2、假设我们有一个[0，1]上的均匀分布随机数发生器 U(0,1)，请基于它构造指数分布的随机数发生器，推导出随机数生成方程。若我们有一个标准正态分布的随机数发生器 N(0,1)，请推导出对数正态分布的随机数生成方程。

解：(1) 设随机变量 x 满足均匀分布，其概率密度函数 f(x)为：

$$f(x)=\begin{cases}1 & \mathrm{x}\in[0,1]\\ 0 & \mathrm{else}\end{cases}$$

设随机变量 y 满足指数分布，其概率密度函数为：

$$g(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y} & \mathrm{y}\geq 0\\ 0 & \mathrm{y}<0\end{cases}$$

要实现基于均匀分布随机数发生器的指数分布随机数发生器，那么可以通过分别计算处这两者的累计分布函数，让这两者相等。然后求出 y 对 x 的反函数，即为随机数生成方程。具体的计算如下：

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^y g(y)dy$$

$$\int_0^x 1dx=\int_0^y \lambda e^{-\lambda y}dy$$

$$x=1-e^{-\lambda y}$$

然后求可求得 y 对 x 的反函数为：

$$y=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)\quad \mathrm{x}\in[0,1)$$

(2) 设随机变量 x 满足标准正态分布，其概率密度函数 f(x)为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\quad -\infty<x<+\infty$$

设随机变量 y 满足对数正态分布，其概率密度函数为：

$$g(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{[ln(y)-\mu]^2}{2\sigma^2}} & \mathrm{y}>0\\ 0 & \mathrm{y}\leq 0\end{cases}$$

通过查询维基百科可得知，其累计分布函数分别为：

$$F(x)=\frac{1}{2}(1+erf(\frac{x}{\sqrt{2}}))$$

$$G(y)=\frac{1}{2}(1+erf(\frac{ln(y)-\mu}{\sqrt{2}\sigma}))$$（其中 erf 为误差函数）

令 F(x)=G(y)可得出：

$$\frac{x}{\sqrt{2}}=\frac{\ln(y)-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$$

因此可解得：

$$y = e^{\sigma x + \mu}$$

因此，随机数生成方程即为：

$$y = e^{\sigma x + \mu}$$