

第2章 线性定常系统的能控性

程龙, 薛文超

中国科学院自动化研究所 中国科学院数学与系统科学研究院



2.5 线性定常 散系统的能控 性

- 2.5 线性定常离散系统的能控性
 - 2.5.1 能控性与能达性
 - 2.5.2 能控子空间
 - 2.5.3 能控性判据
 - 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性



2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 控性

- 2.5 线性定常离散系统的能控性
 - 2.5.1 能控性与能达性
 - 2.5.2 能控子空间
 - 2.5.3 能控性判据
 - 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性



2.5 线性定常离散系统的能控性

第2章

2.5 线性定常 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能运性
 2.5.2 能控于空间
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能

● 线性定常离散系统的能控性概念,本质上和线性定常连续系统的能控性概念没有差别



性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性到据 2.5.4 核性反常选续系

- 2.5 线性定常离散系统的能控性
 - 2.5.1 能控性与能达性
 - 2.5.2 能控子空间
 - 2.5.3 能控性判据
 - 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控

2.5.1 能控性与能达性
 2.5.2 能控子空间
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 我性定常连续系统时间离散化后的能

• 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \ x(0) = x_0,$$
 (1)

其中,x(k)为n维状态向量,u(k)为p维输入向量,G,H分别为 $n \times n$, $n \times p$ 常阵



第2章

• 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中,x(k)为n维状态向量,u(k)为p维输入向量,G,H分别为 $n \times n$, $n \times p$ 常阵

定义

定义2.4 对于系统(1), 给定非零初始状态x0

• 若存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得x(n) = 0, 则称 x_0 为能控状态



第2章

• 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中,x(k)为n维状态向量,u(k)为p维输入向量,G,H分别为 $n \times n$, $n \times p$ 常阵

定义

定义2.4 对于系统(1), 给定非零初始状态 x_0

- 若存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得x(n) = 0, 则称 x_0 为能控状态
- 若状态空间中所有的非零状态都是能控状态,则称系统(1)(或 系统(G,H))是(完全)能控的



第2章

• 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中,x(k)为n维状态向量,u(k)为p维输入向量,G,H分别为 $n \times n$, $n \times p$ 常阵

定义

定义2.4 对于系统(1), 给定非零初始状态x0

- 若存在 $u(k), k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得x(n) = 0, 则称 x_0 为能控状态
- 若状态空间中所有的非零状态都是能控状态,则称系统(1)(或系统(G,H))是(完全)能控的
- 若存在一个或一些非零状态是不能控的,则称系统(G,H)是不 完全能控的



第2章

• 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中,x(k)为n维状态向量,u(k)为p维输入向量,G,H分别为 $n \times n$, $n \times p$ 常阵

定义

定义2.4 对于系统(1), 给定非零初始状态x0

- 若存在 $u(k), k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得x(n) = 0, 则称 x_0 为能控状态
- 若状态空间中所有的非零状态都是能控状态,则称系统(1)(或系统(G,H))是(完全)能控的
- 若存在一个或一些非零状态是不能控的,则称系统(G,H)是不 完全能控的
- 若所有的非零状态都是不能控的,则称系统(*G*, *H*)是完全不能 控的



第2章

定义

定义2.5 对于离散系统(1), 给定非零状态 x_n , 若存在u(k), $k=0,1,\cdots,n-1$, 使得 $x_0=0$ 时, 有 $x(n)=x_n$, 则称 x_n 为能达状态



第2章

定义

定义2.5 对于离散系统(1), 给定非零状态 x_n , 若存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得 $x_0 = 0$ 时, 有 $x(n) = x_n$, 则称 x_n 为能达状态

注: 对于线性定常离散系统, 其能控性和能达性并不是等价的



第2章

定义

定义2.5 对于离散系统(1), 给定非零状态 x_n , 若存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得 $x_0 = 0$ 时, 有 $x(n) = x_n$, 则称 x_n 为能达状态

注: 对于线性定常离散系统, 其能控性和能达性并不是等价的

定理

定理2.14 线性定常离散系统(1)的能控性和能达性等价的充分必要条件是系统矩阵G是非奇异的.



第2章

性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统 统时间离散化后的能 证明 先考虑能控性.



第2章

2.5 线性定常 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 证明 先考虑能控性. 对能控状态 x_0 , 按定义, 存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^{n}x_{0} + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i),$$
 (2)



第2章

证明 先考虑能控性. 对能控状态 x_0 , 按定义, 存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^{n}x_{0} + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i),$$
 (2)

• 从而可得

$$G^{n}x_{0} = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i).$$
 (3)

性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据



第2章

证明 先考虑能控性. 对能控状态 x_0 , 按定义, 存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^{n}x_{0} + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i),$$
 (2)

• 从而可得

$$G^{n}x_{0} = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i).$$
 (3)

• 再考虑能达性.



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性 251 维护性与能达性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 控性 证明 先考虑能控性. 对能控状态 x_0 , 按定义, 存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^{n}x_{0} + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i),$$
 (2)

• 从而可得

$$G^{n}x_{0} = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i).$$
 (3)

• 再考虑能达性. 对能达状态 x_n , 按定义, 存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使成立

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} Hu(i).$$
 (4)



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系 统时间离散化后的能 控性 证明 先考虑能控性. 对能控状态 x_0 , 按定义, 存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^{n}x_{0} + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i),$$
 (2)

• 从而可得

$$G^{n}x_{0} = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i).$$
 (3)

• 再考虑能达性. 对能达状态 x_n , 按定义, 存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使成立

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} Hu(i). \tag{4}$$

● 将(3), (4)中的控制u(k)取为同一控制,则有

$$x_n = -G^n x_0. (5)$$



第2章

性 2.5.1 能控性与能法性 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性灾害连续系 证明 先考虑能控性. 对能控状态 x_0 , 按定义, 存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^{n}x_{0} + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i),$$
 (2)

• 从而可得

$$G^{n}x_{0} = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1}Hu(i).$$
 (3)

• 再考虑能达性. 对能达状态 x_n , 按定义, 存在u(k), $k = 0, 1, \dots, n-1$, 使成立

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} Hu(i). (4)$$

• 将(3), (4)中的控制u(k)取为同一控制,则有

$$x_n = -G^n x_0. (5)$$

显然, 当且仅当G非奇异时, 能控状态x(0)与能达状态x(n)——对应, 即能控性与能达性等价, 结论得证



第2章

2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 644 • 若系统(1)是相应连续系统的离散化模型, T为采样周期, 则 $G = e^{AT}$ 为非奇异



第2章

- 2.5 线性定常离散系统的能控性
- 2.5.1 能控性与能达性
 2.5.2 能控于空间
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 找性定常连续系统时间离散化后的能控性
- 若系统(1)是相应连续系统的离散化模型, T为采样周期, 则 $G = e^{AT}$ 为非奇异
- ➡ 故有如下结论

推论

推论2.4 线性定常连续系统的以T为周期的离散化系统的能控性与能达性等价.



2.5 线性定常器 散系统的能控 性

2.5.2 能控子空间2.5.3 能控性判据2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

- 2.5 线性定常离散系统的能控性
 - 2.5.1 能控性与能达性
 - 2.5.2 能控子空间
 - 2.5.3 能控性判据
 - 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 控性 考察离散系统(1)



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控

2.5.2 **能控子空间**2.5.3 能控性判据
2.5.4 线性定常连续系

考察离散系统(1)

• 若x₀为能控状态,则根据能控性的定义,知(2)成立,从而可得(3),即

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$
 (6)

第2章

考察离散系统(1)

• 若x₀为能控状态,则根据能控性的定义,知(2)成立,从而可得(3),即

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$
 (6)

• 容易验证, 系统(1)能控状态的全体构成欧式空间 \mathbb{R}^n 的一个线性子空间, 称为能控性子空间, 记为 X_C

第2章

散系统的能控性 性 2.5.1能控性与能达性

 2.5.2 既松十至四
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 线性定常连续: 统时间离散化后的自

考察离散系统(1)

● 若x₀为能控状态,则根据能控性的定义,知(2)成立,从而可得(3),即

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$
 (6)

- 容易验证, 系统(1)能控状态的全体构成欧式空间 \mathbb{R}^n 的一个线性子空间, 称为能控性子空间, 记为 X_C
- ▶ 下面, 分G非奇异、G奇异两种情况对 X_C 进行讨论



(1) G非奇异情形

第2章

2.5 线性足吊点散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的自 控性



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控

2.5.1 能程性与能远性2.5.2 能控于空间2.5.3 能控性判据2.5.4 裁性定常连续系统时间离散化后的能

(1) G非奇异情形

● 若G非奇异,则由(6)可导出

$$x_0 = -\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right] \begin{vmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 控性

(1) G非奇异情形

● 若G非奇异,则由(6)可导出

$$x_0 = -\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$
 (7)

➡ 于是,我们有如下结论

定理

定理2.15 若G非奇异,则系统(1)的能控子空间 X_C 为

$$X_C = span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}.$$
 (8)



第2章

2.5 线性定常尚 散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间

(1) G非奇异情形

● 若G非奇异,则由(6)可导出

$$x_0 = -\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

➡ 于是,我们有如下结论

定理

定理2.15 若G非奇异,则系统(1)的能控子空间 X_C 为

$$X_C = span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}.$$

证明 由(7), 显然

$$X_C \subseteq span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}$$
.

(8)



第2章

反之, 若

 $x_0 \in span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix},$

2.5.1 能控性与能达 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的前

第2章

2.5 线性定常启 散系统的能控 性

2.5.2 **能控于空间**2.5.3 能控性判据
2.5.4 线性定常连续系

反之, 若

$$x_0 \in span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix},$$

• 则

$$x_0 = \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.2 **能控子空间** 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续并 经时间重要及户的格 反之, 若

$$x_0 \in span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix},$$

卯

$$x_0 = \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

• 根据(10), 记

$$u(n-1) = -\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_p \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad u(0) = -\begin{bmatrix} \xi_{(n-1)p+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}, \tag{11}$$



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达性
 2.5.2 能控子空间
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能

• 由(10)和(11),即得

$$x_0 = -\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right] \begin{vmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{vmatrix}. \tag{12}$$

第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控性与能达性 2.5.2 能控性判据 • 由(10)和(11),即得

$$x_0 = -\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

● 这证明 $x_0 \in X_C$, 故有

$$span \left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H \right] \subseteq X_C. \tag{13}$$

第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系 统时间离散化后的能 • 由(10)和(11),即得

$$x_0 = -\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

• 这证明 $x_0 \in X_C$, 故有

$$span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \subseteq X_C.$$
 (13)

➡ 由(9), (13)可得定理结论成立



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 • 利用凯莱-哈密尔顿定理,容易验证下面结论成立,

$$span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}$$

$$= span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}.$$
(14)



第2章

● 利用凯莱-哈密尔顿定理,容易验证下面结论成立,

$$span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}$$

$$= span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}.$$
(14)

➡ 进而,根据定理2.15,可得如下定理

定理

定理2.16 若G非奇异,则离散系统(1)的能控子空间 X_C 为

$$X_C = span \left[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H \right]. \tag{15}$$



第2章

• 利用凯莱-哈密尔顿定理,容易验证下面结论成立,

$$span \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}$$

$$= span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}.$$
(14)

➡ 进而,根据定理2.15,可得如下定理

定理

定理2.16 若G非奇异,则离散系统(1)的能控子空间 X_C 为

$$X_C = span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}.$$
 (15)

根据定理2.16,显然有如下结论.

推论

推论2.5 若G非奇异,则离散系统(1)的能控子空间 X_C 为G的不变子空间.



(2) G奇异情形

第2章

2.5 线性定常 散系统的能控性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的自 控性



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能

(2) G奇异情形

若G奇异,则能控状态x₀满足(6),即

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

第2章

2.5 线性足市两散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性

1.5.2 能控子空间1.5.3 能控性判据1.5.4 线性定常连续系 5.6时间离散化后的能

(2) G奇异情形

者G奇异,则能控状态x₀满足(6),即

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

➡ 于是我们有如下结论

定理

定理2.17 若G奇异,则系统(1)的能控子空间 X_C 为

$$X_C = \left\{ x_0 \middle| G^n x_0 \in span \left[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1} H \right] \right\}$$
 (16)



第2章

2.5.2 能控子空间

(2) G奇异情形

若G奇异,则能控状态x₀满足(6),即

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

➡ 于是我们有如下结论

定理
定理2.17 若
$$G$$
奇异,则系统 (1) 的能控子空间 X_C 为
$$X_C = \left\{ x_0 \middle| G^n x_0 \in span \left[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H \right] \right\}$$

证明 由(6), 显然

$$X_C \subseteq \left\{ x_0 \middle| G^n x_0 \in span \left[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1} H \right] \right\}$$

(16)



第2章

反之,若 x_0 满足

2.5 线性定常 形 散系统的能控 性

2.5.2 能控任功能处 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的自 控性 $G^n x_0 \in span [H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H],$



第2章

2.5 线性定常启 散系统的能控 性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 反之, 若x₀满足

$$G^n x_0 \in span [H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H],$$

• 则有

$$G^{n}x_{0} = \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1} \\ \xi_{2} \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}.$$
 (18)

第2章

反之,若x₀满足

$$G^n x_0 \in span [H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H],$$

• 则有

$$G^{n}x_{0} = \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1} \\ \xi_{2} \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}.$$
 (18)

• 根据(18), 记

$$u(n-1) = -\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \dots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad u(0) = -\begin{bmatrix} \xi_{(n-1)p+1} \\ \dots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 • 利用(19), 式(18)可表示为

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$
 (20)

这说明 $x_0 \in X_C$

第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系 统时间离散化后的能 • 利用(19), 式(18)可表示为

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$
 (20)

这说明 $x_0 \in X_C$

• 故有

$$\left\{x_0\middle|G^nx_0\in span\Big[H\quad GH\quad \cdots\quad G^{n-1}H\Big]\right\}\subseteq X_C.$$
 (21)

第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.2 能控子空间
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能

• 利用(19), 式(18)可表示为

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$
 (20)

这说明 $x_0 \in X_C$

• 故有

$$\left\{x_0\middle|G^nx_0\in span\Big[H\quad GH\quad \cdots\quad G^{n-1}H\Big]\right\}\subseteq X_C.$$
 (21)

➡ 由(17), (21)可知, 定理结论成立



第2章

• 利用(19), 式(18)可表示为

$$G^{n}x_{0} = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$
 (20)

这说明 $x_0 \in X_C$

故有

$$\left\{x_0 \middle| G^n x_0 \in span \left[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1} H \right] \right\} \subseteq X_C.$$
 (21)

➡ 由(17), (21)可知, 定理结论成立

根据定理2.17, 并结合凯莱-哈密尔顿定理, 可得下面结论

推论

推论2.6 若G奇异,则系统(1)的能控子空间 X_C 为G的不变子空间.



第2章

散系统的能控性 性 2.5.1 能控性与能达性

2.5.2 能控子空间
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能

- 2.5 线性定常离散系统的能控性
 - 2.5.1 能控性与能达性
 - 2.5.2 能控子空间
 - 2.5.3 能控性判据
 - 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性

2.5.1 能控性与能达 2.5.2 能控性与能达

2.5.2 能程于至回 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能

• 考察离散系统(1), 即

$$x(k + 1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = x_0$$

的能控性

第2章

● 考察离散系统(1),即

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = x_0$$

的能控性

➡ 由定理2.16,直接可得下面的定理

定理

定理2.18 若G非奇异,则离散系统(1)完全能控的充要条件是:

$$rank \left[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H \right] = n. \tag{22}$$



第2章

考察离散系统(1),即

$$x(k + 1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = x_0$$

的能控性

➡ 由定理2.16,直接可得下面的定理

定理

定理2.18 若G非奇异,则离散系统(1)完全能控的充要条件是:

$$rank \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n.$$
 (22)

• 记

$$W_{C}(n) = \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}^{T}$$
 (23)

为系统(1)的能控Gram矩阵





第2章

则由定理2.15, 容易证明下面的定理

定理

定理2.19 若G非奇异,则离散系统(1)完全能控的充要条件为 $W_C(n)$ 非奇异.

第2章

则由定理2.15, 容易证明下面的定理

定理

定理2.19 若G非奇异,则离散系统(1)完全能控的充要条件为 $W_C(n)$ 非奇异.

另外,若G非奇异,我们还有类似于线性定常连续系统的PBH判据定理

定理2.20 若G非奇异,则离散系统(1)完全能控的充要条件为

$$rank \begin{bmatrix} sI - G & H \end{bmatrix} = n, \ \forall s \in \mathbb{C}.$$
 (24)

第2章

对于G奇异的情形,由定理2.17,可得到下面的定理

定理

定理2.21 若G奇异,则离散系统(1)完全能控的充要条件为

$$rank \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H & G^n \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}.$$

第2章

对于G奇异的情形,由定理2.17,可得到下面的定理

定理

定理2.21 若G奇异,则离散系统(1)完全能控的充要条件为

$$rank \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H & G^n \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}.$$
 (2)

注: 显然, G奇异时,

$$rank \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n$$

只是系统(1)完全能控的充分条件, 而非必要条件



第2章

政 示 3亿 的 配 在 生 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

2.5.3 配程性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 控性

- 🕕 2.5 线性定常离散系统的能控性
 - 2.5.1 能控性与能达性
 - ◉ 2.5.2 能控子空间
 - 2.5.3 能控性判据
 - 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性列播

• 考虑线性定常连续系统

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{26}$$

和以T为采样周期的时间离散化系统为

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \tag{27}$$

其中,
$$G = e^{AT} 和 H = \int_0^T e^{At} dt B$$



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

• 考虑线性定常连续系统

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{26}$$

和以T为采样周期的时间离散化系统为

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \tag{27}$$

其中,
$$G = e^{AT}$$
和 $H = \int_0^T e^{At} dt B$

➡ 下面讨论系统(A,B)的能控性和系统(G,H)的能控性之间的关系



首先, 若(G, H)能控, (A, B)是否能控呢?

第2章

2.5 线性定常 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能划 2.5.2 能控子空间

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的 拴性



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达· 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续月 统时间离散化后的能 检H 首先, 若(G, H)能控, (A, B)是否能控呢?

• 事实上, 若(G, H)能控, 则存在控制 $\{u(0), u(1), \cdots, u(n-1)\}$ 将x(0)导引到原点x(n) = 0



第2章

散系统的能控性 2.5.1 能控性与能选性 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 概律定常选择系

首先, 若(G,H)能控, (A,B)是否能控呢?

- 事实上, 若(G, H)能控, 则存在控制 $\{u(0), u(1), \dots, u(n-1)\}$ 将x(0)导引到原点x(n) = 0
- 则对于系统(A, B)来说, 在区间[0, nT)上, 存在控制

$$u(t) = \begin{cases} u(0), & t \in [0, T), \\ u(1), & t \in [T, 2T), \\ \dots \\ u(n-1), & t \in [(n-1)T, nT) \end{cases}$$
 (28)

将x(0)导引到原点x(nT) = 0



第2章

散系统的能控性 2.5.1能控性与能达性 2.5.2能控于空网 2.5.3能控性判据 2.5.4线性需选换系 张时间离散化后的系

首先, $\Xi(G,H)$ 能控, (A,B)是否能控呢?

- 事实上, $\Xi(G, H)$ 能控, 则存在控制 $\{u(0), u(1), \dots, u(n-1)\}$ 将x(0)导引到原点x(n) = 0
- 则对于系统(A, B)来说, 在区间[0, nT)上, 存在控制

$$u(t) = \begin{cases} u(0), & t \in [0, T), \\ u(1), & t \in [T, 2T), \\ \dots \\ u(n-1), & t \in [(n-1)T, nT) \end{cases}$$
 (28)

将x(0)导引到原点x(nT) = 0

• 这说明, 若(G, H)能控, 则(A, B)在[0, nT]中状态完全能控, 而系统(A, B)的能控性与控制区间的选择无关, 故(A, B)能控



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性

.5.2 能控子空间 .5.3 能控性判据 .5.4 我性定常连续 克时间离散化后的 空性

首先, 若(G, H)能控, (A, B)是否能控呢?

- 事实上, 若(G, H)能控, 则存在控制 $\{u(0), u(1), \cdots, u(n-1)\}$ 将x(0)导引到原点x(n) = 0
- 则对于系统(A,B)来说,在区间[0,nT)上,存在控制

$$u(t) = \begin{cases} u(0), & t \in [0, T), \\ u(1), & t \in [T, 2T), \\ \dots \\ u(n-1), & t \in [(n-1)T, nT) \end{cases}$$
 (28)

将x(0)导引到原点x(nT)=0

- 这说明, 若(G, H)能控, 则(A, B)在[0, nT]中状态完全能控, 而系统(A, B)的能控性与控制区间的选择无关, 故(A, B)能控
- ➡ 于是, 我们有如下定理

定理

定理2.22 若离散系统(G,H)能控,则连续系统(A,B)能控.



第2章

证明 若(G, H)能控,则

2.5 线性定常 品 散系统的能控

2.5.1 能控性与能3 2.5.2 能按子空间

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 检对 $rank [H \ GH \ \cdots \ G^{n-1}H] = n,$



第2章

2.5 线性定常展 散系统的能控 性 2.5.1 能控性与能达性

2.5.1 能控性与能达·
2.5.2 能控子空间
2.5.3 能控性判据
2.5.4 线性定常连续
统时间离散化后的自 控性 证明 若(G, H)能控,则

$$rank [H \ GH \ \cdots \ G^{n-1}H] = n,$$

⇒ 故只要

$$span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
 (29)

即可得到

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n,$$

从而(A,B)能控



第2章

2.5 线性定常层 散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间

2.5.1 能控性与能达 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的自 控性 证明 若(G,H)能控,则

$$rank [H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H] = n,$$

⇒ 故只要

$$span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
 (29)

即可得到

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n,$$

从而(A,B)能控

● 因此,下面证式(29)成立



第2章

2.5 线性定常度 散系统的能控 性 2.5.1 能控性与能达性

2.5.1 能控性与能达+ 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续+ 统时间离散化后的崩 控性 证明 若(G,H)能控,则

$$rank [H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H] = n,$$

⇒ 故只要

$$span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
 (29)

即可得到

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n,$$

从而(A,B)能控

• 因此, 下面证式(29)成立. 由凯莱-哈密尔顿定理, 可得

$$G = e^{AT} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(T)A^i,$$
 (30)



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控

2.5.1 能控性与能达性
 2.5.2 能控子空间
 2.5.3 能控码

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

● 以及

$$H = \int_0^T e^{At} dt \cdot B$$

$$= \int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j dt \cdot B$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} A^j B \int_0^T \alpha_j(t) dt =: \sum_{j=0}^{n-1} A^j B r_j(T),$$
(31)

其中 $\alpha_j(T)$, $r_j(T)$ 为标量



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达性
 2.5.2 能控子空间
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 我性定常连续系

● 以及

$$H = \int_0^T e^{At} dt \cdot B$$

$$= \int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j dt \cdot B$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} A^j B \int_0^T \alpha_j(t) dt =: \sum_{j=0}^{n-1} A^j B r_j(T),$$
(31)

其中 $\alpha_j(T)$, $r_j(T)$ 为标量

• 式(31)说明

$$spanH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
. (32)



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达化 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续系 统时间离散化后的能 控性 以及

$$H = \int_{0}^{T} e^{At} dt \cdot B$$

$$= \int_{0}^{T} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{j}(t) A^{j} dt \cdot B$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} A^{j} B \int_{0}^{T} \alpha_{j}(t) dt =: \sum_{j=0}^{n-1} A^{j} B r_{j}(T),$$
(31)

其中 $\alpha_j(T)$, $r_j(T)$ 为标量

• 式(31)说明

$$spanH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
. (32)

• 并且,由(30)和(31)可导出

$$GH = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(T)A^jH, \quad A^kH = \sum_{j=0}^{n-1} r_j(T)A^{j+k}B,$$
 (33)



第2章

• 根据(33),有

$$spanA^kH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$



第2章

2.5.1 能控性与能达(2.5.2 能控子空间

2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续 • 根据(33), 有

$$spanA^kH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

• 进而,可得

$$spanGH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
. (34)



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.51能控性与能达性 2.52能控于空间 2.53能控性判据 2.54线性定常选续系统经度的高数化后的能 2.64线性定常选续系统经 • 根据(33),有

$$spanA^kH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

● 进而,可得

$$spanGH \subseteq span \left[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \right].$$
 (34)

• 依次类推,可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}.$$
 (35)



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 生 25.1能控性与能达性 25.2能控子空间 25.3能控性列艇 25.4 线性定常选择系统时间高软化后的能 检查 • 根据(33),有

$$spanA^kH \subseteq span[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B],$$

• 进而,可得

$$spanGH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
. (34)

• 依次类推,可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span \left[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \right].$$
 (35)

➡ 综合式(32), (34)和(35), 即可得(29)成立. 定理结论得证 ■



第2章

2.5 线性定常灌散系统的能控性 2.5.1能控性与能达性 2.5.2能控于空间 2.5.3能控性列艇 2.5.4线性灾常连续系 统时间离散化后的能 • 根据(33),有

$$spanA^kH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

• 进而,可得

$$spanGH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
. (34)

• 依次类推,可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span \left[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \right].$$
 (35)

▶ 综合式(32), (34)和(35), 即可得(29)成立. 定理结论得证

注: 定理2.22指出, 若连续系统(A, B)经采样周期T, 离散化得到的离散系统(G, H)是n步能控的, 则连续系统(A, B)一定是能控的



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 找性灾害选频系 提时间离散化后的能 • 根据(33),有

$$spanA^kH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

● 进而,可得

$$spanGH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
. (34)

• 依次类推,可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span \left[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \right].$$
 (35)

➡ 综合式(32), (34)和(35), 即可得(29)成立. 定理结论得证

注: 定理2.22指出, 若连续系统(A, B)经采样周期T, 离散化得到的离散系统(G, H)是n步能控的, 则连续系统(A, B)一定是能控的

反之, 若连续系统(A,B)能控, 是否一定有(G,H)能控呢?



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性
2.51能控性与能达性
2.52能控于空间
2.53能控性列權
2.54线性灾需达续系统结构被

• 根据(33),有

$$spanA^kH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

• 进而,可得

$$spanGH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
. (34)

• 依次类推,可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span\left[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right].$$
 (35)

➡ 综合式(32), (34)和(35), 即可得(29)成立. 定理结论得证

注: 定理2.22指出, 若连续系统(A,B)经采样周期T, 离散化得到的离散系统(G,H)是n步能控的, 则连续系统(A,B)一定是能控的

反之, 若连续系统(A,B)能控, 是否一定有(G,H)能控呢?

答案是否定的,这与采样周期T的选择有关.故有如下结论



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控性与能达性 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系

定理

定理2.23 令 λ_1 , λ_2 , \cdots , λ_σ 为A的全部特征值, 且当 $i \neq j$ 时, $\lambda_i \neq \lambda_j$. 若(A,B)能控, 则离散系统(G,H)能控的一个充分条件是: 对一切满足

$$Re(\lambda_i - \lambda_j) = 0, \ i, j = 1, 2, \cdots, \sigma$$
 (36)

的特征值,采样周期T应成立

$$T \neq \frac{2l\pi}{Im(\lambda_i - \lambda_j)}, \ l = \pm 1, \pm 2, \cdots.$$
 (37)



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性
2.5.1 能校性与能达性
2.5.2 能校子型問
2.5.3 能校性受需
2.5.4 线性尺带连续系统时间离散化后的能

定理

定理2.23 令 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\sigma$ 为A的全部特征值, 且当 $i \neq j$ 时, $\lambda_i \neq \lambda_j$. 若(A,B)能控, 则离散系统(G,H)能控的一个充分条件是: 对一切满足

$$Re(\lambda_i - \lambda_j) = 0, \ i, j = 1, 2, \cdots, \sigma$$
 (36)

的特征值,采样周期T应成立

$$T \neq \frac{2l\pi}{Im(\lambda_i - \lambda_j)}, \ l = \pm 1, \pm 2, \cdots.$$
 (37)

证明 利用若尔当标准型和PBH判据证明



第2章

2.5 线性定常高 散系统的能控

2.5.1 能控性与能达
 2.5.2 能控子空间

2.5.3 能控性判据
 2.5.4 线性定常连续

2.5.4 线性定常连续并 统时间离散化后的能 控性 • 对系统(A,B)作非奇异线性变换 $x=P\hat{x},P$ 为非奇异,且使得 $P^{-1}AP=J,\ P^{-1}B=\hat{B}, \eqno(38)$

第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达· 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续引 统时间离散化后的能 控性 • 对系统(A, B)作非奇异线性变换 $x = P\hat{x}, P$ 为非奇异, 且使得 $P^{-1}AP = J, P^{-1}B = \hat{B}, \tag{38}$

其中,

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_{\sigma} \end{bmatrix}_{n \times n}, \qquad J_j = \begin{bmatrix} J_{j1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_{j\alpha_j} \end{bmatrix}_{n_j \times n_j}$$

$$J_{jk} = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_{n} \times n_{n}}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{\sigma} \end{bmatrix}_{n \times p}$$
(39)

$$B_{j} = egin{bmatrix} B_{j1} \ dots \ B_{jlpha_{j}} \end{bmatrix}_{n_{i} imes n}, \qquad \qquad B_{jk} = egin{bmatrix} B_{1_{jk}} \ dots \ B_{n_{jk}} \end{bmatrix}_{n_{i}
olimits}$$



第2章

2.5 线性定常 P 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达f 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续; 统时间离散化后的能 控性

• 此时,有

$$\hat{G} = P^{-1}GP$$

$$= P^{-1}e^{AT}P$$

$$= e^{(P^{-1}AP)T}$$

$$= e^{TT},$$

$$\hat{H} = P^{-1}H$$

$$= P^{-1}\int_{0}^{T} e^{At}dt \cdot B$$

$$= P^{-1}\int_{0}^{T} e^{At}Pdt \cdot P^{-1}B$$

$$= \int_{0}^{T} e^{Jt}dt \cdot \hat{B}$$
(40)



第2章

性 2.5.1 能拉性与能达性 2.5.2 能拉子空间 2.5.3 能拉性判据 2.5.4 线性定常连续系 统时间离散化后的能 • 此时,有

$$\hat{G} = P^{-1}GP$$

$$= P^{-1}e^{AT}P$$

$$= e^{(P^{-1}AP)T}$$

$$= e^{JT},$$

$$\hat{H} = P^{-1}H$$

$$= P^{-1}\int_{0}^{T} e^{At}dt \cdot B$$

$$= P^{-1}\int_{0}^{T} e^{At}Pdt \cdot P^{-1}B$$

$$= \int_{0}^{T} e^{Jt}dt \cdot \hat{B}$$
(40)

• 此外, 显然要证(G,H)能控, 只要 (\hat{G},\hat{H}) 能控即可



第2章

(1) 首先证明, 若(37)成立, 则A的互异特征根 λ_1 , λ_2 , ..., λ_{σ} 对应 的 \hat{G} 的 σ 个特征值互异



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控

2.5.1 能控性与能达率
 2.5.2 能控子空间
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 线性定常连续系

- (1) 首先证明, 若(37)成立, 则A的互异特征根 λ_1 , λ_2 , ..., λ_σ 对应的 \hat{G} 的 σ 个特征值互异
 - 由式(39)和(40), 可推得

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_\sigma t} \end{bmatrix}, \quad e^{J_jt} = \begin{bmatrix} e^{J_jt} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_{j\alpha_j}t} \end{bmatrix},$$

$$e^{J_{jk}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_{j}t} & te^{\lambda_{j}t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk}-1}}{(n_{jk}-1)!}e^{\lambda_{j}t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_{j}t} \\ & & & & e^{\lambda_{j}t} \end{bmatrix}, \tag{41}$$



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 我性定常连续 统时间离散化后的1 控性

- (1) 首先证明, 若(37)成立, 则A的互异特征根 λ_1 , λ_2 , ..., λ_σ 对应的 \hat{G} 的 σ 个特征值互异
 - 由式(39)和(40), 可推得

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_\sigma t} \end{bmatrix}, \quad e^{J_jt} = \begin{bmatrix} e^{J_jt} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_{j\alpha_j}t} \end{bmatrix},$$

$$e^{J_{jk}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk}-1}}{(n_{jk}-1)!} e^{\lambda_j t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_j t} \\ & & & \ddots & te^{\lambda_j t} \end{bmatrix}, \tag{41}$$

• 容易看出, \hat{G} 的特征值为 $e^{\lambda_1 T}$, $e^{\lambda_2 T}$, \dots , $e^{\lambda_\sigma T}$, 也即为G的特征值



第2章

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \ j = 1, 2, \dots, \sigma, \ i^2 = -1$$
 (42)

2.5 线性定常离散系统的能控性

2.5.1 能控性与能; 2.5.2 能控子空间

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常透明。 统时间离散化后的能 控性



第2章

2.5 线性定常 散系统的能控性

2.5.1 能控性与能达(2.5.2 能控子空间

2.5.3 能控性判据 2.5.4 器性定常连续

2.5.4 线性定常连续系 绕时间离散化后的能 控性

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \ j = 1, 2, \cdots, \sigma, \ i^2 = -1$$
 (42)

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T} (\cos \beta_j T + i \sin \beta_j T)$$
 (43)



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系 统时间离散化后的能 • 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \ j = 1, 2, \cdots, \sigma, \ i^2 = -1$$
 (42)

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T} (\cos \beta_i T + i \sin \beta_i T) \tag{43}$$

- 对A的任意不同特征值 λ_j, λ_h ,
 - 若 λ_i , λ_h 的实部不同, 则一定有 $e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_h T}$
 - 若 λ_j , λ_h 的实部相同, 虚部不同, 则由 $\alpha_j = \alpha_h$ 可得 $e^{\alpha_j T} = e^{\alpha_h T}$



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性2.5.1 能控性与能达性2.5.2 能控子空间

2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连约统时间离散化后的 控性 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \ j = 1, 2, \cdots, \sigma, \ i^2 = -1$$
 (42)

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T} (\cos \beta_i T + i \sin \beta_i T) \tag{43}$$

- 对A的任意不同特征值 λ_j, λ_h ,
 - 若 λ_i , λ_h 的实部不同,则一定有 $e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_h T}$
 - \dot{a} \dot{a} λ_j , λ_h 的实部相同, 虚部不同, 则由 $\alpha_j = \alpha_h$ 可得 $e^{\alpha_j T} = e^{\alpha_h T}$; 且由 $\beta_i \neq \beta_h$ 以及T满足的关系式(37), 可推得

$$(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \neq (\cos\beta_h T + i\sin\beta_h T)$$



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 251 维姆维斯维斯

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系 统时间离散化后的能 控性 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \ j = 1, 2, \cdots, \sigma, \ i^2 = -1$$
 (42)

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T} (\cos \beta_j T + i \sin \beta_j T) \tag{43}$$

- 对A的任意不同特征值 λ_j, λ_h ,
 - 若 λ_i , λ_h 的实部不同,则一定有 $e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_h T}$
 - \dot{a} \dot{a} \dot{a} \dot{b} \dot{b}

$$(\cos \beta_j T + i \sin \beta_j T) \neq (\cos \beta_h T + i \sin \beta_h T)$$

据上述两个关系,由(43)可得 $e^{\lambda_j T} \neq e^{\lambda_h T}$,即

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T} (\cos \beta_j T + i \sin \beta_j T)$$

$$\neq e^{\alpha_h T} (\cos \beta_h T + i \sin \beta_h T) = e^{\lambda_h T}$$
(44)



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性

2.5.1 無程性与能达性
 2.5.2 能控子空间
 2.5.3 能控性判据
 2.5.4 我性定常连续系统时间离散化后的能控性

• 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j, \ j = 1, 2, \dots, \sigma, \ i^2 = -1$$
 (42)

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T} (\cos \beta_j T + i \sin \beta_j T) \tag{43}$$

- 对A的任意不同特征值 λ_j, λ_h ,
 - 若 λ_i , λ_h 的实部不同,则一定有 $e^{\lambda_i T} \neq e^{\lambda_h T}$

$$(\cos \beta_j T + i \sin \beta_j T) \neq (\cos \beta_h T + i \sin \beta_h T)$$

据上述两个关系,由(43)可得 $e^{\lambda_j T} \neq e^{\lambda_h T}$,即

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T} (\cos \beta_j T + i \sin \beta_j T)$$

$$\neq e^{\alpha_h T} (\cos \beta_h T + i \sin \beta_h T) = e^{\lambda_h T}$$
(44)

⇒ 综合上面的结论, 即知当(37)成立时, 若 λ_1 , λ_2 , ..., λ_σ 互异, 则 $e^{\lambda_1 T}$. $e^{\lambda_2 T}$ $e^{\lambda_\sigma T}$ 互异



第2章

(2) 然后证明, 若(37)成立, 则 $e^{\lambda_i T} - 1 \neq 0$



第2章

2.5 线性定常高 散系统的能控

2.5.1 能控性与能达
 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能

(2) 然后证明, 若(37)成立, 则e^{λ,T} - 1 ≠ 0
 反证法. 假设e^{λ,T} - 1 = 0, 则e^{λ,T} = 1



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达
 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续月 统时间离散化后的能

- (2) 然后证明, 若(37)成立, 则 $e^{\lambda_j T} 1 \neq 0$
 - 反证法. 假设 $e^{\lambda_j T} 1 = 0$, 则 $e^{\lambda_j T} = 1$



第2章

- 2.5 线性定常离 散系统的能控 性
- 2.5.1 能程性与能迟性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能

- (2) 然后证明, 若(37)成立, 则 $e^{\lambda_j T} 1 \neq 0$
 - **反证法.** 假设 $e^{\lambda_j T} 1 = 0$, 则 $e^{\lambda_j T} = 1$
 - 令 $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, 则由 $|e^{\lambda_j T}| = 1 = e^{\alpha_j T}$, 推得 $\alpha_j = 0$, 故 λ_j 为纯虚数
 - 从而由

$$e^{\lambda_j T} = e^{i\beta_j T} = \cos \beta_j T + i \sin \beta_j T = 1$$

推得 $\sin \beta_i T$ (虚部为零),即有

$$\beta_j T = 2k\pi, \ k = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$



第2章

- 2.5 线性定常离 散系统的能控 性
- 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系 统时间离散化后的能 控性

- (2) 然后证明, 若(37)成立, 则 $e^{\lambda_j T} 1 \neq 0$
 - **反证法.** 假设 $e^{\lambda_j T} 1 = 0$, 则 $e^{\lambda_j T} = 1$
 - 令 $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, 则由 $|e^{\lambda_j T}| = 1 = e^{\alpha_j T}$, 推得 $\alpha_j = 0$, 故 λ_j 为纯虚数
 - 从而由

$$e^{\lambda_j T} = e^{i\beta_j T} = \cos \beta_j T + i \sin \beta_j T = 1$$

推得 $\sin \beta_i T$ (虚部为零),即有

$$\beta_j T = 2k\pi, \ k = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

从而

$$T = \frac{2k\pi}{\beta_j} = \frac{4k\pi}{2\beta_j}. (45)$$



第2章

- 2.5 线性定常离散系统的能控性
- 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 控性

- (2) 然后证明, 若(37)成立, 则 $e^{\lambda_j T} 1 \neq 0$
 - **反证法.** 假设 $e^{\lambda_j T} 1 = 0$, 则 $e^{\lambda_j T} = 1$
 - 令 $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, 则由 $|e^{\lambda_j T}| = 1 = e^{\alpha_j T}$, 推得 $\alpha_j = 0$, 故 λ_j 为纯虚数
 - 从而由

$$e^{\lambda_j T} = e^{i\beta_j T} = \cos \beta_j T + i \sin \beta_j T = 1$$

推得 $\sin \beta_i T$ (虚部为零),即有

$$\beta_j T = 2k\pi, \ k = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

● 从而

$$T = \frac{2k\pi}{\beta_i} = \frac{4k\pi}{2\beta_i}. (45)$$

• 又因为 $\lambda_j = i\beta_j$ 是A的特征值, 故 $\lambda_h = -i\beta_j$ 也是A的特征值, 则由(45)进一步推得

$$T = \frac{4k\pi}{2\beta_i} = \frac{4k\pi}{Im(\lambda_i - \lambda_h)}, \ k = \pm 1, \pm 2, \cdots$$



第2章

- 2.5 线性定常 散系统的能控性
- 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 我性定常连续系统时间离散化后的能 控性

- (2) 然后证明, 若(37)成立, 则 $e^{\lambda_j T} 1 \neq 0$
 - **反证法.** 假设 $e^{\lambda_j T} 1 = 0$, 则 $e^{\lambda_j T} = 1$
 - $\Diamond \lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, 则由 $|e^{\lambda_j T}| = 1 = e^{\alpha_j T}$, 推得 $\alpha_j = 0$, 故 λ_j 为纯虚数
 - 从而由

$$e^{\lambda_j T} = e^{i\beta_j T} = \cos \beta_j T + i \sin \beta_j T = 1$$

推得 $\sin \beta_i T$ (虚部为零),即有

$$\beta_j T = 2k\pi, \ k = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

• 从而

$$T = \frac{2k\pi}{\beta_i} = \frac{4k\pi}{2\beta_i}. (45)$$

• 又因为 $\lambda_j = i\beta_j$ 是A的特征值,故 $\lambda_h = -i\beta_j$ 也是A的特征值,则由(45)进一步推得

$$T = \frac{4k\pi}{2\beta_i} = \frac{4k\pi}{Im(\lambda_i - \lambda_h)}, \ k = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

➡ 显然, 这与(37)矛盾, 说明假设不成立. 故, e^{½T} ≠ 1





第2章

2.5 线性定常 散系统的能控

2.5.1 能控性与能;
 2.5.2 能授予空间

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续: 统时间离散化后的自 控性 (3) 下面, 计算舶



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控

2.5.1 能控性与能达付
 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

(3) 下面, 计算Ĥ

• 由式(39)和(40), 可得

$$\hat{H} = \int_{0}^{T} e^{Jt} dt \cdot \hat{B} = \begin{bmatrix} \int_{0}^{T} e^{J_{1}t} dt & & \\ & \ddots & & \\ & & \int_{0}^{T} e^{J_{\sigma}t} dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1} \\ \vdots \\ B_{\sigma} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{0}^{T} e^{J_{1}t} dt \cdot B_{1} \\ \vdots \\ \int_{0}^{T} e^{J_{\sigma}t} dt \cdot B_{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{1} \\ \vdots \\ H_{\sigma} \end{bmatrix},$$

$$H_{j} = \int_{0}^{T} e^{J_{j}t} dt \cdot B_{j}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_{0}^{T} e^{J_{j}t} dt \cdot B_{j} \\ \vdots \\ \int_{0}^{T} e^{J_{j\alpha_{j}}t} dt \cdot B_{j\alpha_{j}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{j1} \\ \vdots \\ H_{j\alpha_{j}} \end{bmatrix},$$



第2章

2.5 线性定常 ā 散系统的能控

2.5.1 能控性与能达化
 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续月 统时间离散化后的能 以及

$$H_{jk} = \int_{0}^{T} e^{J_{jk}t} dt \cdot B_{jk}$$

$$= \int_{0}^{T} \begin{bmatrix} e^{\lambda_{j}t} & te^{\lambda_{j}t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk-1}}}{(n_{jk}-1)!} e^{\lambda_{j}t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_{j}t} \end{bmatrix} dt \cdot \begin{bmatrix} b_{1_{jk}} \\ \vdots \\ b_{n_{jk}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1_{jk}} \\ \vdots \\ h_{n_{jk}} \end{bmatrix}, \quad (46)$$



第2章

2.5 线性定常 散系统的能控

2.5.1 能控性与能达付
 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能 約性 以及

$$H_{jk} = \int_{0}^{T} e^{J_{jk}t} dt \cdot B_{jk}$$

$$= \int_{0}^{T} \begin{bmatrix} e^{\lambda_{j}t} & te^{\lambda_{j}t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk-1}}}{(n_{jk}-1)!} e^{\lambda_{j}t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_{j}t} \\ & & & e^{\lambda_{j}t} \end{bmatrix} dt \cdot \begin{bmatrix} b_{1_{jk}} \\ \vdots \\ b_{n_{jk}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1_{jk}} \\ \vdots \\ h_{n_{jk}} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$h_{n_{jk}} = \int_0^T e^{\lambda_j t} dt \cdot b_{n_{jk}},\tag{47}$$

第2章

2.5 线性定常点 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达性
 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

以及

$$H_{jk} = \int_{0}^{T} e^{J_{jk}t} dt \cdot B_{jk}$$

$$= \int_{0}^{T} \begin{bmatrix} e^{\lambda_{j}t} & te^{\lambda_{j}t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk-1}}}{(n_{jk}-1)!}e^{\lambda_{j}t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_{j}t} \end{bmatrix} dt \cdot \begin{bmatrix} b_{1_{jk}} \\ \vdots \\ b_{n_{jk}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1_{jk}} \\ \vdots \\ h_{n_{jk}} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

其中

$$h_{n_{jk}} = \int_0^T e^{\lambda_j t} dt \cdot b_{n_{jk}},\tag{47}$$

● 并且,有

$$\int_0^T e^{\lambda_j t} dt = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_j} \left(e^{\lambda_j T} - 1 \right), & \lambda_j \neq 0, \\ T, & \lambda_j = 0, \end{cases}$$



第2章

2.5 线性定常离 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达
 2.5.2 能控子空间

2.5.2 能控于空间
 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续月 统时间离散化后的能 轮性 • 由步骤(2)结果, 因为(37)成立, 故 $e^{\lambda_j T} - 1 \neq 0$, 从而可得 $\int_0^T e^{\lambda_j t} dt \neq 0.$

(48)



第2章

2.5 线性定常; 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达
 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能

• 由步骤(2)结果, 因为(37)成立, 故 $e^{\lambda_j T} - 1 \neq 0$, 从而可得 $\int_0^T e^{\lambda_j t} dt \neq 0.$

(4) 最后证明 (\hat{G}, \hat{H}) 的能控性

(48)



第2章

● 由步骤(2)结果, 因为(37)成立, 故 $e^{\lambda_i T} - 1 \neq 0$, 从而可得

$$\int_0^T e^{\lambda_j t} dt \neq 0. (48)$$

- (4) 最后证明(\hat{G} , \hat{H})的能控性
 - 因为(A.B)能控, 所以(J.B)能控, 故

$$rank \begin{vmatrix} b_{n_{j1}} \\ b_{n_{j2}} \\ \vdots \\ b_{n_{in_i}} \end{vmatrix} = \alpha_j, \ j = 1, 2, \cdots, \sigma, \tag{49}$$



第2章

2.5 线性定常度 散系统的能控 性

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的 控性 ● 由步骤(2)结果, 因为(37)成立, 故 $e^{\lambda_i T} - 1 \neq 0$, 从而可得

$$\int_0^T e^{\lambda_j t} dt \neq 0. (48)$$

- (4) 最后证明(\hat{G} , \hat{H})的能控性
 - 因为(A,B)能控,所以(J,B)能控,故

$$rank \begin{vmatrix} b_{n_{j1}} \\ b_{n_{j2}} \\ \vdots \\ b_{n_{i\alpha_i}} \end{vmatrix} = \alpha_j, \ j = 1, 2, \cdots, \sigma, \tag{49}$$

• 从而由(48)得

$$rank \begin{bmatrix} h_{n_{j1}} \\ h_{n_{j2}} \\ \vdots \\ h_{n_{j\alpha_j}} \end{bmatrix} = rank \int_0^T e^{\lambda_j t} dt \cdot \begin{bmatrix} b_{n_{j1}} \\ b_{n_{j2}} \\ \vdots \\ b_{n_{j\alpha_j}} \end{bmatrix}$$
(50)

$$=\alpha_j, j=1,2,\cdots,\sigma$$



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性

2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续月 统时间离散化后的能

● 下面,考察

$$rank \left[sI - \hat{G} \quad \hat{H} \right] = rank \begin{bmatrix} sI - e^{J_1 T} & H_1 \\ \vdots & \vdots \\ sI - e^{J_\sigma T} & H_\sigma \end{bmatrix}.$$
 (51)



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 ● 下面,考察

$$rank \begin{bmatrix} sI - \hat{G} & \hat{H} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - e^{J_1 T} & & H_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & sI - e^{J_\sigma T} & H_\sigma \end{bmatrix}.$$
 (51)

• $\diamondsuit s = e^{\lambda_i T}$, 则由 $s = e^{\lambda_i T}$ 互异, $i = 1, 2, \dots, \sigma$, 得

$$rank \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} I - \hat{G} & \hat{H} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} I - e^{J_1 T} & & H_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & e^{\lambda_1 T} I - e^{J_\sigma T} & H_\sigma \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} I - e^{J_1 T} & & H_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & e^{\lambda_1 T} I - e^{J_\sigma T} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} I - e^{J_1 T} & H_1 \end{bmatrix} + n_2 + \dots + n_\sigma$$



第2章

2.5 线性定常 散系统的能控

2.5.1 能控性与能; 2.5.2 能控子空间

2.5.3 能控性判据
 2.5.4 线性定常连续

2.5.4 线性足需连续 统时间离散化后的 控性 • 进一步, 考察 $\left[e^{\lambda_1 T}I - e^{J_1 T} H_1\right]$ 的秩



第2章

2.5 线性定常度 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续并 统时间离散化后的能 控性

- 进一步,考察 $\left[e^{\lambda_1 T}I e^{J_1 T} H_1\right]$ 的秩
- 根据(50), 可得(类似于"若尔当规范形判据的证明过程")

$$rank \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} I - e^{J_1 T} & H_1 \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T} I - e^{J_{11} T} & H_{11} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & e^{\lambda_1 T} I - e^{J_{1\alpha_1} T} & H_{1\alpha_1} \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \Theta & \begin{bmatrix} * \\ h_{n_{11}} \end{bmatrix} \\ & \ddots & \vdots \\ & \Theta & \begin{bmatrix} * \\ h_{n_{1\alpha_1}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & -Te^{\lambda_1 T} & * \\ & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & -Te^{\lambda_1 T} \end{bmatrix}$$

$$= n_1 - \alpha_1 + rank \begin{bmatrix} h_{n_{11}} \\ & \ddots \\ & & h_{n_{1\alpha_1}} \end{bmatrix}$$

$$= n_1 - \alpha_1 + \alpha_1 = n_1$$

$$(53)$$



第2章

$$rank\left[sI - \hat{G} \quad \hat{H}\right] = n. \tag{54}$$



第2章

2.5 线性定常; 散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达。 2.5.2 能控子空间

2.5.1 能控性与能达 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 我性定常连续 统时间离散化后的 • 联合(51)~(53), 可得当 $s = e^{\lambda_1 T}$ 时, 有

$$rank \left[sI - \hat{G} \quad \hat{H} \right] = n. \tag{54}$$

• 同理可证, 当 $s = e^{\lambda_i T}$, $i = 1, 2, \dots, \sigma$ 时, (54)成立



第2章

2.5 线性定常 散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达作 2.5.2 能控性与解达作 2.5.3 能控性列標 2.5.4 设性安徽连续到

$$rank \left[sI - \hat{G} \quad \hat{H} \right] = n. \tag{54}$$

- 同理可证, 当 $s = e^{\lambda_i T}$, $i = 1, 2, \dots, \sigma$ 时, (54)成立
- 又, 当 $s \neq e^{\lambda_i T}$, (54)显然成立



第2章

2.5 线性定常产数系统的能控性 2.5.1能控性与能达性 2.5.2能控子空间 2.5.3能控性判据 2.5.4 线性灾害连续,

$$rank \left[sI - \hat{G} \quad \hat{H} \right] = n. \tag{54}$$

- 同理可证, 当 $s = e^{\lambda_i T}$, $i = 1, 2, \dots, \sigma$ 时, (54)成立
- 又, 当 $s \neq e^{\lambda_i T}$, (54)显然成立
- 即,(54)对任意s∈ C 都成立



第2章

2.5 线性定常度 散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控于空间 2.5.3 能控性判据 2.5.4 线性定常连续系

$$rank\left[sI - \hat{G} \quad \hat{H}\right] = n. \tag{54}$$

- 同理可证, 当 $s = e^{\lambda_i T}$, $i = 1, 2, \dots, \sigma$ 时, (54)成立
- 又, 当 $s \neq e^{\lambda_i T}$, (54)显然成立
- 即,(54)对任意s∈ C都成立
- ⇒ 故, (Ĝ, Ĥ)能控, 从而(G, H)能控. 定理结论得证



第2章

2.5 线性定常展 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能3 2.5.2 能按子空间

2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续月 统时间离散化后的能 检H 例2.5.1 线性定常连续系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$



第2章

2.5 线性定常 散系统的能控性

2.5.1 能控性与能达1 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的) 控性 例2.5.1 线性定常连续系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

- 易知, 系统能控
- 简单计算, 可得系统特征值 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$



第2章

2.5 线性定常 散系统的能控 性

2.5.1 能控性与能达化
 2.5.2 能控子空间
 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的自 控性 例2.5.1 线性定常连续系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

- 易知,系统能控
- 简单计算, 可得系统特征值λ₁ = i, λ₂ = -i
- ⇒ 由定理2.23的结论知, 若采样周期T使成立

$$T \neq \frac{2l\pi}{Im(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{2l\pi}{2} = l\pi, \ l = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

时,其离散化后系统为能控的



第2章

2.5.1 能控性与能达f 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据

2.5.4 线性定常连续 统时间离散化后的; 控性 例2.5.1 线性定常连续系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

- 易知,系统能控
- 简单计算, 可得系统特征值 $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$
- ⇒ 由定理2.23的结论知, 若采样周期T使成立

$$T \neq \frac{2l\pi}{Im(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{2l\pi}{2} = l\pi, \ l = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

时,其离散化后系统为能控的

• 下面用秩判据对这一结论进行核实验证



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性

2.5.1 能控性与能达
 2.5.2 能控子空间

2.5.4 线性定常连续: 经贴回更数据证据 ● 容易计算, 时间离散化后系统为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \sin(T) \\ \cos(T) - 1 \end{bmatrix} u(k)$$



第2章

2.5 线性定常存款系统的能控性
2.5.1 能控性与能达性
2.5.2 能控于空间
2.5.3 能控性列继
2.5.4 线电路 化金融 化

● 容易计算, 时间离散化后系统为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \sin(T) \\ \cos(T) - 1 \end{bmatrix} u(k)$$

● 且, 能控性判别矩阵为

$$Q_C = \begin{bmatrix} \sin(T) & 2\sin(T)\cos(T) - \sin(T) \\ \cos(T) - 1 & \cos^2(T) - \sin^2(T) - \cos(T) \end{bmatrix}$$



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性判据 ● 容易计算, 时间离散化后系统为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \sin(T) \\ \cos(T) - 1 \end{bmatrix} u(k)$$

• 且, 能控性判别矩阵为

$$Q_C = \begin{bmatrix} \sin(T) & 2\sin(T)\cos(T) - \sin(T) \\ \cos(T) - 1 & \cos^2(T) - \sin^2(T) - \cos(T) \end{bmatrix}$$

● 进而, 有(T ≠ 0)

$$\det Q_C = 2\sin(T)[\cos(T) - 1] \begin{cases} = 0, & T = l\pi \\ \neq 0, & T \neq l\pi \end{cases}, \quad l = \pm 1, \pm 2, \cdots$$



第2章

2.5 线性定常离散系统的能控性 2.5.1 能控性与能达性 2.5.2 能控子空间 2.5.3 能控性列继 2.5.4 线周围数化后的格 • 容易计算, 时间离散化后系统为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \sin(T) \\ \cos(T) - 1 \end{bmatrix} u(k)$$

• 且, 能控性判别矩阵为

$$Q_C = \begin{bmatrix} \sin(T) & 2\sin(T)\cos(T) - \sin(T) \\ \cos(T) - 1 & \cos^2(T) - \sin^2(T) - \cos(T) \end{bmatrix}$$

进而,有(T≠0)

$$\det Q_C = 2\sin(T)[\cos(T) - 1] \begin{cases} = 0, & T = l\pi \\ \neq 0, & T \neq l\pi \end{cases}, \quad l = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

• 由此可见.

当 $T \neq l\pi$ ($l = \pm 1, \pm 2, \cdots$)时, 离散化后系统为能控的与定理2.23所得结论一致!



第2章

• 教材:

程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 52-63