陈帅平
202028014728006

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

11. 试证：系统 (A, B) 能控的充要条件是：若 $AX = XA$，$XB = 0$，则必有 $X = 0$

证明：① 首先证明必要性：

已知系统 (A, B) 能控；

由已知条件 $XB = 0$，$\therefore AXB = 0$，

且 $AX = XA$，$\therefore AXB = XAB = 0$

同理可得 $A^2XB = XA^2B = 0$，$XA^3B = 0$，$\cdots$ $XA^{n-1}B = 0$

由系统 (A, B) 能控可知，能控性矩阵 $Q_c = [B, AB, \cdots A^{n-1}B]$ 满秩．

$\therefore X = 0$，故必要性得证．

② 其次证明充分性，

若 $AX = XA$，$XB = 0$，则 $X = 0$．

$\therefore$ 有 $X[B, AB, \ A^{n-1}B] = 0$　$\therefore [XB, XAB, \cdots XA^{n-1}B] = [0, 0, \cdots 0]$，$X = 0$

故有 $\mathrm{rank}[B, AB, \cdots A^{n-1}B] = n$．

$\therefore$ 系统 (A, B) 能控．

年　月　日　第　页

扫描全能王 创建

陈帅平
715班
2020280147280006

14. 试证明系统$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right)$能控的充要条件是：$(A,B)$能控且$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$行满秩。

证明：①首先证明充分性。

已知(A,B)能控，且$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$行满秩。

对于矩阵$\begin{bmatrix} sI-A & 0 & B \\ -C & sI & 0 \end{bmatrix}$，

当$s=0$时，则为$\begin{bmatrix} -A & 0 & B \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix}$，行满秩。

当$s\neq 0$时，则为$\begin{bmatrix} sI-A & 0 & B \\ -C & sI & 0 \end{bmatrix}$，行满秩。

故而$\forall s\in C$，则有系统$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right)$能控。

②证明必要性。

已知系统$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right)$能控。

故而$\begin{bmatrix} sI-A & 0 & B \\ -C & sI & 0 \end{bmatrix}$行满秩。

则$\forall s\in C$，有$[sI-A, B]$行满秩，故而(A,B)能控。

当$s=0$时有$\begin{bmatrix} -A & 0 & B \\ -C & 0 & 0 \end{bmatrix}$行满秩，即$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$行满秩。

综上所述，系统$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\right)$能控的充要条件为$(A,B)$能控且$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}$行满秩。

陈帅李
7心班
202028014728006

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

20. 设系统 $\dot{x}=Ax+Bu$ 为不完全能控，取 $T=[T_1, T_2]$ 非奇异，T_1 的列构成 X_C 的基底，$\hat{A}=T^{-1}AT$，$\hat{B}=T^{-1}B$.

(1) 试证明：$x=T\hat{x}$ 变换将 $X_C[A,B]$ 映照到 $X_C[\hat{A},\hat{B}]$

证明：$\dim X_C[A,B]=\dim X_C[\hat{A},\hat{B}]=n_1$

$\forall x_0 \in X_C[A,B]$，由 $x_0=T\hat{x}_0$ 有 $\hat{x}_0=T^{-1}x_0$

其中 $T^{-1}=\begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix}$，$F_2$ 各列属于 X_{NC}.

$\hat{x}_0=T^{-1}x_0=\begin{bmatrix} F_1^T x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$

由 $X_C[\hat{A},\hat{B}]=\operatorname{span}\begin{bmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{bmatrix}$，可得 $\hat{x}_0 \in X_C[\hat{A},\hat{B}]$

故而 $X_C[\hat{A},\hat{B}]=\{x_0 \mid x_0=T\hat{x}_0,\ x_0\in X_C[A,B]\}$

(2) 举例说明此变换 $x=T\hat{x}$ 不将 $X_{NC}[A,B]$ 映照到 $X_{NC}[\hat{A},\hat{B}]$，

解：$A=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

则 $X_C[A,B]=\operatorname{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，　$X_{NC}[A,B]=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

选取一个与 $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 线性无关的列 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

则 $T=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，　故 $T^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore \hat{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

$\hat{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\therefore X_C[\hat{A},\hat{B}]=\operatorname{span}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，　$X_{NC}[\hat{A},\hat{B}]=\operatorname{span}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

由 $x=T\hat{x}$　$\therefore \hat{x}=T^{-1}x=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\cdot X_{NC}[A,B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}\notin X_{NC}[\hat{A},\hat{B}]$

陈帅平
715班
202028014728006

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

(3) 若 $T=[T_1, T_2]$，T_1 各列构成 X_c 的基底，T_2 的列构成 X_{NC} 的基底，$x=T\hat{x}$ 将 $X_{NC}[A,B]$ 映照到 $X_{NC}[\hat{A},\hat{B}]$.

解：$T=[T_1\ \ T_2]$　$T_1 \in X_c$　$T_2 \in X_{NC}$，$x=T\hat{x}$

$T^{-1}=\begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix}$

而 $T^{-1}T=I$，可得 $F_1 \in X_c$，$F_2 \in X_{NC}$

则 $\hat{x} \in X_{NC}$．由 $x=T\hat{x}$，有 $\hat{x}=T^{-1}x=\begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} x=\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^T x \end{bmatrix}$

故而 $\hat{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ F_2^T x \end{bmatrix} \in X_{NC}[\hat{A},\hat{B}]$，

$\therefore X_{NC}[\hat{A}\ \hat{B}]=\{\hat{x} \mid x=T\hat{x},\ \hat{x} \in X_{NC}[A,B]\}$

年　月　日　第　页

陈坤华

2020280147280006

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

22、求出下列单输入系统的能控规范型及变换阵

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}x$$

解: $A=\begin{bmatrix}-1&-2&-2\\0&-1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0&1&1\end{bmatrix}$

故该单输入系统的特征多项式为:

$$\alpha(s)=\det(sI-A)$$

$$=\det\left(\begin{bmatrix}s+1&2&2\\0&s+1&-1\\-1&0&s-1\end{bmatrix}\right)$$

$$=s^3+s^2+s+3$$

$\beta_2=cb=1$ $\quad\beta_1=cAb+a_2cb=5$

$\beta_0=cA^2b+a_2cAb+a_1cb=6.$

故而系统的能控规范型为:

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&-1&-1\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1&5&6\end{bmatrix}\bar{x}$$

而变换阵 $P=\begin{bmatrix}A^2b&Ab&b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\a_2&1&0\\a_1&a_2&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-4&-4&2\\2&1&0\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$\therefore$ 变换矩阵 $P=\begin{bmatrix}-6&-2&2\\3&1&0\\3&4&1\end{bmatrix}$

年 月 日 第 页