1、复习理解课本中最佳陷波滤波器进行图像恢复的过程，请推导出 w(x,y)最优解的计算过程，即从公式

$$\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial\omega(x,y)}=0$$

到

$$\omega(x,y)=\frac{\overline{\eta(x,y)g(x,y)}-\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)}{\overline{\eta^2}(x,y)-\overline{\eta}^2(x,y)}$$

的推导过程。

解：已知$\sigma^2(x,y)$的公式如下：

$$\sigma^2(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}([g(x+s,y+t)-w(x,y)\eta(x+s,y+t)]-[\overline{g}(x,y)-w(x,y)\overline{\eta}(x,y)])^2$$

对上式整理如下：

$$\sigma^2(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}(g(x+s,y+t)-\overline{g}(x,y)+w(x,y)(\overline{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t)))^2$$

我们要求解 $\sigma^2(x,y)$ 对 w(x,y) 的偏导数，由于 $g(x+s,y+t)-\overline{g}(x,y)$ 和 $\overline{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t)$ 与 w(x,y) 无关，因此我们令 $g(x+s,y+t)-\overline{g}(x,y)$ =m，$\overline{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t)$ =n。

故而我们可将$\sigma^2(x,y)$整理如下:

$$\sigma^2(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}(m+w(x,y)n)^2$$

因此：

$$\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial w(x,y)}=\frac{\partial}{\partial w}(\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}(m+w(x,y)n)^2)$$

$$\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial w(x,y)}=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}2(m+w(x,y)n)n$$

由于$\frac{\partial\sigma^2(x,y)}{\partial w(x,y)}=0$，因此可得上式的解为：

$$2(m+w(x,y)n)n=0$$

$$w(x,y)=-\frac{m}{n}$$

$$\therefore w(x,y)=-\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{g(x+s,y+t)-\overline{g}(x,y)}{\overline{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t)}$$

$$w(x,y)=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{\overline{g}(x,y)-g(x+s,y+t)}{\overline{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t)}$$

令分子分母同时乘以$\overline{\eta}(x,y)+\eta(x+s,y+t)$，可得：

$$\begin{aligned}w(x,y)&=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{(\overline{g}(x,y)-g(x+s,y+t))(\overline{\eta}(x,y)+\eta(x+s,y+t))}{(\overline{\eta}(x,y)-\eta(x+s,y+t))(\overline{\eta}(x,y)+\eta(x+s,y+t))}\\&=\frac{1}{(2a+1)(2b+1)}\sum_{s=-a}^{a}\sum_{t=-b}^{b}\frac{(\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)+\overline{g}(x,y)\eta(x+s,y+t)-g(x+s,y+t)\overline{\eta}(x,y)-g(x+s,y+t)\eta(x+s,y+t))}{(\overline{\eta}^{2}(x,y)-\eta^{2}(x+s,y+t))}\end{aligned}$$

在上式中，两个求和符号进行求和运算后再除以(2a+1)(2b+1)，就相当于求均值，故而上式可化简为：

$$w(x,y)=\frac{(\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)+\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)-\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)-\overline{g(x,y)\eta(x,y)})}{(\overline{\eta}^{2}(x,y)-\overline{\eta^{2}}(x,y))}$$

$$w(x,y)=\frac{(\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y)-\overline{g(x,y)\eta(x,y)})}{(\overline{\eta}^{2}(x,y)-\overline{\eta^{2}}(x,y))}=\frac{(\overline{g(x,y)\eta(x,y)}-\overline{g}(x,y)\overline{\eta}(x,y))}{(\overline{\eta^{2}}(x,y)-\overline{\eta}^{2}(x,y))}$$

因此题目中要求的内容得证。