第7章　线性二次型最优控制与系统输入输出解耦

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 7.1 线性二次型最优控制问题的描述

2. 7.2 有限时间调节问题

考虑受控线性系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中, $x(t)$ 为n 维状态向量, $u(t)$ 为p 维输入向量, A, B 分别为$n \times n$, $n \times p$ 的实常阵

- 受控系统的性能指标为

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt, \tag{2}$$

其中,

  - $x(t_f)$为$t = t_f$时的末状态
  - S, Q, R分别为$n \times n, n \times n, p \times p$维的已知加权对称矩阵, 且$S \geq 0$为半正定, $Q \geq 0$为半正定, $R > 0$为正定.

- 性能指标$J(u)$为控制u的一个泛函

线性二次型最优控制问题, 也称为LQ(Linear Quadratic)问题

- 系统(1) 的LQ问题, 就是寻找一个控制$u^*(t)$, 使得其性能指标值最小, 即

$$J(u^*) = \min J(u). \tag{3}$$

  称控制函数$u^*(t)$为最优控制, 相应于最优控制$u^*(t)$的系统(1)的轨线$x^*(t)$为最优轨线, $J(u^*)$为最优性能指标值

- LQ问题可分为有限时间LQ问题和无限时间LQ问题
  - 终止时刻$t = t_f$固定且为有限值的LQ问题为有限时间LQ问题
  - 终止时刻$t_f = \infty$时的LQ问题为无限时间LQ问题
- 若末状态$x(t_f)$趋于0, 称为调节问题

➥ 本章主要讨论线性定常系统(1)的状态调节问题.

1 7.1 线性二次型最优控制问题的描述

2 7.2 有限时间调节问题

考虑如下的LQ问题,

- 系统为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0, \tag{4}$$

- 二次指标为

$$J(u) = \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt. \tag{5}$$

定理

定理7.1 有限时间LQ调节问题(4), (5)存在最优控制$u^*(t)$, 且$u^*(t)$为最优控制的充分必要条件是

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TP(t)x(t), \tag{6}$$

其中, $P(t)$为下面Riccati微分方程的半正定解

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t) &= P(t)A + A^TP(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^TP(t), \\ P(t_f) &= S. \end{aligned} \tag{7}$$

相应的最优性能指标为

$$J^* = \frac{1}{2}x_0^TP(0)x_0, \tag{8}$$

最优轨线$x^*(t)$为下述状态方程的解

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^TP(t))x,\ x(0) = x_0. \tag{9}$$

证明: 必要性. 已知$u^*(t)$为最优控制, 证$u^*(t) = -R^{-1}B^TP(t)x(t)$

证明：必要性. 已知$u^*(t)$为最优控制, 证$u^*(t)=-R^{-1}B^TP(t)x(t)$

- 构造哈密顿函数

$$H(x,u,\lambda)=\frac{1}{2}(x^TQx+u^TRu)+\lambda^T(Ax+Bu). \tag{10}$$

➥ 根据极大值原理中的极值条件, 最优控制$u^*(t)$应使哈密顿函数取得最小, 因为$u(t)$无约束, 即得

$$\frac{\partial H}{\partial u}=Ru+B^T\lambda=0. \tag{11}$$

从而得

$$u^*(t)=-R^{-1}B^T\lambda. \tag{12}$$

- 又因为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)=R>0, \tag{13}$$

故控制$u^*(t)$使哈密顿函数(10)取得最小

7.2 有限时间调节问题

- 利用(12)及(4)可导出如下两点边值问题

$$\dot{x} = Ax - BR^{-1}B^T\lambda,\ x(0) = x_0, \tag{14}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -Qx - A^T\lambda,\ \lambda(t_f) = Sx(t_f). \tag{15}$$

- 注意到上述方程和端点条件均为线性，所以可知$\lambda(t)$和$x(t)$之间必为线性关系，表示为

$$\lambda(t) = P(t)x(t), \tag{16}$$

则由(16)和(14)可得

$$\begin{aligned}\dot{\lambda} &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x} \\ &= \dot{P}(t)x + P(t)\left[Ax - BR^{-1}B^T\lambda\right] \\ &= \left[\dot{P}(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^TP(t)\right]x.\end{aligned} \tag{17}$$

- 又由(15)可得

$$\dot{\lambda} = (-Q - A^TP(t))x. \tag{18}$$

- 由(17)与(18)相等, 并且一般地有$x(t) \neq 0$, 从而导出$P(t)$应满足方程

$$-\dot{P}(t) = P(t)A + A^T P(t) - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q. \tag{19}$$

- 此外, 再由(15), (16)可导出

$$P(t_f) = S. \tag{20}$$

- 将(16)代入(12), 即得最优控制$u^*(t)$

$$u^*(t) = -BR^{-1}B^T P(t)x(t), \tag{21}$$

其中, $P(t)$为(19), (20)的解. 必要性得证.

- 充分性. 已知$u^*(t)$如(6)所示, 证其为最优控制

第7章

7.1 线性二次型最优控制问题的描述

7.2 有限时间调节问题

- 充分性. 已知$u^*(t)$如(6)所示, 证其为最优控制
- 考虑如下等式

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x^T(t_f)P(t_f)(t_f)x(t_f) - \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0)\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\frac{d}{dt}\left(x^TP(t)x\right)dt\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\dot{x}^TP(t)x + x^T\dot{P}(t)x + x^TP(t)\dot{x}\right]dt\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[(Ax+Bu)^TP(t)x + x^T\dot{P}(t)x + x^TP(t)(Ax+Bu)\right]dt\\
=&\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left\{x^T\left[A^TP(t)+\dot{P}(t)+P(t)A\right]x + u^TB^TP(t)x\right.\\
&\left.+\,x^TP(t)Bu\right\}dt
\end{aligned}
\tag{22}
$$

- 由(7)得

$$A^T P(t) + \dot{P}(t) + P(t)A = -Q + P(t)BR^{-1}B^T P(t),$$

- 将上式代入(22), 并作配方处理, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}x^T(t_f)P(t_f)(t_f)x(t_f) - \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0) \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\Big[-x^T Qx + x^T P(t)BR^{-1}B^T P(t)x + u^T B^T P(t)x \\
&\quad + x^T P(t)Bu\Big]dt \\
=&\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\Big\{-x^T Qx - u^T Ru \\
&\quad + [u + R^{-1}B^T P(t)x]^T R[u + R^{-1}B^T P(t)x]\Big\}dt,
\end{aligned} \tag{23}$$

- 注意到$P(t_f) = S$, 则由上式可导出

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}x^T(t_f)Sx(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right]dt \\ &= \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[u + R^{-1}B^TP(t)x\right]^T R\left[u + R^{-1}B^TP(t)x\right]dt \\ &\geq \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0). \end{aligned} \tag{24}$$

- 上式(24)表明当$u^*(t) = -R^{-1}B^TP(t)x(t)$时, 性能指标$J(u)$取最小值, 即

$$J^* = J(u^*) = \frac{1}{2}x^T(0)P(0)x(0), \tag{25}$$

也即$u^*(t)$为最优控制. 充分性得证 ■

注: 从定理7.1出发, 对于有限时间LQ调节问题, 还可得到以下的结论:

1. 对于有限时间LQ调节问题(4), (5), 其最优调节系统(或最优闭环)是一个状态反馈系统, 反馈阵$K(t) = -R^{-1}B^TP(t)$, 动态方程为(9), 尽管受控系统是定常的, 但其最优调节系统却是时变的
2. 对于有限时间LQ调节问题(4), (5), 其最优控制$u^*(t)$一定存在, 不依赖于系统(A, B)是否能控
3. 对于有限时间LQ调节问题(4), (5), 其最优控制$u^*(t)$是唯一的, 因为Riccati微分方程(7) 的解是唯一的, 且为半正定

- 对于有限时间LQ调节问题(4), (5)的求解, 关键是解Riccati微分方程(7). 一般地说, 其解析形式的解很难得到, 通常只能采用数值方法用计算机求解

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 145–148