



# 机器人学(第三版)

蔡自兴 主编

中南大学

2016

## 3.1 机器人运动方程的表示

### 3.1.1 机械手运动姿态和方向角的表示

#### ■ 机械手的运动方向

- 原点由矢量 $\mathbf{p}$ 表示。
- 接近矢量 $\mathbf{a}$ :  $z$ 向矢量
- 方向矢量 $\mathbf{o}$ :  $y$ 向矢量
- 法线矢量 $\mathbf{n}$ : 它与矢量 $\mathbf{o}$ 和 $\mathbf{a}$ 一起构成一个右手矢量集合, 并由矢量的交乘所规定:  $\mathbf{n} = \mathbf{o} \times \mathbf{a}$ 。

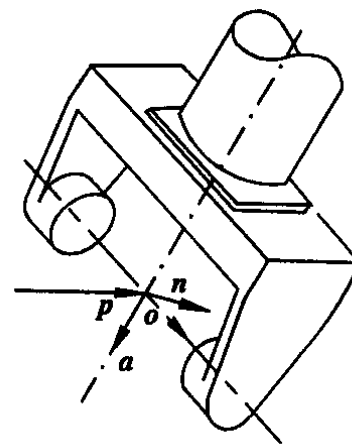


图3.1 矢量 $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{o}$ ,  $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$



### 3.1.1 机械手运动姿态和方向角的表示

因此，变换 $T_6$ 具有下列元素。

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

六连杆机械手的T矩阵（ $T_6$ ）可由指定其16个元素的数值来决定。在这16个元素中，只有12个元素具有实际含义。

## 3.1.1 机械手运动姿态和方向角的表示

### ■ 用欧拉变换表示运动姿态

- 机械手的运动姿态往往由一个绕轴  $x$  ,  $y$  和  $z$  的旋转序列来规定。这种转角的序列, 称为欧拉 (Euler) 角。
- 欧拉角用一个绕  $z$  轴旋转  $\phi$  角, 再绕新的  $y$  轴旋转  $\theta$  角, 最后绕新  $z$  的轴旋转  $\psi$  角来描述任何可能的姿态, 见图3.2。
- 在任何旋转序列下, 旋转次序是十分重要的。

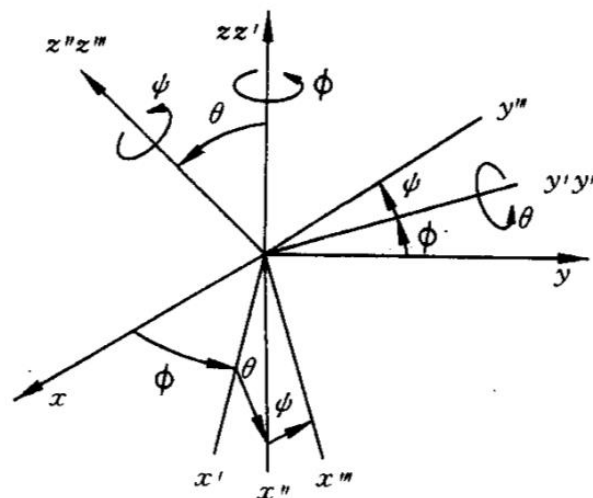
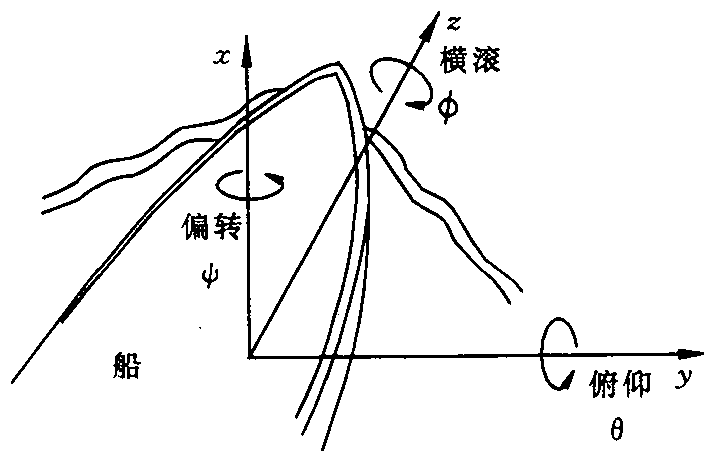


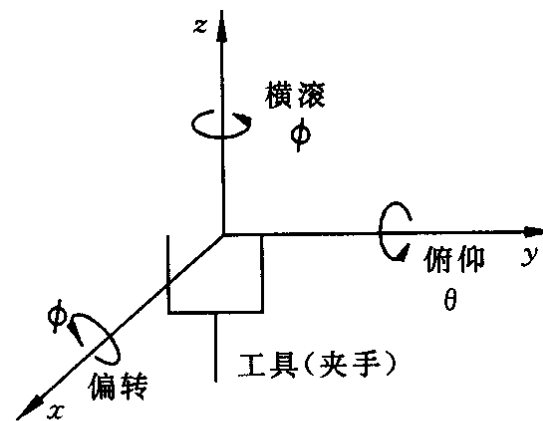
图3.2 欧拉角的定义

## 3.1.1 机械手运动姿态和方向角的表示

- 用RPY组合变换表示运动姿态
- 另一种常用的旋转集合是横滚（roll）、俯仰（pitch）和偏转（yaw）。



(a)



(b)

图3.3 用横滚、俯仰和偏转表示机械手运动姿态



### 3.1.1 机械手运动姿态和方向角的表示

对于旋转次序，规定：

$$RPY(\varphi, \theta, \psi) = Rot(z, \varphi)Rot(y, \theta)Rot(x, \psi) \quad (3.4)$$

式中， $RPY$ 表示横滚、俯仰和偏转三旋转的组合变换。也就是说，先绕  $x$  轴旋转角  $\psi$ ，再绕  $y$  轴旋转角  $\theta$ ，最后绕  $z$  轴旋转角  $\varphi$ 。

## 3.1 机器人运动方程的表示

### 3.1.2 平移变换的不同坐标系表示

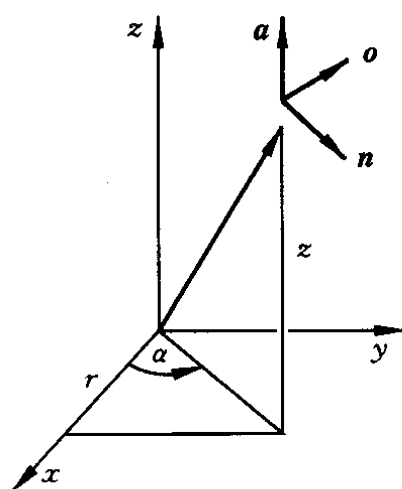
一旦机械手的运动姿态由某个姿态变换规定之后，它在基系中的位置就能够由左乘一个对应于矢量 $p$ 的平移变换来确定：

$$T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ [某姿态变换]} \quad (3.5)$$

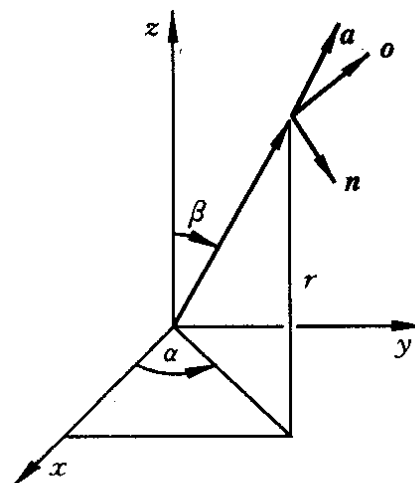
## 3.1.2 平移变换的不同坐标系表示

- 用柱面坐标表示运动位置

用柱面坐标来表示机械手臂的位置，即表示其平移变换。如图3.4(a)所示，



(a)



(b)

图3.4 用柱面坐标和球面坐标表示位置



### 3.1.2 平移变换的不同坐标系表示

- 用球面坐标表示运动位置

用球面坐标表示手臂运动位置矢量的方法。这个方法对应于沿轴平移，再绕轴旋转角，最后绕轴旋转角，如图3.4(b)所示，即为：

$$Sph(\alpha, \beta, r) = Rot(z, \alpha)Rot(y, \beta)Trans(0, 0, r) \quad (3.9)$$

式中， $Sph$  表示球面坐标组合变换。

## 3.1 机器人运动方程的表示

### 3.1.3 广义连杆和广义变换矩阵

#### ■ 广义连杆

机械手是由一系列连接在一起的连杆（杆件）构成的。可以将连杆各种机械结构抽象成两个几何要素及其参数，即公共法线的距离  $a_i$  和垂直于  $a_i$  所在平面内两轴的夹角  $\alpha_i$ ；另外相邻杆件之间的连接关系也被抽象成两个量，即两连杆的相对位置  $d_i$  和两连杆公垂线的夹角  $\theta_i$ ，如图3.5所示。

### 3.1.3 广义连杆和广义变换矩阵

#### ■ 广义连杆

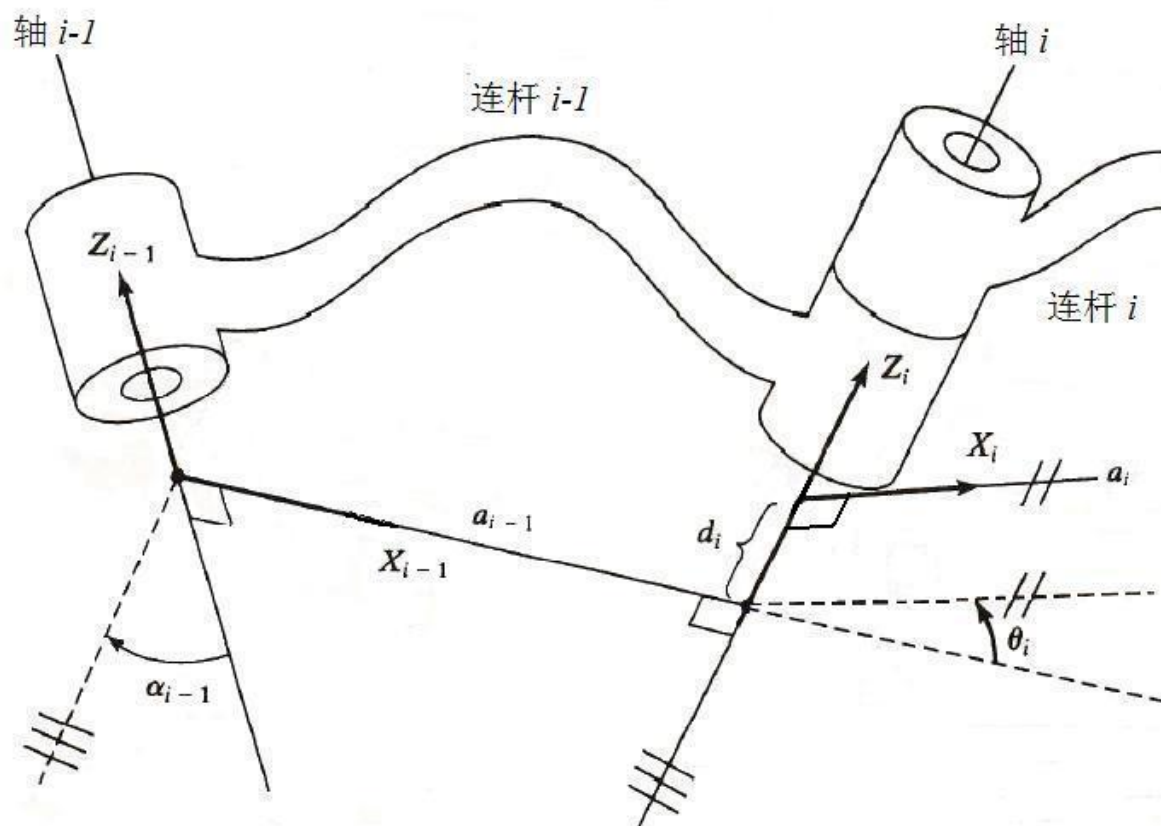


图3.5 Craig约定的连杆四参数及坐标系建立示意图

### 3.1.3 广义连杆和广义变换矩阵

#### ■ 广义变换矩阵

在对全部连杆规定坐标系之后，就能够按照下列顺序由两个旋转和两个平移来建立相邻两连杆坐标系  $i-1$  与  $i$  之间的相对关系，见图3.6。

- (1) 绕  $x_{i-1}$  轴旋转  $\alpha_{i-1}$  角，使  $z_{i-1}$  转到  $z_R$ ，同  $z_i$  方向一致，使坐标系  $\{i-1\}$  过渡到  $\{R\}$ 。
- (2) 坐标系  $\{R\}$  沿  $x_{i-1}$  轴平移距离  $a_{i-1}$ ，把坐标系移到  $i$  轴上，使坐标系  $\{R\}$  过渡到  $\{Q\}$ 。
- (3) 坐标系  $\{Q\}$  绕  $z_Q$  轴转动  $\theta_i$  角，使  $\{Q\}$  过渡到  $\{P\}$ 。
- (4) 坐标系  $\{P\}$  再沿  $z_i$  轴平移一距离  $d_i$ ，使  $\{P\}$  过渡到和  $i$  杆的坐标系  $\{i\}$  重合。

### 3.1.3 广义连杆和广义变换矩阵

#### ■ 广义变换矩阵

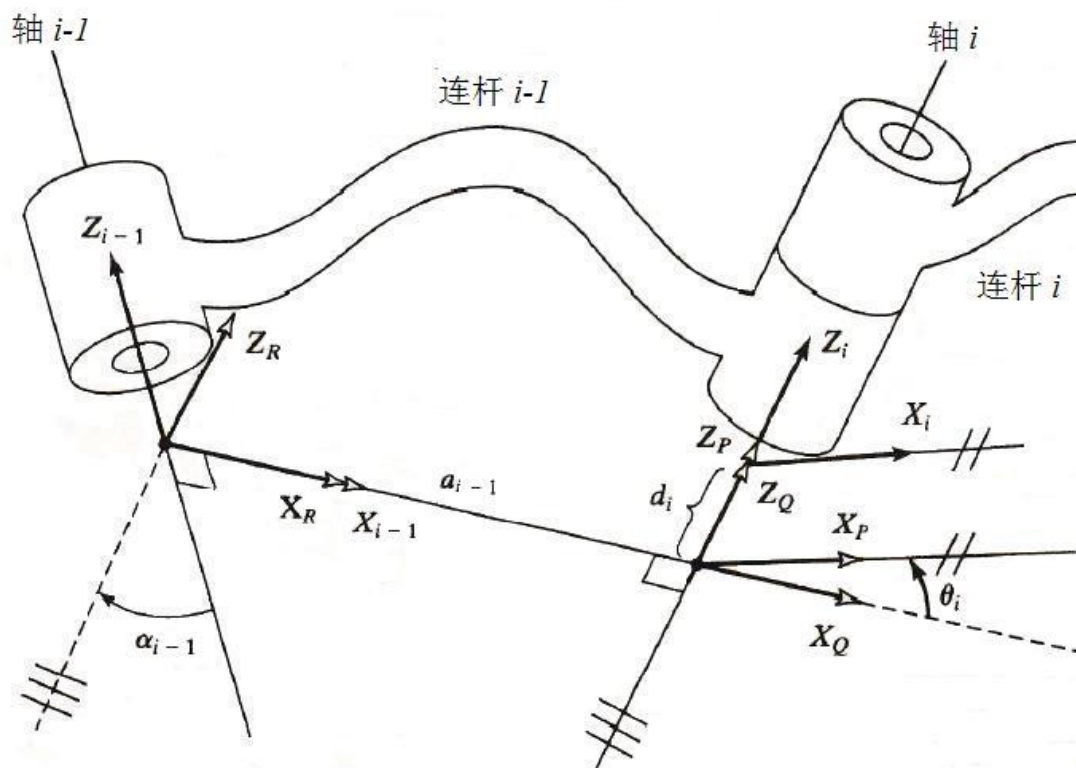


图3.6 连杆两端相邻坐标系变换示意图

### 3.1.3 广义连杆和广义变换矩阵

#### ■ 广义变换矩阵

这种关系可由表示连杆*i*对连杆*i-1*相对位置的4个齐次变换来描述。根据坐标系变换的链式法则，坐标系{i-1}到坐标系{i}的变换矩阵可以写成

$${}^{i-1}_iT = {}^{i-1}_R T {}^R_Q T {}^Q_P T {}^P_i T \quad (3.11)$$

计算可得

$${}^{i-1}_iT = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -d_i s\alpha_{i-1} \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i c\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

### 3.1.3 广义连杆和广义变换矩阵

#### ■ 广义变换矩阵

如果机器人6个关节中的变量分别是： $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 、 $d_3$ 、 $\theta_4$ 、 $\theta_5$ 、 $\theta_6$   
则末端相对基座的齐次矩阵也应该是包含这6个变量的 $4 \times 4$ 矩阵，即：

$${}^0_6T(\theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6) = {}^0_1T(\theta_1) {}^1_2T(\theta_2) {}^2_3T(d_3) {}^3_4T(\theta_4) {}^4_5T(\theta_5) {}^5_6T(\theta_6) \quad (3.14)$$

上式就是机器人正向运动学的表达式，即：已知机器人各关节值，计算出末端相对于基座的位姿。

### 3.1.4 建立连杆坐标系的步骤和举例

#### ■ 建立连杆坐标系的步骤归纳

- ① 找出各关节轴，并画出这些轴线的延长线。在下面的步骤2至步骤5中，仅考虑两条相邻的轴线（关节轴 $i$ 和关节轴 $i+1$ ）。
- ② 找出关节轴 $i$ 和关节轴 $i+1$ 之间的公垂线，以该公垂线与关节轴 $i$ 的交点作为连杆坐标系 $\{i\}$ 的原点（当关节轴 $i$ 和关节轴 $i+1$ 相交时，以该交点作为坐标系 $\{i\}$ 的原点）。
- ③ 规定 $z_i$ 轴沿关节轴 $i$ 的方向。
- ④ 规定 $x_i$ 轴沿公垂线  $a_i$  的方向，由关节轴 $i$ 指向关节轴 $i+1$ 。如果关节轴 $i$ 和关节轴 $i+1$ 相交，则规定 $x_i$ 轴垂直于这两条关节轴所在的平面。



### 3.1.4 建立连杆坐标系的步骤和举例

#### ■ 建立连杆坐标系的步骤归纳

⑤ 按照右手法则确定 $y_i$ 轴。

⑥ 当第一个关节的变量为0时，规定坐标系 $\{0\}$ 与坐标系 $\{1\}$ 重合。对于坐标系 $\{n\}$ ，其原点和 $x_n$ 轴的方向可以任意选取。但在选取时，通常尽量使得连杆参数为0。

### 3.1.4 建立连杆坐标系的步骤和举例

#### ■ 建立连杆坐标系举例

**例3.1** 图3.7所示为一个平面三连杆机器人。因为三个关节均为转动关节，因此有时称该机器人**RRR**（或**3R**）机构。为此机器人建立连杆坐标系并写出其Denavit-Hatenberg参数。

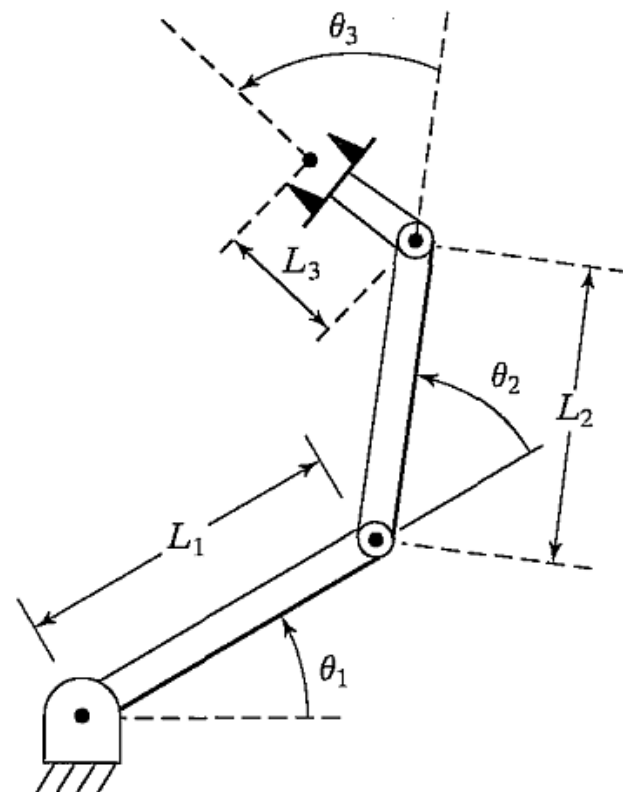


图3.7 一个三连杆平面机器人

## 3.1.4 建立连杆坐标系的步骤和举例

### ■ 建立连杆坐标系举例

解：建立如图3.8的坐标系。该平面三连杆机器人对应的 Denavit-Hartenberg 参数如表3.1 所示。

表3.1 三连杆平面机器人的连杆参数表

$i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	$\theta_i$
1	0	0	0	$\theta_1$
2	0	$L_1$	0	$\theta_2$
3	0	$L_2$	0	$\theta_3$

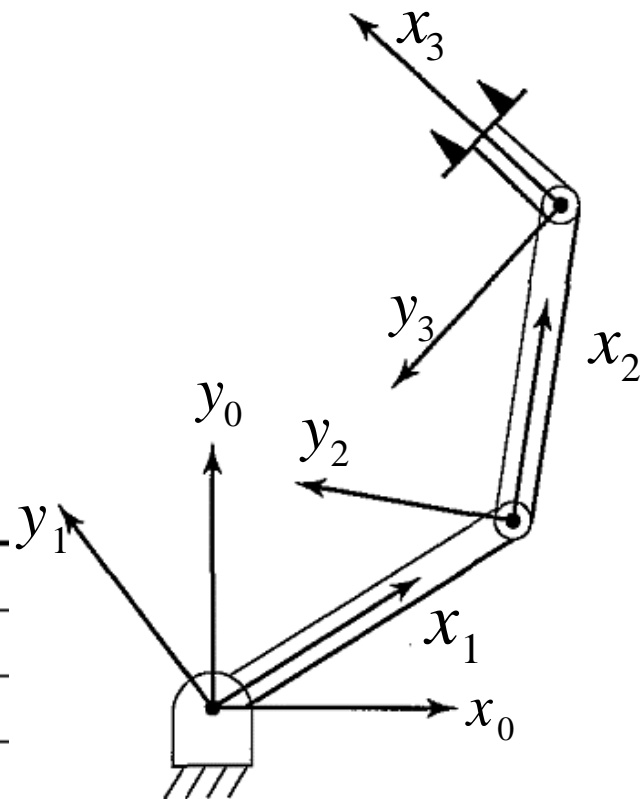


图3.8 三连杆机器人连杆坐标系的设置

## 3.2 机器人运动方程的求解

### ■ 3.2.1 逆运动学求解的一般问题

#### ■ 1. 解的存在性

逆运动学的解是否存在取决于期望位姿是否在机器人的**工作空间内**。简单的说，工作空间是机器人末端执行器能够达到的范围。若解存在，则被指定的目标点必须在工作空间内。如果末端执行器的期望位姿在机器人的工作空间内，那么**至少存在一组**逆运动学的解。

## 3.2.1 逆运动学求解的一般问题

### ■ 1. 解的存在性

在可达工作空间的**内部**，达到目标点的机器人关节有**两组可能的解**；在工作空间的**边界上**则只有一种可能的解。

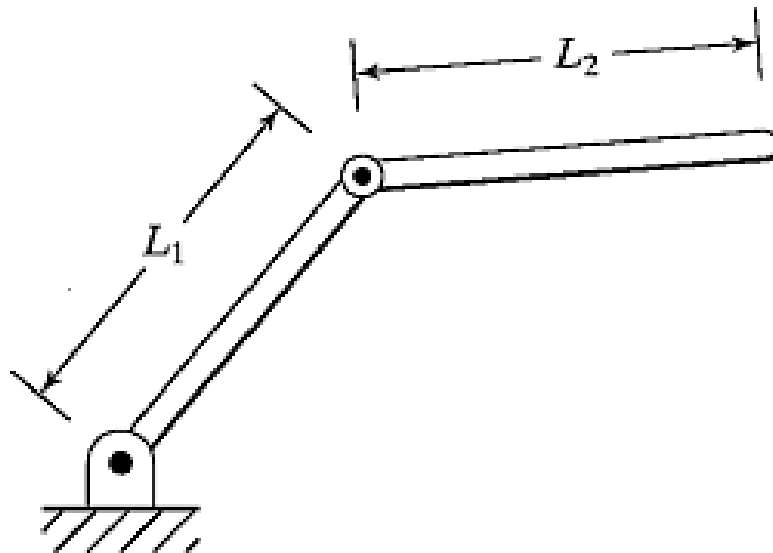


图3.9 连杆长度为 $L_1$ 和 $L_2$ 的两连杆机器人

## 3.2.1 逆运动学求解的一般问题

### ■ 2. 多解性问题

如下图，当机器人的前2节连杆处于图中的虚线位形时，末端执行器的位姿与第一个位形完全相同。即对该平面三连杆机器人而言，其逆运动学存在**两组不同的解**。

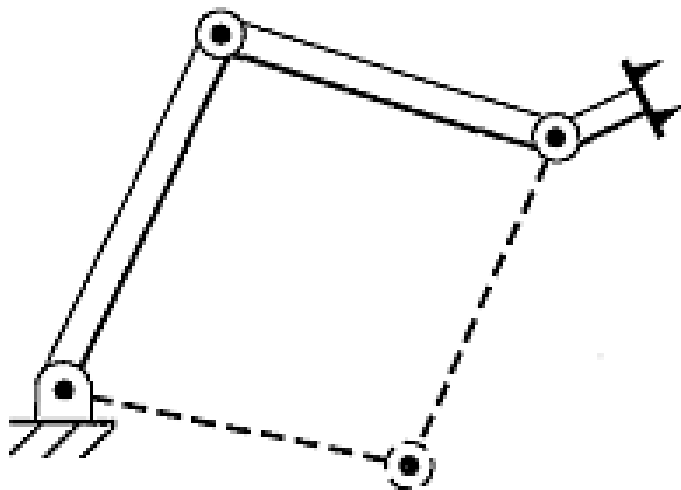


图3.10 三连杆机器人，虚线代表第二个解

## 3.2.1 逆运动学求解的一般问题

### ■ 2. 多解性问题

如下图，在没有障碍物的情况下，可以按照“**最短行程解**”的进行选择；但当环境中存在障碍物的情况下，这时可能需要选择“**较长行程解**”。

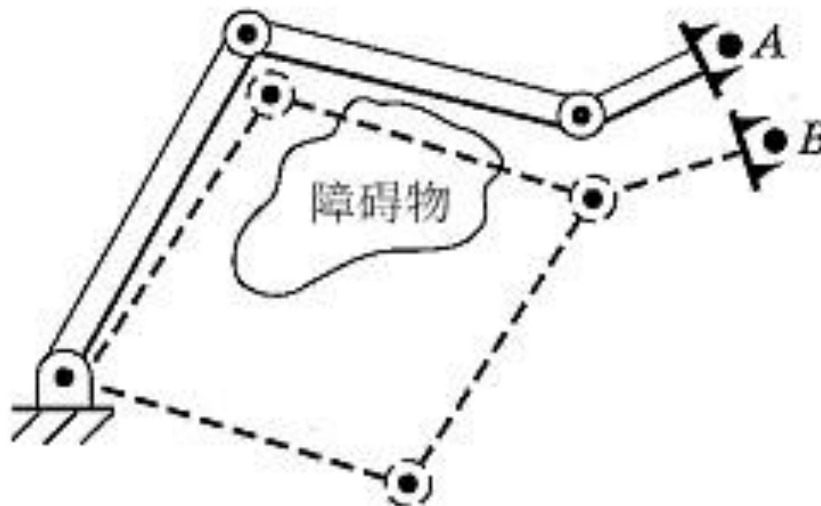


图3.11 环境中存在障碍物时的多解选择

## 3.2.2 逆运动学的代数解法与几何解法



### 1. 代数解法

$${}^B_W T = {}^0_3 T = \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & L_1 c_1 + L_2 c_{12} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & L_1 s_1 + L_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$${}^B_W T = \begin{bmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 & x \\ s_\phi & c_\phi & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

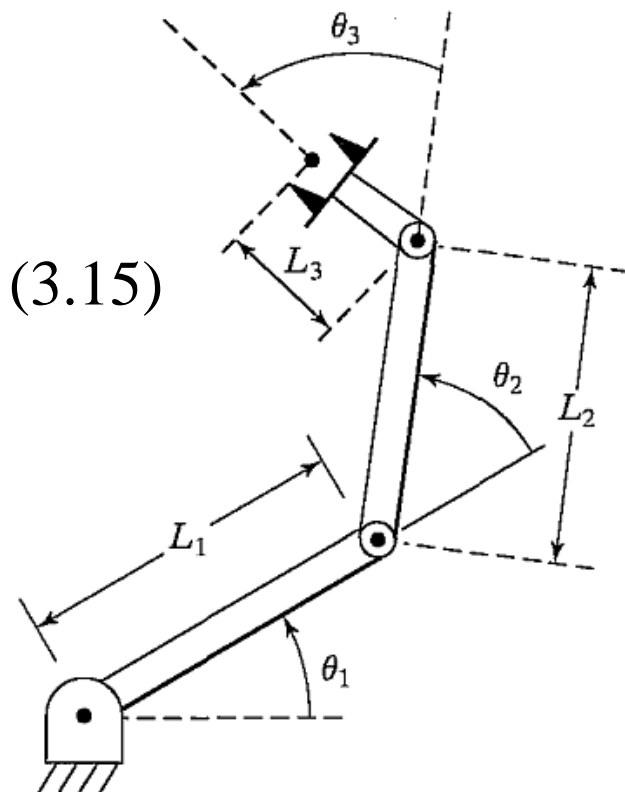


图3.7 一个三连杆平面机器人



### 3.2.2 逆运动学的代数解法与几何解法



#### 1. 几何解法

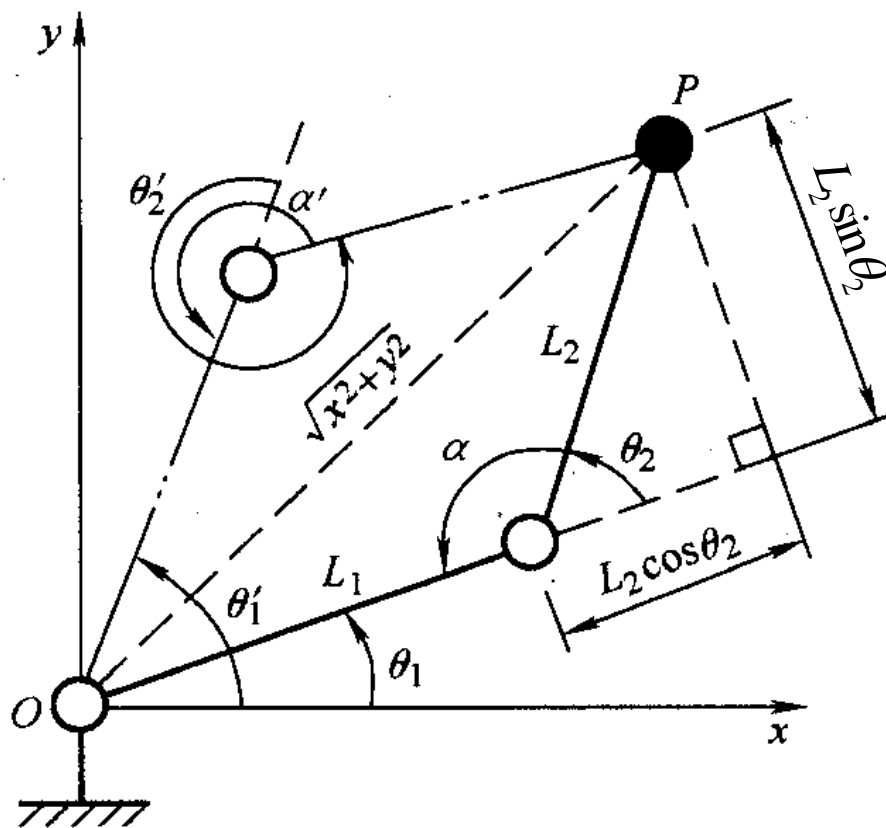


图3.12 平面两连杆机器人的逆运动学求解

### 3.2.3 逆运动学的其他解法

#### 1. 欧拉变换解

##### ■ 基本隐式方程的解

令

$$Euler(\phi, \theta, \psi) = T \quad (3.47)$$

由式(3.2)和(3.47)得到:

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\phi c\theta c\psi - s\phi s\psi & -c\phi c\theta s\psi - s\phi c\psi & c\phi s\theta & 0 \\ s\phi c\theta c\psi + s\phi s\psi & -s\phi c\theta s\psi + c\phi c\psi & s\phi s\theta & 0 \\ -s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

# 1. 欧拉变换解

得到9个隐式方程，如下：

$$n_x = c\varphi c\theta c\psi - s\varphi s\psi \quad (3.49)$$

$$n_y = s\varphi c\theta c\psi + c\varphi s\psi \quad (3.50)$$

$$n_z = -s\theta c\psi \quad (3.51)$$

$$o_x = -c\varphi c\theta s\psi - s\varphi c\psi \quad (3.52)$$

$$o_y = -s\varphi c\theta s\psi + c\varphi c\psi \quad (3.53)$$

$$o_z = s\theta s\psi \quad (3.54)$$

$$a_x = c\varphi s\theta \quad (3.55)$$

$$a_y = s\varphi s\theta \quad (3.56)$$

$$a_z = c\theta \quad (3.57)$$

# 1. 欧拉变换解

- 用双变量反正切函数确定角度在求解时，总是采用双变量反正切函数`atan2`来确定角度。`atan2`提供二个自变量，即纵坐标和横坐标，见图3.13。当  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ，由`atan2`反求角度时，同时检查`y`和`x`的符号来确定其所在象限。这一函数也能检验什么时候`x`或`y`为0，并反求出正确的角度。`atan2`的精确程度对其整个定义域都是一样的。

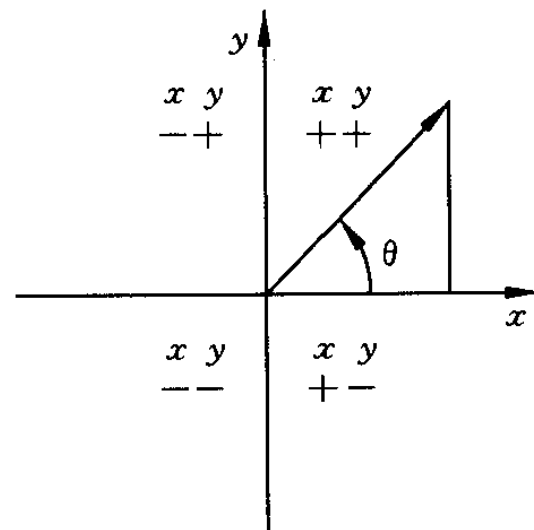


图3.13 反正切函数`atan2`

# 1. 欧拉变换解

- 用显式方程求各角度

要求得方程式的解，采用另一种通常能够导致显式解答的方法。用未知逆变换依次左乘已知方程，对于欧拉变换有：

$$Rot(z, \phi)^{-1} T = Rot(y, \theta) Rot(z, \psi) \quad (3.61)$$

$$Rot(y, \theta)^{-1} Rot(z, \phi)^{-1} T = Rot(z, \psi) \quad (3.62)$$

式(3.61)的左式为已知变换的函数，而右式各元素或者为0，或者为常数。

# 1. 欧拉变换解

求解方程，整理之后确定其等价欧拉角：

$$\begin{aligned}\phi &= \text{atan2}(a_y, a_x), \quad \phi = \phi + 180^\circ \\ \theta &= \text{atan2}(c\phi a_x + s\phi a_y, a_z) \\ \psi &= \text{atan2}(-s\phi n_x + c\phi n_y, -s\phi o_x + c\phi o_y)\end{aligned}\tag{3.70}$$

如果已知一个表示任意旋转的齐次变换，那么就能够确定其等价欧拉角。

## 2. RPY变换解

- 直接从显式方程来求解用滚动、俯仰和偏转表示的变换方程。
- RPY变换各角如下：

$$\phi = \text{atan2}(n_y, n_x)$$

$$\phi = \phi + 180^\circ$$

$$\theta = \text{atan2}(-n_z, c\phi n_x + s\phi n_y)$$

$$\psi = \text{atan2}(s\phi a_x - c\phi a_y, -s\phi o_x + c\phi o_y)$$

(3.76)

### 3. 球面变换解

- 把求解滚、仰和偏变换方程的技术用于球面坐标表示的运动方程。
- 球面变换的解为：

$$\begin{aligned}\alpha &= \text{atan2}(p_y, p_x), \alpha = \alpha + 180^\circ \\ \beta &= \text{atan2}(c\alpha p_x + s\alpha p_y, p_z) \\ r &= s\beta(c\alpha p_x + s\alpha p_y) + c\beta p_z\end{aligned}\tag{3.82}$$

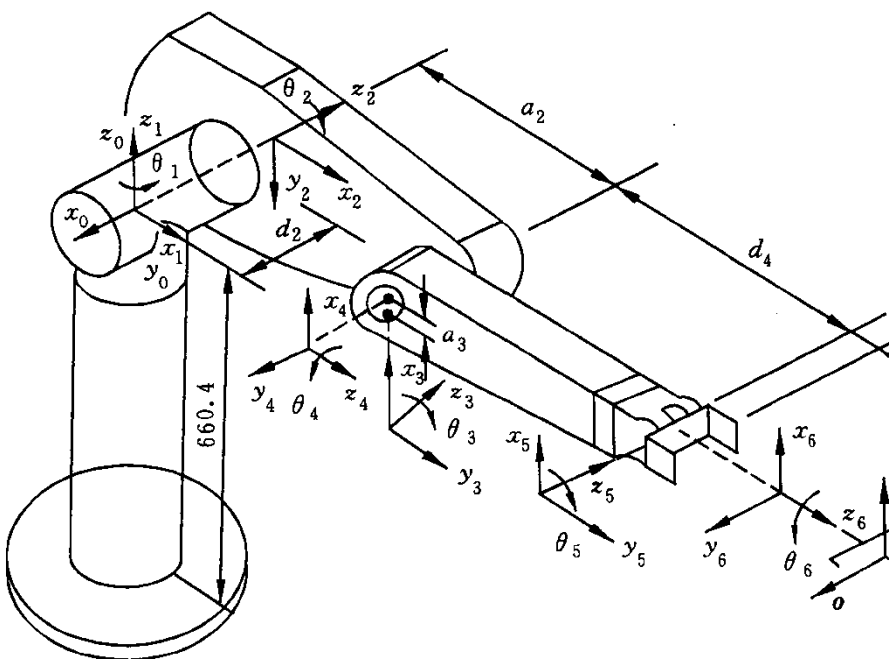


## 3.3 机器人运动的分析与综合举例

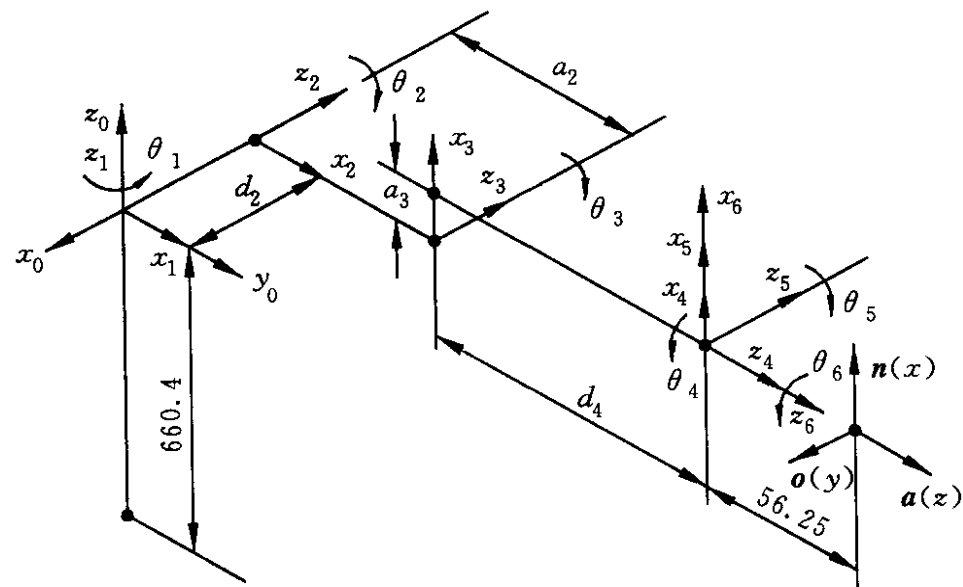
### 3.3.1 机器人正向运动学举例

- PUMA 560是属于关节式机器人，6个关节都是转动关节。前3个关节确定手腕参考点的位置，后3个关节确定手腕的方位。
- 各连杆坐标系如图3.14所示。相应的连杆参数列于表3.2。

### 3.3.1 机器人正向运动学举例



(a) 结构图



(b) 坐标图

图3.14 PUMA 560机器人的连杆坐标系

### 3.3.1 机器人正向运动学举例

表3.2 PUMA 560机器人的连杆参数

连杆 $i$	变量 $\theta_i$	$\alpha_{i-1}$	$a_{i-1}$	$d_i$	变量范围
1	$\theta_1(90^\circ)$	$0^\circ$	0	0	$-160^\circ \sim 160^\circ$
2	$\theta_2(0^\circ)$	$-90^\circ$	0	$d_2$	$-225^\circ \sim 45^\circ$
3	$\theta_3(-90^\circ)$	$0^\circ$	$a_2$	0	$-45^\circ \sim 225^\circ$
4	$\theta_4(0^\circ)$	$-90^\circ$	$a_3$	$d_4$	$-110^\circ \sim 170^\circ$
5	$\theta_5(0^\circ)$	$90^\circ$	0	0	$-100^\circ \sim 100^\circ$
6	$\theta_6(0^\circ)$	$-90^\circ$	0	0	$-266^\circ \sim 266^\circ$

### 3.3.1 机器人正向运动学举例

- 据式(3.13)和表3.2所示连杆参数，可求得各连杆变换矩阵如下：

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_4 = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3.1 机器人正向运动学举例

$${}^4T_5 = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^5T_6 = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 各连杆变换矩阵相乘，得PUMA 560的机械手变换矩阵：

$${}^0T_6 = {}^0T_1(\theta_1) {}^1T_2(\theta_2) {}^2T_3(\theta_3) {}^3T_4(\theta_4) {}^4T_5(\theta_5) {}^5T_6(\theta_6) \quad (3.83)$$

即  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$  为关节变量的函数。

### 3.3.1 机器人正向运动学举例

- 于是，可求得机械手的变换矩阵：

$${}^0T_6 = {}^0T_1 {}^1T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.3.2 机器人逆向运动学举例

将PUMA 560的运动方程 (3.88) 写为:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = {}^0T_1(\theta_1) {}^1T_2(\theta_2) {}^2T_3(\theta_3) {}^3T_4(\theta_4) {}^4T_5(\theta_5) {}^5T_6(\theta_6) \quad (3.89)$$

若末端连杆的位姿已经给定, 即 $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$ 为已知, 则求关节变量 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_6$ 的值称为运动反解。

### 3.3.2 机器人逆向运动学举例

■ 求  $\theta_1$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\varphi - \theta_1) &= d_2 / \rho; \quad \cos(\varphi - \theta_1) = \pm \sqrt{1 - (d_2 / \rho)^2} \\ \varphi - \theta_1 &= \text{atan2} \left[ \frac{d_2}{\rho}, \pm \sqrt{1 - \left( \frac{d_2}{\rho} \right)^2} \right] \\ \theta_1 &= \text{atan2}(p_y, p_x) - \text{atan2}(d_2, \pm \sqrt{p_x^2 + p_y^2 - d_2^2}) \end{aligned} \right\} \quad (3.94)$$

式中，正、负号对应于  $\theta_1$  的两个可能解。



### 3.3.2 机器人逆向运动学举例

- 求 $\theta_3$

$$\theta_3 = \text{atan2}(a_3, d_4) - \text{atan2}(k, \pm \sqrt{a_3^2 + d_4^2 - k^2}) \quad (3.97)$$

式中，正、负号对应 $\theta_3$ 的两种可能解。

- 求 $\theta_2$

根据 $\theta_1$ 和 $\theta_3$ 解的四种可能组合可以得到相应的四种可能值 $\theta_{23}$ ，于是可得到 $\theta_2$ 的四种可能解：

$$\theta_2 = \theta_{23} - \theta_3 \quad (3.103)$$

式中， $\theta_2$ 取与 $\theta_3$ 相对应的值。



### 3.3.2 机器人逆向运动学举例

■ 求 $\theta_4$

$$\theta_4 = \text{atan2}(-a_x s_1 + a_y c_1, -a_x c_1 c_{23} - a_y s_1 c_{23} + a_z s_{23}) \quad (3.105)$$

■ 求 $\theta_5$

$$\theta_5 = \text{atan2}(s_5, c_5) \quad (3.108)$$

■ 求 $\theta_6$

$$\theta_6 = \text{atan2}(s_6, c_6) \quad (3.111)$$

### 3.3.2 机器人逆向运动学举例



- PUMA 560型机器人到达一个确定的目标位姿共有8组不同的解。在机器人存在多种解的情况下，应选取其中最满意的一组解，以满足机器人的工作要求。

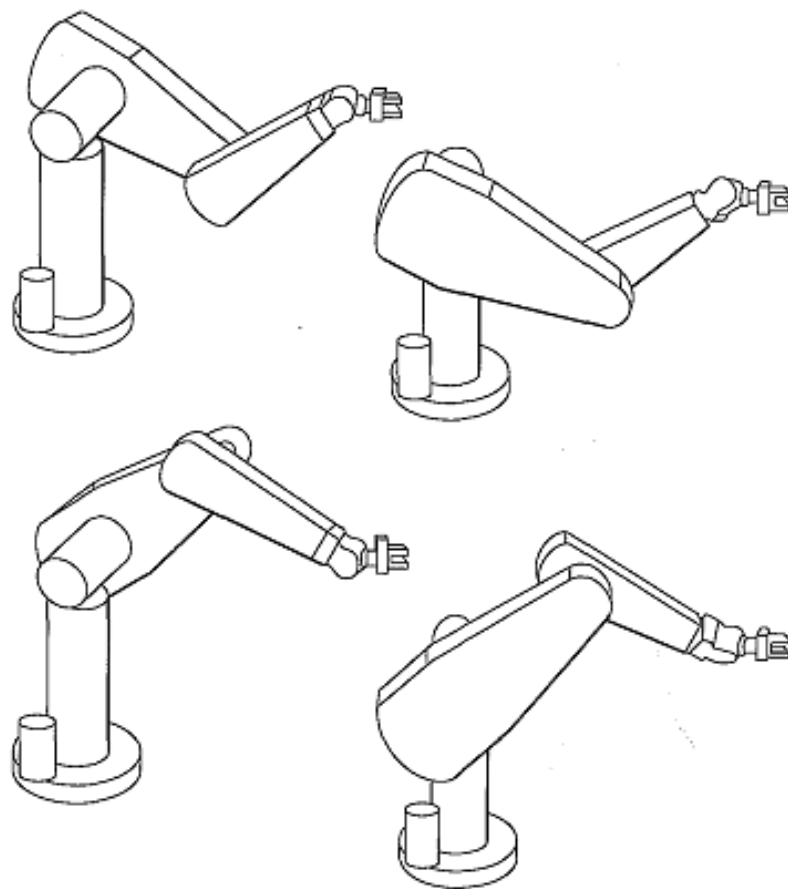


图3.15 PUMA 560的4组解



## 3.4 机器人的雅可比公式

### 3.4.1 机器人的微分运动

- 微分平移和微分旋转

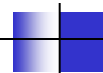
既可以用给定的坐标系也可以用基坐标系来表示微分平移和旋转。

$$dT = (Trans(d_x, d_y, d_z)Rot(f, d\theta) - I)T \quad (3.113)$$

$$dT = T(Trans(d_x, d_y, d_z)Rot(f, d\theta) - I) \quad (3.114)$$

式(3.113)和(3.114)中有一共同的项：

$$Trans(d_x, d_y, d_z)Rot(f, d\theta) - I$$



## 3.4.1 机器人的微分运动

- 表示微分平移的齐次变换为:

$$Trans(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 可把微分旋转齐次变换表示为:

$$Rot(\mathbf{f}, d\theta) = \begin{bmatrix} 1 & -f_z d\theta & f_y d\theta & 0 \\ f_z d\theta & 1 & -f_x d\theta & 0 \\ -f_z d\theta & f_x d\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.4.1 机器人的微分运动

- 刚体或坐标系的微分运动矢量:

$$D = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \\ \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \end{bmatrix}, \text{ 或 } D = \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix} \quad (3.118)$$

$${}^T D = \begin{bmatrix} {}^T d_x \\ {}^T d_y \\ {}^T d_z \\ {}^T \delta_x \\ {}^T \delta_y \\ {}^T \delta_z \end{bmatrix}, \text{ 或 } {}^T D = \begin{bmatrix} {}^T d \\ {}^T \delta \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

## 3.4.1 机器人的微分运动

### ■ 微分运动的等价变换

要求得机械手的雅可比（Jacobian）矩阵，就需要把一个坐标系内的位置和姿态的小变化，变换为另一坐标系内的等效表达式。

对基坐标系的微分变化变换为对坐标系 $T$ 的微分变化：

$$\begin{bmatrix} {}^T d \\ {}^T \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T S(\mathbf{p}) \\ 0 & R^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \delta \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

$$R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

### 3.4.1 机器人的微分运动

- 变换式中的微分关系

根据微分坐标变换 $T$ 和微分旋转变换 $\Delta$ 决定 ${}^T\Delta$ 的各元。如果要从 ${}^T\Delta$ 的各微分矢量来求微分矢量 $\Delta$ ，可从式(3.120)左乘 $T$ 和右乘 $T^{-1}$ ，以求得下列变换表达式：

$$\Delta = T^T \Delta T^{-1}$$

或者

$$\Delta = (T^{-1})^{-1T} \Delta (T^{-1}) \quad (3.131)$$



## 3.4.2 雅可比矩阵的定义与求解

### ■ 雅可比矩阵的定义

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (3.135)$$

式中,  $\dot{\mathbf{x}}$  称为末端在操作空间的广义速度, 简称操作速度;  $\dot{\mathbf{q}}$  为关节速度;  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  是的偏导数矩阵, 称为机械手的雅可比矩阵。它的第  $i$  行第  $j$  列元素为

$$J_{ij}(\mathbf{q}) = \frac{\partial x_i(\mathbf{q})}{\partial q_j}, i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, \dots, n \quad (3.136)$$

对于给定的  $\mathbf{q} \in R^n$ , 雅可比  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  是从关节空间速度向操作空间速度映射的线性变换。

## 3.4.2 雅可比矩阵的定义与求解

### ■ 雅可比矩阵的求法

#### ■ 矢量积法

对于移动关节，有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ 0 \end{bmatrix} \dot{q}_i, \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.142)$$

对于转动关节，有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times {}^i \mathbf{p}_n^0 \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix} \dot{q}_i, \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times {}^i \mathbf{p}_n^0 \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i \times ({}^0 R^i \mathbf{p}_n) \\ \mathbf{z}_i \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

式中， ${}^i \mathbf{p}_n^0$  表示夹手坐标原点相对坐标系  $\{i\}$  的位置矢量在基坐标系  $\{o\}$  中的表示。

## 3.4.2 雅可比矩阵的定义与求解

### ■ 微分变换法

■ 对于转动关节有：

$${}^T J_{li} = \begin{bmatrix} (\mathbf{p} \times \mathbf{n})_z \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{o})_z \\ (\mathbf{p} \times \mathbf{a})_z \end{bmatrix}, \quad {}^T J_{ai} = \begin{bmatrix} n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix} \quad (3.149)$$

■ 对于移动关节有：

$${}^T J_{li} = \begin{bmatrix} n_z \\ o_z \\ a_z \end{bmatrix}, \quad {}^T J_{ai} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

式中， $\mathbf{n}, \mathbf{o}, \mathbf{a}$ 和 $\mathbf{p}$ 是 ${}^i T_n$ 的四个列向量。

## 3.4.2 雅可比矩阵的定义与求解

### 微分变换法

■ 雅可比 $^T J(\mathbf{q})$ 自动生成的步骤如下:

- 计算各连杆变换 ${}^0T_1, {}^1T_2, \dots, {}^{n-1}T_n$
- 计算各连杆至末端连杆的变换

$${}^{n-1}T_n = {}^{n-1}T_n, \quad {}^{n-2}T_n = {}^{n-2}T_{n-1} {}^{n-1}T_n, \quad \dots, \quad {}^{i-1}T_n = {}^{i-1}T_i {}^iT_n, \quad \dots, \quad {}^0T_n = {}^0T_1 {}^1T_n$$

- 计算 $J(\mathbf{q})$ 的各列元素, 第 $i$ 列 $^T J_i$ 由 ${}^iT_n$ 决定。

### 3.4.3 机器人雅可比矩阵计算举例

#### ■ V-80机器人的雅可比矩阵

${}^T J(q) =$

$$\begin{bmatrix} (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6)(a_2 c_2 + s_{23} d_4) & (a_2 s_3 + d_4)(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + (a_2 c_3 + a_3) s_5 c_6 & & & & \\ -(s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6)(a_2 c_2 + s_{23} d_4) & -(a_2 s_3 + d_4)(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - (a_2 c_3 + a_3) s_5 s_6 & & & & \\ s_4 s_5 (a_2 c_2 + s_{23} d_4) & c_4 s_5 d_4 - a_2 c_3 c_5 + a_2 s_3 c_4 s_5 - a_3 c_5 & & & & \\ -s_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + c_{23} s_5 s_6 & s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & & & & \\ s_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - c_{23} s_5 c_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & & & & \\ -s_{23} c_4 s_5 + c_{23} c_5 & s_4 s_5 & & & & \\ d_4 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + a_3 s_5 c_6 & 0 & 0 & 0 & & \\ -d_4 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - a_3 s_5 c_6 & 0 & 0 & 0 & & \\ d_4 c_4 s_5 - a_3 c_5 & 0 & 0 & 0 & & \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_5 c_6 & s_6 & 0 & & \\ -(s_4 c_5 s_6 - c_4 c_6) & s_5 s_6 & c_6 & 0 & & \\ s_4 s_5 & c_5 & 0 & 1 & & \end{bmatrix}$$

### 3.4.3 机器人雅可比矩阵计算举例

#### ■ PUMA 560机器人的雅可比矩阵

##### ■ 微分变换法

$${}^T J_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} {}^T J_{1x} \\ {}^T J_{1y} \\ {}^T J_{1z} \\ -s_{23}(c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_{23} s_5 c_6 \\ s_{23}(c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_{23} s_5 s_6 \\ s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \end{bmatrix}$$

##### ■ 矢量积法

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \times^1 \mathbf{p}_6^0 & \mathbf{z}_2 \times^2 \mathbf{p}_6^0 & \cdots & \mathbf{z}_6 \times^6 \mathbf{p}_6^0 \\ \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \cdots & \mathbf{z}_6 \end{bmatrix}$$

## 3.5 小结



- 机器人运动方程的表示
  - 用变换矩阵表示机械手的运动方向
  - 用横滚、俯仰和偏转角表示运动姿态
  - 广义连杆和广义变换矩阵
- 机器人运动方程的求解
  - 逆向运动学的可解性、多解性
  - 代数法
  - 几何法
- PUMA560机器人运动方程的表示和求解
- 机器人位置和姿态的微小变化问题
  - 机器人雅可比公式