

一阶倒立摆的 LQR 稳定控制研究

张晓荣 李永红

(中北大学 信息与通信工程学院, 山西 太原 030051)

【摘要】倒立摆是一个典型的快速、多变量、非线性、绝对不稳定系统,对倒立摆系统的稳定性研究在理论上和方法上具有深远的意义。本文首先叙述了对倒立摆系统稳定性研究的意义,综述了倒立摆的研究现状。其次着重介绍了 LQR 控制的相关理论,设计出一阶倒立摆系统的控制器。然后,对设计出的控制器进行 Matlab/Simulink 仿真并将仿真结果应用于固高倒立摆实时控制系统中,比较实验结果,最后得出结论。

【关键词】LQR 控制; MATLAB/Simulink 仿真; 实时控制

Study of LQR Stability Control in an Inverted Pendulum

ZHANG Xiao-rong LI Yong-hong

(School of Information and Communication Engineering, North University of China, Taiyuan Shanxi, 030051)

【Abstract】The inverted pendulum is a kind of typical fast system with multi-variables, non-linearity, strong coupling and instinct instability. It's very important for the profound significance of stability study of the inverted pendulum both in theory and practice. In this paper, the significance of there searching on the stability and the study on current conditions of inverted pendulum has been described generally at the first. After that, it introduces the theory of LQR control in details and designs the controller for the inverted pendulum system. Then, according to the controller designed by the controlling theories, do Matlab/Simulink. At last the result is used in the real-time controlling on the Googol inverted pendulum experiment equipment and the final conclusion can be made after the real-time experiment results.

【Key words】LQR; MATLAB/Simulink; Real-time control

0 引言

倒立摆与自动控制技术研究密切相关,在控制理论发展的过程中,某一理论的正确性及实际应用中的可行性不仅需要仿真来验证,也需要一个按其理论设计的控制器去控制一个典型对象来验证,倒立摆就是这样一个常用的被控制对象。

控制器的设计是倒立摆系统的核心内容,因为倒立摆是一个绝对不稳定的系统,为使其保持稳定并且可以承受一定的干扰,需要给系统设计控制器,最优控制理论(LQR)是现在比较流行的控制方法,而且可以达到比较理想的控制效果。

本文主要工作是将 LQR 控制应用到倒立摆系统上,通过使用 Matlab 软件对一级倒立摆系统的仿真,验证了 LQR 具有抗干扰能力较强,反应时间快,超调量小,鲁棒性较好的特点。

1 倒立摆数学模型

在此我们采用牛顿-欧拉方法建立直线型一级倒立摆系统的数学模型,在忽略了空气阻力和各种摩擦之后,可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统,我们不妨做以下假设(小车质量 M 、摆杆质量 m 、小车摩擦系数 b 、摆杆转动轴心到杆质心的长度 l 、加在小车上的力 F 、小车位置 x)^[1]。

最后得出的数学模型:

设 $X = [x, \dot{x}, \phi, \dot{\phi}]^T, u' = \ddot{x}$ 则有:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u'$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u'$$

2 直线一阶倒立摆的 LQR 控制仿真

2.1 LQR 控制原理介绍

线性控制最优理论 LQR 理论,由系统方程

$$\dot{X} = AX + Bu$$

确定下列最佳控制向量的矩阵 K :

$$U(t) = -K^* X(t)$$

使得性能指标达到最小值:

$$J = \int_0^{\infty} (X^* Q X + u^* R u) dt$$

式中 Q ——正定(或正半定)厄米特或实对称阵^[2]

R ——为正定厄米特或实对称阵

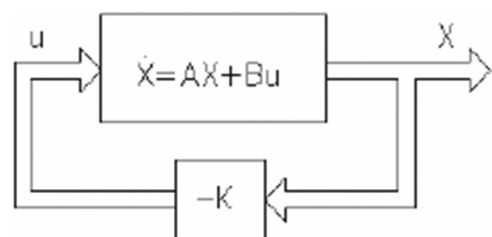


图 1

方程右端第二项是考虑到控制能量的损耗而引进的,矩阵 Q 和 R 确定了误差和能量损耗的相对重要性。并且假设控制向量 $u(t)$ 是无约束的。

对线性系统:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ Y = CX \end{cases}$$

根据期望性能指标选取 Q 和 R ,利用 MATLAB 命令 `lqr` 就可以得到反馈矩阵 K 的值。

$$K = \text{lqr}(A, B, Q, R)$$

2.2 LQR 设计及仿真

下面我们针对直线型一级倒立摆系统应用 LQR 法设计与调节控制器,控制摆杆保持竖直向上平衡的同时,跟踪小车的位置。

设计控制器使得当给系统施加一个阶跃输入时,摆杆会摆动,然后仍然回到垂直位置,小车可以到达新的指定位置。

假设全状态反馈可以实现(四个状态量都可测),找出确定反馈控制规律的向量 K 。在 Matlab 中得到最优控制器对应的 K 。`Lqr` 函数允许你选择两个参数—— R 和 Q ,这两个参数用来平衡输入量和状态量的权重。最简单的情况是假设 $R=I, Q=C^*C$ 。当然,也可以通过改变 Q 矩阵中的非零元素来调节控制器以得到期望的响应。

$$Q = C^* C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中, Q_{11} 代表小车位置的权重,而 Q_{33} 是摆杆角度的权重,输入的

权重 R 是 1。

通过 Matlab 仿真,得到如下几组图像:

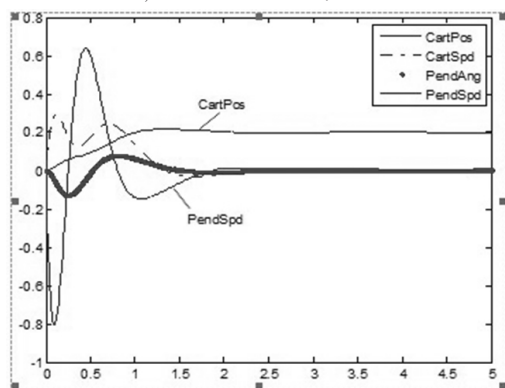


图 2 参数 $Q_{11}=1000, Q_{33}=500$ 的图像

计算得出 $K=31.6228, 1.4046, -22.3514, 0.1188$

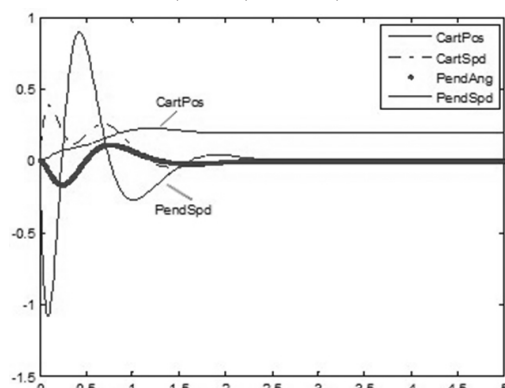


图 3 参数: $Q_{11}=2000, Q_{33}=500$ 的图像

计算得出 $K=44.7214, 17.0411, -22.0184, 0.7188$

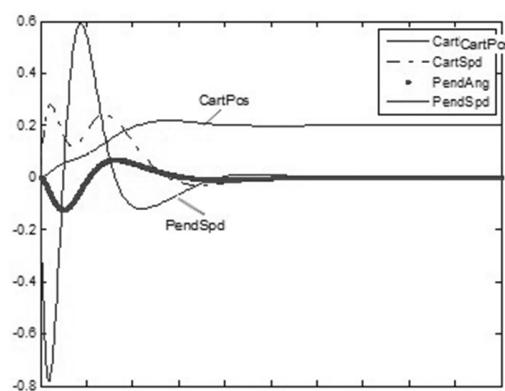


图 4 取 $Q_{11}=1000, Q_{33}=600$ 的图像

计算得出 $K=31.6228, 14.8750, -24.4854, 0.1261$

结论:

- 1) 三组实验都能同时控制小车位移和摆杆的角度,最终小车和摆杆都能稳定下来。
- 2) 由图 2,3 比较得出增大 Q_{11} ,系统的调整时间缩短,系统响应加快,但是系统的超调量增大。
- 3) 由图 2,4 比较得出增大 Q_{33} ,系统的超调量减小,但是系统的调整时间变长。
- 4) 另外,通过实验数据还可得出,参数 R 与 Q_{33} 的控制效果基本

一致。

5) 实验过程也告诉我们:要想得到理想的控制效果,必须要使 Q_{11}, Q_{33}, R 三个参数同时适当的变化。单靠改变某个参数万万不行的。

3 倒立摆系统的 LQR 实时控制

在固高实验平台上进行 LQR 实时控制,得到几组实时图像:

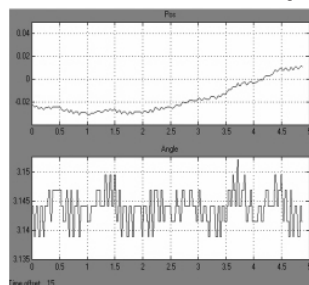


图 5 未加扰动

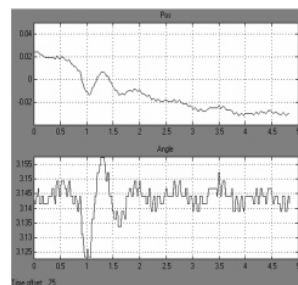


图 6 加入轻微扰动

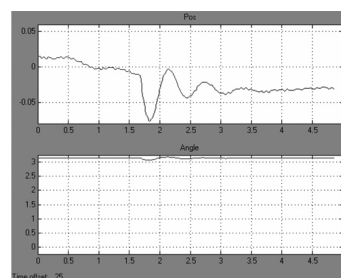


图 7 加入较大扰动

三组图像比较得出:

- 3.1 小车基本能稳定在一个位置,不会有太大的漂移。即使受到外界干扰,小车也很快能够稳定下来。摆杆也相对稳定,没有太大的抖动。
- 3.2 LQR 实时控制有比较好的控制效果,既能控制小车的位移,又能控制摆杆的角度。基本与 Matlab 仿真的结果相吻合。因此,LQR 控制法是值得我们提倡和进一步研究的。
- 3.3 图 6、图 7 的尖角处为受到外界干扰的时刻,小车会有轻微的漂移,但小车很快就会稳定下来。
- 3.4 实时控制也告诉我们:Matlab 仿真能达到的控制效果,由于现实条件的制约,实时控制未必能达到。

4 总结

本文以直线一级倒立摆为研究对象,在建立了其数学模型的基础上,从 LQR 控制理论出发分析系统的相关性能。从 MATLAB 仿真结果可知,LQR 控制能很好的控制小车位移和摆杆角度,控制效果明显优于频率控制。

目前,倒立摆研究理论已经日趋成熟和完善,它在机器人控制技术、人工智能、导弹拦截控制系统、航空对接控制技术、火箭发射中的垂直度控制、卫星飞行中的姿态控制和一般工业应用等方面具有广阔的利用开发前景。因此倒立摆系统的研究重要性可想而知。我相信,在各位控制研究者的共同努力下,倒立摆理论一定会有更大的突破。

【参考文献】

- [1] 固高科技有限公.倒立摆与自动控制原理实验[Z],2005.
- [2] 胡寿松.自动控制原理[M].北京:科学出版社,2001.
- [3] 吾晓燕,张双选.MATLAB 在众多控制中的应用[M].西安:西安电子科技大学出版社,2006.

[责任编辑:周娜]