bmatrix} A+BK & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ K & I_p \end{bmatrix} \tag{39}$$

及(38)知$\begin{bmatrix} A+BK & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$为非奇异矩阵

- 若$(A+BK)^{-1}$存在，则

$$\begin{aligned} rank\begin{bmatrix} A+BK & B \\ C & 0 \end{bmatrix} &= rank\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -C(A+BK)^{-1} & I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A+BK & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \\ &= rank\begin{bmatrix} A+BK & B \\ 0 & -C(A+BK)^{-1}B \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{40}$$

从而可得，$C(A+BK)^{-1}B$非奇异.

7.4.2 稳态输入输出解耦

首先, 考察充分性.

- 因为(A,B)能稳, 则一定存在矩阵K 使得$A+BK$ 稳定, 即

  $Re\lambda_i(A+BK)<0, i=1,2,\cdots,n$, 并且由此知$A+BK$ 非奇异

  则由(38)~(40)知$C(A+BK)^{-1}B$非奇异

- 又由(35)知

$$\lim_{s\to 0} G_{KL}(s) = -C(A+BK)^{-1}BL. \tag{41}$$

取

$$L = -[C(A+BK)^{-1}B]^{-1}R$$

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & & \\ & \ddots & \\ & & r_p \end{bmatrix}, \quad r_i \neq 0, i=1,2,\cdots,p \tag{42}$$

➥ 则有

$$\lim_{s\to 0} G_{KL}(s) = R \tag{43}$$

为非奇异对角阵. 故系统可由(K,L)实现稳态解耦

7.4.2 稳态输入输出解耦

其次, 考察必要性.

- 已知系统可实现稳态输入输出解耦, 显然, 由定义7.2知(A, B)能稳
- 又

$$\lim_{s\to 0} G_{KL}(s) = -C(A+BK)^{-1}BL$$

为非奇异对角阵, 及L非奇异, 知$C(A+BK)^{-1}B$ 非奇异

- 再由(40), (39), 即知有(38)成立. 定理结论得证 ■

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 155–164