现代控制理论
中国科学院大学
2020 年 11 月
陈帅华 202028014728006

第六次作业

5.10 解.**(1)** 已知传递函数 G(s)= $\frac{100}{s(s+5)} = \frac{100}{s^2+5}$，其不可约简，故易得其最小实现为：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 100 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 设反馈矩阵 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$，因此：

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1 & k_2 - 5 \end{bmatrix}$$

故而 $det(sI - (A + BK)) = (s + 5 - k_2)s = s^2 + 5s - k_2 s - k_1$
而题目中期望配置的极点为 $-20 \pm 20j$，因此可得:

$$\alpha(s) = s^2 + 40s + 800$$

故可得 $k_1 = -800, K_2 = -35$，即 $K = \begin{bmatrix} -800 & -35 \end{bmatrix}$

6.1 解: 已知:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

系统完全能观，因此可对系统设计全维状态观测器.

设 $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix}$, 所以:

$$A - GC = \begin{bmatrix} -g_1 & 1 \\ -g_2 & 0 \end{bmatrix}$$

所以:

$$det(sI - A + GC) = s^2 + g_1 s + g_2$$

又因为全阶观测器的特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -4$，所以可得:

$$det(sI - A + GC) = s^2 + 6s + 8$$

故而可得 $g_1 = 6.g_2 = 8$，即:

$$G = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

所以:

$$A - GC = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$$

因此系统的全阶观测器为:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

估计状态为:

$$\hat{x} = z$$

6.2 解：当 $C = \begin{bmatrix} 0 & I_q \end{bmatrix}$ 时，对于：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

有如下表达:

$$\dot{x_1} = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u$$
$$\dot{x_2} = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u$$

显然需要估计的状态为 x_1, 因此上式可重新写为:

$$\dot{x_1} = A_{11}x_1 + A_{12}y + B_1u$$
$$\dot{y} - A_{22}y - B_2u = A_{21}x_1$$

令 $\overline{u} = A_{12}y + B_1u, \widetilde{y} = \dot{y} - A_{22}y - B_2u$，可得如下式子:

$$\dot{x_1} = A_{11}x_1 + \overline{u}$$
$$\widetilde{y} = A_{21}x_1$$

令系统的全阶观测器为:

$$\dot{z} = (A_{11} - GA_{21}z) + \overline{u} + G\widetilde{y}$$

将 $\overline{u} = A_{12}y + B_1u, \widetilde{y} = \dot{y} - A_{22}y - B_2u$ 代入上式中，并将 $G\dot{y}$ 移到等式的右边，可得:

$$\dot{z} - G\dot{y} = (A_{11} - GA_{21})(z - Gy) + [(A_{11} - GA_{21})G + (A_{12} - GA_{22})]y + (B_1 - B_2G)u$$

令 $w = z - Gy$，即可得:

$$\dot{w} = (A_{11} - GA_{21})w + [(A_{11} - GA_{21})G + (A_{12} - GA_{22})]y + (B_1 - B_2G)u$$

对于本题

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = 2$$

系统完全能观，因此可对系统设计降维状态观测器. 系统降维观测器特征值为 $\lambda = -3$, 其对应的特征多项式为:

$$\overline{\alpha}(s) = s + 3$$

设 $G = g$, 所以 $A_{11} - GA_{21} = 1 - 2g$, 故而:

$$det(sI - A_{11} + GA_{21}) = s + 2g - 1$$

比较系数可得 $G = g = 2$，因而可得系统的降维观测器为:

$$\dot{w} = -3w - 5y - 3u$$

估计状态为:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix}$$

6.6 (1) 解：已知系统的传递函数为 $G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}=\frac{1}{s^3+3s^2+2s}$, 所以可得系统的状态空间表达为:

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}x$$

由题意可知降维观测器的特征值为 $\lambda_1=-5,\lambda_2=-5$，故其对应的特征多项式为:

$$\overline{\alpha}(s)=s^2+10s+25$$

设 $G=\begin{bmatrix}g_1\\g_2\end{bmatrix}$, 所以 $A_{22}-GA_{12}=\begin{bmatrix}-g_1&1\\-2-g_2&-3\end{bmatrix}$，故而:

$$det(sI-A_{22}+GA_{12})=s^2+(g_1+3)s+2+g_2$$

因此可得 $g_1=7,g_2=2$, 即 $G=\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$ 所以:

$$A_{22}-GA_{12}=\begin{bmatrix}-7&1\\-4&-3\end{bmatrix}$$

$$A_{21}-GA_{11}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$B_2-GB_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

由上述结果可得降维观测器为:

$$\dot{w}=\begin{bmatrix}-7&1\\-4&-3\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}-47\\-34\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u$$

估计状态为:

$$\hat{x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\7&1&0\\2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\w_1\\w_2\end{bmatrix}$$

(2) 闭环系统的期望极点为 $\lambda_1=-3,\lambda_{2,3}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 因此其闭环特征多项式为:

$$\alpha(s)=s^3+4s^2+4s+3$$

设反馈状态矩阵 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k_1 & k_2 - 2 & k_3 - 3 \end{bmatrix}$$

所以，$\alpha(s) = det(sI - A - BK) = s^3 + (3 - k_3)s^2 + (2 - k_2)s - k_1$
比较系数即可得 $K = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.
(3) 降维观测器的引入并不改变原状态反馈系统的传递函数，即:

$$G(s) = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} [sI - (A + BK)]^{-1} B$$

经过计算可得:

$$[sI - (A + BK)]^{-1} = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 4s + 3} \begin{bmatrix} s^2 + 4s + 4 & s + 4 & 1 \\ -3 & s^2 + 4s & s \\ -3s & -4s - 3 & s^2 \end{bmatrix}$$

因此可以计算出整个闭环系统的传递函数为:

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 4s^2 + 4s + 3}$$

6.7 解:

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 4$$

系统完全能观，因此可对系统设计降维状态观测器.

(1) 设计降维观测器

由题可知降维观测器的特征值为 $s_1 = -3, s_{2,3} = -3 \pm 2j$, 故其对应的特征多项式为:

$$\overline{\alpha}(s) = s^3 + 9s^2 + 31s + 39$$

设 $G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix}$, 所以 $A_{22} - GA_{12} = \begin{bmatrix} -g_1 & -1 & 0 \\ -g_2 & 0 & 1 \\ -g_3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$，故而:

$$det(sI - A_{22} + GA_{12}) = s^3 + (g_1)s^2 - (5 + g_2)s - g_3 - 5g_1$$

比较系数即可得 $G = \begin{bmatrix} 9 \\ -36 \\ -84 \end{bmatrix}$, 所以:

$$A_{22} - GA_{12} = \begin{bmatrix} -9 & -1 & 0 \\ 36 & 0 & 1 \\ 84 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} - GA_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 - GB_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

由上述结果可得降维观测器为:

$$\dot{w} = \begin{bmatrix} -9 & -1 & 0 \\ 36 & 0 & 1 \\ 84 & 5 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} -45 \\ 240 \\ 576 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} u$$

估计状态为:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 \\ -36 & 0 & 1 & 0 \\ -84 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

(2) 设计系统的状态反馈:

设状态反馈矩阵 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix}$, 所以:

$$A + BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3 - 1 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2k_1 & -2k_2 & 5 - k_3 & -2k_4 \end{bmatrix}$$

所以 $\alpha(s) = det(sI - A - BK) = s^4 + (2k_4 - k_2)s^3 + (2k_3 - 5)s^2 + 3k_2 s$ 由题意可知期望的闭环传递函数极点为 $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = -1 \pm j, \lambda_4 = -2$, 所以 $\alpha(s) = s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 10s + 4$ 经过比较系数可得:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{49}{6} & \frac{25}{6} \end{bmatrix}$$

因此可得输出动态反馈为:

$$u = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{49}{6} & \frac{25}{6} \end{bmatrix} \hat{x} + v$$