第1章　线性定常系统的状态空间描述及运动分析

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1.6 线性定常系统的运动分析

线性定常系统的状态方程为

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x(0) = x_0,\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

其中,

- x为n维状态向量, u 为p 维输入向量
- A和B分别为$n \times n$和$n \times p$常阵

➥ 分析系统(1)的运动规律, 从下面的三种情形考虑

1.6.1 零输入响应

考虑给定线性定常系统的自治方程(即, $u(t) \equiv 0, \forall t$)

$$\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0,\ t \geqslant 0, \tag{2}$$

其中, x为n维状态向量, A为$n \times n$常阵

定理

定理1.8 系统(2)的零输入响应的表达式为

$$x(t) = e^{At}x_0,\ t \geqslant 0. \tag{3}$$

证明 设$x(t) = e^{At}c$, 由$x(0) = x_0$ 可得

$$e^{A\cdot 0}c = x_0,$$

即$c = x_0$, 从而得(3). 结论得证 ■

1.6.2 零状态响应

考虑初始状态为零(即, $x(0)=0$)的线性定常系统的强迫方程

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ x(0)=0,\ t\geqslant 0, \tag{4}$$

其中, x为n维状态向量, u 为p 维输入向量, A, B分别为$n\times n, n\times p$常阵

定理

定理1.9 (4)所描述的线性定常系统的零状态响应的表达式为

$$x(t)=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,\ t\geqslant 0. \tag{5}$$

注: 零初态下的线性定常系统方程称为“强迫方程”, 意指

- 系统的运动是由输入驱动下的强迫运动
- 输入是导致零初态响应的惟一激励作用

证明 考虑如下等式:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right)=\left(\frac{d}{dt}e^{-At}\right)x+e^{-At}\dot{x}$$
$$=e^{-At}\left[\dot{x}-Ax\right]$$
$$=e^{-At}Bu$$

对上式从0到t积分, 并注意到$x(0)=0$, 可得

$$e^{-At}x(t)=\int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

将等式两边同时左乘e^{At}, 并利用$e^{At}e^{-A\tau}=e^{A(t-\tau)}$, 即可得

$$x(t)=\int_0^t e^{At}e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$
$$=\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \qquad ---\text{“卷积”}$$

结论得证

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0, \ t \geqslant 0, \tag{6}$$

解的表达式, 我们有下面的结论

定理

定理1.10 线性定常系统(6)在初始状态和外输入同时作用下的状态运动的表达式为

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \ t \geqslant 0. \tag{7}$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \ t \geqslant t_0. \tag{8}$$

系统运动表达式(7),(8)的物理含义是

- 系统的运动由两部分组成, 其中第一项是初始状态的转移项, 第二项为控制作用下的受控项
- 正是由于受控项的存在, 提供了通过选取合适的控制u, 使状态轨线$x(t)$满足期望的要求的可能性. 这是我们分析系统的结构特性和对系统进行控制设计的基本依据

1.7.1 脉冲响应矩阵

考虑一个具有p个输入端和q 个输出端的线性定常系统，假定系统具有零初始状态

- 令τ时刻在第j个输入端加一单位脉冲函数$\delta(t-\tau)$，而令其他输入端的输入为0，用$g_{ij}(t-\tau)$表示第i个输出端在t时刻的脉冲响应

  而以脉冲响应$g_{ij}(t-\tau), (i=1,2,\cdots,q; j=1,2,\cdots,p)$为元构成的$q\times p$矩阵

$$G(t-\tau)=\begin{bmatrix} g_{11}(t-\tau) & g_{12}(t-\tau) & \cdots & g_{1p}(t-\tau) \\ g_{21}(t-\tau) & g_{22}(t-\tau) & \cdots & g_{2p}(t-\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{q1}(t-\tau) & g_{q2}(t-\tau) & \cdots & g_{qp}(t-\tau) \end{bmatrix} \tag{9}$$

  称为系统的脉冲响应矩阵

1.7.1 脉冲响应矩阵

注: 由于系统的初始状态为零, 故系统的输出在输入加入之前的所有瞬时为0, 所以$G(t-\tau)$满足

$$G(t-\tau)=0,\ \forall\tau,\forall t<\tau. \tag{10}$$

- 当系统的输入向量u的各个分量$u_j(t)$为任意形式的时间函数时, 可将其用一系列脉冲函数来逼近, 即表示为(式中, $\Delta t=t_{k+1}-t_k$)

$$u_j(t)\approx\sum_k u_j(t_k)\delta(t-t_k)\Delta t,\ j=1,2,\cdots,p \tag{11}$$

注: 事实上, (11)为如下“$u_j(t)$基于单位脉冲表示”的逼近

$$u_j(t)=\int_{t_0}^{t}u_j(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

➥ 相应于(11)的第i个输出端的系统响应为

$$\begin{aligned}y_i(t)&\approx\sum_j\left(\sum_k u_j(t_k)g_{ij}(t-t_k)\Delta t\right)\\&=\sum_k\begin{bmatrix}g_{i1}(t-t_k)&\cdots&g_{ip}(t-t_k)\end{bmatrix}u(t_k)\Delta t\end{aligned}$$

- 进而, 相应的系统输出为

$$y(t) \approx \sum_k G(t-t_k)u(t_k)\Delta t. \tag{12}$$

- 令$\Delta t \to 0$, 上式取极限, 可以得到根据脉冲响应矩阵来计算任意输入时的系统输出的一个基本关系式:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t-\tau)u(\tau)d\tau, \ t \geqslant t_0. \tag{13}$$

- 进一步, 若$t_0 = 0$, 则上式可表为

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t G(t-\tau)u(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t G(\tau)u(t-\tau)d\tau, \ t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{14}$$

注: 由上式所给出的积分关系式称为“卷积”

1.7.2 脉冲响应矩阵和状态空间描述

为了建立起脉冲响应矩阵和状态空间描述之间的关系，考虑如下的线性定常系统：

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu,\ x(0) = x_0,\ t \geqslant 0, \\
y &= Cx + Du,
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中，A, B, C, D分别为$n \times n, n \times p, q \times n, q \times p$的实值常阵

定理

定理1.11 线性定常系统(15)的脉冲响应矩阵为

$$
G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau), \tag{16}
$$

将其写为更为常用的形式(即，将$t-\tau$整体视为自变量)

$$
G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \tag{17}
$$

证明 系统(15)的输出表达式为

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t). \tag{18}$$

由(18)可得

$$y(t) = \int_0^t (Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau) + D\delta(t-\tau)u(\tau))d\tau. \tag{19}$$

$$G(t-\tau) = Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau). \tag{20}$$

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t). \tag{21}$$

定理结论得证 ■

定理

定理1.12 两个代数等价的线性定常系统具有相同的脉冲响应矩阵.

证明 由定理1.11知，系统(A, B, C, D)的脉冲响应矩阵为

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \tag{22}$$

系统$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$的脉冲响应矩阵为

$$\bar{G}(t) = \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B} + \bar{D}\delta(t). \tag{23}$$

已知两系统代数等价，故有

$$\bar{A} = PAP^{-1},\ \bar{B} = PB,\ \bar{C} = CP^{-1},\ \bar{D} = D, \tag{24}$$

从而

$$e^{\bar{A}t} = Pe^{At}P^{-1}. \tag{25}$$

于是可导出

$$\begin{aligned}\bar{G}(t) &= \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{B} + \bar{D}\delta(t) = CP^{-1}Pe^{At}P^{-1}PB + D\delta(t) \\ &= Ce^{At}B + D\delta(t) = G(t).\end{aligned} \tag{26}$$

从而定理1.12得证 ■

定理

定理1.13 两个代数等价的线性定常系统具有相同的输出零状态响应和输出零输入相应.

证明 两个代数等价的线性定常系统(A, B, C, D)和$(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D})$的输出零状态响应为

$$y_{0x}(t) = \int_0^t (Ce^{A(t-\tau)}B + D\delta(t-\tau))u(\tau)d\tau, \tag{27}$$

$$\bar{y}_{0\bar{x}}(t) = \int_0^t (\bar{C}e^{\bar{A}(t-\tau)}\bar{B} + \bar{D}\delta(t-\tau))u(\tau)d\tau, \tag{28}$$

直接利用(26)即可得: $\bar{y}_{0\bar{x}}(t) = y_{0x}(t), t \geqslant 0$

两者的输出零输入响应分别为

$$y_{0u}(t) = Ce^{At}x_0 \tag{29}$$

和

$$\bar{y}_{0u}(t) = \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{x}_0, \tag{30}$$

又由代数等价性知成立$\bar{x}_0 = Px_0$和(26), 于是可导出

$$\begin{aligned} \bar{y}_{0u}(t) &= \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{x}_0 \\ &= CP^{-1}Pe^{At}P^{-1}Px_0 \\ &= Ce^{At}x_0 \\ &= y_{0u}(t),\ t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{31}$$

从而定理得证 ■

1.7.3 脉冲响应矩阵和传递函数矩阵

线性定常系统的脉冲响应矩阵和传递函数矩阵这两个输入输出特性之间的关系，有下面的结论.

定理

定理1.14 $G(t)$和$G(s)$分别表示线性定常系统(A, B, C, D)的脉冲响应矩阵和传递函数矩阵，则有

$$G(s) = \mathcal{L}[G(t)],\ t \geqslant 0, \tag{32}$$

$$G(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)],\ t \geqslant 0. \tag{33}$$

证明 考虑到

$$G(t) = Ce^{At}B + D\delta(t), \tag{34}$$

$$\mathcal{L}(e^{At}) = (sI - A)^{-1},\ \mathcal{L}(\delta(t)) = 1, \tag{35}$$

就可导出

$$\mathcal{L}[G(t)] = C(sI - A)^{-1}B + D = G(s). \tag{36}$$

证毕 ■

推论

推论1.2 给定两个线性定常系统(A,B,C,D) 和$(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$, 设两者具有相同的输入和输出维数, 状态维数不一定相同

- 两系统具有相同的脉冲响应矩阵(即相同的传递函数)的充分必要条件为

$$D=\bar{D},\ CA^iB=\bar{C}\bar{A}^i\bar{B},\ i=0,1,2,\cdots. \tag{37}$$

证明 $G(t)=\bar{G}(t)$, 或$G(s)=\bar{G}(s)$当且仅当

$$D+C(sI-A)^{-1}B=\bar{D}+\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}. \tag{38}$$

- 考虑到

$$\begin{aligned}(sI-A)^{-1} &= \mathcal{L}(e^{At}) \\ &= Is^{-1}+As^{-2}+A^2s^{-3}+\cdots,\ |s|>max|\lambda(A)|,\end{aligned} \tag{39}$$

式中$\lambda(A)$为A的任一特征值

- 利用(39), 则(38)还可以表示为

$$\begin{aligned}&D+CBs^{-1}+CABs^{-2}+CA^2Bs^{-3}+\cdots \\ =&\bar{D}+\bar{C}\bar{B}s^{-1}+\bar{C}\bar{A}\bar{B}s^{-2}+\bar{C}\bar{A}^2\bar{B}s^{-3}+\cdots.\end{aligned} \tag{40}$$

- 显然上式对任意s均成立, 当且仅当

$$D=\bar{D},\ CB=\bar{C}\bar{B},\ CA^iB=\bar{C}\bar{A}^i\bar{B},\ i=1,2,\cdots, \tag{41}$$

于是定理结论得证 ■

- 随着系统理论研究领域的扩大和计算机技术的普及, 离散(时间)系统已日趋成为系统与控制理论中的一类主要研究对象
- 从数学上看, 线性定常离散系统的运动分析, 归结为对定常的线性差分方程

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \; x(0) = x_0, \; k = 0, 1, 2, \cdots, \qquad (42)$$

进行求解

- 这种求解过程, 比连续系统状态方程的求解, 要简单的多

考察系统(42), 即$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$

$$\begin{aligned} x(1) =& Gx(0) + Hu(0), \\ x(2) =& Gx(1) + Hu(1) = G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1), \\ x(3) =& Gx(2) + Hu(2) = G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2), \\ & \ldots\ldots \\ x(k) =& G^kx(0) + G^{k-1}Hu(0) + G^{k-2}Hu(1) + \cdots + GHu(k-2) \\ & + Hu(k-1). \end{aligned} \tag{43}$$

- 于是, 对线性定常离散系统(42), 其状态运动的表达式为

$$x(k) = G^kx(0) + \sum_{i=0}^{k-1} G^{k-i-1}Hu(i), \tag{44}$$

或

$$x(k) = G^kx(0) + \sum_{i=0}^{k-1} G^{i}Hu(k-i-1). \tag{45}$$

1.8.2 脉冲传递函数矩阵

考虑线性定常离散系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k),\ x(0) = x_0, \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k). \end{aligned} \tag{46}$$

- 令$x(z)$为$\{x(k), k = 0, 1, 2, \cdots\}$的$z$变换, 即

$$\begin{aligned} x(z) &= \mathcal{Z}[x(k)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \end{aligned} \tag{47}$$

- 类似地，令$u(z)$和$y(z)$分别为输入序列$\{u(k)\}$和输出序列$\{y(k)\}$的z变换

➥ 由z变换的定义(47), 可导出

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[Gx(k)] &= G \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \\ &= Gx(z) \end{aligned} \tag{48}$$

1.8.2 脉冲传递函数矩阵

- 类似于(48), 可得

$$\mathcal{Z}[Cx(k)] = Cx(z), \quad \mathcal{Z}[Hu(k)] = Hu(z), \quad \mathcal{Z}[Du(k)] = Du(z)$$

➥ 由z变换的定义(47), 还可导出

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[x(k+1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-k} \\ &= z\sum_{k=0}^{\infty} x(k+1)z^{-(k+1)} \\ &= z\left(\sum_{k=-1}^{\infty} x(k+1)z^{-(k+1)} - x(0)\right) \\ &= z\left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} - x_0\right) \\ &= z[x(z) - x_0].\end{aligned} \tag{49}$$

1.8.2 脉冲传递函数矩阵

- 对(46)取z变换, 利用(48), (49)可得

$$\begin{aligned} zx(z) - zx_0 &= Gx(z) + Hu(z), \\ y(z) &= Cx(z) + Du(z). \end{aligned} \tag{50}$$

- 进而, 由上式可导出

$$y(z) = C(zI - G)^{-1}zx_0 + [C(zI - G)^{-1}H + D]u(z), \tag{51}$$

- 取初始状态$x_0 = 0$, 则可得到系统的输入输出关系式为

$$y(z) = [C(zI - G)^{-1}H + D]u(z) = G(z)u(z), \tag{52}$$

其中

$$G(z) = C(zI - G)^{-1}H + D \tag{53}$$

- 式(53)中的$G(z)$为线性离散系统(46)的传递函数矩阵, 习惯称为脉冲传递函数矩阵

"线性定常系统的时间离散化"

- 无论是利用数字计算机分析连续时间系统，还是利用计算机等离散控制装置来控制连续时间系统时，都会遇到一个把连续时间系统化为等价的离散时间系统的问题
- 下面的图1.2所示为将连续时间系统化为离散时间系统的一种典型情况

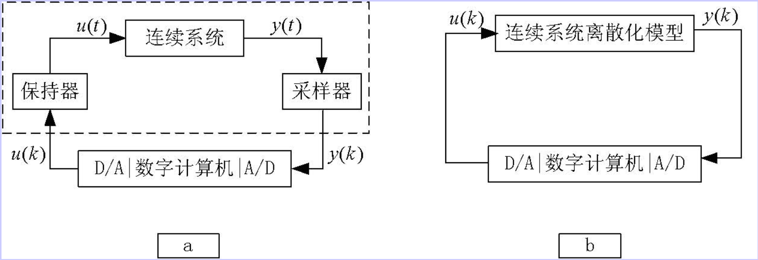
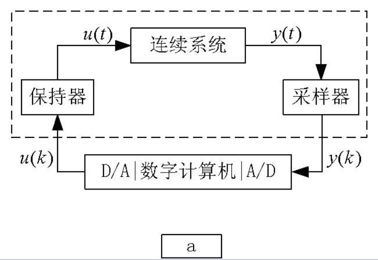


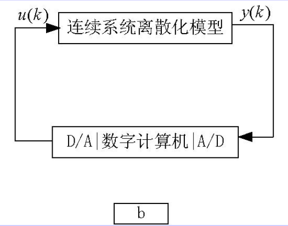
图1.2 连续系统时间离散化的一个例子

1.9.1 问题的提出



- 受控系统是一个连续系统, 其状态$x(t)$, 输入$u(t)$和输出$y(t)$都是时间的连续向量函数
- 控制装置由数模转换器(D/A), 数字计算机和模数转换器(A/D)所构成, 它只能输入离散时间变量$u(k)$, 并输出离散时间变量$y(k)$
- 受控系统和控制装置通过采样器和保持器联系起来
  - 采样器的作用是把连续变量$y(t)$装换为离散变量$y(k)$
  - 保持器的作用是把离散信号$u(k)$转换为连续信号$u(t)$

1.9.1 问题的提出



- 若把保持器–连续系统–采样器看成一个整体, 并用$x(k)$表示其离散状态变量, 则它就组成了以$x(k)$, $u(k)$, $y(k)$为变量的离散系统, 其状态空间描述即为连续系统的时间离散化模型. 而控制装置所面对的正是这个离散化模型如图1.2(b)所示
- 线性连续系统的时间离散化问题的数学实质是: 在一定的采样方式和保持方式下, 由系统的连续时间状态空间描述来导出其对应的离散时间状态空间描述, 并建立起两者的系数矩阵间的关系

1.9.2 线性定常系统按采样周期T的离散化

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu,\ x(0) = x_0,\ t \geqslant 0, \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{54}$$

- 为了使(54)离散化后的描述简单，并保证它是可复原的，需要引入如下的三点基本假设

1.9.2 线性定常系统按采样周期T的离散化

(1)采样器的采样方式取为以常数T为周期的等间隔采样

- 采样瞬间为$t_k = kT, k = 0, 1, 2, \cdots$. 即每隔T时刻, 对输出量测一次(采样一次)
- 用$y(t), y(k)$ 分别表示采样器的输入和输出信号, 两者的关系为

$$y(k) = \begin{cases} y(t) & t = kT, \\ 0 & t \neq kT, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \cdots , \tag{55}$$

- 若$y_i(t), y_i(k)$分别表示$y(t), y(k)$ 的第i个分量, 采样方式如下图示

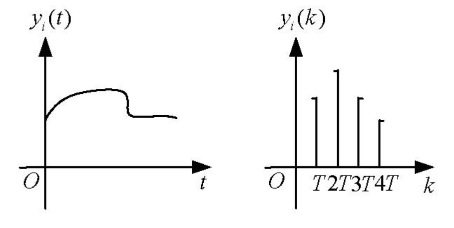


图1.3 周期为T的等间隔采样示意图

(2)保持器为零阶的, 即把离散信号转换为连续信号是按零阶保持方式来实现的

- 零阶保持的特点是: 保持器输出$u_j(t)$的值在采样瞬时为离散信号$u_j(k)$的值, 而在采样瞬时之前则保持为常值且等于前一采样瞬时上的值. 即

$$u_j(t) = \begin{cases} u_j(0), & t \in [0, T), \\ u_j(1), & t \in [T, 2T), \\ \quad \cdots\cdots & \\ u_j(k), & t \in [kT, (k+1)T), \\ \quad \cdots\cdots & \end{cases} \tag{56}$$

- 零阶保持的示意图见下图

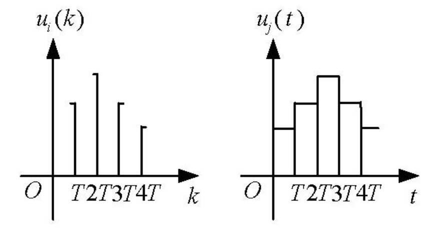


图1.4 零阶保持示意图

(3)采样周期的值要满足香农(Shannon)采样定理所给出的条件

- 设连续信号$y_i(t)$的幅频谱$|Y_i(j\omega)|$如图1.5所示，关于纵坐标对称，ω_c为其上限频率

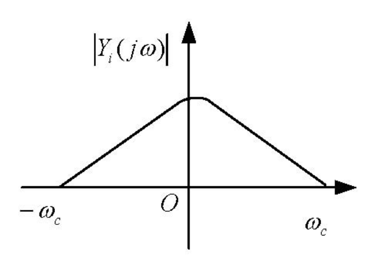


图1.5 连续信号的幅频谱及上限频率

- 香农定理指出：离散信号$y_i(k)$可以完满地复原为连续信号$y_i(t)$的条件为采样频率ω_s满足不等式

$$\omega_s > 2\omega_c. \tag{57}$$

- 考虑到$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$, 故上式可化为

$$T < \frac{\pi}{\omega_c}. \tag{58}$$

下面分析第$(k+1)T$时刻的状态与第kT时刻的状态及控制时间段$[kT,(k+1)T]$上的控制$u(k)$的关系

- 根据系统(54)的状态运动表达式为

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$

➥ 故有

$$\begin{aligned} x[(k+1)T] &= e^{A(k+1)T}x_0 + \int_0^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{AT}e^{AkT}x_0 + \int_0^{kT} e^{A[(k+1)T-\tau]}Bu(\tau)d\tau \\ &\quad + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A[(k+1)T-\tau]}Bu(\tau)d\tau \\ &= e^{AT}\underbrace{\left(e^{AkT}x_0 + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right)}_{=x[kT]} + \int_0^T e^{At}dtBu(k) \end{aligned} \tag{59}$$

- 记

$$x[kT] = x(k),\ y(kT) = y(k),\ G = e^{AT},\ H = \int_0^T e^{At}dtB, \tag{60}$$

- 则由式(59)得

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \tag{61}$$

- 对输出方程离散化, 令$t = kT$, 可得到

$$y(k) = Cx(k) + Du(k). \tag{62}$$

- 综合上面得推导, 有下面的结论

定理

定理1.15 线性定常系统(54)的时间离散化模型为(61),(62), 其中G, H如(60)所示.

注: 定理1.15提供了线性定常连续系统时间离散化的算法, 且

- 离散化系统仍为定常系统
- 不管A是否奇异, 离散化后系统矩阵G一定是非奇异的

例1.1.1 给定线性定常连续系统

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \ t \geqslant 0,$$

采样周期为$T = 0.1$秒, 建立其时间离散化模型.

解 首先求e^{At}, 考虑到

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

- 对其求拉普拉斯反变换得

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1 - e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- 利用(60)可定出

$$
\begin{aligned}
G &= e^{AT} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1-e^{-2T}) \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H &= \int_0^T e^{At} dt \cdot B = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & 0.5(1-e^{-2t}) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} dt \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} T & 0.5T + 0.25e^{-2T} - 0.25 \\ 0 & -0.5e^{-2T} + 0.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- 于是, 离散化模型的状态方程为

$$
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.091 \\ 0 & 0.819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.005 \\ 0.091 \end{bmatrix} u(k). \qquad \blacksquare
$$

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 14–26