线性系统理论习题答案

习题 1

1.解：a) 由电路学知识得

$$e(t)=iR+u_c+L\dot{i},u_C=\frac{1}{c}\int idt\,.$$

设 $x_1=u_C,x_2=i,u=e(t),y=i$，则

$$\dot{x}_1=\frac{1}{C}i=\frac{1}{C}x_2,$$

$$\dot{x}_2=\frac{1}{L}(e(t)-iR-u_C)=-\frac{R}{L}x_2-\frac{1}{L}x_1+\frac{1}{L}u,$$ 即

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{C}\\-\frac{1}{L}&-\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{L}\end{bmatrix}u,\\ y=\begin{bmatrix}0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.\end{cases}$$

b) $u_{C_1}=\frac{1}{C_1}\int idt$，$u_{C_1}=x_1$，$u_{C_2}=\frac{1}{C_2}\int idt$，$u_{C2}=x_2$，

$e(t)=iR+u_{C_{1c}}+u_{C_{2c}}$，　$u=e(t)$，$u=u_{C_{1c}}+u_{C_{2c}}$，$y=u_C$．

则 $$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{C_1R}&-\frac{1}{C_1R}\\-\frac{1}{C_2R}&-\frac{1}{C_2R}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C_1R}\\\frac{1}{C_2R}\end{bmatrix}u,\\ y=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}.\end{cases}$$

2. 解：由电路学知识得

$$e(t)=iR+L\dot{i}+V_C,V_C=\frac{1}{C}\int idt.$$

设　$x_1=i,x_2=V_C,u=e(t),y=V_C$,则

$$\dot{x}_1=\dot{i}=-\frac{R}{L}i-\frac{1}{L}V_C+\frac{1}{L}e(t)=-\frac{R}{L}x_1-\frac{1}{L}x_2+\frac{1}{L}u,$$

$$\dot{x}_2=\frac{1}{C}i=\frac{1}{C}x_1.$$ 即

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

3. 解：由电路学知识得

$i_3 = i_1 + i_{C_2}$ ①

$i_2 = i_3 + i_{C_1}$ ②

$V_{C_1} = \dfrac{1}{C_1}\int i_{C_1} dt = i_3 R_3 + V_{C_2}$ ③

$V_{C_2} = \dfrac{1}{C_2}\int i_{C_2} dt = i_1 R_1 + u_1$ ④

$u_2 = i_2 R_2 + V_{C_1}$ ⑤

由①-⑤得

$$i_{C_1} = i_2 - i_3 = \frac{1}{R_2}(u_2 - V_{C_1}) - \frac{1}{R_3}(V_{C_1} - V_{C_2})$$

$$= (-\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3})V_{C_1} + \frac{1}{R_3}V_{C_2} + \frac{1}{R_2}u_2,$$

$$i_{C_2} = i_3 - i_1 = \frac{1}{R_3}(V_{C_1} - V_{C_2}) - \frac{1}{R_1}(V_{C_2} - u_1)$$

$$= \frac{1}{R_3}V_{C_1} + (-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3})V_{C_2} + \frac{1}{R_1}u_1,$$

$\dot{V}_{C_1} = \dfrac{1}{C_1} i_{C_1}$，$\dot{V}_{C2} = \dfrac{1}{C_2} i_{C_2}$，

设 $V_{C_1} = x_1$，$V_{C_2} = x_2$，$y = \begin{bmatrix} V_{C_1} \\ V_{C_2} \end{bmatrix}$， $y = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$，则

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{C_1R_2} - \dfrac{1}{C_1R_3} & \dfrac{1}{C_1R_3} \\ \dfrac{1}{C_2R_3} & -\dfrac{1}{C_2R_3} - \dfrac{1}{C_2R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C_1R_2} \\ \dfrac{1}{C_2R_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

4. 解：对方程 $\ddot{y}-y=\dot{u}+u$ 两边作拉氏变换得：

$$(s^2-1)y(s)=(s+1)u(s)$$

令 $u(s)=(s^2-1)z(s),\ y(s)=(s+1)z(s)$，则

$$u(t)=\ddot{z}-z,\ y(t)=\dot{z}+z.$$

设 $x_1=z, x_2=\dot{z}$，则

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u,\ \mathrm{y}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

5. 解：$\dddot{y}+6\ddot{y}+11\dot{y}+6y=6u$，

令 $x_1=y,\ x_2=\dot{y}, x_3=\ddot{y}$, 则

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 6\end{pmatrix}u,\\ y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.\end{cases}$$

6. 解：(1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s-1 & -1\\ 0 & s-1\end{vmatrix}=(s-1)^2,$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{(s-1)^2}\begin{pmatrix}s-1 & 1\\ 0 & s-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1} & \frac{1}{(s-1)^2}\\ 0 & \frac{1}{s-1}\end{pmatrix}.$$

(2) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$(sI-A)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{s-1} & \\ & \frac{1}{s-1}\end{pmatrix}$.

(3) $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix}$,

$$|sI-A|=\begin{vmatrix}s-2&-3&-1\\-1&s-3&-1\\-1&-2&s-2\end{vmatrix}=s^3-7s^2+10s-4,$$

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s^3-7s^2+10s-4}\begin{pmatrix}s^2-5s+4&3s-4&s\\s-1&s^2-4s+3&s-1\\s-1&2s-1&s^2-5s+3\end{pmatrix}.$$

7. 解：(1) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&-3&0\\-1&1&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$， $C=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}$.

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s&-1&0\\2&s+3&0\\1&-1&s-3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3-7s-6}\begin{pmatrix}0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s^2-9&s-3&0\\-2s+6&s^2-3s&0\\-s-5&s-1&s^2+3s+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

$$=\frac{2s^2+7s+3}{s^3-7s-6}.$$

(2) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-3&-1&-2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}$.

$$G(s)=C(sI-A)^{-1}B=\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\3&1&s+2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3+2s+s+3}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s^2+2s+1&s+2&1\\-3&s^2+2s&s\\-3s&-s-3&s^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{s^3+2s+s+3}\begin{pmatrix}2s^2-1&2s^2+3s\end{pmatrix}$$

8. 解：$G(s)=\dfrac{C_1s^{n-1}+\cdots+C_{n-1}s+C_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}+C_0$.

9. 证明类似定理 1.4, 此处略.

10. 解：$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}[\begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{pmatrix}^{-1}]$

$$=L^{-1}[\begin{pmatrix} \frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2} \\ \frac{-2}{s+1}+\frac{2}{s+2} & \frac{-1}{s+1}+\frac{2}{s+2} \end{pmatrix}]$$

$$=\begin{pmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

$$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$=\begin{pmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+\int_0^t\begin{pmatrix} 2e^{-\tau}-e^{-2\tau} & e^{-\tau}-e^{-2\tau} \\ -2e^{-\tau}+2e^{-2\tau} & 2e^{-2\tau}-e^{-\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-(t-\tau)}d\tau$$

$$=\begin{pmatrix} e^{-t}-e^{-2t} \\ 2e^{-2t}-e^{-t} \end{pmatrix}+e^{-t}\int_0^t\begin{pmatrix} 4-2e^{-\tau} \\ -4+4e^{-\tau} \end{pmatrix}d\tau$$

$$=\begin{pmatrix} (4t-1)e^{-t}+e^{-2t} \\ (3-4t)e^{-t}-2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

11. 解：$e^{At}=\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$，$u(t)=1,\ t\geq 0,.$

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A\tau}Bu(t-\tau)d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix} e^{-\tau} & \tau e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix} 1+te^{-t} \\ 1+e^{-t} \\ 2-e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

12. 解：$A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$，　$|sI-A|=\begin{vmatrix} s & 1 \\ -4 & s \end{vmatrix}=s^2+4$

$$=\begin{bmatrix}1 & t & 0\end{bmatrix}\int_0^t\begin{bmatrix}-a\tau\sin\omega\tau\\ a\sin\omega\tau\\ 0\end{bmatrix}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}1 & t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{a}{\omega}t\cos\omega t-\frac{a}{\omega^2}\sin\omega t\\ -\frac{a}{\omega}\cos\omega t+\frac{a}{\omega}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{a}{\omega}t-\frac{a}{\omega^2}\sin\omega t.$$

14. 解：解法一　做 z 变换：$Z(k)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$，求得 $x(z)$.

解法二 递推方法：

$$\begin{cases} x(k+2)+2x(k+1)+x(k)=k & (1)\\ x(k+3)+2x(k+2)+x(k+1)=k+1 & (2)\end{cases}$$

$(2)-(1)\Rightarrow$

$x(k+3)+x(k+2)-x(k+1)-x(k)=1$, 即

$$x(k+3)+x(k+2)-\frac{k+2}{2}=x(k+1)+x(k)-\frac{k}{2}.$$

$$k=2l \qquad x(2l+1)+x(2l)-l=x(1)+x(0)-0=0, \qquad (3)$$

$$k=2l+1 \qquad x(2l+2)+x(2l+1)-\frac{1}{2}-l=x(2)+x(1)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

$(3)-(4)\Rightarrow x(2l)=0$.

由(3)得：$x(2l+3)+x(2l+2)-l-1=0,\qquad (5)$

$(5)-(4)\Rightarrow x(2l+1)=0$.

15 解：解法一

设 $x(k+1)=\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ x_3(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y(k)\\ y(k+1)\\ y(k+2)\end{bmatrix}$, $u(k)=\begin{bmatrix}u_1(k)\\ u_2(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u(k)\\ u(k+1)\end{bmatrix}$, 则

$$x_1(k+1)=x_2(k),$$
$$x_2(k+1)=x_3(k),$$
$$x_3(k+1)=-2x_2(k)-3x_3(k)+2u_2(k)+3u_1(k),$$
$$y(k)=x_2(k).$$

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-2&-3\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\3&2\end{bmatrix}u(k),$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}x(k).$$

解法二 作 z 变换：

$$z^2y(z)+3zy(z)+2y(z)=2zu(z)+3u(z),$$

$$\frac{y(z)}{u(z)}=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}.$$

令 $y(z)=(2z+3)x(z)$，$u(z)=(z^2+3z+2)x(z)$，

$x(k)=x_1(k),\ x(k+1)=x_2(k),$ 则

$$\begin{bmatrix}x_1(k+1)\\x_2(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u(k),$$

$$y(k)=\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(k)\\x_2(k)\end{bmatrix}.$$

16. 解：$e^{At}=\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}$，则

$$G=e^{AT}=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix},$$

$$H=\int_0^2 e^{At}Bdt=\int_0^2\begin{bmatrix}1&t\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}dt=\int_0^2\begin{bmatrix}t\\1\end{bmatrix}dt=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix},$$ 则

$$x(k+1)=\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}x(k)+\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}u(k).$$

17. 解：$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\quad T=1,$

$$e^{At}=L^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & -\frac{1}{2}(\frac{1}{s}-\frac{1}{s-2}) \\ 0 & \frac{1}{s-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} \\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix},$$

$$G=e^{AT}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(e^{2}-1) \\ 0 & e^{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3.1945 \\ 0 & 7.3891\end{bmatrix},$$

$$H=\int_0^T e^{At}Bdt=\int_0^T\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{2t} \\ e^{2t}\end{bmatrix}dt=\left.\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}(2T+1-e^{2T}) \\ \frac{1}{2}(e^{2T}-1)\end{bmatrix}\right|_{T=1}=\begin{bmatrix}1.0973 \\ 3.1946\end{bmatrix},$$

$$x(k+1)=Gx(k)+Hu(k),$$
$$y(k)=Cx(k)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(k).$$

习题 2

3. 设 $x_0 \in X_C$，证明在任意控制 $u(t)$ 作用下，自 x_0 出发的轨线 $x(t)$ 上的任一点均属于 X_C.

证：$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$，

因为 $I = e^{At}x_0 = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t)A^j x_0 \in Xc$

$$II = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(t-\tau)A^j Bu(\tau)d\tau$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} A^j B\int_0^t \alpha_j(t-\tau)u(\tau)d\tau \in Xc$$

所以 $x(t) \in Xc$.

补充：$x_0 \in X_{NC}$, 不一定 $x(t) \in X_{NC}$.

例：$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

则 $X_C = span\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$X_{NC} = span\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$e^{At} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$I = e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

显然 $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \in X_C$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin X_C$, 故 $I \notin X_C$, 又 $II \in X_C$，因此 $I + II \notin X_C$.

4．证明：设 $u^0(t)$ 为任一将 x_0 导引到原点的控制，则

$$x_0 = -\int_0^T e^{-At}Bu^*(t)dt \quad ①$$

$$x_0 = -\int_0^T e^{-At}Bu^0(t)dt \quad ②$$

②-①得 $0 = \int_0^T e^{-At}B(u^*(t) - u^0(t))dt$

$$\Rightarrow 0 = -z_0^T \int_0^T e^{-At}B(u^*(t) - u^0(t))dt$$

$$\Rightarrow 0 = \int_0^T u^{*T}(t)(u^*(t) - u^0(t))dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T u^{*T} u^*(t)dt = \int_0^T u^{*T}(t)u^0(t)dt \quad ③$$

另外由

$$\int_0^T \left\| u^0(t) - u^*(t) \right\|^2 dt \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_0^T (u^0(t) - u^*(t))(u^0(t) - u^*(t))dt$$

$$= \int_0^T u^{0^T} u^0(t)dt - \int_0^T u^{*^T}(t)u^0(t)dt - \int_0^T u^{0^T}(t)u^*(t)dt + \int_0^T u^{*^T} u^*(t)dt$$

$$= \int_0^T u^{0^T}(t)u^0(t)dt - \int_0^T u^{0^T}(t)u^*(t)dt$$

$$= \int_0^T u^{0^T}(t)u^0(t)dt - \int_0^T u^{*^T}(t)u^*(t)dt \ge 0$$

$$\Rightarrow \int_0^T u^{0^T}(t)u^0(t)dt \ge \int_0^T u^{*^T}(t)u^*(t)dt .$$

因此，$u^*(t)$ 导引下 $I = \int_0^T u^T(t)u(t)dt$ 最小，称之为极小能量控制.

5. 解：(1) 记电容两端电压为 $V(t)$，则

$$V = \frac{1}{C}\int idt, \quad i(t) > 0 \text{充电}, \quad i(t) < 0 \text{放电}.$$

则 $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{C}i(t)$，即

$$\dot{V} = AV + Bi,\ A = 0,\ B = \frac{1}{C},$$

其中 V 为状态，$i(t)$为控制, $V(0)=V_0$.

能控 Gram 阵 $W_C[0,T] = \int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt = \dfrac{T}{C^2}$,系统完全能控.

由 $V_0 = W_C[0,T]z_0 = \dfrac{T}{C^2}z_0$ 得 $z_0 = \dfrac{C^2}{T}V_0$.

取 $i^*(t) = -(e^{At}B)^T z_0 = -\dfrac{1}{C}\dfrac{C^2}{T}V_0 = -\dfrac{CV_0}{T}$ (阶跃输入).

(2) 设 $i^0(t)=kt$ (斜坡输入),

由 $V_0 = -\int_0^T e^{-At}Bi^0(t)dt = -\int_0^T \dfrac{1}{C}ktdt = -\dfrac{kT^2}{2C}$ 得 $k = -\dfrac{2CV_0}{T^2}$.

(3) $I^* = R\int_0^T i^{*^2}(t)dt = R\int_0^T (-\dfrac{CV_0}{T})^2 dt = \dfrac{RC^2V_0^{\ 2}}{T}$,

$$I^0 = R\int_0^T i^{0^2}(t)dt = R\int_0^T (-\frac{2CV_0}{T^2})^2 t^2 dt = \frac{4}{3}\frac{RC^2}{T}V_0^{\ 2},$$

显然 $I^0 > I^*$.

(4) $I^{*} \le L \Rightarrow \dfrac{RC^{2}{V_{0}}^{2}}{T} \le L \Rightarrow T \ge \dfrac{RC^{2}{V_{0}}^{2}}{L}$.

9. 解： 充分性：由 (A_i, b_i) 能控且 A_1, A_2 无公共特征值来证($A = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$)能控.

$$rank\begin{pmatrix} \lambda_i I - A_1 & & b_1 \\ & \lambda_i I - A_2 & b_2 \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} \lambda_i I - A_1 & & b_1 \\ & \lambda_i I - A_2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= n_2 + rank(\lambda_i I - A_1 \quad b_1).$$

由 $\lambda(A_1) \ne \lambda(A_2)$知若 λ_i 为 A_1 的特征值，则 $\lambda_i - A_2$ 非奇异.

又由 (A_1, b_1) 能控知 $rank[\lambda_i I - A_1 \quad b_1] = n_1$, 从而 $rank[\lambda_i I - A \quad b] = n$.

若 λ_i 为 A_2 的特征值, 同理可证. 综合之, 即得 (A, b) 能控.

必要性：由 (A, b) 能控来证 (A_i, b_i) 能控且 A_1, A_2 无公共特征值.

$$rank\begin{pmatrix} sI - A_1 & & b_1 \\ & sI - A_2 & b_2 \end{pmatrix} = n, \forall s \in C$$

$$\Rightarrow rank[sI - A_1 \quad b_1] = n_1,\ rank[sI - A_2 \quad b_2] = n_2, \forall s \in C$$

故 (A_i, b_i) 能控

反证, 若 A_1, A_2 有相同的特征值 λ，则

$$rank\begin{pmatrix} \lambda I - A_1 & \\ & \lambda I - A_2 \end{pmatrix} \le n - 2$$

$$\Rightarrow rank\begin{pmatrix} \lambda I - A_1 & & b_1 \\ & \lambda I - A_2 & b_2 \end{pmatrix} \le n - 1 < n$$

$\Rightarrow (A, b)$ 不能控 $\Rightarrow$ 反设不成立 $\Rightarrow A_1, A_2$ 无公共特征值.

11. 证明：

必要性：已知 $(A, B) \Rightarrow$ 若 $AX = XA, XB = 0$, 则必有 $X = 0$.

$$XB = 0$$
$$XAB = AXB = 0$$
$$XA^2B = AXAB = 0$$
$$\vdots$$
$$XA^{n-1}B = 0$$

$$\Rightarrow X[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = 0$$

(A,B) 能控 $\Rightarrow \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ 行满秩 $\Rightarrow X=0$.

充分性：反设 (A,B) 不能控，对 (A,B) 进行能控性分解.

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \hat{B} = T^{-1}B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{X} = T^{-1}XT = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}.$$

(A_{11}, B_1) 完全能控 $\Rightarrow \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & {A_{11}}^{n-1}B_1 \end{bmatrix}$ 行满秩.

$$AX = XA, XB = 0 \Rightarrow \hat{A}\hat{X} = \hat{X}\hat{A}, \hat{X}\hat{B} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{X}\begin{pmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \cdots & \hat{A}^{n-1}\hat{B} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow X_1 = 0, X_3 = 0.$$

$$\hat{A}\hat{X} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A_{11}X_2 + A_{12}X_4 \\ 0 & A_{22}X_4 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ 0 & X_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & X_2A_{22} \\ 0 & X_4A_{22} \end{pmatrix}$$

令 $X_4 = -I$，则 $A_{22}X_4 = X_4A_{22}$，$A_{11}X_2 - X_2A_{22} = -A_{12}$.

由 $\lambda_i(A_{11}) \neq \lambda_i(A_{22})$ 知上述方程有唯一解. 因此存在 $\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & X_2 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \neq 0$ 使得

$\hat{A}\hat{X} = \hat{X}\hat{A}$，$\hat{X}B = 0$ 成立．产生矛盾．因此 (A,B) 能控.

12. 解：$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B, \cdots, A^kB = B \Rightarrow (A,B) \text{ 不完全能控.}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in Xc \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\int_0^1 e^{-At}Bu(t)dt \text{ 有解 } u(t).$$

$$e^{-At}B = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-At)^k}{k!}B = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}A^kBt^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!}B = e^{-t}B = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix},$$

则 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} u(t)dt$. 取 $u(t) = -2e^t$ 即可.

14. 证明：充分性：

考察 $rank\begin{pmatrix} sI-A & 0 & B \\ -C & sI & 0 \end{pmatrix}$,

若 $s\neq0$, 则上式 $= rank\begin{pmatrix} sI-A & 0 & B \\ 0 & sI & 0 \end{pmatrix}$ 行满秩,

若 $s=0$，则上式 $= rank\begin{pmatrix} -A & 0 & B \\ -C & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 行满秩,

因此 $\begin{pmatrix} sI-A & 0 & B \\ -C & sI & 0 \end{pmatrix}$ 行满秩, $\forall s\in C$,即($\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$)能控.

必要性：($\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$)能控 $\Rightarrow \begin{pmatrix} sI-A & 0 & B \\ -C & sI & 0 \end{pmatrix}$ 行满秩, $\forall s\in C$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix}$ 行满秩, $\forall s\in C \Rightarrow (A,B)$ 能控

$s=0$ 时, $\begin{pmatrix} -A & 0 & B \\ -C & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 行满秩 $\Rightarrow rank\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 行满秩.

15. 证明： $x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}(Bu(\tau)+f(\tau))d\tau$,

(A,B) 能控 $\Rightarrow W_C(0,T)=\int_0^T e^{-At}B(e^{-At}B)^T dt$ 非奇异.

取 $u(t)=-(e^{-At}B)^T W_C^{-1}(0,T)(x_0+\int_0^T e^{-At}f(t)dt)$，则 $x(T)=0$.

19. 证明： $span\begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n_1-1}B_1 \end{bmatrix}=R^{n_1}=span(I_{n_1})$,

$X_C(\hat{A},\hat{B})=span\begin{pmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n_1-1}B_1 \\ & & 0 & \end{pmatrix}=span\begin{pmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$X_{NC}(\hat{A},\hat{B})$ 为 $X_C(\hat{A},\hat{B})$ 的正交补, 故 $X_{NC}(\hat{A},\hat{B})=span\begin{pmatrix} O \\ I_{n_2} \end{pmatrix}$.

20. 证明：(1) $\dim X_{C[A,B]}=\dim X_{C[\hat{A},\hat{B}]}=n_1$,

$\forall x_0\in X_{C[A,B]}$, 由 $x_0=T\hat{x}_0 \Rightarrow \hat{x}_0=T^{-1}x_0$,

其中 $T^{-1}=\begin{pmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{pmatrix}$, F_2 各列属于 X_{NC}..

$$\hat{x}_0 = T^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} F_1^{\ T} \\ F_2^{\ T} \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} F_1^{\ T} x_0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

由 $X_{C[\hat{A},\hat{B}]} = span\begin{pmatrix} I_{n_1} \\ 0 \end{pmatrix}$ 知 $\hat{x}_0 \in X_{C[\hat{A},\hat{B}]} \Rightarrow X_{C[\hat{A},\hat{B}]} = \{x_0 | x_0 = T\hat{x}_0, x_0 \in X_{C[A,B]}\}$.

(2) 例：$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$X_{C[A,B]} = span\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $XN_{C[A,B]} = span\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$T = \begin{bmatrix} X_C & G \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\hat{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$X_{C[\hat{A},\hat{B}]} = span\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_{NC[\hat{A},\hat{B}]} = span\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \notin X_{NC[\hat{A},\hat{B}]}$.

(3) $T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$, $T_1 \in X_C$, $T_2 \in X_{NC}$, $x = T\hat{x}$.

$T^{-1} = \begin{pmatrix} F_1^{\ T} \\ F_2^{\ T} \end{pmatrix}$, $T^{-1}T = \begin{pmatrix} F_1^{\ T}T_1 & F_1^{\ T}T_2 \\ F_2^{\ T}T_1 & F_2^{\ T}T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \Rightarrow F_1 \in X_C, F_2 \in X_{NC}$.

则 $\alpha \in X_{NC}$，$x = T\alpha$，$\alpha = T^{-1}x = \begin{pmatrix} F_1^{\ T} \\ F_2^{\ T} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2^{\ T} x \end{pmatrix} \in X_{NC[\hat{A},\hat{B}]}$,

$X_{NC[\hat{A},\hat{B}]} = \{\alpha | x = T\alpha, \alpha \in X_{NC[A,B]}\}$.

23. (1)证明：$W_C(n)$ 各列具有形式 $\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}\xi$,

故 $Wc(n) \subseteq span\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} = X_C$.

又 $rank Wc(n) = rank\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}$,

故 $\dim span Wc(n) = \dim X_C$,

从而 $span Wc(n) = X_C$.

(2) 证明：$G^n x_0 = -[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H]\begin{pmatrix} u*(n-1) \\ u*(n-2) \\ \vdots \\ u*(0) \end{pmatrix}$, ①

$$G_n x_0 = -[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H]\begin{pmatrix} u^0(n-1) \\ u^0(n-2) \\ \vdots \\ u^0(0) \end{pmatrix}, ②$$

$$②-①\Rightarrow \left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right]\left(\begin{pmatrix} u*(n-1) \\ u*(n-2) \\ \cdots \\ u*(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^0(n-1) \\ u^0(n-2) \\ \cdots \\ u^0(0) \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -z_0^T\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right]\left(\begin{pmatrix} u*(n-1) \\ u*(n-2) \\ \cdots \\ u*(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^0(n-1) \\ u^0(n-2) \\ \cdots \\ u^0(0) \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u*(n-1) \\ u*(n-2) \\ \cdots \\ u*(0) \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} u*(n-1) \\ u*(n-2) \\ \cdots \\ u*(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^0(n-1) \\ u^0(n-2) \\ \cdots \\ u^0(0) \end{pmatrix}\right) = 0 .\ (*)$$

$$0 \le \sum_{i=0}^{n-1}\left\|u^*(i) - u^0(i)\right\|^2 = \left(\begin{pmatrix} u*(n-1) \\ u*(n-2) \\ \cdots \\ u*(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^0(n-1) \\ u^0(n-2) \\ \cdots \\ u^0(0) \end{pmatrix}\right)^T \left(\begin{pmatrix} u*(n-1) \\ u*(n-2) \\ \cdots \\ u*(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^0(n-1) \\ u^0(n-2) \\ \cdots \\ u^0(0) \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{(*)}{=} -\begin{pmatrix} u^0(n-1) \\ u^0(n-2) \\ \cdots \\ u^0(0) \end{pmatrix}^T \left(\begin{pmatrix} u*(n-1) \\ u*(n-2) \\ \cdots \\ u*(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u^0(n-1) \\ u^0(n-2) \\ \cdots \\ u^0(0) \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{(*)}{=} -\sum_{i=0}^{n-1}\left\|u*(i)\right\|^2 + \sum_{i=0}^{n-1}\left\|u_0(i)\right\|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1}\left\|u^0(i)\right\|^2 \ge \sum_{i=0}^{n-1}\left\|u*(i)\right\|^2 .$$

习题 3

1. 证明：$X_{C[A,B]} = span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$,

$$(A+BK)B = AB + BKB = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix}\begin{bmatrix} KB \\ I \end{bmatrix},$$

$$(A+BK)^2 B = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} KAB+KBKB \\ KB \\ I \end{bmatrix},$$

$$\vdots$$

$$(A+BK)^{n-1} B = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * \\ I \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} B & (A+BK)B & (A+BK)^2B & \cdots & (A+BK)^{n-1}B \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & KB & KAB+KBKB & & * \\ & I & KB & \ddots & \\ & & I & \ddots & KAB+KBKB \\ & & & \ddots & KB \\ & & & & I \end{bmatrix},$$

故 $span\begin{bmatrix} B & (A+BK)B & (A+BK)^2B & \cdots & (A+BK)^{n-1}B \end{bmatrix} \subseteq X_{C[A,B]}$,

又两者秩相同, 因此 $X_{C[A,B]} = X_{C[A+BK,B]}$.

2. 解：(1) 能控； (2) 不能控； (3)能控.

3. 解：$\alpha(s) = (s+2-j)(s+2+j) = s^2+4s+5$,

设 $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix}$, 则

$$A+BK = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+k_1 & 2+k_2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\det(sI-(A+BK)) = \begin{vmatrix} s-1-k_1 & -2-k_2 \\ -3 & s-1 \end{vmatrix} = s^2-(2+k_1)s+k_1-3k_2-5,$$

$$2+k_1=-4,\ k_1-3k_2-5=5 \Rightarrow k_1=-6,\ k_2=-\frac{16}{3}.$$

4. 解：$\det(sI-A) = s(s+4)(s+8) = s^3+12s^2+32s$,

系统的状态空间描述为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -32 & -12\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$\alpha(s)=(s+2)(s+4)(s+7)=s^3+13s^2+50s+56,$

设$K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$，则

$\alpha(s)=s^3+(12-k_3)s^2+(32-k_2)s-k_1$.

解得$k_1=-56$，$k_2=-18$，$k_3=-1$，即$K=\begin{bmatrix}-56 & -18 & -1\end{bmatrix}$.

5. 解：(A,b)完全能控，可任意配置极点.

$$K=\begin{bmatrix}-\frac{155}{2} & -33 & -12\end{bmatrix}.$$

6. (1) 证明：$Ab=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix}$，$A^2b=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\-4\end{bmatrix}$，$A^3b=\begin{bmatrix}0\\-2\\-4\\0\end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix}b & Ab & A^2b & A^3b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 0\\0 & 2 & 0 & -2\\0 & 1 & 0 & -4\\1 & 0 & -4 & 0\end{bmatrix}$满秩，故$(A,b)$完全能控.

(2) 解：设$K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3 & k_4\end{bmatrix}$，则

$$A+BK=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\3 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & -2 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3 & k_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\3 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0 & 1\\k_1 & k_2-2 & k_3 & k_4\end{bmatrix},$$

$\det(sI-(A+BK))=s^4-k_4s^3+(-k_3-2k_2+1)s^2+(3k_4-2k_1)s+3k_3$,

$\alpha(s)=(s+1)^2(s+2-j)(s+2-j)=s^4+6s^3+14s^2+14s+5$,

解得$k_1=-16$，$k_2=-\frac{22}{3}$，$k_3=\frac{5}{3}$，$k_4=-6$即$K=\begin{bmatrix}-16 & -\frac{22}{3} & \frac{5}{3} & -6\end{bmatrix}$.

7. 解：$K=\begin{bmatrix}-4 & -4 & -1\end{bmatrix}$.

8. 解：(1) 可找到 K，$K=\begin{bmatrix}-20 & -9 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(2) 可找到 K，$K=\begin{bmatrix}-\dfrac{125}{4} & -\dfrac{175}{16} & -\dfrac{1}{16} & 0\end{bmatrix}$.

(3) 找不到 K.

9. 解：$K_1=\begin{bmatrix}24 & 44 & 52\\ 24 & 44 & 52\end{bmatrix}$，$K_1=\begin{bmatrix}24 & 44 & -52\\ -24 & -44 & 52\end{bmatrix}$.

10. 解：$K=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 1\\ -8 & -16 & -14 & -7\end{bmatrix}$.

11. 解：(1)、(3)系统完全能控，能用状态反馈实现镇定.

(2) 系统不完全能控，已作能控性分解，不能控部分的特征值为-2，故能用状态反馈实现镇定.

12. 解：$K=\begin{bmatrix}-24 & -26 & -5\end{bmatrix}$.

13. 解：$K=\begin{bmatrix}-36 & -10 & -24\end{bmatrix}$.

习题 4

2. 解：$X_C = span\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix}$, $X_{NC} = span\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

$$X_O = span\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\\1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix},\ X_{NO} = span\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}.$$

3. 解：$CA = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$，$X_O = span\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, X_{NO} = span\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$,

$$x_0 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

故 $x = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

5. 解：(1) $b \neq 0, a, c$ 任取.

(2) $a \neq 0, b$ 任取.

6. 解：(1) 无论 a 如何取值，(A, B, C) 均不可能能控能观.

(2) $a \neq \dfrac{-21 \pm 3\sqrt{17}}{16}, b \neq 0$ 且 $b \neq \dfrac{8}{3}$.

7. 解：(1) 能；

(2) 设 $C = \begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5\end{bmatrix}$，$c_1 \neq 0, c_3^3 + c_4^3 + c_5^3 \neq 3c_3c_4c_5$.

9. 证明：反证法. 设 A 与 bc 可交换，$Abc = bcA$.

$$Q_CQ_O = \begin{pmatrix}b & Ab & \cdots & A^{n-1}b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C\\CA\\\cdots\\CA^{n-1}\end{pmatrix}$$

$$= bc + AbcA + \cdots + A^{n-1}bcA^{n-1}$$

$$= bc + bcA^2 + \cdots + bcA^{2n-2}$$

$$= bc(I + A + \cdots + A^{2n-2})$$

$bc^{n\times n}$ 矩阵秩为 1，则 $Q_c Q_o$ 降秩，$Q_c.Q_o$ 中至少有一个降秩，此与 (A,b,c) 能控能观矛盾.

10. 证明：$Q_o Q_c = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \cdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} cb & cAb & \cdots & cA^{n-1}b \\ cAb & cA^2b & \cdots & cA^n b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cA^{n-1}b & cA^n b & \cdots & cA^{2n-2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a \\ \vdots & \iddots & \\ a & & * \end{pmatrix} \text{非奇异}$$

$\Rightarrow Q_o, Q_c$ 非奇异 $\Rightarrow (A,b,c)$ 能控能观.

12. 解：(1) 完全能观；

(2) 不完全能观，$\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$，$\hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$；

(3) 完全能观.

13. 解：$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$，$C_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$b_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$Q = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

14. 证明：(A,b) 能控 $\Leftrightarrow rank[sI-A \quad b] = n, \forall s \in \mathrm{C}$，

$\Rightarrow (sI-A)$ 有 $n-1$ 个线性无关行/列，$\forall s \in \mathrm{C}$，

$\Rightarrow$ 找到 C，$s.t.\ rank\begin{pmatrix} sI-A \\ C \end{pmatrix}$ 列满秩，$\forall s \in \mathrm{C}$.

17. 证明：$[sI-(A+BFC) \quad B] = (sI-A \quad B)\begin{pmatrix} I & 0 \\ -FC & B \end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix} sI-(A+BFC) \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -BF \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} sI-A \\ C \end{pmatrix}$，

则 $\forall s \in \mathrm{C}$，$rank[sI-(A+BFC) \quad B] = rank[sI-A \quad B]$，

$rank\begin{pmatrix} sI-(A+BFC) \\ C \end{pmatrix} = rank\begin{pmatrix} sI-A \\ C \end{pmatrix}$，

故 $(A+BFC,B,C)$ 能控能观 $\Leftrightarrow (A,B,C)$ 能控能观.

18. 证明：$\begin{pmatrix}B & AB\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}C\\ CA\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，系统能控能观.

$$A+BKC=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}K\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ K-1 & 0\end{pmatrix},$$

$$\det(sI-(A+BKC))=s^2-(K-1)\Rightarrow\begin{cases}s=\pm\sqrt{1-K}i, K<0;\\ s=\pm\sqrt{K-1}, K\geq 0.\end{cases}$$

无论 K 如何取，$A+BKC$ 总有一个特征根的实部大于等于 0, 故找不到 K，使得 $A+BKC$ 稳定.

19. 解：(A,B,C) 能控能观.

设 $K=\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}, A+BKC=\begin{pmatrix}0 & 0 & 5-2k_1\\ 1 & 0 & -1+k_1-2k_2\\ 0 & 1 & -3+k_2\end{pmatrix}$,

$$\det(sI-(A+BKC))=\begin{vmatrix}s & 0 & 2k_1-5\\ -1 & s & 1-k_1+2k_2\\ 0 & -1 & s+3-k_2\end{vmatrix}=s^2(s+3-k_2)+2k_1-5+s(1-k_1+2k_2)$$

$$=s^3+(3-k^2)s^2+(1+2k_2-k_1)s+2k_1-5,$$

由劳思判据得 $A+BKC$ 稳定

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-k_2>0 & k_2<3\\ 1+2k_2-k_1>0 & k_1<1+2k_2\\ 2k_1-5>0 & k_1>\dfrac{5}{2}\\ (3-k_2)(1+2k_2-k_1)-(2k_1-5)>0 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{5}{2}<k_1<7, \frac{3}{4}<k_2<3, (3-k_2)(1+2k_2-k_1)-(2k_1-5)>0,$$

例如取 $\Rightarrow k_1=3, k_2=2$.

习题 5

1. 解：(a) (A,B,C) 完全能控能观：

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{(s-2)(s-4)} & \dfrac{1}{s-1}\\ \dfrac{1}{s-1} & 0\end{bmatrix};$$

(b) (A,B,C) 完全能控能观；

$$G(s)=\frac{-3s+2}{(s+2)(s+1)^2};$$

(c) (A,B,C) 完全能控，不完全能观；

$$G(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s(s+1)} & \dfrac{2}{s-1}\\ \dfrac{2}{s+1} & \dfrac{1}{s-1}\end{bmatrix};$$

规范分解：变换矩阵 $T=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$,

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\ \hat{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\hat{C}=\begin{bmatrix}0&1&0&2\\0&0&2&1\end{bmatrix},$$

$\left(\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&1\end{bmatrix}\right)$ 能控能观.

只作能观性分解：变换矩阵 $T=\begin{bmatrix}1&0&0&2\\0&0&2&1\\0&0&1&2\\0&1&0&0\end{bmatrix}$,

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&-\frac{5}{3}&-\frac{4}{3}&0\\0&-\frac{4}{3}&\frac{5}{3}&0\\0&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\end{bmatrix},\ \hat{B}=\begin{bmatrix}0&2\\2&1\\1&2\\0&0\end{bmatrix},\hat{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},$$

$$(\begin{bmatrix}0&0&1\\0&-\frac{5}{3}&-\frac{4}{3}\\0&-\frac{4}{3}&\frac{5}{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&2\\2&1\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix})$$ 能控能观.

2. 解：$A=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&a&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\0&0\\0&0\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&0&1&0\end{bmatrix}$

(1) $a=1$时，$A=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$,

$rankQ_0=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-2&1&-2&1\\4&-2&5&-4\\-8&4&-12&13\end{bmatrix}=4$，$(A,C)$完全能观，上述形式已为规范分解.

(2) $a=0$时，$A=\begin{bmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&0&-2\end{bmatrix}$

$rankQ_0=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\-2&1&-2&1\\4&-4&4&-4\\-8&12&-8&12\end{bmatrix}=2$，能控子空间为二维，每个子空间都二维能观，

不能再作能观分解

4. 解：(1) $G(s)=\dfrac{s^2+4s+3}{s^3+12s^2+44s+48}$；

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -48 & -44 & -12\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

或 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -48\\ 1 & 0 & -44\\ 0 & 1 & -12\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3\\4\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$

(2) $G(s)=\dfrac{5}{2}+\dfrac{-\dfrac{9}{2}s^2-\dfrac{11}{2}s-\dfrac{13}{4}}{s^3+2s^2+3s+\dfrac{3}{2}}$;

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\dfrac{3}{2} & -3 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-\dfrac{13}{4} & -\dfrac{11}{2} & -\dfrac{9}{2}\end{bmatrix}, D=\dfrac{5}{2}.$$

5. 解：(a) 能控形实现：$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -24 & -44 & -30 & -9\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}25 & 17 & 3 & 0\end{bmatrix};$

能观形实现：$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -24\\ 1 & 0 & 0 & -44\\ 0 & 1 & 0 & -30\\ 0 & 0 & 1 & -9\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}25\\17\\3\\0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$

均为最小实现.

(b) 能控形实现：$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -14 & -7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}15 & 8 & 1\end{bmatrix};$

能观形实现：$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -8\\ 1 & 0 & -14\\ 0 & 1 & -7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}15\\8\\1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix};$

均为最小实现.

6. 解：(1) $A=\begin{bmatrix}0 & \\ & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};$

(4) $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -4\\ 0 & 1 & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix};$

(5) $A=\begin{bmatrix}-4 & & & \\ & -3 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ 1 & 0\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & 0 & 1 & \frac{3}{2}\\ 3 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix};$

(6) $A=\begin{bmatrix}-1 & & & & \\ & -2 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{2}\\ 5 & -1\\ 1 & 1\\ -4 & -\frac{1}{2}\\ 0 & -1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix};$

(7) $A=\begin{bmatrix}0 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\\ 2 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}.$

9. 解：(1) $G(s)=\dfrac{s+a}{s^3+7s^2+14s+8}=\dfrac{s+a}{(s+1)(s+2)(s+4)}$,

$a=1$，$a=2$，$a=4$时，系统不完全能控或不完全能观

(2) $a=1$时，能控形实现：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -8 & -14 & -7\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

最小实现： $G(s)=\dfrac{1}{(s+2)(s+4)}=\dfrac{1}{s^2+6s+8}=\dfrac{\frac{1}{2}}{s+2}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{s+4}$

$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -8 & -6\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix};$

或 $A=\begin{bmatrix}0 & -8\\ 1 & -6\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix};$

或 $A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}.$

10. 解：最小实现：$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -5\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}100 & 0\end{bmatrix}.$

状态反馈矩阵 $K=\begin{bmatrix}-800 & -35\end{bmatrix}.$

11. 解：$\bar{W}_C[0,t]=T^{-1}W_C[0,t]T^{-T}$，$\bar{W}_O[0,t]=T^TW_O[0,t]T.$

习题 6

1. 解：$\begin{cases} \dot{z}=\begin{bmatrix}-6 & 1\\ -8 & 0\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}6\\8\end{bmatrix}y, \\ \hat{x}=z. \end{cases}$

2. 解：$\begin{cases} \dot{w}=-3w-5y-3u, \\ \hat{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ w+2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}w+2y\\ y\end{bmatrix}. \end{cases}$

3. 解：(1) $\begin{cases} \dot{z}=\begin{bmatrix}-13 & -14 & -2\\ 5 & 4 & 1\\ 5 & 4 & -1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}12\\-5\\-4\end{bmatrix}y, \\ \hat{x}=z. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dot{w}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ -7 & -4\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}2\\17\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix}u, \\ \hat{x}=\begin{bmatrix}2\\-1\\-3\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}w. \end{cases}$

4. 解：(1) $\begin{cases} \dot{z}=\begin{bmatrix}28 & -25 & -27\\ 27 & -25 & -23\\ 13 & -11 & -13\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}27\\24\\13\end{bmatrix}y, \\ \hat{x}=z. \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \dot{w}=\begin{bmatrix}-2.6 & -9.8\\ 0.2 & -5.4\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}-23.4\\-5.2\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}-4.6\\-0.8\end{bmatrix}u, \\ \hat{x}=\begin{bmatrix}5.4\\4.6\\1.8\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}w. \end{cases}$

5. 解：$\begin{cases} \dot{z}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -20\\ 3 & -1 & -24\\ 0 & 2 & -12\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}20\\25\\12\end{bmatrix}y, \\ \hat{x}=z. \end{cases}$

6. 解：(1) $\begin{cases} \dot{w}=\begin{bmatrix}-7 & 1\\ -4 & -3\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}-47\\-34\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u, \\ \hat{x}=\begin{bmatrix}1\\7\\2\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}w. \end{cases}$

(2) $K=\begin{bmatrix}-3 & -2 & -1\end{bmatrix}$.

7. 解：$\begin{cases} \dot{w}=\begin{bmatrix}-9 & -1 & 0\\ 36 & 0 & 1\\ 84 & 5 & 0\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}-45\\ 408\\ 576\end{bmatrix}y+\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix}u, \\ \hat{x}=\begin{bmatrix}y\\ w+\begin{bmatrix}9\\ -36\\ -84\end{bmatrix}y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}w+\begin{bmatrix}1\\ 9\\ -36\\ -84\end{bmatrix}y, \\ u=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{49}{6} & \frac{25}{6}\end{bmatrix}\hat{x}+v. \end{cases}$