



机器人学(第三版)

蔡自兴 主编

中南大学

2016

第九章 机器人轨迹规划



所谓轨迹，是指机械手在运动过程中的位移、速度和加速度。而轨迹规划是根据作业任务的要求，计算出预期的运动轨迹。

9.1 轨迹规划应考虑的问题

路径约束和障碍约束的组合把机器人的规划与控制方式划分为四类，如表9.1所示。

表9.1 操作臂控制方式

		障碍约束	
		有	无
路径约束	有	离线无碰撞路径规划+在线路径跟踪	离线路径规划+在线路径跟踪
	无	位置控制+在线障碍探测和避障	位置控制

9.1 轨迹规划应考虑的问题

轨迹规划器可形象地看成为一个黑箱（见图7.1），其输入包括路径的设定和约束，输出的是机械手末端手部的位姿序列，表示手部在各离散时刻的中间位形。

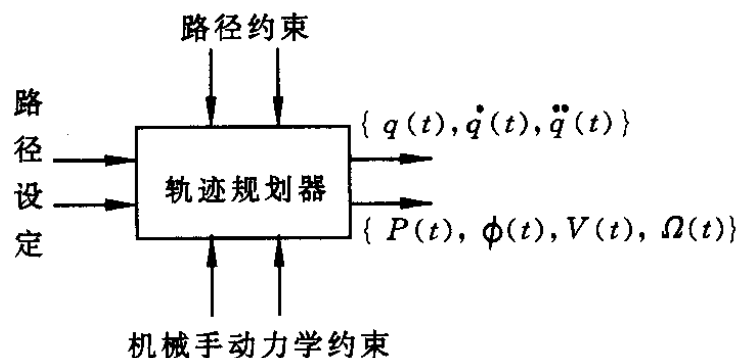


图9.1 轨迹规划器框图

9.1 轨迹规划应考虑的问题

机械手最常用的轨迹规划方法有两种：

- 第一种方法要求用户对于选定的转变结点（插值点）上的位姿、速度和加速度给出一组显式约束（例如连续性和光滑程度等），轨迹规划器从一类函数（例如 n 次多项式）中选取参数化轨迹，对结点进行插值，并满足约束条件。
- 第二种方法要求用户给出运动路径的解析式；如为直角坐标空间中的直线路径，轨迹规划器在关节空间或直角坐标空间中确定一条轨迹来逼近预定的路径。

9.1 轨迹规划应考虑的问题

- 在第一种方法中，约束的设定和轨迹规划均在关节空间进行。因此可能会发生与障碍物相碰。
- 第二种方法的路径约束是在直角坐标空间中给定的，而关节驱动器是在关节空间中受控的。

9.2 关节轨迹的插值计算

对关节进行插值时，应满足一系列的约束条件，例如抓取物体时，手部运动方向（初始点），提升物体离开方向（提升点），放下物体（下放点）和停止点等结点上的位姿、速度和加速度的要求；与此相应的各个关节位移、速度、加速度在整个时间间隔内连续性要求；其极值必须在各个关节变量的容许范围之内等。在满足所要求的约束条件下，可以选取不同类型的关节插值函数，生成不同的轨迹。

三次多项式插值



运动轨迹的描述可用起始点关节角度与终止点关节角度的一个平滑插值函数来表示，在 $t_0=0$ 时刻的值是起始关节角度，在终端时刻 t_f 的值是终止关节角度。显然，有许多平滑函数可作为关节插值函数，如图9.2所示。

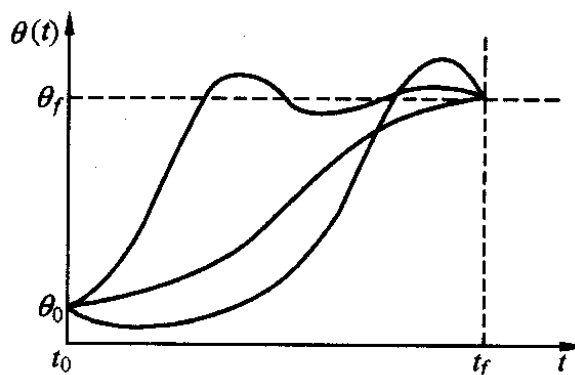


图9.2 单个关节的不同轨迹曲线

为了实现单个关节的平稳运动，轨迹函数至少需要满足四个约束条件。

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= \theta_0 \\ \theta(t_f) &= \theta_f \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}(0) &= 0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

$$\theta(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad (9.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 \\ \ddot{\theta}(t) &= 2a_2 + 6a_3 t \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

求解约束条件可得：

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= 0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

过路径点的三次多项式插值



可以把所有路径点也看作是“起始点”或“终止点”，求解逆运动学，得到相应的关节矢量值。然后确定所要求的三次多项式插值函数，把路径点平滑地连接起来。但是，在这些“起始点”和“终止点”的关节运动速度不再是零。

过路径点的三次多项式插值



路径点上的关节速度可以根据需要设定，这样一来，确定三次多项式的方法与前面所述的完全相同，只是速度约束条件(9.2)变为

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}(0) &= \dot{\theta}_0 \\ \dot{\theta}(t_f) &= \dot{\theta}_f \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

求得三次多项式的系数：

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{3}{t_f^2}(\theta_f - \theta_0) - \frac{2}{t_f}\dot{\theta}_0 - \frac{1}{t_f}\dot{\theta}_f \\ a_3 &= -\frac{2}{t_f^3}(\theta_f - \theta_0) + \frac{1}{t_f}(\dot{\theta}_0 + \dot{\theta}_f) \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

如何确定路径点上的关节速度可由以下三种方法规定：

- 在直角坐标空间或关节根据工具坐标系在直角坐标空间中的瞬时线速度和角速度来确定每个路径点的关节速度。
- 空间中采用适当的启发式方法，由控制系统自动地选择路径点的速度。
- 为了保证每个路径点上的加速度连续，由控制系统按此要求自动地选择路径点的速度。



如果对于运动轨迹的要求更为严格，约束条件增多，则必须用更高阶的多项式对运动轨迹的路径段进行插值。例如，对某段路径的起始点和终止点都规定了关节的位置、速度和加速度，则要用一个五次多项式进行插值，即

$$\theta(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + a_4t^4 + a_5t^5 \quad (9.10)$$

多项式的系数 a_0, a_1, \dots, a_5 必须满足6个约束条件:

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= a_0 \\ \theta_f &= a_0 + a_1 t_f + a_2 t_f^2 + a_3 t_f^3 + a_4 t_f^4 + a_5 t_f^5 \\ \dot{\theta}_0 &= a_1 \\ \dot{\theta}_f &= a_1 + 2a_2 t_f + 3a_3 t_f^2 + 4a_4 t_f^3 + 5a_5 t_f^4 \\ \ddot{\theta}_0 &= 2a_2 \\ \ddot{\theta}_f &= 2a_2 + 6a_3 t_f + 12a_4 t_f^2 + 20a_5 t_f^3 \end{aligned} \right\} \quad (9.11)$$

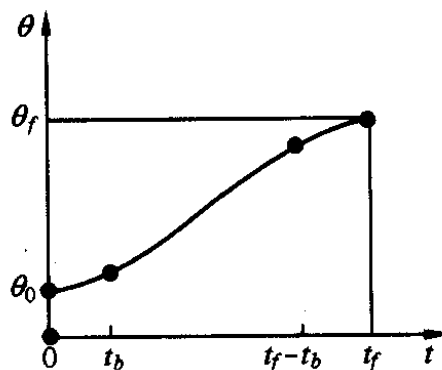
线性方程组的解为：

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \theta_0 \\ a_1 &= \dot{\theta}_0 \\ a_2 &= \frac{\ddot{\theta}_0}{2} \\ a_3 &= \frac{20\theta_f - 20\theta_0 - (8\dot{\theta}_f + 12\dot{\theta}_0)t_f - (3\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_4 &= \frac{30\theta_f - 30\theta_0 + (14\dot{\theta}_f + 16\dot{\theta}_0)t_f + (3\ddot{\theta}_0 - 2\ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \\ a_4 &= \frac{12\theta_f - 12\theta_0 - (6\dot{\theta}_f + 6\dot{\theta}_0)t_f - (\ddot{\theta}_0 - \ddot{\theta}_f)t_f^2}{2t_f^3} \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

用抛物线过渡的线性插值



线性函数与两段抛物线函数平滑地衔接在一起形成的轨迹称为带有抛物线过渡域的线性轨迹。如图9.3(a)所示。



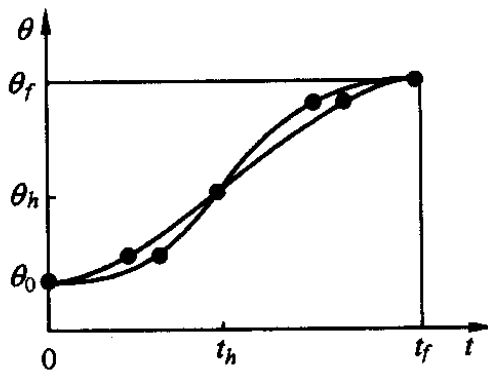
(a) 含有一个解

图9.3 带抛物线过渡的线性插值

用抛物线过渡的线性插值



为了构造这段运动轨迹，假设两端的过渡域（抛物线）具有相同的持续时间，因而在这两个域中采用相同的恒加速度值，只是符号相反。正如图9.3(b)所示，存在有多个解，得到的轨迹不是唯一的。



(b) 含有多解

图9.3 带抛物线过渡的线性插值

用抛物线过渡的线性插值



$$\dot{\theta}_{tb} = \frac{\theta_h - \theta_b}{t_h - t_b} \quad (9.13)$$

$$\theta_b = \theta_0 + \frac{1}{2} \ddot{\theta}_b^2 \quad (9.14)$$

令 $t=2t_h$ ，据式(9.13)和(9.14)可得

$$\ddot{\theta}_b^2 - \ddot{\theta} t_b + (\theta_f - \theta_0) = 0 \quad (9.15)$$

按式(9.15)算出相应的 t_b

$$t_b = \frac{t}{2} - \frac{\sqrt{\ddot{\theta}^2 t^2 - 4\ddot{\theta}(\theta_f - \theta_0)}}{2\ddot{\theta}} \quad (9.16)$$

由上式可知，为保证 t_b 有解，过渡域加速度值必须选得足够大，即

$$\ddot{\theta} \geq \frac{4(\theta_f - \theta_0)}{t^2} \quad (9.17)$$

过路径点的用抛物线过渡的线性插值



如图9.4所示，某个关节在运动中有 n 个路径点，其中三个相邻的路径点表示为 j, k 和 l ，每两个相邻的路径点之间都以线性函数相连，而所有路径点附近则由抛物线过渡。

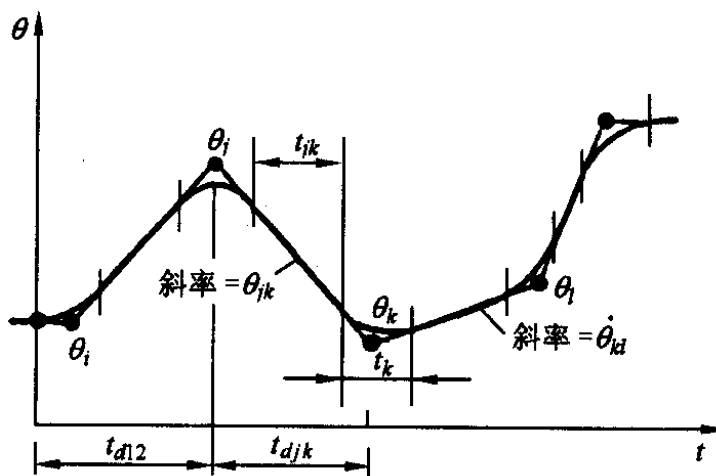


图9.4 多段带有抛物线过渡的线性插值轨迹

过路径点的用抛物线过渡的线性插值



$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_{jk} &= \frac{\theta_k - \theta_j}{t_{djk}} \\ \ddot{\theta}_k &= \text{sgn}(\dot{\theta}_{kl} - \dot{\theta}_{jk}) |\ddot{\theta}_k| \\ t_k &= \frac{\theta_{kl} - \theta_{jk}}{\theta_k} \\ t_{jk} &= t_{djk} - \frac{1}{2}t_j - \frac{1}{2}t_k \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

过路径点的用抛物线过渡的线性插值



第一个路径段和最后一个路径段的处理与上式(9.18)略有不同，因为轨迹端部的整个过渡域的持续时间都必须计入这一路径段内。对于一个路径段，令线性域速度的两个表达式相等，就可求出 t_1 。

$$\frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} = \ddot{\theta}_1 t_1 \quad (9.19)$$

过路径点的用抛物线过渡的线性插值



算出起始点过渡域的持续时间 t_1 之后，进而求出 $\dot{\theta}_{12}$ 和 t_{12} ：

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= \text{sgn}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) |\ddot{\theta}_1| \\ t_1 &= t_{d12} - \sqrt{t_{d12}^2 - \frac{2(\theta_2 - \theta_1)}{\ddot{\theta}_1}} \\ \dot{\theta}_{12} &= \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_{d12} - \frac{1}{2}t_1} \\ t_{12} &= t_{d12} - t_1 - \frac{1}{2}t_2 \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

过路径点的用抛物线过渡的线性插值



对于最后一个路径段，路径点 $n-1$ 与终止点 n 之间的参数与第一个路径段相似，即

$$\frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n} = \ddot{\theta}_n t_n \quad (9.21)$$

根据式(9.21)便可求出：

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\theta}_n &= \text{sgn}(\dot{\theta}_{n-1} - \dot{\theta}_n) |\ddot{\theta}_n| \\ t_n &= t_{d(n-1)n} - \sqrt{t_{d(n-1)n}^2 + \frac{2(\theta_n - \theta_{n-1})}{\ddot{\theta}_{n1}}} \\ \dot{\theta}_{(n-1)n} &= \frac{\theta_n - \theta_{n-1}}{t_{d(n-1)n} - \frac{1}{2}t_n} \\ t_{(n-1)n} &= t_{d(n-1)n} - t_n - \frac{1}{2}t_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

9.3 笛卡儿路径轨迹规划

■ 物体对象的描述

物体空间的描述方法，任一刚体相对参考系的位姿是用与它固接的坐标系来描述的。相对于固接坐标系，物体上任一点用相应的位置矢量 \mathbf{p} 表示；任一方向用方向余弦表示。给出物体的几何图形及固接坐标系后，只要规定固接坐标系的位姿，便可重构该物体。如图9.5所示。

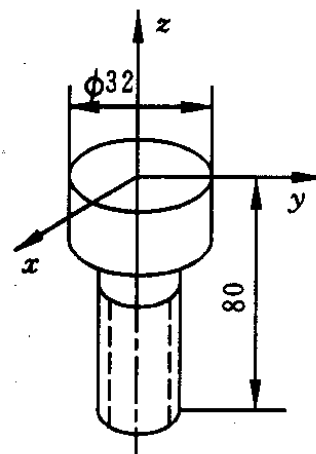
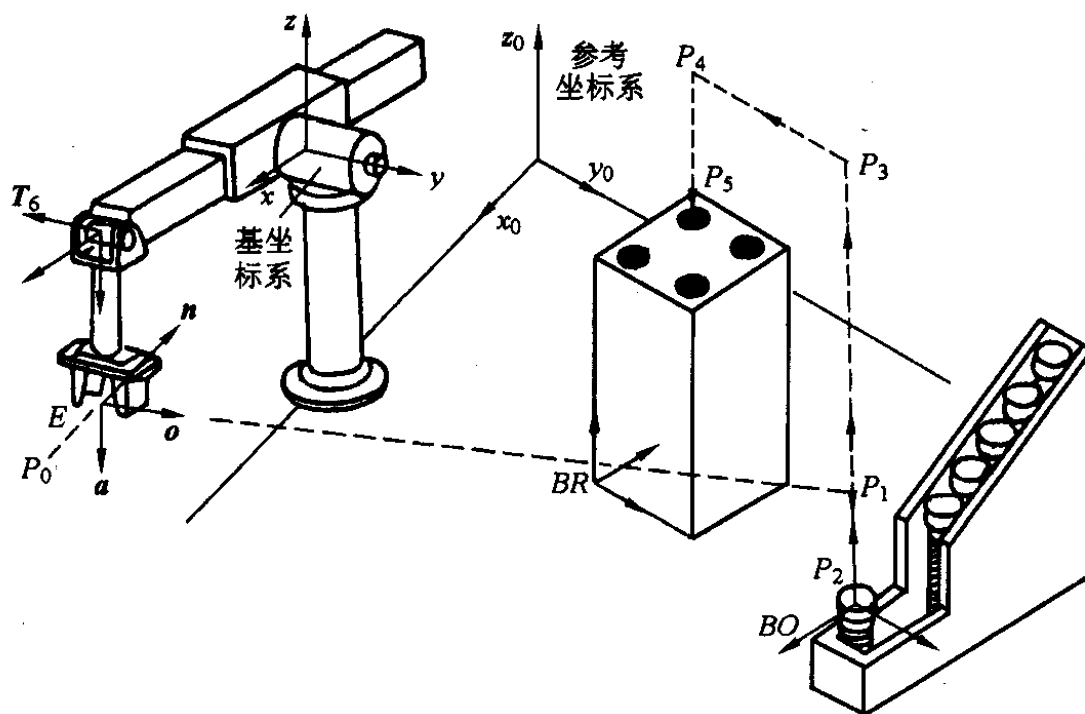


图9.5 对象的描述

9.3 笛卡儿路径轨迹规划

- 作业的描述

作业和机械手的运动可用手部位姿结点序列来规定，每个结点是由工具坐标系相对于作业坐标系的齐次变换来描述。相应的关节变量可用运动学反解程序计算。如图9.6。



9.3 笛卡儿路径轨迹规划

- 两个结点之间的“直线”运动

机械手在完成作业时，夹手的位姿可用一系列结点 P_i 来表示。因此，在直角坐标空间中进行轨迹规划的首要问题是由两结点 P_i 和 P_{i+1} 所定义的路径起点和终点之间，如何生成一系列中间点。两结点之间最简单的路径是在空间的一个直线移动和绕某定轴的转动。若运动时间给定之后，则可以产生一个使线速度和角速度受控的运动。

9.3 笛卡儿路径轨迹规划

■ 两段路径之间的过渡

为了避免两段路径衔接点处速度不连续，由一段轨迹过渡到下一段轨迹时，需要加速度或减速度。在机械手手部到达结点前的时刻开始改变速度，然后保持加速度不变，直至到达结点之后（单位时间）为止，如图7.7所示。

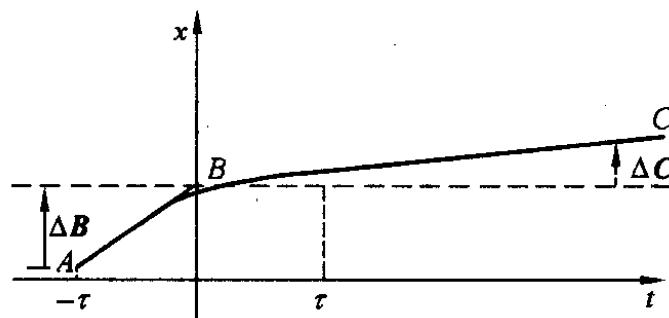


图9.7 两段轨迹间的过渡

9.4 规划轨迹的实时生成

■ 关节空间轨迹的生成

对于带抛物线过渡的直线样条插值，每次更新轨迹时，应首先检测时间 t 的值以判断当前处于路径段的是线性域还是过渡域。当处于线性域时，各关节的轨迹按下式计算：

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_j + \dot{\theta}_{jk}t \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{jk} \\ \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.41)$$

关节空间轨迹的生成



令 $t_{inb} = t - \left(\frac{1}{2}t_j + t_{jk} \right)$ 则:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_j + \dot{\theta}_{jk}(t - t_{inb}) + \frac{1}{2}\ddot{\theta}_k t_{inb}^2 \\ \dot{\theta} &= \dot{\theta}_{jk} + \ddot{\theta}_k t_{inb} \\ \ddot{\theta} &= \ddot{\theta}_k \end{aligned} \right\} \quad (9.42)$$

笛卡儿空间轨迹实时生成方法与关节空间相似，在线性域中， X 的每一自由度按下式计算：

$$\left. \begin{aligned} x &= x_j + \dot{x}_{jk}t \\ \dot{x} &= \dot{x}_{jk} \\ \ddot{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.44)$$

在线性域中，每个自由度的轨迹按下式计算：

$$\left. \begin{aligned} t_{inb} &= t - \left(\frac{1}{2} t_j + t_{jk} \right) \\ x &= x_j + \dot{x}_{jk} (t - t_{inb}) + \frac{1}{2} \ddot{x}_k t_{inb}^2 \\ \dot{x} &= \dot{x}_{jk} + \dot{x}_k t_{inb} \\ \ddot{x} &= \ddot{x}_k \end{aligned} \right\} \quad (9.45)$$

将笛卡儿空间轨迹转换成等价的关节空间的量，算法如下：

$$\left. \begin{aligned} X &\rightarrow D(\lambda); \\ q(t) &= \text{Solve}(D(\lambda)); \\ \dot{q}(t) &= \frac{q(t) - q(t - \delta t)}{\delta t}; \\ \ddot{q}(t) &= \frac{\dot{q}(t) - \dot{q}(t - \delta t)}{\delta t}. \end{aligned} \right\} \quad (9.46)$$

根据计算结果： q, \dot{q} 和 \ddot{q} 由控制系统执行。



本章讨论了属于底层规划的机器人轨迹规划问题，它是在机械手运动学和动力学的基础上，研究关节空间和笛卡儿空间中机器人运动的轨迹规划和轨迹生成方法。在阐明轨迹规划应考虑的问题之后，着重讨论了关节空间轨迹的插值计算方法和笛卡尔空间路径轨迹规划方法，并简介了规划轨迹的实时生成方法。