第5章　能控性，能观性与传递函数

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 5.2 能控能观系统的传递函数
   - 5.2.1 传递函数矩阵的最小多项式表达式
   - 5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

1. 5.2 能控能观系统的传递函数
   - 5.2.1 传递函数矩阵的最小多项式表达式
   - 5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

1. 5.2 能控能观系统的传递函数
   - 5.2.1 传递函数矩阵的最小多项式表达式
   - 5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

考察线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

其中x为n维状态变量，u为p维输出变量，y为q维输出变量，A, B, C为适当维数的实常阵.

考察线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

其中x为n维状态变量, u为p维输出变量, y为q维输出变量, A, B, C为适当维数的实常阵.

- 其传递函数矩阵为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\frac{adj(sI - A)}{\det(sI - A)}B, \tag{2}$$

其中, $adj(sI - A)$ 表示特征矩阵$(sI - A)$ 的伴随矩阵, $\det(sI - A)$ 表示$(sI - A)$ 的行列式.

- 令

$$(sI - A)^{-1} = \frac{P(s)}{\varphi(s)}, \tag{3}$$

$\varphi(s)$为A的最小多项式, 即

$$\varphi(s) = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \; l \le n. \tag{4}$$

- 且, $P(s)$ 为矩阵多项式, 满足

$$
\begin{aligned}
P(s) &= \sum_{j=0}^{l-1} s^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i A^{i-j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{l-1} A^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i s^{i-j-1}, \ l \leq n.
\end{aligned} \tag{5}
$$

- 且, $P(s)$ 为矩阵多项式, 满足

$$
\begin{aligned}
P(s) &= \sum_{j=0}^{l-1} s^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i A^{i-j-1} \\
&= \sum_{j=0}^{l-1} A^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i s^{i-j-1}, \; l \le n.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

➥ 于是线性系统(1)的传递函数可表示为

$$
G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{CP(s)B}{\varphi(s)}, \tag{6}
$$

此即为传递函数$G(s)$的最小多项式表示.

5.2.1 传递函数矩阵的最小多项式表达式

- 且, $P(s)$ 为矩阵多项式, 满足

$$\begin{aligned} P(s) &= \sum_{j=0}^{l-1} s^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i A^{i-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} A^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i s^{i-j-1}, \ l \le n. \end{aligned} \tag{5}$$

➥ 于是线性系统(1)的传递函数可表示为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{CP(s)B}{\varphi(s)}, \tag{6}$$

此即为传递函数$G(s)$的最小多项式表示.

注1: 显然, 若$d(s)$为$\det(sI - A)$与$adj(sI - A)$的最大公因子, 则由(2)即知:

$$\det(sI - A) = d(s)\varphi(s),$$

$$adj(sI - A) = d(s)P(s).$$

5.2.1 传递函数矩阵的最小多项式表达式

注2: 对于传递函数的最小多项式表示(6), 给出如下性质:

1. $\varphi(s)$为A的最小多项式, 必有$\varphi(A)=0$.

注2: 对于传递函数的最小多项式表示(6), 给出如下性质:

1. $\varphi(s)$为A的最小多项式, 必有$\varphi(A) = 0$.
2. 矩阵多项式$P(s)$在复平面上无根, 即$P(s) \neq 0, \forall s \in \mathbb{C}$.

注2: 对于传递函数的最小多项式表示(6), 给出如下性质:

1. $\varphi(s)$为A的最小多项式, 必有$\varphi(A)=0$.
2. 矩阵多项式$P(s)$在复平面上无根, 即$P(s)\neq 0, \forall s\in\mathbb{C}$.

- 事实上, 若$\exists s_0\in\mathbb{C}$, 使$P(s_0)=0$, 由(5)则有

$$\begin{aligned} 0 &= P(s_0) \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} A^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i s_0^{i-j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{l-1} A^j \alpha_j, \end{aligned}$$

➥ 这说明, 存在次数不超过$l-1$的多项式$\psi(s)=\sum_{j=0}^{l-1} s^j\alpha_j$, 使得$\psi(A)=0$, 此与$\varphi(s)$为$A$的最小多项式矛盾.

注2: 对于传递函数的最小多项式表示(6), 给出如下性质:

1. $\varphi(s)$为A的最小多项式, 必有$\varphi(A)=0$.
2. 矩阵多项式$P(s)$在复平面上无根, 即$P(s)\neq 0, \forall s\in\mathbb{C}$.
   - 事实上, 若$\exists s_0\in\mathbb{C}$, 使$P(s_0)=0$, 由(5)则有

$$\begin{aligned}0 &= P(s_0)\\ &= \sum_{j=0}^{l-1} A^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i s_0^{i-j-1}\\ &= \sum_{j=0}^{l-1} A^j \alpha_j,\end{aligned}$$

➥ 这说明, 存在次数不超过$l-1$的多项式$\psi(s)=\sum_{j=0}^{l-1} s^j\alpha_j$, 使得$\psi(A)=0$, 此与$\varphi(s)$为$A$的最小多项式矛盾.

3. $P(s)$与A可交换, 即$P(s)A=AP(s)$.

1 5.2 能控能观系统的传递函数

- 5.2.1 传递函数矩阵的最小多项式表达式
- 5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

定理

定理5.3 若(A,B)能控, 则$P(s)B$在复平面无根.

定理

定理5.3 若(A,B)能控, 则$P(s)B$在复平面无根.

证明: 反证法. 若存在$s_0 \in \mathbb{C}$, 使得$P(s_0)B=0$, 则由$P(s)A=AP(s)$可知

$$
\begin{aligned}
&P(s_0)B=0,\\
&P(s_0)AB=AP(s_0)B=0,\\
&\quad\cdots\cdots\\
&P(s_0)A^{n-1}B=A^{n-1}P(s_0)B=0,
\end{aligned}
$$

定理

定理5.3 若(A,B)能控, 则$P(s)B$在复平面无根.

证明: 反证法. 若存在$s_0 \in \mathbb{C}$, 使得$P(s_0)B=0$, 则由$P(s)A=AP(s)$可知

$$
\begin{aligned}
&P(s_0)B = 0,\\
&P(s_0)AB = AP(s_0)B = 0,\\
&\quad\cdots\cdots\\
&P(s_0)A^{n-1}B = A^{n-1}P(s_0)B = 0,
\end{aligned}
$$

- 从而

$$P(s_0)\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0.$$

5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

定理

定理5.3 若(A,B)能控, 则$P(s)B$在复平面无根.

证明: 反证法. 若存在$s_0 \in \mathbb{C}$, 使得$P(s_0)B = 0$, 则由$P(s)A = AP(s)$可知

$$
\begin{aligned}
&P(s_0)B = 0,\\
&P(s_0)AB = AP(s_0)B = 0,\\
&\quad \cdots\cdots\\
&P(s_0)A^{n-1}B = A^{n-1}P(s_0)B = 0,
\end{aligned}
$$

- 从而

$$P(s_0)\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0.$$

- 又因为$P(s)$ 在复平面上无根, 故$P(s_0) \neq 0$

➡ 从而可推出$\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$降秩, 与$(A,B)$ 能控矛盾(能控秩判据).

- 故假设不成立, $P(s)B$ 在复平面无根 ∎

与定理5.3对偶地，可得如下定理

定理

定理5.4 若(A, C)能观，则$CP(s)$在复平面无根.

5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

与定理5.3对偶地，可得如下定理

定理

定理5.4 若(A, C)能观，则$CP(s)$在复平面无根.

- 若(A, B, C)能控能观，$CP(s)B$在复平面上是否也无根呢？

➥ 一般来说，此结论是不成立的.

但，此时我们有如下结论

定理

定理5.5 若(A, B, C)能控能观，系统(1)的传递函数的最小多项式表示为

$$C(sI - A)^{-1}B = \frac{CP(s)B}{\varphi(s)}$$

则$CP(s)B$与$\varphi(s)$无公共根

证明: 用反证法. 设$CP(s)B$与$\varphi(s)$有一公共根$s = s_0$, 即

$$CP(s_0)B = 0,\ \varphi(s_0) = 0. \tag{7}$$

证明: 用反证法. 设$CP(s)B$与$\varphi(s)$有一公共根$s = s_0$, 即

$$CP(s_0)B = 0,\ \varphi(s_0) = 0. \tag{7}$$

- 由$(sI - A)^{-1} = \dfrac{P(s)}{\varphi(s)}$, 推得

$$(sI - A)(sI - A)^{-1} = (sI - A)\frac{P(s)}{\varphi(s)} = I,$$

即

$$(sI - A)P(s) = \varphi(s)I,\ \forall s \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

基此, 利用$\varphi(s_0) = 0$, 可推得

$$AP(s_0) = s_0 P(s_0). \tag{9}$$

证明: 用反证法. 设$CP(s)B$与$\varphi(s)$有一公共根$s = s_0$, 即

$$CP(s_0)B = 0, \ \varphi(s_0) = 0. \tag{7}$$

- 由$(sI - A)^{-1} = \dfrac{P(s)}{\varphi(s)}$, 推得

$$(sI - A)(sI - A)^{-1} = (sI - A)\frac{P(s)}{\varphi(s)} = I,$$

即

$$(sI - A)P(s) = \varphi(s)I, \ \forall s \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

基此, 利用$\varphi(s_0) = 0$, 可推得

$$AP(s_0) = s_0 P(s_0). \tag{9}$$

- 由(8), (9)可导出

$$\begin{aligned} &CP(s_0)B = 0, \\ &CAP(s_0)B = s_0 CP(s_0)B = 0, \\ &\quad \cdots\cdots \\ &CA^{n-1}P(s_0)B = s_0^{n-1}CP(s_0)B = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

- 上式(10)还可表示为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P(s_0)B = 0. \tag{11}$$

- 上式(10)还可表示为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P(s_0)B = 0. \tag{11}$$

- 因为(A, C)能观, 故矩阵$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$列满秩, 从而由式(11)可推出

$$P(s_0)B = 0.$$

第5章

5.2 能控能观系统的传递函数

5.2.1 传递函数矩阵的最小多项式表达式

5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

- 上式(10)还可表示为

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} P(s_0)B = 0. \tag{11}$$

- 因为(A, C)能观, 故矩阵$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$列满秩, 从而由式(11)可推出

$$P(s_0)B = 0.$$

➥ 此与定理5.3的结论矛盾, 故假设不成立. 即$CP(s)B$与$\varphi(s)$无公共根. 定理结论得证 ■

注1: 若传递函数(6)为不可简约(既约)的, $\varphi(s)=0$的根, 即$\varphi(s)$的零点称为传递函数(6)的极点(见第1.4节, p.12)

- 显然, $\varphi(s)$的零点, 一定是$\det(sI-A)$ 的零点, 即A 的特征根
- 但是, 因为传递函数(6) 往往是可简约的, 故A 的特征根并不一定是传递函数的极点.

5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

注1: 若传递函数(6)为不可简约(既约)的, $\varphi(s)=0$的根, 即$\varphi(s)$的零点称为传递函数(6)的极点(见第1.4节, p.12)

- 显然, $\varphi(s)$的零点, 一定是$\det(sI-A)$ 的零点, 即A 的特征根
- 但是, 因为传递函数(6) 往往是可简约的, 故A 的特征根并不一定是传递函数的极点.

注2: 定理5.5指出, 若(A,B,C)能控能观, 则传递函数(6) 是不可简约的, 而$\varphi(s)$ 的零点等同于A 的特征根.

➥ 故此时, 传递函数的极点与A的特征根相同

推论

推论5.1 若(A,B)能控, (A,C)能观, 则传递函数$G(s)=C(sI-A)^{-1}B$的极点即为$\det(sI-A)=0$根.

注3: 定理5.5说明,

- 若(A, B, C)能控能观, 则传递函数(6)为一定是不可简约的
- 反之, 则不成立. 即已知传递函数(6) 是不可简约的, 并不能说明(A, B, C)能控能观

注3: 定理5.5说明,

- 若(A, B, C)能控能观, 则传递函数(6)为一定是不可简约的
- 反之, 则不成立. 即已知传递函数(6) 是不可简约的, 并不能说明(A, B, C)能控能观

➥ 但是, 对于单输入(或单输出)的系统, 有:

定理

定理5.6 若系统(A, B, C)为单输入(或单输出), 则系统能控能观的充分必要条件为: 其传递函数表达式为分母次数等于状态维数的不可简约分式.

注3: 定理5.5说明,

- 若(A, B, C)能控能观, 则传递函数(6)为一定是不可简约的
- 反之, 则不成立. 即已知传递函数(6) 是不可简约的, 并不能说明(A, B, C)能控能观

➥ 但是, 对于单输入(或单输出)的系统, 有:

定理

定理5.6 若系统(A, B, C)为单输入(或单输出), 则系统能控能观的充分必要条件为: 其传递函数表达式为分母次数等于状态维数的不可简约分式.

证明: 必要性: 因为(A, B, C)为单输入(或单输出)能控, 能观, 故有

- A为循环矩阵, 从而A的最小多项式即为其特征多项式

- 再由定理5.5知, 传递函数矩阵

$$G(s) = \frac{C \cdot adj(sI - A) \cdot B}{\det(sI - A)}$$

为不可简约(既约), 且分母次数为系统的状态维数. 必要性得证

5.2.2 能控能观系统的传递函数的不可简约性

- 再由定理5.5知, 传递函数矩阵

$$G(s) = \frac{C \cdot adj(sI - A) \cdot B}{\det(sI - A)}$$

为不可简约(既约), 且分母次数为系统的状态维数. 必要性得证

- 充分性: 反证法. 假设(A, B, C) 不完全能控, 不完全能观, 则对其进行Kalman 规范分解, 得一子系统(A_{22}, B_2, C_2) 能控能观, 维数低于原系统维数

- 再由定理5.5知, 传递函数矩阵

$$G(s)=\frac{C\cdot adj(sI-A)\cdot B}{\det(sI-A)}$$

为不可简约(既约), 且分母次数为系统的状态维数. 必要性得证

- 充分性: 反证法. 假设(A,B,C) 不完全能控, 不完全能观, 则对其进行Kalman 规范分解, 得一子系统(A_{22},B_2,C_2) 能控能观, 维数低于原系统维数
- 此时系统的传递函数

$$\begin{aligned}G(s)&=C(sI-A)^{-1}B\\&=C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2\\&=\frac{C_2\cdot adj(sI-A_{22})\cdot B_2}{\det(sI-A_{22})}\end{aligned}\tag{12}$$

为不可简约(既约), 分母次数低于系统(A,B,C) 的状态维数

- 再由定理5.5知，传递函数矩阵

$$G(s) = \frac{C \cdot adj(sI - A) \cdot B}{\det(sI - A)}$$

为不可简约(既约)，且分母次数为系统的状态维数. 必要性得证

- 充分性：反证法. 假设(A, B, C) 不完全能控，不完全能观，则对其进行Kalman 规范分解，得一子系统(A_{22}, B_2, C_2) 能控能观，维数低于原系统维数

- 此时系统的传递函数

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= C_2(sI - A_{22})^{-1}B_2 \\ &= \frac{C_2 \cdot adj(sI - A_{22}) \cdot B_2}{\det(sI - A_{22})} \end{aligned} \tag{12}$$

为不可简约(既约)，分母次数低于系统(A, B, C) 的状态维数

- 此与$G(s)$表达式为分母次数等于状态维数的不可简约分式矛盾，故假设不成立. 从而(A, B, C) 能控能观. 定理得证 ■

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 111–114