陈帅平
202028014728006

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

1. i) 令 $\begin{cases} x_2=0 \\ -\sin(x_1)-x_2=0 \end{cases}$ 即可求出系统的所有平衡状态.

因此我们可解出系统的所有平衡状态为:

$$x_e=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (n=0,1,2,3,\cdots+\infty)$$

ii) 对于在平衡点处进行线性化.

我们可以在平衡点处对其进行泰勒展开.

设 $f(x)=\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2 \\ -\sin(x_1)-x_2 \end{bmatrix}$, $\therefore f(x)=f(x_e)+\dot{f}(x_e)(x-x_e)+\ddot{f}(x_e)(x-x_e)^2+\cdots$

忽略掉二阶及以上的高阶项,

即可得 $f(x)=f(x_e)+\dot{f}(x_e)(x-x_e)$

在平衡点 x_e 处 $f(x_e)=0$

$\therefore f(x)=\dot{f}(x_e)(x-x_e)$

对于 $\dot{f}(x_e)$, 其即为:

$$\dot{f}(x_e)=\frac{\partial f(x)}{\partial x^T}\Big|_{x=x_e}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1 \end{bmatrix}_{x=x_e}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -1 \end{bmatrix} \cancel{(n=0,1,2,\cdots+\infty)}$$

取 $z=x-x_e$, 则有 $\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$

再取 $x=z$, 则可得各平衡点处的线性化方程为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^{n+1} & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

由此线性化系统的系统矩阵可得此系统的特征多项式为:

$\lambda(s)=s^2+s+(-1)^n$, 当 $n=1,3,5,7\cdots+\infty$ 时,含正特征值,不稳定

当 $n=0,2,4,6,\cdots+\infty$ 时,渐近稳定

故而 $x_e=\begin{bmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, $n=0,2,4\cdots$ 时,系统渐近稳定; $x_e=\begin{bmatrix} \pm n\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, $n=1,3,5,\cdots$, 系统不稳定

扫描全能王 创建

陈帅东
202028014728006

2. 对于 $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_1^2 x_2 \end{cases}$，令 $\begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_1 - x_1^2 x_2 = 0 \end{cases}$

可解得系统的唯一平衡状态为 $x_1 = x_2 = 0$，即原点。

首先选取 $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ 为系统的李亚普诺夫函数，$V(x)$ 正定

则 $\dot{V}(x_1, x_2) = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$

$= x_1 x_2 + x_2(-x_1 - x_1^2 x_2)$

$= -x_1^2 x_2^2 \leq 0$，$\dot{V}(x)$ 为半负定

同时，对于任意非零 $x_0 \in R^n$，显然有 $\dot{V}(\phi(t; x_0, 0)) \not\equiv 0$（拉塞尔不变原理）

即设 $\dot{V}(x_1, x_2) \equiv 0$（一个反例）

可推导出 ① $x_1 \equiv 0$，x_2 为任意数字 m 或 ② $x_2 \equiv 0$，x_1 为任意数 m 或 ③ $x_1 \equiv 0$，且 $x_2 \equiv 0$。

此处我们考虑一种情况说明矛盾

若 ① $x_1 \equiv 0$，而 $x_2 = m$（任意数）

则有 $m \equiv 0$，矛盾

从而，对系统所有的解，都有 $\dot{V}(x) \not\equiv 0$

又因 $\|x\| \to \infty$ 时，有 $V(x) \to \infty$，故而系统的平衡状态为大范围渐近稳定的。

扫描全能王 创建

陈帅乐
2020280147280?

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

3. 令 $\begin{cases} x_2=0 \\ -x_1^3-x_2=0 \end{cases}$，则可求解出系统唯一的平衡状态为 $x_1=x_2=0$. 即原点.

接下来使用变量梯度法求解系统的李亚普诺夫函数.

设李亚普诺夫函数 $V(x)$ 的梯度 $\nabla V(x)=\begin{bmatrix} \nabla V_1(x) \\ \nabla V_2(x) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \end{bmatrix}$

对梯度 $\nabla V(x)$ 进行限制:

$$\frac{dV(x)}{dt}=[\nabla V(x)]^T\dot{x}=[a_{11}x_1+a_{12}x_2 \quad a_{21}x_1+a_{22}x_2]\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1^3-x_2 \end{bmatrix}$$

$$=(a_{11}-a_{21})x_1x_2+(a_{12}-a_{22})x_2^2-a_{21}x_1^4-a_{22}x_1^3x_2 \quad <0$$

试设 $a_{11}=a_{21}=a_{12}=a_{22}=1$，则

$$\dot{V}(x)=-x_1^4-x_1^3x_2$$

当 $x_1x_2>0$ 时，有 $\dot{V}(x)$ 为负定的

$$V(x)=\int_0^{x_1(x_2=0)}\nabla V_1(x)\,dx_1+\int_0^{x_2(x_1=x_1)}\nabla V_2(x)\,dx_2=\int_0^{x_1(x_2=0)}x_1\,dx_1+\int_0^{x_2(x_1=x_1)}(x_1+x_2)\,dx_2$$

$$=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+x_1x_2 \quad \text{是正定的}$$

因此在 $x_1x_2>0$ 的范围内，平衡状态是渐近稳定的。

扫描全能王 创建

陈帅华
202028014728006

4. 解：令 $\begin{cases} -3x_1+x_2=0 \\ x_1-x_2-x_2^3=0 \end{cases}$ 则可解出唯一的平衡态为 $x_1=x_2=0$，即原点.

设 $f(x)=\begin{bmatrix} -3x_1+x_2 \\ x_1-x_2-x_2^3 \end{bmatrix}$

则 $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x^T}=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}=F(x)$

若取 $B=I$，则有 $S(x)=F(x)+F^T(x)=\begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix}$

可得 $S(x)$ 为对称负定阵，

所以平衡状态 $x=0$ 是渐近稳定的.

又因为 $V(x)=f^T(x)Bf(x)=\begin{bmatrix} -3x_1+x_2 & x_1-x_2-x_2^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3x_1+x_2 \\ x_1-x_2-x_2^3 \end{bmatrix}$

$\therefore V(x)=(-3x_1+x_2)^2+(x_2^3+x_2-x_1)^2$

当 $\|x\|\to\infty$ 时，有 $V(x)\to\infty$

所以平衡状态 $x=0$ 是大范围渐近稳定的

扫描全能王 创建

陈帅平

20202801472806

中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences

5. 证明：本题的证明思路是通过对 x_0^TPx 变换得到 $\int_0^\infty y^2(t)dt$

由PPT上的内容可知：

对任意正定对称矩阵 $Q=C^TC$，可找到满足 Lyapunov 方程的唯一正定解为：

$$P=\int_0^\infty e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt=\int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}dt.$$

我们在P的两边同时乘以 x_0^T 和 x_0 可得

$$x_0^TPx_0=x_0^T\int_0^\infty e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt\,x_0$$
$$=\int_0^\infty x_0^Te^{A^Tt}C^TCe^{At}x_0dt.$$

对于线性定常系统，其状态运动表达式为：

$$x(t)=e^{At}x_0+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,\quad t\geq 0.$$

已知 $u(t)\equiv 0$，$x(t)=e^{At}x_0$.

$$\therefore x_0^TPx_0=\int_0^\infty (e^{At}x_0)^TC^TCe^{At}x_0dt.$$
$$=\int_0^\infty x^TC^TCx\,dt$$
$$=\int_0^\infty (Cx)^T(Cx)dt.$$

又已知：$y=Cx$ $\therefore (Cx)^T(Cx)=y^2$

$\therefore$ 即可证得：

$$\int_0^\infty y^2(t)dt=x_0^TPx_0$$

扫描全能王 创建