第2章　线性定常系统的能控性

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

- 能控性和能观性(对能观性, 将在第4章讨论)是系统的两个基本特性
    - 随着状态空间描述的引入, 卡尔曼(R.E.Kalman)在20世纪60年代初首先提出和研究了能控性和能观性这两个重要概念. 系统和控制理论的发展表明, 这两个概念对于控制和估计问题的研究有着极其重要的意义
- 在本章中, 讨论限于线性定常系统的能控性
    - 首先, 对能控性进行研究, 给出能控性定义及其判别条件
    - 其次, 将讨论规范型, 结构分解等对状态反馈设计而言十分基本的内容

2.1.1 问题的提出

- 考虑系统的状态空间描述, 输入为系统的外部变量, 状态变量是系统的内部变量
  - 系统的运动特性在初始状态已知的条件下, 完全取决于系统的控制输入
- 系统的能控性所要研究的内容:
  - 能否通过系统的输入来影响系统的状态
  - 如果系统的每个状态变量的运动都可由输入来影响和控制, 使得经有限时间区间由任意始点到达原点, 就称系统是能控的, 或者是状态能控的. 否则, 就称系统是不完全能控的

➥ 下面我们通过例子来直观考察一下系统的能控性

例2.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

例2.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

- 将其表示为标量方程组的形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 2u. \end{aligned}$$

例2.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$(a)\quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

- 将其表示为标量方程组的形式:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + u, \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 2u. \end{aligned}$$

- 直接写出其运动方程可知,状态变量x_1, x_2都可通过选择输入u而由初始点$x_1(0), x_2(0)$在给定有限时刻$T > 0$达到原点$x_1(T) = 0, x_2(T) = 0$

例2.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$(a)\quad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u$$

- 将其表示为标量方程组的形式：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_1+u,\\ \dot{x}_2 &= -5x_2+2u.\end{aligned}$$

- 直接写出其运动方程可知，状态变量x_1, x_2都可通过选择输入u而由初始点$x_1(0), x_2(0)$在给定有限时刻$T>0$达到原点$x_1(T)=0, x_2(T)=0$
- 因而，系统完全能控

2.1.1 问题的提出

- 若给定系统的状态空间描述为

$$(b) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

2.1.1 问题的提出

➥ 若给定系统的状态空间描述为

$$(b)\quad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u$$

- 则将其表示为标量方程组形式:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_1,\\ \dot{x}_2 &= -5x_2+2u.\end{aligned}$$

- 若给定系统的状态空间描述为

$$(b)\quad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u$$

- 则将其表示为标量方程组形式:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_1,\\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 2u.\end{aligned}$$

- 无论输入u如何选取, 对状态x_1没有影响, 对状态x_2可在有限时间区间$[0, T]$上从初始点$x_2(0)$到达原点$x_2(T) = 0$

- 若给定系统的状态空间描述为

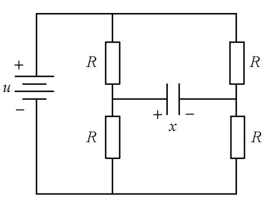
$$(b)\quad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}u$$

- 则将其表示为标量方程组形式：

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_1,\\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 2u.\end{aligned}$$

- 无论输入u如何选取，对状态x_1没有影响，对状态x_2可在有限时间区间$[0, T]$上从初始点$x_2(0)$到达原点$x_2(T) = 0$
- 故，系统为不完全能控的

例2.1.2 考虑图2.1所示的电路. 系统的状态变量为电容端电压$x(t)$, 输入为电源$u(t)$



例2.1.2 考虑图2.1所示的电路. 系统的状态变量为电容端电压$x(t)$, 输入为电源$u(t)$

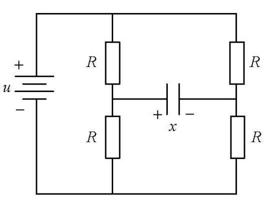


图2.1 不能控电路

- 若初始状态$x(0) = 0$, 不管输入$u(t)$ 是什么, 对所有的$t \geqslant 0$, 恒有$x(t) = 0$, 即x 不受$u(t)$ 的影响. 此表明, 电路是状态不能控的

例2.1.2 考虑图2.1所示的电路. 系统的状态变量为电容端电压$x(t)$, 输入为电源$u(t)$

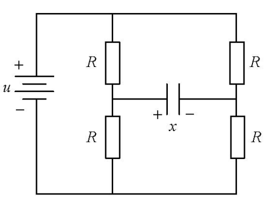


图2.1 不能控电路

- 若初始状态$x(0) = 0$, 不管输入$u(t)$ 是什么, 对所有的$t \geqslant 0$, 恒有$x(t) = 0$, 即x 不受$u(t)$ 的影响. 此表明, 电路是状态不能控的

注: 上述的例子和说明, 是对系统能控性的直观了解. 为了揭示能控性的本质属性, 下面介绍能控性的相关定义

2.1.2 能控性定义

- 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,A, B分别为$n \times n, n \times p$的实常阵

2.1.2 能控性定义

- 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,A, B分别为$n\times n, n\times p$的实常阵

定义

定义2.1 对于系统(1), 若给定非零初始状态x_0, 及有限时刻$T > 0$, 存在控制$u(t)$, 使得经$u(t)$作用在$[0, T]$时间段将自x_0出发的系统轨线导引到$x(T) = 0$, 则称x_0为能控状态.

- 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,A, B分别为$n \times n, n \times p$的实常阵

定义

定义2.1 对于系统(1), 若给定非零初始状态x_0, 及有限时刻$T > 0$, 存在控制$u(t)$, 使得经$u(t)$作用在$[0, T]$时间段将自x_0出发的系统轨线导引到$x(T) = 0$, 则称x_0为能控状态.

定义

定义2.2 对于系统(1), 若状态空间中所有的非零状态都是能控的, 则称系统(1) (或系统(A, B))是（完全）能控的.

2.1.2 能控性定义

定义

定义2.3 对于系统(1), 若状态空间中存在一个或一些非零状态是不能控的, 则称系统(1) 是不完全能控的. 若所有非零状态都是不能控的, 则称系统(1)是完全不能控的.

定义

定义2.3 对于系统(1), 若状态空间中存在一个或一些非零状态是不能控的, 则称系统(1) 是不完全能控的. 若所有非零状态都是不能控的, 则称系统(1)是完全不能控的.

注1: 在以上定义中, 都规定为由非零状态转移到零状态

- 如果是由零状态达到非零状态则称为状态能达的
- 对于线性定常系统(1), 能控性和能达性是等价的; 而对于线性定常离散系统, 两者不等价

2.1.2 能控性定义

定义

定义2.3 对于系统(1), 若状态空间中存在一个或一些非零状态是不能控的, 则称系统(1) 是不完全能控的. 若所有非零状态都是不能控的, 则称系统(1)是完全不能控的.

注1: 在以上定义中, 都规定为由非零状态转移到零状态

- 如果是由零状态达到非零状态则称为状态能达的
- 对于线性定常系统(1), 能控性和能达性是等价的; 而对于线性定常离散系统, 两者不等价

注2: 另外, 对于一个物理可实现的系统, 系统能控的概率几乎等于1, 系统不完全能控只是一种"奇异"的情况

考虑系统(1), 其状态运动轨线为

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \qquad (2)$$

2.1.3 能控子空间与不能控子空间

考虑系统(1), 其状态运动轨线为

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \tag{2}$$

- 根据定义2.1, 若$x(0) = x_0$为能控状态, 则存在控制$u(t)$使得

$$0 = x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \tag{3}$$

考虑系统(1), 其状态运动轨线为

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \tag{2}$$

- 根据定义2.1, 若$x(0) = x_0$为能控状态, 则存在控制$u(t)$使得

$$0 = x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \tag{3}$$

- 即, 有

$$x_0 = -\int_0^T e^{-At}Bu(t)dt. \tag{4}$$

考虑系统(1), 其状态运动轨线为

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \tag{2}$$

- 根据定义2.1, 若$x(0) = x_0$为能控状态, 则存在控制$u(t)$使得

$$0 = x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \tag{3}$$

- 即, 有

$$x_0 = -\int_0^T e^{-At}Bu(t)dt. \tag{4}$$

➥ 根据(4)的结论, 若x_1, x_2为能控状态, 则有$u_1(t), u_2(t)$存在, 使

$$x_1 = -\int_0^T e^{-At}Bu_1(t)dt, \quad x_2 = -\int_0^T e^{-At}Bu_2(t)dt, \tag{5}$$

- 则由(5), 进一步可得

$$x_1 + x_2 = -\int_0^T e^{-At} B(u_1(t) + u_2(t))dt, \tag{6}$$

$$kx_1 = -\int_0^T e^{-At} B(ku_1(t))dt, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

- 则由(5), 进一步可得

$$x_1 + x_2 = -\int_0^T e^{-At}B(u_1(t) + u_2(t))dt, \tag{6}$$

$$kx_1 = -\int_0^T e^{-At}B(ku_1(t))dt, \quad k \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

➥ 由(6), (7)可以看出

- 系统(1)的能控状态的全体再添上零向量构成一线性空间, 它是n维欧氏空间的子空间, 称其为能控子空间, 记为X_C
- 能控子空间的正交补空间称为不能控子空间, 记为X_{NC}
- 且, 有$\mathbb{R}^n = X_C \oplus X_{NC}$

2.1.3 能控子空间与不能控子空间

- 对于能控子空间X_C和不能控子空间X_{NC}, 我们有下面结论

- 对于能控子空间X_C和不能控子空间X_{NC}, 我们有下面结论

定理

定理2.1 系统(1)的不能控子空间X_{NC}为

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T] \tag{8}$$

的常解空间.

- 对于能控子空间X_C和不能控子空间X_{NC}, 我们有下面结论

定理

定理2.1 系统(1)的不能控子空间X_{NC}为

$$\alpha^T e^{-At} B = 0,\ t \in [0, T] \tag{8}$$

的常解空间.

定理2.1的结论等价于

1. 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α使得式(8)成立
2. 若α使得式(8)成立, 则$\alpha \in X_{NC}$

➥ 为此, 考虑能控性定义2.1可知, 若$x(0) = x_0$为能控状态, 则存在$T > 0$和控制$u(t)$满足式(4), 即$x_0 = -\int_0^T e^{-At} Bu(t)dt$

证明　首先, 设α为X_{NC}中的任一元

证明 首先, 设α为X_{NC}中的任一元

- 由X_{NC}的定义, α与任意能控状态正交, 而能控状态x_0与控制$u(t)$之间满足(4), 故有

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} B u(t) dt = 0. \tag{9}$$

证明 首先, 设α为X_{NC}中的任一元

- 由X_{NC}的定义, α与任意能控状态正交, 而能控状态x_0与控制$u(t)$之间满足(4), 故有

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} Bu(t)dt = 0. \tag{9}$$

- 特别地, 若取

$$u^* = (e^{-At}B)^T \alpha, \tag{10}$$

则由此构成能控状态x^*为

$$x^* = -\int_0^T e^{-At} Bu^* dt. \tag{11}$$

2.1.3 能控子空间与不能控子空间

证明 首先, 设α为X_{NC}中的任一元

- 由X_{NC}的定义, α与任意能控状态正交, 而能控状态x_0与控制$u(t)$之间满足(4), 故有

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} Bu(t)dt = 0. \tag{9}$$

- 特别地, 若取

$$u^* = (e^{-At}B)^T \alpha, \tag{10}$$

则由此构成能控状态x^*为

$$x^* = -\int_0^T e^{-At} Bu^* dt. \tag{11}$$

- 又因为α与x^*正交, 故

$$\begin{aligned} 0 = \alpha^T \int_0^T e^{-At} Bu^* dt &= \int_0^T \alpha^T e^{-At} BB^T e^{-A^T t} \alpha dt \\ &= \int_0^T \|\alpha^T e^{-At} B\|^2 dt. \end{aligned} \tag{12}$$

- 由上式(12), 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{13}$$

即, 可得α为方程(8)的常解

- 由上式(12), 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{13}$$

即, 可得α为方程(8)的常解

反之, 若α为方程(8)的常解, 即则有$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T]$

- 由上式(12), 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{13}$$

即, 可得α为方程(8)的常解

反之, 若α为方程(8)的常解, 即则有$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T]$

- 那么, 对任意$x_0 \in X_C$, 有

$$\begin{aligned} \alpha^T x_0 &= -\alpha^T \int_0^T e^{-At} Bu(t)dt \\ &= -\int_0^T \alpha^T e^{-At} Bu(t)dt = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

这说明$\alpha \in X_{NC}$

- 由上式(12), 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{13}$$

即, 可得α为方程(8)的常解

反之, 若α为方程(8)的常解, 即则有$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T]$

- 那么, 对任意$x_0 \in X_C$, 有

$$\begin{aligned} \alpha^T x_0 &= -\alpha^T \int_0^T e^{-At} Bu(t) dt \\ &= -\int_0^T \alpha^T e^{-At} Bu(t) dt = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

这说明$\alpha \in X_{NC}$

➥ 综合上面两个结论即得, X_{NC}为(8)的常解空间. 定理得证 ■

基于定理2.1, 我们进一步可得如下定理2.2

定理

定理2.2 系统(1)的不能控子空间X_{NC}为

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

的解空间.

基于定理2.1, 我们进一步可得如下定理2.2

定理

定理2.2 系统(1)的不能控子空间X_{NC}为

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

的解空间.

定理2.2的结论等价于

1. 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α使得式(15)成立
2. 若α使得式(15)成立, 则$\alpha \in X_{NC}$

➥ 为此, 考虑定理2.1可知, 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$

证明 首先, 设$\alpha \in X_{NC}$, 则由定理2.1, α满足

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{16}$$

证明 首先, 设$\alpha \in X_{NC}$, 则由定理2.1, α满足

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{16}$$

- (16)对t求导数直至$n-1$次, 可得

$$\alpha^T e^{-At} AB = 0, t \in [0, T],$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha^T e^{-At} A^{n-1} B = 0, t \in [0, T].$$

证明 首先，设$\alpha \in X_{NC}$，则由定理2.1，α满足

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{16}$$

- (16)对t求导数直至$n-1$次，可得

$$\alpha^T e^{-At} AB = 0, t \in [0, T],$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha^T e^{-At} A^{n-1} B = 0, t \in [0, T].$$

- 令$t=0$，得

$$\alpha^T B = 0, \alpha^T AB = 0, \cdots, \alpha^T A^{n-1} B = 0,$$

第2章
2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不能控子空间
2.2 能控性判据
2.3 能控性分解
2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

证明 首先, 设$\alpha \in X_{NC}$, 则由定理2.1, α满足

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{16}$$

- (16)对t求导数直至$n-1$次, 可得

$$\alpha^T e^{-At} AB = 0, t \in [0, T],$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha^T e^{-At} A^{n-1} B = 0, t \in [0, T].$$

- 令$t = 0$, 得

$$\alpha^T B = 0, \alpha^T AB = 0, \cdots, \alpha^T A^{n-1} B = 0,$$

- 即, 等价地有

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0 \tag{17}$$

这说明α是(15)的解

反之，若α是(15)的解, 则有

$$\alpha^T A^j B = 0,\ j = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{18}$$

反之, 若α是(15)的解, 则有

$$\alpha^T A^j B = 0,\ j = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{18}$$

- 又, 据凯莱-哈密顿定理知, $A^i, \forall i \geq n$可表示为$I, A, \cdots, A^{n-1}$的线性组合, 故有

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \alpha_j(t), \tag{19}$$

反之，若α是(15)的解，则有

$$\alpha^T A^j B = 0,\ j = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{18}$$

- 又，据凯莱-哈密顿定理知，$A^i, \forall i \geq n$可表示为$I, A, \cdots, A^{n-1}$的线性组合，故有

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \alpha_j(t), \tag{19}$$

从而

$$e^{-At} = e^{A(-t)} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \alpha_j(-t) = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \beta_j(t), \tag{20}$$

其中，$\alpha_j(t), \beta_j(t)$ 是t的标量函数

反之，若α是(15)的解，则有

$$\alpha^T A^j B = 0,\ j = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{18}$$

- 又，据凯莱-哈密顿定理知，$A^i, \forall i \geq n$可表示为$I, A, \cdots, A^{n-1}$的线性组合，故有

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \alpha_j(t), \tag{19}$$

从而

$$e^{-At} = e^{A(-t)} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \alpha_j(-t) = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \beta_j(t), \tag{20}$$

其中，$\alpha_j(t), \beta_j(t)$ 是t的标量函数

- 于是由(20)，可得

$$\alpha^T e^{-At} B = \alpha^T \sum_{j=0}^{n-1} A^j \beta_j(t) B = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^T A^j B \beta_j(t) = 0. \tag{21}$$

这说明α是(16)的常解

- 综合上面的证明, 可知式(8)(即, $\alpha^T e^{-At} B = 0$)的常解空间即是式(15)(即, $\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$) 的解空间

- 综合上面的证明，可知式(8)(即，$\alpha^T e^{-At} B = 0$)的常解空间即是式(15)(即，$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$) 的解空间

➥ 故由定理2.1，X_{NC}是(15)的解空间．定理得证 ∎

- 综合上面的证明, 可知式(8)(即, $\alpha^T e^{-At}B = 0$)的常解空间即是式(15)(即, $\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$) 的解空间

➥ 故由定理2.1, X_{NC}是(15)的解空间. 定理得证 ■

基于定理2.1, 我们还可进一步得如下定理2.3

- 综合上面的证明，可知式(8)(即，$\alpha^T e^{-At} B = 0$)的常解空间即是式(15)(即，$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$) 的解空间

➥ 故由定理2.1，X_{NC}是(15)的解空间. 定理得证 ■

基于定理2.1，我们还可进一步得如下定理2.3

定理

定理2.3 系统(1)的不能控子空间X_{NC}为

$$\alpha^T W_C[0,T] = 0 \tag{22}$$

的解空间. 式中

$$W_C[0,T] = \int_0^T e^{-At} B (e^{-At} B)^T dt \tag{23}$$

称为能控格拉姆(Gram)矩阵.

定理2.3的结论等价于

1. 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α使得式(22)成立
2. 若α使得式(22)成立, 则$\alpha \in X_{NC}$

➥ 为此, 考虑定理2.1可知, 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$

第2章
2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不能控子空间
2.2 能控性判据
2.3 能控性分解
2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

定理2.3的结论等价于

1. 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α使得式(22)成立
2. 若α使得式(22)成立, 则$\alpha \in X_{NC}$

➥ 为此, 考虑定理2.1可知, 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0,\ \ t \in [0, T]$$

证明 首先, 设$\alpha \in X_{NC}$

2.1.3 能控子空间与不能控子空间

定理2.3的结论等价于

1. 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α使得式(22)成立
2. 若α使得式(22)成立, 则$\alpha \in X_{NC}$

➥ 为此, 考虑定理2.1可知, 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0,\ \ t \in [0, T]$$

证明　首先, 设$\alpha \in X_{NC}$

- 则由定理2.1, 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T].$$

定理2.3的结论等价于

1. 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α使得式(22)成立
2. 若α使得式(22)成立, 则$\alpha \in X_{NC}$

➥ 为此, 考虑定理2.1可知, 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$

证明 首先, 设$\alpha \in X_{NC}$

- 则由定理2.1, 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T].$$

➥ 进而, 有

$$\alpha^T e^{-At} B (e^{-At} B)^T = 0, t \in [0, T]. \tag{24}$$

定理2.3的结论等价于

1. 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α使得式(22)成立
2. 若α使得式(22)成立, 则$\alpha \in X_{NC}$

- 为此, 考虑定理2.1可知, 若$\alpha \in X_{NC}$, 则α满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$

证明 首先, 设$\alpha \in X_{NC}$

- 则由定理2.1, 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T].$$

- 进而, 有

$$\alpha^T e^{-At} B (e^{-At} B)^T = 0, t \in [0, T]. \tag{24}$$

- 从0到T积分, 有

$$\int_0^T \alpha^T e^{-At} B (e^{-At} B)^T dt = 0, \tag{25}$$

- 式(25)即为

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt = \alpha^T W_C[0,T] = 0, \tag{26}$$

这说明α是(22)的解

- 式(25)即为

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt = \alpha^T W_C[0,T] = 0, \qquad (26)$$

这说明α是(22)的解

反之, 若α是(22)的解, 即有(26)成立, 右乘α可得

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt\alpha = 0, \qquad (27)$$

- 式(25)即为

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt = \alpha^T W_C[0,T] = 0, \tag{26}$$

这说明α是(22)的解

反之, 若α是(22)的解, 即有(26)成立, 右乘α可得

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt\alpha = 0, \tag{27}$$

- 即为

$$\int_0^T \|(\alpha^T e^{-At}B)^T\|^2 dt = 0. \tag{28}$$

- 式(25)即为

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt = \alpha^T W_C[0,T] = 0, \tag{26}$$

这说明α是(22)的解

反之, 若α是(22)的解, 即有(26)成立, 右乘α可得

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt\alpha = 0, \tag{27}$$

- 即为

$$\int_0^T \|(\alpha^T e^{-At}B)^T\|^2 dt = 0. \tag{28}$$

- 从而可得

$$\alpha^T e^{-At}B = 0, t \in [0,T]. \tag{29}$$

由定理2.1, $\alpha \in X_{NC}$

- 式(25)即为

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt = \alpha^T W_C[0,T] = 0, \tag{26}$$

这说明α是(22)的解

反之, 若α是(22)的解, 即有(26)成立, 右乘α可得

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt\alpha = 0, \tag{27}$$

- 即为

$$\int_0^T \|(\alpha^T e^{-At}B)^T\|^2 dt = 0. \tag{28}$$

- 从而可得

$$\alpha^T e^{-At}B = 0, t \in [0,T]. \tag{29}$$

由定理2.1, $\alpha \in X_{NC}$

➥ 综上, 从而知X_{NC}是(22)的解空间. 结论得证 ■

基于定理2.2, 我们可进一步得如下定理2.4

定理

定理2.4 系统(1)的能控子空间X_C是$B, AB, \cdots, A^{n-1}B$的各列生成的线性子空间, 即

$$X_C = span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{30}$$

返回(75)

基于定理2.2, 我们可进一步得如下定理2.4

定理

定理2.4 系统(1)的能控子空间X_C是$B, AB, \cdots, A^{n-1}B$的各列生成的线性子空间, 即

$$X_C = span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{30}$$

返回(75)

证明 若$\alpha \in X_{NC}$, 则由定理2.2可得

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0,$$

基于定理2.2, 我们可进一步得如下定理2.4

定理

定理2.4 系统(1)的能控子空间X_C是$B, AB, \cdots, A^{n-1}B$的各列生成的线性子空间, 即

$$X_C = span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{30}$$

返回(75)

证明 若$\alpha \in X_{NC}$, 则由定理2.2可得

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0,$$

- 故有, $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$各列与$X_{NC}$中任一元正交, 从而可得

$$span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \subseteq X_C. \tag{31}$$

2.1.3 能控子空间与不能控子空间

- 再利用定理2.2, 即X_{NC}为$\alpha^T\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$的解空间, 并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$\dim X_{NC} + rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

- 再利用定理2.2, 即X_{NC}为$\alpha^T\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=0$的解空间, 并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$\dim X_{NC} + rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} = n$$

从而有

$$rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} = n - \dim X_{NC} \tag{32}$$

- 再利用定理2.2, 即X_{NC}为$\alpha^T\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=0$的解空间, 并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$\dim X_{NC} + rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} = n$$

从而有

$$rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} = n - \dim X_{NC} \tag{32}$$

- 又由$\mathbb{R}^n = X_{NC} \oplus X_C$可得

$$\dim X_{NC} + \dim X_C = n. \tag{33}$$

- 再利用定理2.2, 即X_{NC}为$\alpha^T\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=0$的解空间, 并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$\dim X_{NC} + rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} = n$$

从而有

$$rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} = n - \dim X_{NC} \tag{32}$$

- 又由$\mathbb{R}^n = X_{NC}\oplus X_C$可得

$$\dim X_{NC} + \dim X_C = n. \tag{33}$$

➥ 结合(32)和(33)可推得

$$\dim X_C = rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} \tag{34}$$

- 再利用定理2.2, 即X_{NC}为$\alpha^T\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=0$的解空间, 并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$\dim X_{NC}+rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=n$$

从而有

$$rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=n-\dim X_{NC} \tag{32}$$

- 又由$\mathbb{R}^n=X_{NC}\oplus X_C$可得

$$\dim X_{NC}+\dim X_C=n. \tag{33}$$

➥ 结合(32)和(33)可推得

$$\dim X_C=rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} \tag{34}$$

- 又因为

$$\dim span\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} \tag{35}$$

- 结合(34)和(35), 容易推得

$$\dim X_C = \dim span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- 结合(34)和(35), 容易推得

$$\dim X_C = \dim span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- 从而, 由上式和(31)即知定理结论成立 ■

- 结合(34)和(35), 容易推得

$$\dim X_C = \dim span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- 从而, 由上式和(31)即知定理结论成立 ■

类似于定理2.4, 结合定理2.3, 即可得如下结论

定理

定理2.5 系统(1)的能控子空间X_C满足

$$X_C = span W_C[0, T], \tag{36}$$

其中, $W_C[0, T]$为能控Gram阵.

- 结合(34)和(35), 容易推得

$$\dim X_C = \dim span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

- 从而, 由上式和(31)即知定理结论成立 ■

类似于定理2.4, 结合定理2.3, 即可得如下结论

定理

定理2.5 系统(1)的能控子空间X_C满足

$$X_C = span W_C[0,T], \tag{36}$$

其中, $W_C[0,T]$为能控Gram阵.

注: 由定理2.2和2.4可知, 系统(1)的能控子空间X_C与不能控子空间X_{NC}只与系统的结构参数A, B有关而与控制区间$[0,T]$的长度无关, 与初始时刻t_0也无关

由定理2.2和2.4, 还可以得到如下结论

推论

推论2.1 不能控子空间X_{NC}是A^T的不变子空间, 能控子空间X_C是A的不变子空间.

由定理2.2和2.4, 还可以得到如下结论

推论

推论2.1 不能控子空间X_{NC}是A^T的不变子空间, 能控子空间X_C是A的不变子空间.

证明 分别结合定理2.2和2.4的结论以及凯莱-哈密尔顿定理, 易得. 自证

- 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0, \tag{37}$$

返回(67)

其中, x为n维状态向量, u 为p 维输入向量, A, B分别为$n \times n, n \times p$实常阵

- 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0, \tag{37}$$

返回(67)

其中, x为n维状态向量, u 为p 维输入向量, A, B分别为$n \times n, n \times p$实常阵

首先, 根据定理2.5判别系统(37)能控性的如下判据

定理

定理2.6（Gram矩阵判据） 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是, 能控Gram矩阵$W_C[0, T]$非奇异.

- 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0, \tag{37}$$

返回(67)

其中, x为n维状态向量, u 为p 维输入向量, A, B分别为$n \times n, n \times p$实常阵

首先, 根据定理2.5判别系统(37)能控性的如下判据

定理

定理2.6（Gram矩阵判据） 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是, 能控Gram矩阵$W_C[0, T]$非奇异.

证明 充分性: 若$W_C[0, T]$非奇异

- 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0, \tag{37}$$

返回(67)

其中, x为n维状态向量, u 为p 维输入向量, A, B分别为$n \times n, n \times p$实常阵

首先, 根据定理2.5判别系统(37)能控性的如下判据

定理

定理2.6（Gram矩阵判据） 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是, 能控Gram矩阵$W_C[0, T]$非奇异.

证明 充分性: 若$W_C[0, T]$非奇异, 由定理2.5, 知$X_C = spanW_C[0, T]$, 进而可得

$$\dim X_C = \dim spanW_C[0, T] = n, \tag{38}$$

此表明能控子空间$X_C = \mathbb{R}^n$, 故系统(37)完全能控

- 必要性：若系统(37)完全能控，即有则$X_C = \mathbb{R}^n$

- 必要性：若系统(37)完全能控, 即有则$X_C = \mathbb{R}^n$. 同样由定理2.5知(38)成立. 从而$W_C[0, T]$非奇异, 定理得证 ■

- 必要性：若系统(37)完全能控，即有则$X_C = \mathbb{R}^n$. 同样由定理2.5知(38)成立. 从而$W_C[0,T]$非奇异，定理得证 ■

注: 事实上，若$W_C[0,T]$非奇异，则$W_C^{-1}[0,T]$存在，于是对任意非零初始状态x_0，可构造$u(t)$为

$$u(t) = -B^T e^{-A^T t} W_C^{-1}[0,T]x_0,\ t \in [0,T], \tag{39}$$

2.2.1 能控性判据

- 必要性：若系统(37)完全能控，即有则$X_C = \mathbb{R}^n$. 同样由定理2.5知(38)成立. 从而$W_C[0,T]$非奇异，定理得证 ■

注：事实上，若$W_C[0,T]$非奇异，则$W_C^{-1}[0,T]$存在，于是对任意非零初始状态x_0，可构造$u(t)$为

$$u(t) = -B^T e^{-A^T t} W_C^{-1}[0,T]x_0,\ t \in [0,T], \tag{39}$$

- 在$u(t)$作用下，系统状态$x(t)$在时刻T的值为

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-t)}Bu(t)dt \\ &= e^{AT}x_0 + e^{AT}\int_0^T e^{-At}B(-B^T e^{-A^T t}W_C^{-1}[0,T]x_0)dt \\ &= e^{AT}x_0 - e^{AT}\int_0^T e^{-At}B(B^T e^{-A^T t})dt W_C^{-1}[0,T]x_0 \\ &= e^{AT}x_0 - e^{AT}W_C[0,T]W_C^{-1}[0,T]x_0 = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{40}$$

- 即，把任意能控状态转移到零的控制可构造！

定理

定理2.7（秩判据） 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件为

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n, \tag{41}$$

其中，$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$称为系统的能控性矩阵

定理

定理2.7（秩判据） 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件为

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n, \tag{41}$$

其中, $Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$称为系统的能控性矩阵

证明 充分性: 若(41)成立, 则由定理2.4, $X_C = spanQ_C$ 知,

$$\dim X_C = \dim spanQ_C = n, \tag{42}$$

故$X_C = \mathbb{R}^n$, 从而系统(37)完全能控

定理

定理2.7（秩判据） 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件为

$$rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} = n, \tag{41}$$

其中, $Q_C = \begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$称为系统的能控性矩阵

证明 充分性: 若(41)成立, 则由定理2.4, $X_C = spanQ_C$ 知,

$$\dim X_C = \dim spanQ_C = n, \tag{42}$$

故$X_C = \mathbb{R}^n$, 从而系统(37)完全能控

- 必要性：若系统(37)完全能控, 则$X_C = \mathbb{R}^n$. 由定理2.4知, (42)成立, 此即$rankQ_C = n$. 定理结论得证 ■

定理

定理2.7（秩判据） 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件为

$$rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} = n, \tag{41}$$

其中，$Q_C = \begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix}$称为系统的能控性矩阵

证明 充分性: 若(41)成立, 则由定理2.4, $X_C = spanQ_C$ 知,

$$\dim X_C = \dim spanQ_C = n, \tag{42}$$

故$X_C = \mathbb{R}^n$, 从而系统(37)完全能控

- 必要性：若系统(37)完全能控, 则$X_C = \mathbb{R}^n$. 由定理2.4知, (42)成立, 此即$rankQ_C = n$. 定理结论得证 ∎

注: 比较Gram矩阵判据和秩判据,容易看出秩判据用来判别系统的能控性是较为方便的, 而Gram矩阵中因为有e^{At}, 计算较为麻烦, 故此判据主要用于理论分析

2.2.1 能控性判据

例2.2.1 再次考虑例2.1.1

例2.2.1 再次考虑例2.1.1

- 若系统状态方程为

$$\textbf{(a)}\quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u,$$

例2.2.1 再次考虑例2.1.1

- 若系统状态方程为

$$\textbf{(a)}\quad \dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u,$$

➥ 注意到$n = 2$, 通过计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad rank Q_C = 2 = n$$

因此, 系统为完全能控的

例2.2.1 再次考虑例2.1.1

- 若系统状态方程为

$$\textbf{(a)}\ \ \dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u,$$

➥ 注意到$n = 2$, 通过计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad rankQ_C = 2 = n$$

因此, 系统为完全能控的

- 若系统状态方程为

$$\textbf{(b)}\ \ \dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u,$$

- 类似于情形(a), 计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad rankQ_C = 1 < n = 2,$$

因此, 系统为不完全能控的

- 类似于情形(a), 计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad rankQ_C = 1 < n = 2,$$

因此, 系统为不完全能控的

例2.2.2 给定线性系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

- 类似于情形(a), 计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad rankQ_C = 1 < n = 2,$$

因此, 系统为不完全能控的

例2.2.2 给定线性系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

- 注意到$n = 3$, 通过计算得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & -12 \end{bmatrix},$$

- 类似于情形(a), 计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}, \ rankQ_C = 1 < n = 2,$$

因此, 系统为不完全能控的

例2.2.2 给定线性系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

- 注意到$n = 3$, 通过计算得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & -12 \end{bmatrix},$$

- 可判断知$\det Q_c \neq 0$, 故$rankQ_C = 3 = n$, 系统完全能控

下面介绍PBH判据, 包括“PBH秩判据”和“PBH特征向量判据”

- 以波波夫(Popov), 贝尔维奇(Belevitch)和豪塔斯(Hautus)姓氏首字母组合命名

下面介绍PBH判据，包括“PBH秩判据”和“PBH特征向量判据”

- 以波波夫(Popov)，贝尔维奇(Belevitch)和豪塔斯(Hautus)姓氏首字母组合命名

定理

定理2.8(PBH秩判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充要条件为

$$rank\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C} \tag{43}$$

或等价地，对矩阵A的所有特征值$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，成立

$$rank\begin{bmatrix} \lambda_i I-A & B \end{bmatrix} = n,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{44}$$

下面介绍PBH判据，包括“PBH秩判据”和“PBH特征向量判据”

- 以波波夫(Popov)，贝尔维奇(Belevitch)和豪塔斯(Hautus)姓氏首字母组合命名

定理

定理2.8(PBH秩判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充要条件为

$$rank\begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C} \tag{43}$$

或等价地，对矩阵A的所有特征值$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，成立

$$rank\begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \end{bmatrix} = n,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{44}$$

- 对判别条件(43)和(44)的等价性

2.2.1 能控性判据

下面介绍PBH判据，包括“PBH秩判据”和“PBH特征向量判据”

- 以波波夫(Popov)，贝尔维奇(Belevitch)和豪塔斯(Hautus)姓氏首字母组合命名

定理

定理2.8(PBH秩判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充要条件为

$$rank\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C} \tag{43}$$

或等价地，对矩阵A的所有特征值$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，成立

$$rank\begin{bmatrix} \lambda_i I-A & B \end{bmatrix} = n,\ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{44}$$

- 对判别条件(43)和(44)的等价性
  - $sI - A$非奇异当且仅当$s \neq \lambda_i$, $\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$
  - 上述等价结论可由A的若尔当规范形直接可见，即$A = P^{-1}JP$

证明 必要性：若系统(37)完全能控, 证(43)成立

证明 必要性：若系统(37)完全能控，证(43)成立

- **反证法.** 假设(43)不成立，即存在复数s_0，使$\begin{bmatrix} s_0I-A & B \end{bmatrix}$行降秩，则必存在一个非零常向量$\alpha$，使成立

$$\alpha^T \begin{bmatrix} s_0I-A & B \end{bmatrix} = 0, \tag{45}$$

2.2.1 能控性判据

证明 必要性：若系统(37)完全能控, 证(43)成立

- **反证法.** 假设(43)不成立, 即存在复数s_0, 使$\begin{bmatrix} s_0I-A & B \end{bmatrix}$行降秩, 则必存在一个非零常向量$\alpha$, 使成立

$$\alpha^T \begin{bmatrix} s_0I-A & B \end{bmatrix} = 0, \tag{45}$$

- 故可导出

$$s_0\alpha^T = \alpha^T A, \ \alpha^T B = 0. \tag{46}$$

证明 必要性：若系统(37)完全能控，证(43)成立

- **反证法.** 假设(43)不成立，即存在复数s_0，使$\begin{bmatrix} s_0I-A & B\end{bmatrix}$行降秩，则必存在一个非零常向量$\alpha$，使成立

$$\alpha^T \begin{bmatrix} s_0I-A & B\end{bmatrix} = 0, \tag{45}$$

- 故可导出

$$s_0\alpha^T = \alpha^T A,\ \alpha^T B = 0. \tag{46}$$

- 进而由上式可导出

$$\alpha^T AB = s_0\alpha^T B = 0,\ \alpha^T A^2 B = s_0\alpha^T AB = 0,\ \cdots,\ \alpha^T A^{n-1}B = 0. \tag{47}$$

证明 必要性：若系统(37)完全能控, 证(43)成立

- **反证法.** 假设(43)不成立, 即存在复数s_0, 使$\begin{bmatrix} s_0 I - A & B \end{bmatrix}$行降秩, 则必存在一个非零常向量$\alpha$, 使成立

$$\alpha^T \begin{bmatrix} s_0 I - A & B \end{bmatrix} = 0, \tag{45}$$

- 故可导出

$$s_0 \alpha^T = \alpha^T A, \ \alpha^T B = 0. \tag{46}$$

- 进而由上式可导出

$$\alpha^T AB = s_0 \alpha^T B = 0, \ \alpha^T A^2 B = s_0 \alpha^T AB = 0, \ \cdots, \ \alpha^T A^{n-1} B = 0. \tag{47}$$

- 由(46), (47)可得

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0. \tag{48}$$

这表明$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$行降秩, 此与$(A, B)$能控矛盾, 故反证法假设不成立, 从而有(43)成立

- 充分性：若(43)成立, 欲证(A, B)能控

2.2.1 能控性判据

- 充分性：若(43)成立，欲证(A, B)能控
- **反证法.** 假设(A, B)为不完全能控，则对系统(37)作非奇异线性变换

$$x = T\hat{x},\ T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix},$$

其中，

- T_1的各列属于X_C，并构成X_C的基底
- T_2为使T非奇异的任意阵

2.2.1 能控性判据

- 充分性：若(43)成立，欲证(A,B)能控
- **反证法.** 假设(A,B)为不完全能控，则对系统(37)作非奇异线性变换

$$x = T\hat{x},\ T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix},$$

其中,

  - T_1的各列属于X_C，并构成X_C的基底
  - T_2为使T非奇异的任意阵

- 令

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix}$$

则由$T^{-1}T = I$，可得$F_2^T T_1 = 0$，这说明F_2各列属于X_{NC}

2.2.1 能控性判据

- 充分性：若(43)成立, 欲证(A,B)能控
- **反证法.** 假设(A,B)为不完全能控, 则对系统(37)作非奇异线性变换

$$x = T\hat{x},\ T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix},$$

其中,

  - T_1的各列属于X_C, 并构成X_C的基底
  - T_2为使T非奇异的任意阵

- 令

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix}$$

则由$T^{-1}T = I$, 可得$F_2^T T_1 = 0$, 这说明F_2各列属于X_{NC}

- 再由X_C是A的不变子空间, 即可推得

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix},\quad \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{49}$$

- 从而，有

$$rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} sI-A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI-A_{22} & 0 \end{bmatrix}.$$

- 从而，有

$$rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} sI-A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI-A_{22} & 0 \end{bmatrix}.$$

- 可知，当s取A_{22}的特征根时，矩阵$\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}$降秩，即

$$rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} < n, \quad 对\ s=\lambda_i(A_{22}) \tag{50}$$

- 从而，有

$$rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} sI-A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI-A_{22} & 0 \end{bmatrix}.$$

- 可知，当s取A_{22}的特征根时，矩阵$\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}$降秩，即

$$rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} < n, \quad \text{对 } s = \lambda_i(A_{22}) \tag{50}$$

- 此外，由式(43)，并结合线性非奇异变换性质，可得

$$\begin{aligned} rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} &= rank\begin{bmatrix} sI-T^{-1}AT & T^{-1}B \end{bmatrix} \\ &= rankT^{-1}\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= rank\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} = n, \ \forall s \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{51}$$

此与(50)矛盾．故反证法假设不成立，即(A,B)为能控．定理结论得证 ∎

基于定理2.8的PBH秩判据, 由反证法, 可得如下PBH特征向量判据

定理

定理2.9(PBH特征向量判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是, A的非零左特征向量不能与B的所有列正交. 即对A的任一特征值λ_i, 同时满足

$$\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T, \ \alpha^T B = 0 \tag{52}$$

的特征向量$\alpha \equiv 0$.

基于定理2.8的PBH秩判据, 由反证法, 可得如下PBH特征向量判据

定理

定理2.9(PBH特征向量判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是, A的非零左特征向量不能与B的所有列正交. 即对A的任一特征值λ_i, 同时满足

$$\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T,\ \alpha^T B = 0 \tag{52}$$

的特征向量$\alpha \equiv 0$.

- 下面, 我们考察(A, B)为若尔当(Jordan)规范型时的能控性判据
  - 当A不是若尔当型, 引进非奇异变换$x = T\hat{x}$, T为$n \times n$非奇异矩阵, 使得

$$\hat{A} = T^{-1}AT,\ \hat{B} = T^{-1}B, \tag{53}$$

其中，

$$\hat{A}_{n\times n}=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix},\quad \hat{B}_{n\times p}=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{bmatrix}, \tag{54}$$

$$\underset{\sigma_i\times\sigma_i}{J_i}=\begin{bmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i\alpha_i} \end{bmatrix},\quad \underset{\sigma_i\times p}{B_i}=\begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{i\alpha_i}, \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$\underset{r_{ik}\times r_{ik}}{J_{ik}}=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix},\quad \underset{r_{ik}\times p}{B_{ik}}=\begin{bmatrix} B_{1ik} \\ B_{2ik} \\ \vdots \\ B_{rik} \end{bmatrix}, \tag{56}$$

其中,

$$\hat{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{n\times p} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{bmatrix}, \tag{54}$$

$$\underset{\sigma_i\times\sigma_i}{J_i} = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i\alpha_i} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sigma_i\times p}{B_i} = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{i\alpha_i}, \end{bmatrix} \tag{55}$$

$$\underset{r_{ik}\times r_{ik}}{J_{ik}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad \underset{r_{ik}\times p}{B_{ik}} = \begin{bmatrix} B_{1ik} \\ B_{2ik} \\ \vdots \\ B_{rik} \end{bmatrix}, \tag{56}$$

且, λ_i互异($\forall i = 1,\cdots,l$), σ_i为特征值λ_i的代数重数, 并有$n = \sum_{i=1}^{l}\sigma_i$,

$$r_{i1} + r_{i2} + \cdots + r_{i\alpha_i} = \sigma_i, \quad i = 1,2,\cdots,l.$$

2.2.1 能控性判据

- 由(51)知, 非奇异线性变换不改变$\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}$的秩, 故有

$$rank\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}, \tag{57}$$

因此, 考察(A, B)的能控性, 可直接去考察$(\hat{A}, \hat{B})$的能控性

- 由(51)知, 非奇异线性变换不改变$\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}$的秩, 故有

$$rank\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}, \tag{57}$$

因此, 考察(A,B)的能控性, 可直接去考察$(\hat{A},\hat{B})$的能控性

- 注意:

$$\begin{aligned} & rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} \\ & = rank\begin{bmatrix} sI-J_1 & & & & B_1 \\ & sI-J_2 & & & B_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & sI-J_l & B_l \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{58}$$

2.2.1 能控性判据

- 由(51)知, 非奇异线性变换不改变$\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}$的秩, 故有

$$rank\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}, \tag{57}$$

因此, 考察(A,B)的能控性, 可直接去考察$(\hat{A},\hat{B})$的能控性

- 注意:

$$rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} sI-J_1 & & & & B_1 \\ & sI-J_2 & & & B_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & sI-J_l & B_l \end{bmatrix}, \tag{58}$$

- 又由定理2.8, 我们只要根据(58)考察$rank\begin{bmatrix} \lambda_i I-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}$对所有$i = 1, 2, \cdots, l$的满秩性即可

- 首先, 对上式(58)考虑λ_1, 并注意到$\lambda_1 \neq \lambda_i (i \neq 1)$, 可得

$$\begin{aligned} & rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} \\ = & rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & & & & B_1 \\ & \lambda_1 I - J_2 & & & B_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_1 I - J_l & B_l \end{bmatrix} \\ = & rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & & & & B_1 \\ & \lambda_1 I - J_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_1 I - J_l & 0 \end{bmatrix} \\ = & rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & B_1 \end{bmatrix} + \sigma_2 + \cdots + \sigma_l. \end{aligned} \tag{59}$$

- 首先, 对上式(58)考虑λ_1, 并注意到$\lambda_1 \neq \lambda_i (i \neq 1)$, 可得

$$
\begin{aligned}
& rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} \\
&= rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & & & & B_1 \\ & \lambda_1 I - J_2 & & & B_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_1 I - J_l & B_l \end{bmatrix} \\
&= rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & & & & B_1 \\ & \lambda_1 I - J_2 & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_1 I - J_l & 0 \end{bmatrix} \\
&= rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & B_1 \end{bmatrix} + \sigma_2 + \cdots + \sigma_l.
\end{aligned} \tag{59}
$$

- 从而由$n = \sum_{i=1}^{l} \sigma_i$, 可知

$$
rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = n \quad \Leftrightarrow \quad rank\begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & B_1 \end{bmatrix} = \sigma_1
$$

第2章
2.1 能控性定义
2.2 能控性判据
2.2.1 能控性判据
2.2.2 能控性指数
2.3 能控性分解
2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

- 对上式(58), 令$\Delta_{r_{1k}\times r_{1k}} = \lambda_1 I - J_{1k}, k = 1, \cdots, \alpha_1$, 则

$$
\begin{aligned}
& rank\begin{bmatrix}\lambda_1 I - J_1 & B_1\end{bmatrix} \\
= & rank\begin{bmatrix}\Delta_{r_{11}\times r_{11}} & & & & B_{11} \\ & \Delta_{r_{12}\times r_{12}} & & & B_{12} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \Delta_{r_{1\alpha_1}\times r_{1\alpha_1}} & B_{1\sigma_1}\end{bmatrix} \\
= & rank\begin{bmatrix}\Delta_{r_{11}\times r_{11}} & & & & \begin{bmatrix} b_{111} \\ \cdots \\ b_{r11}\end{bmatrix} \\ & \Delta_{r_{12}\times r_{12}} & & & \begin{bmatrix} b_{112} \\ \cdots \\ b_{r12}\end{bmatrix} \\ & & \ddots & & \cdots \\ & & & \Delta_{r_{1\alpha_1}\times r_{1\alpha_1}} & \begin{bmatrix} b_{11\alpha_1} \\ \cdots \\ b_{r1\alpha_1}\end{bmatrix}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2.2.1 能控性判据

- 注意: $\Delta_{r_{1k}\times r_{1k}} = \lambda_1 I - J_{1k}, k = 1, \cdots, \alpha_1$具有如下特殊形式

$$\Delta_{r_{1k}\times r_{1k}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots, \alpha_1$$

- 注意: $\Delta_{r_{1k}\times r_{1k}} = \lambda_1 I - J_{1k}, k = 1,\cdots,\alpha_1$具有如下特殊形式

$$\Delta_{r_{1k}\times r_{1k}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1,2,\cdots,\alpha_1$$

➥ 从而, 对任意的$k = 1,\cdots,\alpha_1$, 有

- $rank\Delta_{r_{1k}\times r_{1k}} = r_{1k} - 1$
- $\Delta_{r_{1k}\times r_{1k}}$前$r_{1k} - 1$行满秩; 最后一行(即, 第$r_{1k}$行)为零行, 即仅有最后一行降秩

- 进而，有

$$
\begin{aligned}
& rank\begin{bmatrix}\lambda_1 I - J_1 & B_1\end{bmatrix} \\
&= rank\begin{bmatrix}
0 & -1 & & & & & & & & 0 \\
 & \ddots & \ddots & & & & & & & \vdots \\
 & & \ddots & -1 & & & & & & 0 \\
 & & & 0 & & & & & & b_{r11} \\
 & & & & 0 & -1 & & & & 0 \\
 & & & & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\
 & & & & & \ddots & -1 & & & 0 \\
 & & & & & & 0 & & & b_{r12} \\
 & & & & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & 0 & -1 & 0 \\
 & & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & & & \ddots \;\; -1 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & b_{r1\alpha_1}
\end{bmatrix} \\
&= \sigma_1 - \alpha_1 + rank\begin{bmatrix} b_{r11} \\ b_{r12} \\ \vdots \\ b_{r1\alpha_1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2.2.1 能控性判据

- 由前式, 我们有

$$rank\begin{bmatrix}\lambda_1 I - J_1 & B_1\end{bmatrix} = \sigma_1 - \alpha_1 + rank\begin{bmatrix} b_{r11} \\ b_{r12} \\ \vdots \\ b_{r1\alpha_1}\end{bmatrix} \tag{60}$$

- 进而, 由(59)和(60)知, $rank\begin{bmatrix}\lambda_1 I - \hat{A} & \hat{B}\end{bmatrix} = n$ 等价于

$$rank\begin{bmatrix} b_{r11} \\ b_{r12} \\ \cdots \\ b_{r1\alpha_1}\end{bmatrix} = \alpha_1. \tag{61}$$

- 同理, 可推得: $rank\begin{bmatrix}\lambda_1 I - \hat{A} & \hat{B}\end{bmatrix} = n,\ i = 1, 2, \cdots, l$ 等价于

$$rank\begin{bmatrix} b_{ri1} \\ b_{ri2} \\ \cdots \\ b_{ri\alpha_1}\end{bmatrix} = \alpha_i,\ i = 1, 2, \cdots, l. \tag{62}$$

综合上面的推导, 我们有如下能控性判据的结论

定理

定理2.10(若尔当规范型判据) 若由系统(37)导出的若尔当规范型为(54)~(56), 则

- 系统(37)为完全能控的充要条件是$B_{ik}(k=1,2,\cdots,\alpha_i)$的最后一行所组成的矩阵对$i=1,2,\cdots,l$均为行线性无关. 即, (62)成立

2.2.1 能控性判据

第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.2.1 能控性判据

2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

例2.2.3 线性定常系统为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & & & & & \\ & & -2 & & & & \\ & & & -2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}u,$$

例2.2.3 线性定常系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & & & & & \\ & & -2 & & & & \\ & & & -2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} u,$$

- 由若尔当规范性, 容易写出

$$\begin{bmatrix} b_{r11} \\ b_{r12} \\ b_{r13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} b_{r21} \\ b_{r22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

例2.2.3 线性定常系统为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & & & & & \\ & & -2 & & & & \\ & & & -2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}u,$$

- 由若尔当规范性，容易写出

$$\begin{bmatrix}b_{r11}\\ b_{r12}\\ b_{r13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 7\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}b_{r21}\\ b_{r22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}.$$

➥ 显然，他们均为行满秩

- 故由定理2.10知，系统为完全能控

根据定理2.10, 可得下面两个推论:

推论

推论2.2（最小输入数定理） 系统(A,B)状态能控的必要条件为

$$p \geqslant \alpha_j,\ j=1,2,\cdots,l. \tag{63}$$

根据定理2.10, 可得下面两个推论:

推论

推论2.2（最小输入数定理） 系统(A,B)状态能控的必要条件为

$$p \geqslant \alpha_j,\ j=1,2,\cdots,l. \tag{63}$$

定义:

- 若(54), (56)中, $\alpha_j=1, j=1,2,\cdots,l.$ 即A的互异特征根各自对应一个若尔当块, 则称A为非减次矩阵, 或循环矩阵

根据定理2.10, 可得下面两个推论:

推论

推论2.2（最小输入数定理） 系统(A,B)状态能控的必要条件为

$$p \geqslant \alpha_j,\ j = 1,2,\cdots,l. \tag{63}$$

定义:

- 若(54), (56)中, $\alpha_j = 1, j = 1,2,\cdots,l$. 即$A$的互异特征根各自对应一个若尔当块, 则称$A$为非减次矩阵, 或循环矩阵

推论

推论2.3 单输入系统(A,B)状态能控的必要条件为：A是非减次矩阵.

- 考察完全能控的系统(37), 即

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

其中, x为n维状态向量, u 为p 维输入向量, A, B分别为$n \times n, n \times p$实常阵

- 考察完全能控的系统(37), 即

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

其中, x为n维状态向量, u 为p 维输入向量, A, B分别为$n \times n, n \times p$实常阵

- 定义

$$Q_k = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \tag{64}$$

为$n \times kp$常阵, 其中k为正整数

- 考察完全能控的系统(37), 即

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

其中, x为n维状态向量, u 为p 维输入向量, A, B分别为$n \times n, n \times p$实常阵

- 定义

$$Q_k = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \tag{64}$$

为$n \times kp$常阵, 其中k为正整数

  - 显然, $Q_n = Q_C$, 且$rank Q_n = n$

2.2.2 能控性指数

- 考察完全能控的系统(37), 即

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

其中, x为n维状态向量, u 为p 维输入向量, A, B分别为$n \times n, n \times p$实常阵

- 定义

$$Q_k = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \tag{64}$$

为$n \times kp$常阵, 其中k为正整数

  - 显然, $Q_n = Q_C$, 且$rankQ_n = n$

- 依次将k由1增加, 直至使$rankQ_\mu = n$, 即

$$\begin{aligned} rankQ_1 < rankQ_2 < \cdots < rankQ_{\mu-1} \\ < rankQ_\mu = rankQ_{\mu+1} = \cdots = rankQ_C, \end{aligned} \tag{65}$$

则称μ为系统的能控性指数

- 估计能控性指数μ的一个关系式为: 令$rankB = r \leqslant p$, 则必成立

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant n - r + 1. \tag{66}$$

2.2.2 能控性指数

- 估计能控性指数μ的一个关系式为: 令$rankB = r \leqslant p$, 则必成立

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant n - r + 1. \tag{66}$$

➥ 证明关系式(66):

- 首先, 考虑到Q_μ 为$n \times \mu p$阵, 要使$rankQ_\mu = n$, 其前提是矩阵Q_μ的列数必须大于或等于其行数, 即$\mu p \geqslant n$, 此可导出(66)的左端

2.2.2 能控性指数

- 估计能控性指数μ的一个关系式为: 令$rankB = r \leqslant p$, 则必成立

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant n - r + 1. \tag{66}$$

➥ 证明关系式(66):

- 首先, 考虑到Q_μ 为$n \times \mu p$阵, 要使$rankQ_\mu = n$, 其前提是矩阵Q_μ的列数必须大于或等于其行数, 即$\mu p \geqslant n$, 此可导出(66)的左端
- 再由$rankB = r$, 若$r = n$, 则$\mu = 1$, (66)的右端成立; 若$r < n$, 则$AB, A^2B, \cdots, A^{\mu-1}B$ 的每一个矩阵至少有一个列向量和Q_μ 中左侧所有线性独立的列向量线性无关, 否则, (A, B)将不完全能控

2.2.2 能控性指数

- 估计能控性指数μ的一个关系式为: 令$rankB = r \leqslant p$, 则必成立

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant n - r + 1. \tag{66}$$

➥ 证明关系式(66):

- 首先, 考虑到Q_μ 为$n \times \mu p$阵, 要使$rankQ_\mu = n$, 其前提是矩阵Q_μ的列数必须大于或等于其行数, 即$\mu p \geqslant n$, 此可导出(66)的左端

- 再由$rankB = r$, 若$r = n$, 则$\mu = 1$, (66)的右端成立; 若$r < n$, 则$AB, A^2B, \cdots, A^{\mu-1}B$ 的每一个矩阵至少有一个列向量和Q_μ 中左侧所有线性独立的列向量线性无关, 否则, (A, B)将不完全能控, 因此成立

$$r + \mu - 1 \leqslant n,$$

此即$\mu \leqslant n - r + 1$, 于是, (66)的右不等式得证 ■

2.2.2 能控性指数

由关系式(66), 对能控性指数给出如下五点结论:

2.2.2 能控性指数

由关系式(66), 对能控性指数给出如下五点结论:

(1) 对于单输入系统, 即$p = 1$时, 系统的能控性指数$\mu = n$

- 由

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant n - r + 1$$

其中, $p = 1$, $r = 1$, 易得$\mu = n$

由关系式(66), 对能控性指数给出如下五点结论:

(1) 对于单输入系统, 即$p = 1$时, 系统的能控性指数$\mu = n$

- 由

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant n - r + 1$$

其中, $p = 1$, $r = 1$, 易得$\mu = n$

(2) 对于系统(37), 可导出简化的能控性秩判据:

- 系统完全能控的充分必要条件是

$$rankQ_{n-r+1} = rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-r}B \end{bmatrix} = n, \qquad (67)$$

其中, $r = rankB$

2.2.2 能控性指数

由关系式(66), 对能控性指数给出如下五点结论:

(1) 对于单输入系统, 即$p = 1$时, 系统的能控性指数$\mu = n$

- 由

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant n - r + 1$$

其中, $p = 1$, $r = 1$, 易得$\mu = n$

(2) 对于系统(37), 可导出简化的能控性秩判据:

- 系统完全能控的充分必要条件是

$$\mathrm{rank} Q_{n-r+1} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-r}B \end{bmatrix} = n, \qquad (67)$$

其中, $r = \mathrm{rank} B$

注: 由$\mathrm{span}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-r}B \end{bmatrix}$为$A$的不变子空间, 故有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-r}B \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \mathrm{rank} Q_C$$

从而, 可知系统完全能控等价于条件(67)成立

(3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数，则$l \leqslant n$, (66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant \min(l, n-r+1). \tag{68}$$

(3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数，则$l \leqslant n$，(66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant \min(l, n-r+1). \tag{68}$$

- 若最小多项式定义为

$$\varphi(s) = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + \cdots + a_1 s + a_0,$$

则必有$\varphi(A) = 0$

(3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数，则$l \leqslant n$, (66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant \min(l, n-r+1). \tag{68}$$

- 若最小多项式定义为

$$\varphi(s) = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + \cdots + a_1 s + a_0,$$

则必有$\varphi(A) = 0$

- 故A^l是$I, A, \cdots, A^{l-1}$的线性组合，从而A^lB是$B, AB, \cdots, A^{l-1}B$的线性组合，这说明

$$rankQ_{l+1} = rankQ_{l+2} = \cdots = rankQ_C.$$

(3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数, 则$l \leqslant n$, (66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant \min(l, n-r+1). \tag{68}$$

- 若最小多项式定义为

$$\varphi(s) = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + \cdots + a_1 s + a_0,$$

则必有$\varphi(A) = 0$

- 故A^l是$I, A, \cdots, A^{l-1}$的线性组合, 从而A^lB是$B, AB, \cdots, A^{l-1}B$的线性组合, 这说明

$$rankQ_{l+1} = rankQ_{l+2} = \cdots = rankQ_C.$$

- 由能控性指数定义知, $\mu \leqslant l$

(3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数, 则$l \leqslant n$, (66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant \min(l, n-r+1). \tag{68}$$

- 若最小多项式定义为

$$\varphi(s) = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + \cdots + a_1 s + a_0,$$

  则必有$\varphi(A) = 0$

- 故A^l是$I, A, \cdots, A^{l-1}$的线性组合, 从而A^lB是$B, AB, \cdots, A^{l-1}B$的线性组合, 这说明

$$rankQ_{l+1} = rankQ_{l+2} = \cdots = rankQ_C.$$

- 由能控性指数定义知, $\mu \leqslant l$
- 再由关系式(66), 即可得(68)成立

(4) 将Q_μ表为

$$Q_\mu = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_p\ Ab_1\ Ab_2\ \cdots\ Ab_p\ \cdots\ A^{\mu-1}b_1\ \cdots\ A^{\mu-1}b_p] \quad (69)$$

(4) 将Q_μ表为

$$Q_\mu = [b_1 \; b_2 \; \cdots \; b_p \; Ab_1 \; Ab_2 \; \cdots \; Ab_p \; \cdots \; A^{\mu-1}b_1 \; \cdots \; A^{\mu-1}b_p] \quad (69)$$

- 依次从左至右搜索Q_μ的n个线性无关的列, 并重新排列后记为

$$b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{\mu_2-1}b_2, \cdots, b_r, \cdots, A^{\mu_r-1}b_r. \quad (70)$$

(4) 将Q_μ表为

$$Q_\mu = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_p\ Ab_1\ Ab_2\ \cdots\ Ab_p\ \cdots\ A^{\mu-1}b_1\ \cdots\ A^{\mu-1}b_p] \quad (69)$$

- 依次从左至右搜索Q_μ的n个线性无关的列, 并重新排列后记为

$$b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{\mu_2-1}b_2, \cdots, b_r, \cdots, A^{\mu_r-1}b_r. \quad (70)$$

- 对能控系统, 显然有

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n, \quad (71)$$

且, 能控性指数μ满足

$$\mu = \max\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}, \quad (72)$$

(4) 将Q_μ表为

$$Q_\mu = [b_1\ b_2\ \cdots\ b_p\ Ab_1\ Ab_2\ \cdots\ Ab_p\ \cdots\ A^{\mu-1}b_1\ \cdots\ A^{\mu-1}b_p] \tag{69}$$

- 依次从左至右搜索Q_μ的n个线性无关的列, 并重新排列后记为

$$b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{\mu_2-1}b_2, \cdots, b_r, \cdots, A^{\mu_r-1}b_r. \tag{70}$$

- 对能控系统, 显然有

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n, \tag{71}$$

且, 能控性指数μ满足

$$\mu = \max\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}, \tag{72}$$

并称$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$为系统$(A, B)$的能控性指数集

(5) 对系统(37)作非奇异线性变换, 其能控性指数μ和能控性指数集$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$保持不变

(5) 对系统(37)作非奇异线性变换, 其能控性指数μ和能控性指数集$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$保持不变

- 这是因为, 对系统(37)作非奇异线性变换$x = P\hat{x}$, P 为$n \times n$ 非奇异阵, 则有$\hat{A} = P^{-1}AP, \hat{B} = P^{-1}B$, 故可导出

$$
\begin{aligned}
\hat{A}\hat{B} &= P^{-1}AB \\
\hat{A}^2\hat{B} &= P^{-1}A^2B \\
&\vdots \\
\hat{A}^{\mu-1}\hat{B} &= P^{-1}A^{\mu-1}B
\end{aligned}
$$

(5) 对系统(37)作非奇异线性变换, 其能控性指数μ和能控性指数集$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$保持不变

- 这是因为, 对系统(37)作非奇异线性变换$x = P\hat{x}$, P 为$n \times n$ 非奇异阵, 则有$\hat{A} = P^{-1}AP, \hat{B} = P^{-1}B$, 故可导出

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{B} &= P^{-1}AB \\ \hat{A}^2\hat{B} &= P^{-1}A^2B \\ &\vdots \\ \hat{A}^{\mu-1}\hat{B} &= P^{-1}A^{\mu-1}B\end{aligned}$$

- 从而有

$$\begin{aligned}\hat{Q}_\mu &= \begin{bmatrix}\hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \cdots & \hat{A}^{\mu-1}\hat{B}\end{bmatrix} \\ &= P^{-1}\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{\mu-1}B\end{bmatrix} \\ &= P^{-1}Q_\mu,\end{aligned} \tag{73}$$

- 以及

$$\begin{aligned}&\left[\hat{b}_1, \hat{A}\hat{b}_1, \cdots, \hat{A}^{\mu_1-1}\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{A}\hat{b}_2, \cdots, \hat{A}^{\mu_2-1}\hat{b}_2,\right.\\ &\qquad\left.\cdots, \hat{b}_r, \hat{A}\hat{b}_r, \cdots, \hat{A}^{\mu_r-1}\hat{b}_r\right]\\ &= P^{-1}\left[b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{\mu_2-1}b_2,\right.\\ &\qquad\left.\cdots, b_r, Ab_r, \cdots, A^{\mu_r-1}b_r\right].\end{aligned} \tag{74}$$

- 以及

$$\begin{aligned}&\Big[\hat{b}_1,\hat{A}\hat{b}_1,\cdots,\hat{A}^{\mu_1-1}\hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{A}\hat{b}_2,\cdots,\hat{A}^{\mu_2-1}\hat{b}_2,\\&\quad\cdots,\hat{b}_r,\hat{A}\hat{b}_r,\cdots,\hat{A}^{\mu_r-1}\hat{b}_r\Big]\\&=P^{-1}\Big[b_1,Ab_1,\cdots,A^{\mu_1-1}b_1,b_2,Ab_2,\cdots,A^{\mu_2-1}b_2,\\&\quad\cdots,b_r,Ab_r,\cdots,A^{\mu_r-1}b_r\Big].\end{aligned}\tag{74}$$

- 式(73)和(74)表明, $rank\hat{Q}_\mu = rankQ_\mu = n$, 且

$$\begin{gathered}\hat{b}_1,\hat{A}\hat{b}_1,\cdots,\hat{A}^{\mu_1-1}\hat{b}_1,\hat{b}_2,\hat{A}\hat{b}_2,\cdots,\hat{A}^{\mu_2-1}\hat{b}_2,\\\cdots,\hat{b}_r,\hat{A}\hat{b}_r,\cdots,\hat{A}^{\mu_r-1}\hat{b}_r\end{gathered}$$

为$\hat{Q}_\mu$中按前述方法搜索到的n个线性无关列

- 以及

$$
\begin{aligned}
&\Big[\hat{b}_1, \hat{A}\hat{b}_1, \cdots, \hat{A}^{\mu_1-1}\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{A}\hat{b}_2, \cdots, \hat{A}^{\mu_2-1}\hat{b}_2, \\
&\quad \cdots, \hat{b}_r, \hat{A}\hat{b}_r, \cdots, \hat{A}^{\mu_r-1}\hat{b}_r\Big] \\
&= P^{-1}\Big[b_1, Ab_1, \cdots, A^{\mu_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \cdots, A^{\mu_2-1}b_2, \\
&\quad \cdots, b_r, Ab_r, \cdots, A^{\mu_r-1}b_r\Big].
\end{aligned}
\tag{74}
$$

- 式(73)和(74)表明, $rank\hat{Q}_\mu = rankQ_\mu = n$, 且

$$
\begin{gathered}
\hat{b}_1, \hat{A}\hat{b}_1, \cdots, \hat{A}^{\mu_1-1}\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{A}\hat{b}_2, \cdots, \hat{A}^{\mu_2-1}\hat{b}_2, \\
\cdots, \hat{b}_r, \hat{A}\hat{b}_r, \cdots, \hat{A}^{\mu_r-1}\hat{b}_r
\end{gathered}
$$

为$\hat{Q}_\mu$中按前述方法搜索到的n个线性无关列

注: 上述推导说明, 能控性指数和能控性指数集在非奇异变换下保持不变

2.3 能控性分解

本节我们将讨论不完全能控的系统

2.3 能控性分解

本节我们将讨论不完全能控的系统

- 对于这一类系统, 可以通过结构分解, 将其结构以明显的形式区分为能控部分和不能控部分
- 研究系统的结构分解, 有助于更深刻的了解系统的结构特性, 也有助于更深入揭示状态空间描述和输入输出描述间的本质差别

2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性

- 对系统进行结构分解是通过引入适当的线性非奇异变换来实现的

- 对系统进行结构分解是通过引入适当的线性非奇异变换来实现的

➥ 因此，首先对系统的能控性在线性非奇异变换下的属性给出如下讨论:

定理

定理2.11 线性定常系统(A, B)的能控性在线性非奇异变换下不变.

- 对系统进行结构分解是通过引入适当的线性非奇异变换来实现的

➥ 因此，首先对系统的能控性在线性非奇异变换下的属性给出如下讨论：

定理

定理2.11 线性定常系统(A,B)的能控性在线性非奇异变换下不变.

证明 对系统的状态空间描述为

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

- 引入非奇异线性变换$x = P\bar{x}$, P为非奇异矩阵，则与其代数等价的状态空间描述为

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u,$$

其中，$\bar{A} = P^{-1}AP$, $\bar{B} = P^{-1}B$

- 考察$(\bar{A},\bar{B})$的能控性矩阵, 有

$$\begin{aligned}\bar{Q}_C &= \begin{bmatrix}\bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}P^{-1}\bar{B} & P^{-1}AB & \cdots & P^{-1}A^{n-1}B\end{bmatrix}\\ &= P^{-1}Q_C.\end{aligned}$$

2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性

- 考察$(\bar{A},\bar{B})$的能控性矩阵, 有

$$\begin{aligned}\bar{Q}_C &= \begin{bmatrix}\bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}P^{-1}\bar{B} & P^{-1}AB & \cdots & P^{-1}A^{n-1}B\end{bmatrix}\\ &= P^{-1}Q_C.\end{aligned}$$

- 于是

$$rankQ_C = rank\bar{Q}_C.$$

定理结论得证 ■

- 考察$(\bar{A},\bar{B})$的能控性矩阵，有

$$\begin{aligned}\bar{Q}_C &= \begin{bmatrix}\bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}P^{-1}\bar{B} & P^{-1}AB & \cdots & P^{-1}A^{n-1}B\end{bmatrix}\\ &= P^{-1}Q_C.\end{aligned}$$

- 于是

$$rankQ_C = rank\bar{Q}_C.$$

定理结论得证 ■

注: 事实上, 在定理2.8的充分性证明中, 已证明和利用了

$$rank\begin{bmatrix}sI-A & B\end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix}sI-\hat{A} & \hat{B}\end{bmatrix},\quad \forall s$$

这也能说明(A,B)的能控性在非奇异线性变换下的不变性

- 考虑不完全能控的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{75}$$

其中，x为n维状态向量，u为p维控制向量，(A, B)分别为$n \times n, n \times p$的实常阵

- 考虑不完全能控的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{75}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, (A, B)分别为$n \times n, n \times p$的实常阵

➥ 则, 根据

$$rankQ_C = rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = k < n,$$

任选Q_C中k个线性无关的列, 记为$t_1, t_2, \cdots, t_k$, 并令

$$T_1 = [t_1 \;\; t_2 \;\; \cdots \;\; t_k],$$

- 考虑不完全能控的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{75}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, (A, B)分别为$n \times n, n \times p$的实常阵

➥ 则, 根据

$$rankQ_C = rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = k < n,$$

任选Q_C中k个线性无关的列, 记为$t_1, t_2, \cdots, t_k$, 并令

$$T_1 = [t_1 \ \ t_2 \ \ \cdots \ \ t_k],$$

- 则由 定理2.4 知, T_1的列构成X_C的基底

- 再任选$n-k$个与T_1线性无关的列向量$t_{k+1}, t_{k+2}, \cdots, t_n$, 记

$$T_2 = [t_{k+1} \quad t_{k+2} \quad \cdots \quad t_n],$$

- 再任选$n-k$个与T_1线性无关的列向量$t_{k+1}, t_{k+2}, \cdots, t_n$, 记

$$T_2 = [t_{k+1} \ \ t_{k+2} \ \ \cdots \ \ t_n],$$

- 令

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} k\text{行} \\ n-k\text{行} \end{array} \tag{76}$$

- 再任选$n-k$个与T_1线性无关的列向量$t_{k+1}, t_{k+2}, \cdots, t_n$, 记

$$T_2 = [t_{k+1} \quad t_{k+2} \quad \cdots \quad t_n],$$

- 令

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \; T^{-1} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} k\text{行} \\ n-k\text{行} \end{array} \tag{76}$$

- 则由$T^{-1}T = I$, 推得

$$F_2^T T_1 = 0. \tag{77}$$

这说明F_2各列属于X_{NC}

2.3.2 按能控性结构分解

- 再任选$n-k$个与T_1线性无关的列向量$t_{k+1}, t_{k+2}, \cdots, t_n$，记

$$T_2 = [t_{k+1} \quad t_{k+2} \quad \cdots \quad t_n],$$

- 令

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \; T^{-1} = \begin{array}{c|l} \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} & \begin{array}{l} k\text{行} \\ n-k\text{行} \end{array} \end{array} \tag{76}$$

- 则由$T^{-1}T = I$，推得

$$F_2^T T_1 = 0. \tag{77}$$

这说明F_2各列属于X_{NC}

- 又由推论2.1，X_C是A的不变子空间，故有

$$F_2^T A T_1 = 0,$$

- 再任选$n-k$个与T_1线性无关的列向量$t_{k+1}, t_{k+2}, \cdots, t_n$, 记

$$T_2 = [t_{k+1} \quad t_{k+2} \quad \cdots \quad t_n],$$

- 令

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} \begin{matrix} k\text{行} \\ n-k\text{行} \end{matrix} \tag{76}$$

- 则由$T^{-1}T = I$, 推得

$$F_2^T T_1 = 0. \tag{77}$$

这说明F_2各列属于X_{NC}

- 又由推论2.1, X_C是A的不变子空间, 故有

$$F_2^T A T_1 = 0,$$

- 此外, B的各列属于X_C, 故有

$$F_2^T B = 0.$$

- 基于上述关系式, 对系统(75)作非奇异线性变换$x = T\hat{x}$, 则系统(75)可等价地转化为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, \tag{78}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} F_1^T A T_1 & F_1^T A T_2 \\ 0 & F_2^T A T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \\
\hat{B} &= T^{-1}B = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} B \\
&= \begin{bmatrix} F_1^T B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{79}$$

- 显然, 由$\hat{A}$, $\hat{B}$的形式, 容易看出

$$
\begin{aligned}
k &= rank Q_C \\
&= rank[\hat{B} \ \ \hat{A}\hat{B} \ \ \cdots \ \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}] \\
&= rank\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{80}
$$

2.3.2 按能控性结构分解

- 显然, 由$\hat{A}$, $\hat{B}$的形式, 容易看出

$$\begin{aligned} k &= rank Q_C \\ &= rank[\hat{B} \ \ \hat{A}\hat{B} \ \ \cdots \ \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}] \\ &= rank\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{80}$$

- 进而, 可得

$$rank\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = k.$$

2.3.2 按能控性结构分解

- 显然，由$\hat{A}, \hat{B}$的形式，容易看出

$$\begin{aligned} k &= rankQ_C \\ &= rank[\hat{B} \ \ \hat{A}\hat{B} \ \ \cdots \ \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}] \\ &= rank \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (80)$$

- 进而，可得

$$rank \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = k.$$

- 又由$span\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{k-1}B_1 \end{bmatrix}$为$A_{11}$不变子空间，从而有

$$\begin{aligned} rank \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{k-1}B_1 \end{bmatrix} &= rank \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} \\ &= k \end{aligned} \quad (81)$$

- 显然，由$\hat{A}, \hat{B}$的形式，容易看出

$$\begin{aligned} k &= rankQ_C \\ &= rank[\hat{B} \;\; \hat{A}\hat{B} \;\; \cdots \;\; \hat{A}^{n-1}\hat{B}] \\ &= rank\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{80}$$

- 进而，可得

$$rank\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = k.$$

- 又由$span\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{k-1}B_1 \end{bmatrix}$为$A_{11}$不变子空间，从而有

$$\begin{aligned} rank\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{k-1}B_1 \end{bmatrix} &= rank\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} \\ &= k \end{aligned} \tag{81}$$

- 即，可知(A_{11}, B_1)能控

综合前述的推导，我们有下面的结论

定理

定理2.12 对于不完全能控系统(75)，存在非奇异线性变换$x = T\hat{x}$，使系统结构按能控性分解的规范表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \tag{82}$$

其中，x_1为k维能控分状态向量，x_2为$n-k$维不能控分状态向量，$k = rankQ_c$.

- 由定理2.12, 可得

- 由定理2.12, 可得
  - $n-k$维子系统

$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 \tag{83}$$

  是完全不能控的

  - k维子系统

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{84}$$

  是完全能控的

- 由定理2.12, 可得
  - $n-k$维子系统
    $$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 \tag{83}$$
    是完全不能控的
  - k维子系统
    $$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{84}$$
    是完全能控的
- 对子系统(84)的能控性, 由(A_{11}, B_1)能控, 故能控Gram矩阵
  $$\bar{W}_C[0,T] = \int_0^T e^{-A_{11}t}B_1(e^{-A_{11}t}B_1)^T dt$$
  为非奇异

2.3.2 按能控性结构分解

- 由定理2.12, 可得
  - $n-k$维子系统
$$\dot{x}_2 = A_{22}x_2 \tag{83}$$
    是完全不能控的
  - k维子系统
$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{84}$$
    是完全能控的
- 对子系统(84)的能控性, 由(A_{11}, B_1)能控, 故能控Gram矩阵
$$\bar{W}_C[0,T] = \int_0^T e^{-A_{11}t}B_1(e^{-A_{11}t}B_1)^T dt$$
  为非奇异
- 若取控制$u(t)$为
$$u(t) = -B_1^T e^{-A_{11}^T t}\bar{W}_C^{-1}[0,T]\left(x_1(0) + \int_0^T e^{-A_{11}t}A_{12}e^{A_{22}t}x_2(0)dt\right)$$

➥ 则系统(84)在时刻T的状态为

$$
\begin{aligned}
x_1(T) &= e^{A_{11}T}x_1(0) + \int_0^T e^{A_{11}(T-t)}A_{12}e^{A_{22}t}x_2(0)dt \\
&\quad - \int_0^T e^{A_{11}(T-t)}B_1B_1^T e^{-A_{11}^T t}\bar{W}_C^{-1}[0,T]\left(x_1(0) + \int_0^T e^{-A_{11}t}A_{12}e^{A_{22}t}x_2(0)dt\right)dt \\
&= e^{A_{11}T}x_1(0) + \int_0^T e^{A_{11}(T-t)}A_{12}e^{A_{22}t}x_2(0)dt \\
&\quad - e^{A_{11}T}\int_0^T e^{-A_{11}t}B_1B_1^T e^{-A_{11}^T t}dt \cdot \bar{W}_C^{-1}[0,T]\Big(x_1(0) \\
&\quad + \int_0^T e^{-A_{11}t}A_{12}e^{A_{22}t}x_2(0)dt\Big) \\
&= e^{A_{11}T}x_1(0) + \int_0^T e^{A_{11}(T-t)}A_{12}e^{A_{22}t}x_2(0)dt \\
&\quad - e^{A_{11}T}\bar{W}_C[0,T]\bar{W}_C^{-1}[0,T]\left(x_1(0) + \int_0^T e^{-A_{11}t}A_{12}e^{A_{22}t}x_2(0)dt\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- 上式说明, 对任意初始状态$x_1(0) \neq 0$, 存在控制$u(t)$, 使得$x_1(T) = 0$, 故子系统(84)为完全能控的

- 上式说明, 对任意初始状态$x_1(0) \neq 0$, 存在控制$u(t)$, 使得$x_1(T) = 0$, 故子系统(84)为完全能控的

注1: 考虑到

$$\det(sI - A) = \det(sI - \hat{A}) = \det\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \det(sI - A_{11})\det(sI - A_{22}),$$

- 上式说明, 对任意初始状态$x_1(0) \neq 0$, 存在控制$u(t)$, 使得$x_1(T) = 0$, 故子系统(84)为完全能控的

注1: 考虑到

$$\det(sI - A) = \det(sI - \hat{A}) = \det \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \det(sI - A_{11}) \det(sI - A_{22}),$$

这说明系统(75)的特征值由两部分构成

- 一部分为A_{11}的特征值, 称为系统的能控振型
- 另一部分为A_{22}的特征值, 称为系统的不能控振型

- 上式说明, 对任意初始状态$x_1(0) \neq 0$, 存在控制$u(t)$, 使得$x_1(T) = 0$, 故子系统(84)为完全能控的

注1: 考虑到

$$\det(sI - A) = \det(sI - \hat{A}) = \det\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \det(sI - A_{11})\det(sI - A_{22}),$$

这说明系统(75)的特征值由两部分构成

- 一部分为A_{11}的特征值, 称为系统的能控振型
- 另一部分为A_{22}的特征值, 称为系统的不能控振型

- 可以看出, 控制u的引入, 只能改变能控振型的位置, 而不能改变不能控振型的位置

- 上式说明, 对任意初始状态$x_1(0) \neq 0$, 存在控制$u(t)$, 使得$x_1(T) = 0$, 故子系统(84)为完全能控的

注1: 考虑到

$$
\begin{aligned}
\det(sI - A) = \det(sI - \hat{A}) &= \det \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \det(sI - A_{11}) \det(sI - A_{22}),
\end{aligned}
$$

这说明系统(75)的特征值由两部分构成

- 一部分为A_{11}的特征值, 称为系统的能控振型
- 另一部分为A_{22}的特征值, 称为系统的不能控振型

- 可以看出, 控制u的引入, 只能改变能控振型的位置, 而不能改变不能控振型的位置

注2: 能控性结构分解中, 变换矩阵T的选取并不是唯一的, T的选取不同, (83)中规范表达式虽然不变, 但各块的值却不同

例2.3.1 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

例2.3.1 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

- 因为 $rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2.$ 故系统不完全能控

例2.3.1 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

- 因为 $rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2.$ 故系统不完全能控

➥ 若取

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

例2.3.1 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

- 因为$rank\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2.$ 故系统不完全能控

➥ 若取

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- 系统的能控性分解为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

对于完全能控的线性定常系统,

- 如果从能控这个基本属性出发来构造一个非奇异的变换矩阵,那么可把系统的状态空间描述在这一线性变换下,化成只有能控系统才具有的标准形式,称之为能控规范型

- 考虑完全能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= cx, \end{aligned} \tag{85}$$

其中, A为$n \times n$常阵, b和c分别为$n \times 1, 1 \times n$常阵

- 考虑完全能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= cx, \end{aligned} \tag{85}$$

其中, A为$n \times n$常阵, b和c分别为$n \times 1, 1 \times n$常阵

- 由于系统为完全能控, 故有

$$rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n. \tag{86}$$

- 考虑完全能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu, \\ y &= cx, \end{aligned} \tag{85}$$

其中, A为$n \times n$常阵, b和c分别为$n \times 1, 1 \times n$常阵

- 由于系统为完全能控, 故有

$$rank\begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n. \tag{86}$$

- 此外, 令系统的特征多项式为

$$\det(sI - A) = \alpha(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0. \tag{87}$$

- 构造变换矩阵

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{88}
$$

显然, P在系统能控条件下为非奇异

- 构造变换矩阵

$$
\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{88}
$$

显然, P在系统能控条件下为非奇异

- 定义n个常数

$$
\begin{aligned}
\beta_{n-1} &= cb, \\
\beta_{n-2} &= cAb + a_{n-1}cb, \\
&\cdots\cdots \\
\beta_1 &= cA^{n-2}b + a_{n-1}cA^{n-3}b + \cdots + a_2cb, \\
\beta_0 &= cA^{n-1}b + a_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + a_1cb.
\end{aligned}
\tag{89}
$$

在前述基础上，可导出系统能控规范型的基本结论

定理

定理2.13 对于完全能控的单输入—单输出系统(85)，引入线性非奇异变换$x = P\bar{x}$，即可导出其能控规范型为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= A_c\bar{x} + b_c u, \\ y &= c_c\bar{x}, \end{aligned} \tag{90}$$

其中，

$$A_c = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \; b_c = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{91}$$

$$c_c = cP = \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

证明 (1) 推导A_c的形式

证明 (1) 推导A_c的形式

- 利用$A_c = P^{-1}AP$, 可导出

$$PA_c = AP = \begin{bmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \cdots & Ae_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^n b & \cdots & A^2 b & Ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}. \tag{92}$$

证明 (1) 推导A_c的形式

- 利用$A_c = P^{-1}AP$, 可导出

$$PA_c = AP = \begin{bmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \cdots & Ae_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^nb & \cdots & A^2b & Ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}. \tag{92}$$

- 利用凯莱-哈密顿定理, $\alpha(A) = 0$和(88)可进一步得到

$$\begin{aligned} Ae_1 &= (A^nb + a_{n-1}A^{n-1}b + \cdots + a_1Ab + a_0b) - a_0b = -a_0e_n, \\ Ae_2 &= (A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \cdots + a_2Ab + a_1b) - a_1b = e_1 - a_1e_n, \\ &\cdots\cdots \\ Ae_{n-1} &= (A^2b + a_{n-1}Ab + a_{n-2}b) - a_{n-2}b = e_{n-2} - a_{n-2}e_n, \\ Ae_n &= (Ab + a_{n-1}b) - a_{n-1}b = e_{n-1} - a_{n-1}e_n, \end{aligned} \tag{93}$$

- 将(93)代入(92), 可得

$$
\begin{aligned}
PA_c &= \begin{bmatrix} -a_0 e_n & e_1 - a_1 e_n & \cdots & e_{n-2} - a_{n-2} e_n & e_{n-1} - a_{n-1} e_n \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{94}
$$

- 将(93)代入(92), 可得

$$PA_c = \begin{bmatrix} -a_0 e_n & e_1 - a_1 e_n & \cdots & e_{n-2} - a_{n-2} e_n & e_{n-1} - a_{n-1} e_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{94}$$

- 因为$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = P$, 将上式左乘$P^{-1}$, 即可得$A_c$的表达式

- (2) 推导b_c的形式

- (2) 推导b_c的形式
- 利用$b_c = P^{-1}b$和(88), 可导出

$$
\begin{aligned}
Pb_c = b = e_n \\
= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
= P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{95}
$$

- (2) 推导b_c的形式
- 利用$b_c = P^{-1}b$和(88), 可导出

$$
\begin{aligned}
Pb_c &= b = e_n \\
&= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{95}
$$

- 将上式左乘P^{-1}, 即可得b_c的表达式

- (3) 推导c_c的形式

- (3) 推导c_c的形式
- 由$c_c = cP$和式(88)及(89), 可得

$$\begin{aligned} c_c &= cP \\ &= c\begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{96}$$

即得c_c的表达式

- (3) 推导c_c的形式
- 由$c_c = cP$和式(88)及(89), 可得

$$
\begin{aligned}
c_c &= cP \\
&= c\begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{96}
$$

即得c_c的表达式

➥ 综合(1)~(3), 定理结论得证 ■

例2.4.1 给定能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \ n = 3,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

例2.4.1 给定能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \; n = 3,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

- 其特征多项式

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^3 - 5s + 4,$$

第2章
2.1 能控性定义
2.2 能控性判据
2.3 能控性分解
2.4 单输入——单输出系统的能控规范型

例2.4.1 给定能控的单输入——单输出线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \; n = 3,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

- 其特征多项式

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^3 - 5s + 4,$$

- 进而，有

$$\beta_2 = cb = 3$$
$$\beta_1 = cAb + a_2cb = 4$$
$$\beta_0 = cA^2b + a_2cAb + a_1cb = 0,$$

- 则系统的能控规范型为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}$$

- 则系统的能控规范型为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}$$

由(88)式, 还可求得变换阵

$$P = \begin{bmatrix} A^2 b & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

注1: 能控规范型(A_c, b_c)以明显的形式与反映系统结构特性的特征多项式系数直接联系起来, 对于综合系统的状态反馈, 是很方便的

注2: 容易证明, 对于代数等价的完全能控系统, 具有相同的能控规范型

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 29–52