

### 第2章

2.1 能控性定义2.2 能控性判据2.3 能控性分解

## 第2章 线性定常系统的能控性

程龙, 薛文超

中国科学院自动化研究所 中国科学院数学与系统科学研究院



### 第2章

- 2.2 能控性判据 2.3 能控性分解 0.4 单輪 λ 单
- 2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- 2.1 能控性定义
  - 2.1.1 问题的提出
  - 2.1.2 能控性定义
  - 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- ② 2.2 能控性判据
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- ③ 2.3 能控性分解
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- ▲ 2.4 单输入—单输出系统的能控规范型



# 第2章 线性定常系统的能控性

#### 第2章

- 能控性和能观性(对能观性, 将在第4章讨论)是系统的两个基本特性
  - 随着状态空间描述的引入,卡尔曼(R.E.Kalman)在20世纪60年代初首先提出和研究了能控性和能观性这两个重要概念. 系统和控制理论的发展表明,这两个概念对于控制和估计问题的研究有着极其重要的意义
- 在本章中, 讨论限于线性定常系统的能控性
  - 首先, 对能控性进行研究, 给出能控性定义及其判别条件
  - 其次,将讨论规范型,结构分解等对状态反馈设计而言十分基本的内容



### 第2章

#### 2.1 能控性定义

2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不 能控子空间

a a Ak Lau A An

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

### ● 2.1 能控性定义

- 2.1.1 问题的提出
- 2.1.2 能控性定义
- 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- 2 2.2 #
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- (3) 2.3 \$
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- 4 24 半斯人一学物出系统的能控规范型



### 第2章

- 2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不 金轮子空间
- 2.2 能控性判
- 2.3 能控性分解
- 2.4 单输入—<sup>1</sup> 输出系统的能 控规范型

- 2.1 能控性定义
  - 2.1.1 问题的提出
  - 2.1.2 能控性足义
  - 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- (2)
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- 3
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- 4 24 半轴入一半轴出系统的能控规范型



### 第2章

- 2.1.2.能控性定义 2.1.3.能控于空间与不 能控于空间 2.2.能控性判据 2.3.能控性分解
- 2.3 能控性分解 2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- 考虑系统的状态空间描述,输入为系统的外部变量,状态变量 是系统的内部变量
  - 系统的运动特性在初始状态已知的条件下,完全取决于系统的控制输入
  - 系统的能控性所要研究的内容:
    - 能否通过系统的输入来影响系统的状态
    - 如果系统的每个状态变量的运动都可由输入来影响和控制,使得经有限时间区间由任意始点到达原点,就称系统是能控的,或者是状态能控的.否则,就称系统是不完全能控的
- ➡ 下面我们通过例子来直观考察一下系统的能控性



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 阿羅的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不
6 按子空间

2.2 能控性判

2.3 能控性分角

2.4 单输入—单输出系统的能 控规范型 例2.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不
经按子空间

2.2 能控性判据

2.3 能控性分单

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 例2.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

• 将其表示为标量方程组的形式:

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + u,$$

$$\dot{x}_2 = -5x_2 + 2u.$$



#### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不 检验子空间

2.2 能控性判制

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 挖规范型 例2.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

• 将其表示为标量方程组的形式:

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + u,$$
  
 $\dot{x}_2 = -5x_2 + 2u.$ 

• 直接写出其运动方程可知, 状态变量 $x_1, x_2$ 都可通过选择输入u而由初始点 $x_1(0), x_2(0)$ 在给定有限时刻T > 0达到原点 $x_1(T) = 0, x_2(T) = 0$ 



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控于空间与不

2.2 能控性判据

2.3 能控性分角

2.4 单输入——输出系统的能控规范型

例2.1.1 给定系统的状态空间描述为

$$(a) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

• 将其表示为标量方程组的形式:

$$\dot{x}_1 = 4x_1 + u,$$
  
 $\dot{x}_2 = -5x_2 + 2u.$ 

- 直接写出其运动方程可知, 状态变量 $x_1, x_2$ 都可通过选择输入u而由初始点 $x_1(0), x_2(0)$ 在给定有限时刻T > 0达到原点 $x_1(T) = 0, x_2(T) = 0$
- 因而, 系统完全能控



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不 能控子空间

2.2 能控性判

23 能控性分解

2.4 单输入—单输出系统的能 控规范型 ➡ 若给定系统的状态空间描述为

$$(b) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控于空间与不
6 按行空间

2.2 能控性判

23 能捻性分解

2.4 单输入——单 输出系统的能 控规范型 ➡ 若给定系统的状态空间描述为

$$(b) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

• 则将其表示为标量方程组形式:

$$\dot{x}_1 = 4x_1,$$
  
 $\dot{x}_2 = -5x_2 + 2u.$ 



#### 第2章

..1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控于空间与不

2.2 能控性判

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单输出系统的能 按规范型 ➡ 若给定系统的状态空间描述为

$$(b) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

• 则将其表示为标量方程组形式:

$$\dot{x}_1 = 4x_1,$$
  
 $\dot{x}_2 = -5x_2 + 2u.$ 

• 无论输入u如何选取, 对状态 $x_1$ 没有影响, 对状态 $x_2$ 可在有限时间区间[0,T]上从初始点 $x_2(0)$ 到达原点 $x_2(T)=0$ 

#### 第2章

2.1.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单 输出系统的能 按规范型 ➡ 若给定系统的状态空间描述为

$$(b) \quad \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u$$

• 则将其表示为标量方程组形式:

$$\dot{x}_1 = 4x_1,$$
  
 $\dot{x}_2 = -5x_2 + 2u.$ 

- 无论输入u如何选取, 对状态 $x_1$ 没有影响, 对状态 $x_2$ 可在有限时间区间[0,T]上从初始点 $x_2$ (0)到达原点 $x_3$ (T) = 0
- 故, 系统为不完全能控的



### 第2章

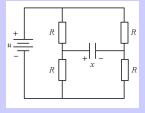
2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判:

2.3 能控性分角

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

**例2.1.2** 考虑图2.1所示的电路. 系统的状态变量为电容端电压x(t), 输入为电源u(t)





### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控于空间与不

2.2 能控性判:

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

**例2.1.2** 考虑图2.1所示的电路. 系统的状态变量为电容端电压x(t), 输入为电源u(t)

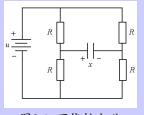


图2.1 不能控电路

● 若初始状态x(0) = 0, 不管输入u(t) 是什么, 对所有的 $t \ge 0$ , 恒有x(t) = 0, 即x 不受u(t) 的影响. 此表明, 电路是状态不能控的



#### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控于空间与不

2.2 能控性判抗

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 **例2.1.2** 考虑图2.1所示的电路. 系统的状态变量为电容端电压x(t), 输入为电源u(t)

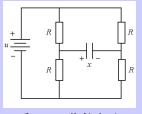


图2.1 不能控电路

● 若初始状态x(0) = 0, 不管输入u(t) 是什么, 对所有的 $t \ge 0$ , 恒有x(t) = 0, 即x 不受u(t) 的影响. 此表明, 电路是状态不能控的

注:上述的例子和说明,是对系统能控性的直观了解.为了揭示能控性的本质属性,下面介绍能控性的相关定义



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 网题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不
维持学空间

2.2 月ヒイエイエナリガ

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单输出系统的能 控规范型

- 1 2.1 能控性定义
  - 2.1.1 问题的提出
  - 2.1.2 能控性定义
  - 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- (2)
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- 3 2.3
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- (4) 2.4 单输入一单输出系统的能控规范型。



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与2

2.2 能控性判据

2.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$
 (1)

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,A,B分别为n×n,n×p的 实常阵



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不
6 按子空间

2.2 能控性判据

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 • 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$
 (1)

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,A,B分别为n×n,n×p的 实常阵

定义

定义2.1 对于系统(1), 若给定非零初始状态 $x_0$ , 及有限时刻T>0, 存在控制u(t), 使得经u(t)作用在[0,T]时间段将自 $x_0$ 出发的系统轨线导引到x(T)=0, 则称 $x_0$ 为能控状态.



### 第2章

• 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$
 (1)

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,A,B分别为n×n,n×p的 实常阵

### 定义

定义2.1 对于系统(1), 若给定非零初始状态 $x_0$ , 及有限时刻T > 0, 存在控制u(t), 使得经u(t)作用在[0,T]时间段将自 $x_0$ 出发的系统轨线导引到x(T) = 0, 则称 $x_0$ 为能控状态.

#### 定义

定义2.2 对于系统(1), 若状态空间中所有的非零状态都是能控的, 则称系统(1) (或系统(A, B))是(完全)能控的.



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不
8 按平空间

2.2 能控性判据

2.3 能控性分角

2.4 单输入——输出系统的能控规范型

#### 定义

定义2.3 对于系统(1), 若状态空间中存在一个或一些非零状态是不能控的, 则称系统(1) 是不完全能控的. 若所有非零状态都是不能控的, 则称系统(1)是完全不能控的.



#### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 网题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不 能控子空间

...2 能控性判据

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

#### 定义

定义2.3 对于系统(1), 若状态空间中存在一个或一些非零状态是不能控的, 则称系统(1) 是不完全能控的. 若所有非零状态都是不能控的, 则称系统(1)是完全不能控的.

### 注1: 在以上定义中, 都规定为由非零状态转移到零状态

- 如果是由零状态达到非零状态则称为状态能达的
- 对于线性定常系统(1), 能控性和能达性是等价的; 而对于 线性定常离散系统, 两者不等价



#### 第2章

定义

定义2.3 对于系统(1),若状态空间中存在一个或一些非零状态是不能控的,则称系统(1)是不完全能控的.若所有非零状态都是不能控的,则称系统(1)是完全不能控的.

注1: 在以上定义中,都规定为由非零状态转移到零状态

- 如果是由零状态达到非零状态则称为状态能达的
- 对于线性定常系统(1),能控性和能达性是等价的;而对于 线性定常离散系统,两者不等价
- 注2: 另外,对于一个物理可实现的系统,系统能控的概率几乎等于1, 系统不完全能控只是一种"奇异"的情况



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不 8 校子空间

2.2 月ヒイエイ土ナイカ

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单输出系统的能 控规范型

### ■ 2.1 能控性定义

- 2.1.1 问题的提出
- 2.1.2 能控性定义
- 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- (2)
- 2.2.1 能控性判据
- 2.2.2 能控性指数
- (3) 2.
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- (4) 2.4 学输入一学输出系统的能控规范型



### 第2章

2.1 能控性定 2.1.1 问题的提出

2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间。 能控子空间

2.2 能控性判据

2.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 考虑系统(1), 其状态运动轨线为

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$
 (2)



### 第2章

2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能较子來網5

2.2 能控性判制

2.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 考虑系统(1), 其状态运动轨线为

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$
 (2)

$$0 = x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$
 (3)



### 第2章

2.1. 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控于空间与不

2.2 能控性判却

2.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 考虑系统(1), 其状态运动轨线为

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$
 (2)

$$0 = x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$
 (3)

• 即,有

$$x_0 = -\int_0^T e^{-At} Bu(t) dt. \tag{4}$$



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判据

2.3 能控性分解

 2.4 平输入— 输出系统的能 控规范型 考虑系统(1), 其状态运动轨线为

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$
 (2)

$$0 = x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-\tau)}Bu(\tau)d\tau,$$
 (3)

• 即,有

$$x_0 = -\int_0^T e^{-At} Bu(t) dt. \tag{4}$$

➡ 根据(4)的结论, 若 $x_1, x_2$ 为能控状态, 则有 $u_1(t), u_2(t)$ 存在, 使

$$x_1 = -\int_0^T e^{-At} Bu_1(t) dt, \quad x_2 = -\int_0^T e^{-At} Bu_2(t) dt, \tag{5}$$



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

2.1.3 能控子空间与 能控子空间

2.2 /4 / 4. / 4 //

2.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 则由(5),进一步可得

$$x_1 + x_2 = -\int_0^T e^{-At} B(u_1(t) + u_2(t)) dt,$$
 (6)

$$kx_1 = -\int_0^T e^{-At} B(ku_1(t)) dt, \quad k \in \mathbb{R}.$$
 (7)



### 第2章

2.1. 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

2.2 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入——输出系统的能 控规范型 • 则由(5),进一步可得

$$x_1 + x_2 = -\int_0^T e^{-At} B(u_1(t) + u_2(t)) dt,$$
 (6)

$$kx_1 = -\int_0^T e^{-At} B(ku_1(t)) dt, \quad k \in \mathbb{R}.$$
 (7)

- ➡ 由(6), (7)可以看出
  - 系统(1)的能控状态的全体再添上零向量构成一线性空间,它是n维欧氏空间的子空间,称其为能控子空间,记为 $X_C$
  - 能控子空间的正交补空间称为不能控子空间, 记为X<sub>NC</sub>
  - 且,有 $\mathbb{R}^n = X_C \oplus X_{NC}$



• 对于能控子空间 $X_C$ 和不能控子空间 $X_{NC}$ , 我们有下面结论

### 第2章

2.1 能控性定 2.1.1 问题的提出

2.1.2 能控性定义 2.1.3 能較子空间

能控子空间

2.2 肥空性チリ

2.3 能控性分向

2.4 平输入— 输出系统的能 控规范型



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能拉子空间与不 能拉子空间

2.2 能控性判据2.3 能控性分解

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

• 对于能控子空间X<sub>C</sub>和不能控子空间X<sub>NC</sub>, 我们有下面结论

### 定理

定理2.1 系统(1)的不能控子空间 $X_{NC}$ 为

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$
 (8)

的常解空间.



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控于空间与不能控于空间
2.2 能控性判据

2.5 能控性分离
 2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

• 对于能控子空间X<sub>C</sub>和不能控子空间X<sub>NC</sub>, 我们有下面结论

#### 定理

定理2.1 系统(1)的不能控子空间 $X_{NC}$ 为

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$
 (8)

的常解空间.

#### 定理2.1的结论等价于

- ① 若 $\alpha \in X_{NC}$ ,则 $\alpha$ 使得式(8)成立
- ② 若 $\alpha$ 使得式(8)成立,则 $\alpha \in X_{NC}$
- ⇒ 为此, 考虑能控性定义2.1可知, 若 $x(0) = x_0$  为能控状态, 则存在T > 0和控制u(t)满足式(4), 即 $x_0 = -\int_0^T e^{-At} Bu(t) dt$



证明 首先,设 $\alpha$ 为 $X_{NC}$ 中的任一元

## 第2章

2.1.1 能控性定 2.1.1 问题的提出

2.1.3 能控子空间。 能控子空间

2.2 能控性判

2.3 能控性分離

2.4 单输入—— 输出系统的能 控规范型



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

22 能 按 性 判

2.3 能控性分離

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 证明 首先,设 $\alpha$ 为 $X_{NC}$ 中的任一元

• 由 $X_{NC}$ 的定义,  $\alpha$ 与任意能控状态正交, 而能控状态 $x_0$ 与控制u(t)之间满足(4), 故有

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} Bu(t) dt = 0. (9)$$



## 第2章

.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子室间与不

2.2 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 氧 输出系统的能 控规范型 证明 首先,设 $\alpha$ 为 $X_{NC}$ 中的任一元

• 由 $X_{NC}$ 的定义,  $\alpha$ 与任意能控状态正交, 而能控状态 $x_0$ 与控制u(t)之间满足(4), 故有

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} Bu(t) dt = 0. (9)$$

• 特别地, 若取

$$u^* = (e^{-At}B)^T \alpha, \tag{10}$$

则由此构成能控状态x\*为

$$x^* = -\int_0^T e^{-At} B u^* dt. {11}$$



## 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 证明 首先,设 $\alpha$ 为 $X_{NC}$ 中的任一元

• 由 $X_{NC}$ 的定义,  $\alpha$ 与任意能控状态正交, 而能控状态 $x_0$ 与控制u(t)之间满足(4), 故有

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} Bu(t) dt = 0. (9)$$

• 特别地, 若取

$$u^* = (e^{-At}B)^T \alpha, \tag{10}$$

则由此构成能控状态x\*为

$$x^* = -\int_0^T e^{-At} B u^* dt. {11}$$

• 又因为 $\alpha$ 与x\*正交,故

$$0 = \alpha^{T} \int_{0}^{T} e^{-At} B u^{*} dt = \int_{0}^{T} \alpha^{T} e^{-At} B B^{T} e^{-A^{T} t} \alpha dt$$

$$= \int_{0}^{T} \|\alpha^{T} e^{-At} B\|^{2} dt.$$
(12)



## 第2章

2.1 能控性定: 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

**能控于空间** 

- - 0.10.10.00.00

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 由上式(12), 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T],$$
 (13)

即,可得α为方程(8)的常解



## 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判

2.3 能控性分)

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 由上式(12), 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T],$$
 (13)

即, 可得 $\alpha$ 为方程(8)的常解

反之, 若 $\alpha$ 为方程(8)的常解, 即则有 $\alpha^T e^{-At}B = 0, t \in [0, T]$ 



第2章

1 能控性定义 1.1 问题的提出 1.2 能控性定义 1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判据

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 由上式(12), 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T],$$
 (13)

即,可得α为方程(8)的常解

反之, 若 $\alpha$ 为方程(8)的常解, 即则有 $\alpha^T e^{-At}B = 0, t \in [0, T]$ 

• 那么,对任意 $x_0 \in X_C$ ,有

$$\alpha^{T} x_{0} = -\alpha^{T} \int_{0}^{T} e^{-At} Bu(t) dt$$

$$= -\int_{0}^{T} \alpha^{T} e^{-At} Bu(t) dt = 0$$
(14)

这说明α ∈ X<sub>NC</sub>



### 第2章

1 能控性定义
1.1 问题的提出
1.2 能控性定义
1.3 能控子空间与不

...2 能控性判据

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 • 由上式(12), 可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{13}$$

即,可得 $\alpha$ 为方程(8)的常解

反之, 若 $\alpha$ 为方程(8)的常解, 即则有 $\alpha^T e^{-At}B = 0, t \in [0, T]$ 

• 那么,对任意 $x_0 \in X_C$ ,有

$$\alpha^{T} x_{0} = -\alpha^{T} \int_{0}^{T} e^{-At} Bu(t) dt$$

$$= -\int_{0}^{T} \alpha^{T} e^{-At} Bu(t) dt = 0$$
(14)

这说明 $\alpha \in X_{NC}$ 

⇒ 综合上面两个结论即得, X<sub>NC</sub>为(8)的常解空间. 定理得证



## 第2章

2.1.1 純控性定 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

2.3 能控性分解

2.4 十辆八 输出系统的能 控规范型 基于定理2.1, 我们进一步可得如下定理2.2

定理

定理2.2 系统(1)的不能控子空间 $X_{NC}$ 为

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

的解空间.



### 第2章

1.1 能控性定 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

k柱子室间 .2 能控性判据

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 基于定理2.1, 我们进一步可得如下定理2.2

定理

定理2.2 系统(1)的不能控子空间 $X_{NC}$ 为

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0 \tag{15}$$

的解空间.

### 定理2.2的结论等价于

- ① 若 $\alpha \in X_{NC}$ ,则 $\alpha$ 使得式(15)成立
- ② 若 $\alpha$ 使得式(15)成立,则 $\alpha \in X_{NC}$
- ⇒ 为此, 考虑定理2.1可知, 若 $\alpha \in X_{NC}$ , 则 $\alpha$ 满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$



## 第2章

2.1 能控性定 2.1.1 问题的提出

2.1.3 能控子空间占 能控子空间

2.2 //3/2/2/

2.3 能控性分角

2.4 單輸入— 輸出系統的能 控规范型 证明 首先,设 $\alpha \in X_{NC}$ ,则由定理2.1, $\alpha$ 满足

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T],$$
 (16)



## 第2章

2.1 能控性定:
 2.1.1 问题的提出
 2.1.2 能控性定义

**能控子空间** 

2.2 NO 12 12 7 1 1

2.3 能控性分解

2.4 平输入— 输出系统的能 控规范型 证明 首先,设 $\alpha \in X_{NC}$ ,则由定理2.1, $\alpha$ 满足

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{16}$$

● (16)对t求导数直至n-1次,可得

$$\alpha^T e^{-At} AB = 0, t \in [0, T],$$

• • • • • •

$$\alpha^T e^{-At} A^{n-1} B = 0, t \in [0, T].$$



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 证明 首先,设 $\alpha \in X_{NC}$ ,则由定理2.1, $\alpha$ 满足

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T],$$
 (16)

● (16)对t求导数直至n-1次,可得

$$\alpha^T e^{-At} AB = 0, t \in [0, T],$$
.....

$$\alpha^T e^{-At} A^{n-1} B = 0, t \in [0, T].$$

•  $\diamondsuit t = 0$ ,  $\clubsuit$ 

$$\alpha^T B = 0, \alpha^T A B = 0, \cdots, \alpha^T A^{n-1} B = 0,$$



## 第2章

2.1 能控性定 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

2.2 能捻性判:

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 证明 首先,设 $\alpha \in X_{NC}$ ,则由定理2.1, $\alpha$ 满足

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T], \tag{16}$$

(16)对t求导数直至n-1次,可得

$$\alpha^T e^{-At} AB = 0, t \in [0, T],$$

$$\dots$$

$$\alpha^T e^{-At} A^{n-1} B = 0, t \in [0, T].$$

•  $\Leftrightarrow t = 0$ ,  $\neq$ 

$$\alpha^T B = 0, \alpha^T A B = 0, \cdots, \alpha^T A^{n-1} B = 0,$$

• 即,等价地有

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0 \tag{17}$$

这说明α是(15)的解



### 第2章

2.1 能控性定:

2.1.1 问题的提出2.1.2 能控性定义2.1.3 能控子空间与

2.2 能控性判扎

2.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 反之, 若 $\alpha$ 是(15)的解, 则有

$$\alpha^T A^j B = 0, j = 0, 1, \dots, n - 1.$$
 (18)



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义

2.2 能控性判

23 能捻性分

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 反之, 若 $\alpha$ 是(15)的解, 则有

$$\alpha^T A^j B = 0, j = 0, 1, \dots, n - 1.$$
 (18)

• 又, 据凯莱-哈密顿定理知,  $A^i$ ,  $\forall i \geq n$ 可表示为I, A,  $\cdots$ ,  $A^{n-1}$  的线性组合, 故有

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \alpha_j(t),$$
 (19)



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

能控子空间 つつ みわかしむ

22 44 45 44 17 46

2.3 能控性分別

2.4 單輸入— 輸出系統的能 控规范型 反之,若 $\alpha$ 是(15)的解,则有

$$\alpha^T A^j B = 0, j = 0, 1, \dots, n - 1.$$
 (18)

• 又, 据凯莱-哈密顿定理知,  $A^i$ ,  $\forall i \geq n$ 可表示为I, A,  $\cdots$ ,  $A^{n-1}$  的线性组合, 故有

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \alpha_j(t),$$
 (19)

从而

$$e^{-At} = e^{A(-t)} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \alpha_j(-t) = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \beta_j(t),$$
 (20)

其中, $\alpha_i(t)$ , $\beta_i(t)$  是t的标量函数



第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子室间与不

2.2 能控性判

2.4 单输入—单 输出系统的能 反之, 若 $\alpha$ 是(15)的解, 则有

$$\alpha^T A^j B = 0, j = 0, 1, \dots, n-1.$$
 (18)

● 又, 据凯菜-哈密顿定理知,  $A^i$ ,  $\forall i \geq n$ 可表示为I, A,  $\cdots$ ,  $A^{n-1}$  的线性组合, 故有

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{n-1} A^j \alpha_j(t),$$
 (19)

从而

$$e^{-At} = e^{A(-t)} = \sum_{i=0}^{n-1} A^{i} \alpha_{j}(-t) = \sum_{i=0}^{n-1} A^{i} \beta_{j}(t),$$
 (20)

其中,  $\alpha_i(t)$ ,  $\beta_i(t)$  是t的标量函数

• 于是由(20), 可得

$$\alpha^{T} e^{-At} B = \alpha^{T} \sum_{j=0}^{n-1} A^{j} \beta_{j}(t) B = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^{T} A^{j} B \beta_{j}(t) = 0.$$
 (21)



## 第2章

2.1 能控性定 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

2.1.3 能控子空间。 能控子空间

2.2 //3/2/2/7/

2.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 综合上面的证明, 可知式(8)(即,  $\alpha^T e^{-At}B = 0$ )的常解空间即是式(15)(即,  $\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$ ) 的解空间



## 第2章

2.1 能控性定2 2.1.1 问题的提出

2.1.2 能控于空间与 能控于空间

2.2 能控性判

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型

- 综合上面的证明, 可知式(8)(即,  $\alpha^T e^{-At} B = 0$ )的常解空间即是式(15)(即,  $\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$ )的解空间
- 故由定理2.1, X<sub>NC</sub>是(15)的解空间. 定理得证



## 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

| 総控予空间 | コール・レンロールロ

2.2 月じりエリエナリカ

2.3 能控性分削

2.4 平输入— 输出系统的能 控规范型

- 综合上面的证明, 可知式(8)(即,  $\alpha^T e^{-At} B = 0$ )的常解空间即是式(15)(即,  $\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$ )的解空间
- 故由定理2.1, X<sub>NC</sub>是(15)的解空间. 定理得证

基于定理2.1, 我们还可进一步得如下定理2.3



### 第2章

- 综合上面的证明, 可知式(8)(即,  $\alpha^T e^{-At} B = 0$ )的常解空间即是式(15)(即,  $\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$ )的解空间
- 故由定理2.1, X<sub>NC</sub>是(15)的解空间. 定理得证

基于定理2.1, 我们还可进一步得如下定理2.3

定理

定理2.3 系统(1)的不能控子空间 $X_{NC}$ 为

$$\alpha^T W_C[0, T] = 0 (22)$$

的解空间. 式中

$$W_C[0,T] = \int_0^T e^{-At} B(e^{-At}B)^T dt$$
 (23)

称为能控格拉姆(Gram)矩阵.



# 第2章

### 定理2.3的结论等价于

- ① 若 $\alpha \in X_{NC}$ , 则 $\alpha$ 使得式(22)成立
- ② 若 $\alpha$ 使得式(22)成立,则 $\alpha \in X_{NC}$
- ⇒ 为此, 考虑定理2.1可知, 若 $\alpha \in X_{NC}$ , 则 $\alpha$ 满足式(8), 即  $\alpha^{T} e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$



## 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判:

2.3 能控性分向

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型

## 定理2.3的结论等价于

- ② 若 $\alpha$ 使得式(22)成立,则 $\alpha \in X_{NC}$
- 为此, 考虑定理2.1可知, 若 $\alpha \in X_{NC}$ , 则 $\alpha$ 满足式(8), 即  $\alpha^T e^{-At} B = 0$ ,  $t \in [0, T]$

证明 首先,设 $\alpha \in X_{NC}$ 



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不 能控子空间

2.2 能控性判

2.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型

## 定理2.3的结论等价于

- ② 若 $\alpha$ 使得式(22)成立,则 $\alpha \in X_{NC}$
- ⇒ 为此, 考虑定理2.1可知, 若 $\alpha \in X_{NC}$ , 则 $\alpha$ 满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$

证明 首先,设 $\alpha \in X_{NC}$ 

• 则由定理2.1,可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T].$$



### 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控于空间与不

2.2 能控性判

2.3 能控性分

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型

## 定理2.3的结论等价于

- ② 若 $\alpha$ 使得式(22)成立,则 $\alpha \in X_{NC}$
- → 为此, 考虑定理2.1可知, 若 $\alpha \in X_{NC}$ , 则 $\alpha$ 满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$

证明 首先,设 $\alpha \in X_{NC}$ 

• 则由定理2.1,可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T].$$

➡ 进而,有

$$\alpha^{T} e^{-At} B(e^{-At} B)^{T} = 0, t \in [0, T].$$
 (24)



### 第2章

1.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判

2.3 能控性分

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型

## 定理2.3的结论等价于

- ② 若 $\alpha$ 使得式(22)成立,则 $\alpha \in X_{NC}$
- ⇒ 为此, 考虑定理2.1可知,  $\dot{\pi}_{\alpha} \in X_{NC}$ , 则 $\alpha$ 满足式(8), 即

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, \ t \in [0, T]$$

证明 首先,设 $\alpha \in X_{NC}$ 

• 则由定理2.1,可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T].$$

➡ 进而,有

$$\alpha^T e^{-At} B(e^{-At} B)^T = 0, t \in [0, T].$$
 (24)

● 从0到T积分,有

$$\int_{0}^{T} \alpha^{T} e^{-At} B(e^{-At} B)^{T} dt = 0, \tag{25}$$



## 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判:

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 式(25)即为

$$\alpha^{T} \int_{0}^{T} e^{-At} B(e^{-At} B)^{T} dt = \alpha^{T} W_{C}[0, T] = 0,$$
 (26)

这说明 $\alpha$ 是(22)的解



## 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判:

2.3 能控性分

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 式(25)即为

$$\alpha^{T} \int_{0}^{T} e^{-At} B(e^{-At} B)^{T} dt = \alpha^{T} W_{C}[0, T] = 0,$$
 (26)

这说明 $\alpha$ 是(22)的解

反之, 若 $\alpha$ 是(22)的解, 即有(26)成立, 右乘 $\alpha$ 可得

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} B(e^{-At} B)^T dt \alpha = 0, \tag{27}$$



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判

2.3 能控性分離

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 式(25)即为

$$\alpha^{T} \int_{0}^{T} e^{-At} B(e^{-At} B)^{T} dt = \alpha^{T} W_{C}[0, T] = 0,$$
 (26)

这说明 $\alpha$ 是(22)的解

反之, 若 $\alpha$ 是(22)的解, 即有(26)成立, 右乘 $\alpha$ 可得

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} B(e^{-At} B)^T dt \alpha = 0, \tag{27}$$

• 即为

$$\int_0^T \|(\alpha^T e^{-At} B)^T\|^2 dt = 0.$$
 (28)



## 第2章

2.1 能控性定义
2.1.1 问题的提出
2.1.2 能控性定义
2.1.3 能控子空间与不

2.2 肥松生州

2.3 能控性分離

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 式(25)即为

$$\alpha^{T} \int_{0}^{T} e^{-At} B(e^{-At} B)^{T} dt = \alpha^{T} W_{C}[0, T] = 0,$$
 (26)

这说明 $\alpha$ 是(22)的解

反之, 若 $\alpha$ 是(22)的解, 即有(26)成立, 右乘 $\alpha$ 可得

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} B(e^{-At} B)^T dt \alpha = 0, \tag{27}$$

• 即为

$$\int_0^T ||(\alpha^T e^{-At} B)^T||^2 dt = 0.$$
 (28)

• 从而可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T]. \tag{29}$$

由定理2.1,  $\alpha \in X_{NC}$ 



## 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能校子空间 5.5

2.2 能控性判

2.3 能控性分)

2.4 千硼八 輸出系统的能 控规范型 • 式(25)即为

$$\alpha^{T} \int_{0}^{T} e^{-At} B(e^{-At} B)^{T} dt = \alpha^{T} W_{C}[0, T] = 0,$$
 (26)

这说明 $\alpha$ 是(22)的解

反之, 若 $\alpha$ 是(22)的解, 即有(26)成立, 右乘 $\alpha$ 可得

$$\alpha^T \int_0^T e^{-At} B(e^{-At} B)^T dt \alpha = 0,$$

• 即为

$$\int_{0}^{T} \|(\alpha^{T} e^{-At} B)^{T}\|^{2} dt = 0.$$
 (28)

• 从而可得

$$\alpha^T e^{-At} B = 0, t \in [0, T]. \tag{29}$$

由定理2.1,  $\alpha \in X_{NC}$ 

⇒ 综上, 从而知X<sub>NC</sub>是(22)的解空间. 结论得证

(27)



第2章

.1 能控性定义 1.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不 能控子空间

2.3 能控性分解
 2.4 单输入—单输出系统的能量

基于定理2.2, 我们可进一步得如下定理2.4

定理

**定理2.4** 系统(1)的能控子空间 $X_C$ 是 $B,AB,\cdots,A^{n-1}B$ 的各列生成的线性子空间、即

$$X_C = span \left[ B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \right]. \tag{30}$$

返回(75)



第2章

.1 能控性定义
.1.1 问题的提出
.1.2 能控性定义
.1.3 能控子空间与不

 2.3 能控性分解
 2.4 单输入—单输出系统的能 控规范型 基于定理2.2, 我们可进一步得如下定理2.4

定理

**定理2.4** 系统(1)的能控子空间 $X_C$ 是 $B,AB,\cdots,A^{n-1}B$ 的各列生成的线性子空间、即

$$X_C = span \left[ B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \right]. \tag{30}$$

返回(75)

证明 若 $\alpha \in X_{NC}$ ,则由定理2.2可得

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0,$$



第2章

.1 能控性定义 .1.1 问题的提出 .1.2 能控性定义 .1.3 能控子空间与不

 2.3 能控性分解
 2.4 单输入—单 输出系统的能 基于定理2.2, 我们可进一步得如下定理2.4

定理

**定理2.4** 系统(1)的能控子空间 $X_C$ 是 $B,AB,\cdots,A^{n-1}B$ 的各列生成的线性子空间,即

$$X_C = span \left[ B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \right]. \tag{30}$$

返回(75)

证明 若 $\alpha \in X_{NC}$ ,则由定理2.2可得

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0,$$

• 故有,  $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ 各列与 $X_{NC}$ 中任一元正交, 从而可得

$$span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \subseteq X_C.$$
 (31)



## 第2章

2.1 能控性定 2.1.1 问题的提出

2.1.3 能控子空间与 能按子空间

能控子空间

oo Ak lesti A &

2.4 单输入—总

• 再利用定理2.2, 即 $X_{NC}$ 为 $\alpha^{T}$   $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$ 的解空间,并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系,可得

$$\dim X_{NC} + rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$



### 第2章

2.1. 能控性定3 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

能控子空间

2.2 能控性判

2.3 能控性分離

2.4 平输入—— 输出系统的能 控规范型 • 再利用定理2.2, 即 $X_{NC}$ 为 $\alpha^T$  [B AB ···  $A^{n-1}B$ ] = 0的解空间, 并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$\dim X_{NC} + rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

从而有

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n - \dim X_{NC}$$
 (32)



## 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判:

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 再利用定理2.2, 即 $X_{NC}$ 为 $\alpha^T$  [B AB ··· A<sup>n-1</sup>B] = 0的解空间, 并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$\dim X_{NC} + rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

从而有

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n - \dim X_{NC}$$
 (32)

• 又由 $\mathbb{R}^n = X_{NC} \oplus X_C$ 可得

$$\dim X_{NC} + \dim X_C = n. \tag{33}$$



#### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子室间与不

2.2 能控性判据
 2.3 能控性分解

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

• 再利用定理2.2, 即 $X_{NC}$ 为 $\alpha^{T}$   $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$ 的解空间,并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$\dim X_{NC} + rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

从而有

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n - \dim X_{NC}$$
 (32)

• 又由 $\mathbb{R}^n = X_{NC} \oplus X_C$ 可得

$$\dim X_{NC} + \dim X_C = n. \tag{33}$$

➡ 结合(32)和(33)可推得

$$\dim X_C = rank \left[ B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B \right] \tag{34}$$



### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与不

2.2 能控性判据2.3 能控性分解

输出系统的能 控规范型 • 再利用定理2.2, 即 $X_{NC}$ 为 $\alpha^T$   $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$ 的解空间,并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$\dim X_{NC} + rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$$

从而有

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n - \dim X_{NC}$$
 (32)

• 又由 $\mathbb{R}^n = X_{NC} \oplus X_C$ 可得

$$\dim X_{NC} + \dim X_C = n. \tag{33}$$

➡ 结合(32)和(33)可推得

$$\dim X_C = rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
 (34)

• 又因为

$$\dim span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
(35)



### 第2章

2.1 能控性定 2.1.1 问题的提出

2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间与 能控子空间

2.2 NO 93 (3-7 ) 14

2.3 能控性分角

2.4 单输入——输出系统的能控规范型

结合(34)和(35), 容易推得  $\dim X_C = \dim span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ 



#### 第2章

2.1 能控性定义 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

a a Ak la u a

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 ➡ 结合(34)和(35), 容易推得

$$\dim X_C = \dim span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

• 从而,由上式和(31)即知定理结论成立



第2章

➡ 结合(34)和(35), 容易推得

$$\dim X_C = \dim span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

• 从而,由上式和(31)即知定理结论成立

类似于定理2.4,结合定理2.3,即可得如下结论

定理

定理2.5 系统(1)的能控子空间 $X_C$ 满足

$$X_C = spanW_C[0, T], (36)$$

其中,  $W_C[0,T]$ 为能控Gram阵.



第2章

➡ 结合(34)和(35), 容易推得

$$\dim X_C = \dim span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

• 从而,由上式和(31)即知定理结论成立

类似于定理2.4,结合定理2.3,即可得如下结论

定理

定理2.5 系统(1)的能控子空间 $X_C$ 满足

$$X_C = spanW_C[0, T], (36)$$

其中,  $W_C[0,T]$ 为能控Gram阵.

注:由定理2.2和2.4可知,系统(1)的能控子空间 $X_C$ 与不能控子空间 $X_{NC}$ 只与系统的结构参数A,B有关而与控制区间[0,T]的长度无关,与初始时刻 $t_0$ 也无关



### 第2章

2.1 能控性定 2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义

能控子空间 の 2 44 45 bl を136

2.2 能控性判1

2.3 能控性分解2.4 单输入—单

2.4 一棚八一 输出系统的能 控规范型 由定理2.2和2.4,还可以得到如下结论

推论

**推论2.1** 不能控子空间 $X_{NC}$ 是 $A^{T}$ 的不变子空间, 能控子空间 $X_{C}$ 是A的不变子空间.



### 第2章

2.1.1 问题的提出 2.1.2 能控性定义 2.1.3 能控子空间。

2.2 能控性判却

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 由定理2.2和2.4, 还可以得到如下结论

推论

推论2.1 不能控子空间 $X_{NC}$ 是 $A^{T}$ 的不变子空间, 能控子空间 $X_{C}$ 是A的不变子空间.

证明 分别结合定理2.2和2.4的结论以及凯莱-哈密尔顿定理, 易得. 自证



### 第2章

2.1 能控性定义

#### 2.2 能控性判

2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型

- (1) 2.1 能控性定3
  - 2.1.1 问题的提出
  - 2.1.2 能控性定义
  - 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- 2 2.2 能控性判据
  - ◉ 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- (3) 2.3 #
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- (4) 2.4 P in A P in H f, is in it is W it II.



#### 第2章

2.1 能控性定义
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入—— 输出系统的能 控规范型

- ① 2.1 能接性定
  - 2.1.1 问题的提出
  - 2.1.2 能控性定义
  - 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- 2 2.2 能控性判据
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- 3 2
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- (4) 2.4 学输入一学输出系统的能控规范型



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据

73 能捻性分質

2.4 单输入——输出系统的能 控规范型 • 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$
 (37)

返回(67)

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,A,B分别为 $n \times n$ , $n \times p$ 实常阵



#### 第2章

• 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$
 (37)

返回(67)

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,A,B分别为 $n \times n$ , $n \times p$ 实常阵

首先,根据定理2.5判别系统(37)能控性的如下判据

定理

**定理2.6**(Gram矩阵判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是,能控Gram矩阵 $W_C[0,T]$ 非奇异.

#### 第2章

• 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$
 (37)

返回(67)

其中,x为n维状态向量,u为p维输入向量,A,B分别为 $n \times n$ , $n \times p$ 实常阵

首先,根据定理2.5判别系统(37)能控性的如下判据

定理

定理2.6(Gram矩阵判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是, 能控Gram矩阵 $W_C[0,T]$ 非奇异.

证明 充分性: 若 $W_C[0,T]$ 非奇异



#### 第2章

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性损数 2.3 能控性分解

2.3 能控性分解 2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$
 (37)

返回(67)

其中,x为n维状态向量,u 为p 维输入向量,A,B分别为 $n \times n$ , $n \times p$ 实常阵

首先,根据定理2.5判别系统(37)能控性的如下判据

定理

定理2.6(Gram矩阵判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是, 能控Gram矩阵 $W_C[0,T]$ 非奇异.

$$\dim X_C = \dim spanW_C[0, T] = n, \tag{38}$$

此表明能控子空间 $X_C = \mathbb{R}^n$ ,故系统(37)完全能控



### 第2章

2.1 能控性定:

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

23能按性分

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

• 必要性: 若系统(37)完全能控, 即有则 $X_C = \mathbb{R}^n$ 



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 必要性: 若系统(37)完全能控, 即有则 $X_C = \mathbb{R}^n$ . 同样由定理2.5知(38)成立. 从而 $W_C[0,T]$ 非奇异, 定理得证



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分向

2.4 单输入——输出系统的能控规范型

• 必要性: 若系统(37)完全能控, 即有则 $X_C = \mathbb{R}^n$ . 同样由定理2.5知(38)成立. 从而 $W_C[0,T]$ 非奇异, 定理得证

$$u(t) = -B^{T} e^{-A^{T} t} W_{C}^{-1}[0, T] x_{0}, \ t \in [0, T],$$
(39)



#### 第2章

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性系数

2.4 十辆八一寸 输出系统的能 控规范型

- 必要性: 若系统(37)完全能控, 即有则 $X_C = \mathbb{R}^n$ . 同样由定理2.5知(38)成立. 从而 $W_C[0, T]$ 非奇异, 定理得证
- 注: 事实上, 若 $W_C[0,T]$ 非奇异, 则 $W_C^{-1}[0,T]$ 存在, 于是对任意非零初始状态 $x_0$ , 可构造u(t)为

$$u(t) = -B^{T} e^{-A^{T} t} W_{C}^{-1}[0, T] x_{0}, \ t \in [0, T],$$
(39)

• 在u(t)作用下,系统状态x(t)在时刻T的值为

$$x(T) = e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-t)}Bu(t)dt$$

$$= e^{AT}x_0 + e^{AT} \int_0^T e^{-At}B(-B^T e^{-A^T t}W_C^{-1}[0, T]x_0)dt$$

$$= e^{AT}x_0 - e^{AT} \int_0^T e^{-At}B(B^T e^{-A^T t})dtW_C^{-1}[0, T]x_0$$

$$= e^{AT}x_0 - e^{AT}W_C[0, T]W_C^{-1}[0, T]x_0 = \mathbf{0}$$
(40)

• 即, 把任意能控状态转移到零的控制可构造!



### 第2章

2.1 能控性定义 2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 定理

定理2.7(秩判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件为

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n, \tag{41}$$

其中,  $Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$  称为系统的能控性矩阵

### 第2章

2.1 能控性足叉
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 定理

定理2.7 (秩判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件为

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n, \tag{41}$$

其中,  $Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$  称为系统的能控性矩阵

证明 充分性: 若(41)成立,则由定理2.4, $X_C = spanQ_C$ 知,

$$\dim X_C = \dim spanQ_C = n, \tag{42}$$

故 $X_C = \mathbb{R}^n$ , 从而系统(37)完全能控

第2章

定理 定理2.7(秩判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条

件为

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n, \tag{41}$$

其中,  $Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$  称为系统的能控性矩阵

证明 充分性: 若(41)成立,则由定理2.4, $X_C = spanQ_C$ 知,

$$\dim X_C = \dim spanQ_C = n, \tag{42}$$

故 $X_C = \mathbb{R}^n$ , 从而系统(37)完全能控

● 必要性: 若系统(37)完全能控,则 $X_C = \mathbb{R}^n$ . 由定理2.4知, (42)成立, 此即 $rankQ_C = n$ . 定理结论得证

第2章

定理

**定理2.7**(秩判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件为

$$rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n, \tag{41}$$

其中,  $Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$  称为系统的能控性矩阵

证明 充分性: 若(41)成立,则由定理2.4, $X_C = spanQ_C$ 知,

$$\dim X_C = \dim spanQ_C = n, \tag{42}$$

故 $X_C = \mathbb{R}^n$ , 从而系统(37)完全能控

• 必要性: 若系统(37)完全能控,则 $X_C = \mathbb{R}^n$ . 由定理2.4知, (42)成立,此即 $rankQ_C = n$ . 定理结论得证

注:比较Gram矩阵判据和秩判据,容易看出秩判据用来判别系统的 能控性是较为方便的,而Gram矩阵中因为有e<sup>At</sup>,计算较为麻烦, 故此判据主要用于理论分析



### 第2章

2.1 能控性定:

2.2 能探性判据
2.2.1 能控性判据
2.2.2 能控性指数

3 能控性分離

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 **例2.2.1** 再次考虑例2.1.1



### 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型

#### 例2.2.1 再次考虑例2.1.1

• 若系统状态方程为

(a) 
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
,

#### 第2章

2.1 能控性定义
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型

#### 例2.2.1 再次考虑例2.1.1

• 若系统状态方程为

(a) 
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u$$
,

➡ 注意到n = 2, 通过计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}, \Rightarrow rank Q_C = 2 = n$$

因此, 系统为完全能控的

### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型

#### 例2.2.1 再次考虑例2.1.1

• 若系统状态方程为

$$\mathbf{(a)} \ \dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u,$$

⇒ 注意到n = 2, 通过计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}, \Rightarrow rank Q_C = 2 = n$$

因此, 系统为完全能控的

• 若系统状态方程为

**(b)** 
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u,$$

#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分離

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 ▶ 类似于情形(a), 计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$
,  $rankQ_C = 1 < n = 2$ ,

因此,系统为不完全能控的

#### 第2章

2.1 能控性关键
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 ➡ 类似于情形(a), 计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$
,  $rankQ_C = 1 < n = 2$ ,

因此, 系统为不完全能控的

例2.2.2 给定线性系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

#### 第2章

2.1 能控性定义
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2.2.6.控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 ➡ 类似于情形(a), 计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$
,  $rankQ_C = 1 < n = 2$ ,

因此,系统为不完全能控的

例2.2.2 给定线性系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

⇒ 注意到n = 3, 通过计算得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & -12 \end{bmatrix},$$

#### 第2章

.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性判据

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 ▶ 类似于情形(a), 计算可得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -10 \end{bmatrix}$$
,  $rankQ_C = 1 < n = 2$ ,

因此,系统为不完全能控的

例2.2.2 给定线性系统的状态方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

⇒ 注意到n=3, 通过计算得

$$Q_C = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & -12 \end{bmatrix},$$

• 可判断知 $\det Q_c \neq 0$ , 故 $rankQ_c = 3 = n$ , 系统完全能控



第2章

2.1 能控性定义

2.2 配が2/至手りが
2.2.1 能控性判据
2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 下面介绍PBH判据,包括"PBH秩判据"和"PBH特征向量判据"

• 以波波夫(Popov), 贝尔维奇(Belevitch)和豪塔斯(Hautus)姓氏首字母组合命名

第2章

下面介绍PBH判据,包括"PBH秩判据"和"PBH特征向量判据"

● 以波波夫(Popov), 贝尔维奇(Belevitch)和豪塔斯(Hautus)姓氏首字母组合命名

#### 定理

定理2.8(PBH秩判据)线性定常系统(37)为完全能控的充要条件为

$$rank [sI - A \quad B] = n, \forall s \in \mathbb{C}$$
 (43)

或等价地, 对矩阵A的所有特征值 $\lambda_i$ ( $i=1,2,\cdots,n$ ), 成立

$$rank \begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \end{bmatrix} = n, \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{44}$$

第2章

下面介绍PBH判据,包括"PBH秩判据"和"PBH特征向量判据"

以波波夫(Popov), 贝尔维奇(Belevitch)和豪塔斯(Hautus)姓氏首字母组合命名

### 定理

定理2.8(PBH秩判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充要条件为

$$rank [sI - A \quad B] = n, \forall s \in \mathbb{C}$$
 (43)

或等价地, 对矩阵A的所有特征值 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ , 成立

$$rank \begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \end{bmatrix} = n, \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{44}$$

• 对判别条件(43)和(44)的等价性



第2章

# 2.2.1 能控性判据

下面介绍PBH判据,包括"PBH秩判据"和"PBH特征向量判据"

● 以波波夫(Popov), 贝尔维奇(Belevitch)和豪塔斯(Hautus)姓氏首 字母组合命名

#### 定理

定理2.8(PBH秩判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充要条件为

$$rank \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}$$
 (43)

或等价地, 对矩阵A的所有特征值 $\lambda_i$ ( $i=1,2,\cdots,n$ ), 成立

$$rank \begin{bmatrix} \lambda_i I - A & B \end{bmatrix} = n, \ i = 1, 2, \cdots, n. \tag{44}$$

- 对判别条件(43)和(44)的等价性
  - sI A非奇异当且仅当 $s \neq \lambda_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
  - 上述等价结论可由A的若尔当规范形直接可见, 即 $A = P^{-1}JP$



### 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

1.3 能控性分離

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 证明 必要性: 若系统(37)完全能控,证(43)成立



### 第2章

2.1 能控性定 > 2.2 能控性判 i

2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 证明 必要性: 若系统(37)完全能控,证(43)成立

• **反证法.** 假设(43)不成立, 即存在复数 $s_0$ , 使[ $s_0I - A B$ ]行降秩, 则必存在一个非零常向量 $\alpha$ , 使成立

$$\alpha^T \begin{bmatrix} s_0 I - A & B \end{bmatrix} = 0, \tag{45}$$



### 第2章

- 2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数
- 2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

证明 必要性: 若系统(37)完全能控,证(43)成立

• **反证法.** 假设(43)不成立, 即存在复数 $s_0$ , 使 $[s_0I - A \ B]$ 行降秩, 则必存在一个非零常向量 $\alpha$ , 使成立

$$\alpha^T \begin{bmatrix} s_0 I - A & B \end{bmatrix} = 0, \tag{45}$$

• 故可导出

$$s_0 \alpha^T = \alpha^T A, \ \alpha^T B = 0. \tag{46}$$

### 第2章

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 证明 必要性: 若系统(37)完全能控,证(43)成立

• **反证法.** 假设(43)不成立, 即存在复数 $s_0$ , 使 $[s_0I - A \ B]$ 行降秩, 则必存在一个非零常向量 $\alpha$ , 使成立

$$\alpha^T \begin{bmatrix} s_0 I - A & B \end{bmatrix} = 0, \tag{45}$$

• 故可导出

$$s_0 \alpha^T = \alpha^T A, \ \alpha^T B = 0. \tag{46}$$

• 进而由上式可导出

$$\alpha^T A B = s_0 \alpha^T B = 0, \ \alpha^T A^2 B = s_0 \alpha^T A B = 0, \ \cdots, \ \alpha^T A^{n-1} B = 0.$$
 (47)



第2章

证明 必要性: 若系统(37)完全能控,证(43)成立

• **反证法.** 假设(43)不成立, 即存在复数 $s_0$ , 使  $s_0I - A$  B 行降秩, 则必存在一个非零常向量 $\alpha$ , 使成立

$$\alpha^T \begin{bmatrix} s_0 I - A & B \end{bmatrix} = 0, \tag{45}$$

• 故可导出

$$s_0 \alpha^T = \alpha^T A, \ \alpha^T B = 0. \tag{46}$$

• 进而由上式可导出

$$\alpha^{T}AB = s_{0}\alpha^{T}B = 0, \ \alpha^{T}A^{2}B = s_{0}\alpha^{T}AB = 0, \ \cdots, \ \alpha^{T}A^{n-1}B = 0.$$
 (47)

• 由(46), (47)可得

$$\alpha^T \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0. \tag{48}$$

这表明 $\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$ 行降秩,此与(A,B)能控矛盾,故反证法假设不成立,从而有(43)成立



### 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

.3 能控性分削

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

• 充分性: 若(43)成立, 欲证(A,B)能控



### 第2章

- 充分性: 若(43)成立, 欲证(A, B)能控
- 反证法. 假设(A,B)为不完全能控,则对系统(37)作非奇异线性 变换

$$x = T\hat{x}, \ T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix},$$

其中,

- $T_1$ 的各列属于 $X_C$ , 并构成 $X_C$ 的基底
- To为使T非奇异的任意阵

### 第2章

.1 配控性天义
.2 能控性判据
2.2.1 能控性判据
2.2.2 能控性判据

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- 充分性: 若(43)成立, 欲证(A, B)能控
- **反证法.** 假设(A, B)为不完全能控,则对系统(37)作非奇异线性 变换

$$x = T\hat{x}, \ T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix},$$

其中,

- $T_1$ 的各列属于 $X_C$ ,并构成 $X_C$ 的基底
- T2为使T非奇异的任意阵
- 令

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix}$$

则由 $T^{-1}T=I$ ,可得 $F_2^TT_1=0$ ,这说明 $F_2$ 各列属于 $X_{NC}$ 



### 第2章

2.1 能控性定义
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

2.4 单输入—单 输出系统的能

- 充分性: 若(43)成立, 欲证(A,B)能控
- **反证法.** 假设(A, B)为不完全能控,则对系统(37)作非奇异线性 变换

$$x = T\hat{x}, \ T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix},$$

其中,

- $T_1$ 的各列属于 $X_C$ ,并构成 $X_C$ 的基底
- T2为使T非奇异的任意阵
- 令

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix}$$

则由 $T^{-1}T = I$ , 可得 $F_2^T T_1 = 0$ , 这说明 $F_2$ 各列属于 $X_{NC}$ 

● 再由Xc是A的不变子空间,即可推得

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
 (49)

### 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

23 能按性分值

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 从而,有

$$rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI - A_{22} & 0 \end{bmatrix}.$$



● 从而.有

### 第2章

 $rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI - A_{22} & 0 \end{bmatrix}.$ 

• 可知, 当s取 $A_{22}$ 的特征根时, 矩阵 $[sI - \hat{A} \quad \hat{B}]$ 降秩, 即

$$rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} < n, \quad \Re \uparrow \ s = \lambda_i(A_{22}) \tag{50}$$



### 第2章

2.1 能控性定义
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 平输入—— 输出系统的能 控规范型 • 从而,有

$$rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI - A_{22} & 0 \end{bmatrix}.$$

• 可知, 当s取 $A_{22}$ 的特征根时, 矩阵 $\begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}$ 降秩, 即

$$rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} < n, \quad \Re \quad s = \lambda_i(A_{22}) \tag{50}$$

• 此外, 由式(43), 并结合线性非奇异变换性质, 可得

$$rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - T^{-1}AT & T^{-1}B \end{bmatrix}$$

$$= rankT^{-1} \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = n, \ \forall s \in \mathbb{C}.$$
(51)

此与(50)矛盾. 故反证法假设不成立, 即(A,B)为能控. 定理结论得证



第2章

基于定理2.8的PBH秩判据,由反证法,可得如下PBH特征向量判据

### 定理

定理2.9(PBH特征向量判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是,A的非零左特征向量不能与B的所有列正交.即对A的任一特征值 $\lambda_i$ ,同时满足

$$\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T, \ \alpha^T B = 0 \tag{52}$$

的特征向量 $\alpha \equiv 0$ .



第2章

基于定理2.8的PBH秩判据,由反证法,可得如下PBH特征向量判据

### 定理

定理2.9(PBH特征向量判据) 线性定常系统(37)为完全能控的充分必要条件是,A的非零左特征向量不能与B的所有列正交.即对A的任一特征值 $\lambda_i$ ,同时满足

$$\alpha^T A = \lambda_i \alpha^T, \ \alpha^T B = 0 \tag{52}$$

的特征向量 $\alpha \equiv 0$ .

- ➡ 下面, 我们考察(A, B)为若尔当(Jordan)规范型时的能控性判据
- 当A不是若尔当型, 引进非奇异变换 $x = T\hat{x}$ , T为 $n \times n$ 非奇异矩阵, 使得

$$\hat{A} = T^{-1}AT, \ \hat{B} = T^{-1}B,$$
 (53)

### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单 输出系统的能 挖规范型 其中,

$$\hat{A}_{n\times n} = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{n\times p} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{bmatrix}, \tag{54}$$

$$J_{i} = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & & \\ & J_{i2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & J_{i\alpha_{i}} \end{bmatrix}, \quad B_{i} = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{i\alpha_{i}}, \end{bmatrix}$$
(55)

$$J_{ik} = \begin{bmatrix} \lambda_{i} & 1 & & & \\ & \lambda_{i} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{ik} = \begin{bmatrix} B_{1ik} \\ B_{2ik} \\ \vdots \\ B_{rik} \end{bmatrix}, \quad (56)$$



第2章

其中,

$$\hat{A}_{n\times n} = \begin{vmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{vmatrix}, \quad \hat{B}_{n\times p} = \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_l \end{vmatrix},$$

$$J_{i} = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i\alpha_{i}} \end{bmatrix}, \quad B_{i} = \begin{bmatrix} B_{i1} \\ B_{i2} \\ \vdots \\ B_{i\alpha_{i}}, \end{bmatrix}$$
(55)

且,  $\lambda_i$  互异( $\forall i = 1, \dots, l$ ),  $\sigma_i$  为特征值 $\lambda_i$  的代数重数, 并有n = 1 $\sum_{i=1}^{l} \sigma_i$ 

$$r_{i1} + r_{i2} + \cdots + r_{i\alpha_i} = \sigma_i, \quad i = 1, 2, \cdots, l.$$



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 22.2 能控性判据

2.3 能控性分離

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 • 由(51)知,非奇异线性变换不改变 $[sI-A \ B]$ 的秩,故有

$$rank \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix},$$
 (57)

因此,考察(A,B)的能控性,可直接去考察 $(\hat{A},\hat{B})$ 的能控性

### 第2章

2.1 能控性定义
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据

...3 能控性分解

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 由(51)知, 非奇异线性变换不改变[sI-A B]的秩, 故有

$$rank \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix},$$
 (57)

因此,考察(A,B)的能控性,可直接去考察 $(\hat{A},\hat{B})$ 的能控性

● 注意:

$$rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} sI - J_1 & & & B_1 \\ & sI - J_2 & & B_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & sI - J_l & B_l \end{bmatrix}, (58)$$

### 第2章

2.1 能控性定义
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 ● 由(51)知, 非奇异线性变换不改变[sI-A B] 的秩, 故有

$$rank \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}, \tag{57}$$

因此,考察(A,B)的能控性,可直接去考察 $(\hat{A},\hat{B})$ 的能控性

● 注意:

$$rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} sI - J_1 & & & B_1 \\ & sI - J_2 & & B_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & sI - J_l & B_l \end{bmatrix}, (58)$$

• 又由定理2.8, 我们只要根据(58)考察 $rank \left[ \lambda_i I - \hat{A} \quad \hat{B} \right]$ 对所有 $i = 1, 2, \dots, I$ 的满秩性即可



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单输出系统的能 控规范型 • 首先, 对上式(58)考虑 $\lambda_1$ , 并注意到 $\lambda_1 \neq \lambda_i (i \neq 1)$ , 可得

$$rank \begin{bmatrix} \lambda_{1}I - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \lambda_{1}I - J_{1} & & & B_{1} \\ & \lambda_{1}I - J_{2} & & B_{2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{1}I - J_{l} & B_{l} \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \lambda_{1}I - J_{1} & & & B_{1} \\ & & \lambda_{1}I - J_{2} & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{1}I - J_{l} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \lambda_{1}I - J_{1} & B_{1} \end{bmatrix} + \sigma_{2} + \cdots + \sigma_{l}.$$
(59)

### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 首先, 对上式(58)考虑 $\lambda_1$ , 并注意到 $\lambda_1 \neq \lambda_i (i \neq 1)$ , 可得

$$rank \begin{bmatrix} \lambda_{1}I - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \lambda_{1}I - J_{1} & & & B_{1} \\ & \lambda_{1}I - J_{2} & & B_{2} \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_{1}I - J_{1} & B_{1} \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \lambda_{1}I - J_{1} & & & B_{1} \\ & & \lambda_{1}I - J_{2} & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \lambda_{1}I - J_{1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= rank \begin{bmatrix} \lambda_{1}I - J_{1} & B_{1} \end{bmatrix} + \sigma_{2} + \cdots + \sigma_{l}.$$

$$(59)$$

• 从而由 $n = \sum_{i=1}^{l} \sigma_i$ , 可知

$$rank \begin{bmatrix} \lambda_1 I - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} = n \iff rank \begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & B_1 \end{bmatrix} = \sigma_1$$



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入——输出系统的能 控规范型 • 对上式(58),  $\Diamond \Delta_{r_{1k} \times r_{1k}} = \lambda_1 I - J_{1k}, k = 1, \dots, \alpha_1, M$  $rank \begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & B_1 \end{bmatrix}$  $= rank \begin{bmatrix} \Delta_{r_{11}\times r_{11}} & & & & B_{11}\\ & \Delta_{r_{12}\times r_{12}} & & & B_{12}\\ & & \ddots & & \vdots\\ & & \Delta_{r_{1\alpha_1}\times r_{1\alpha_1}} & B_{1\sigma_1} \end{bmatrix}$  $\Delta_{r_{11} \times r_{11}}$  = rank  $\Delta_{r_{12} \times r_{12}}$ 



### 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分角

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 注意:  $\Delta_{r_{lk} \times r_{lk}} = \lambda_1 I - J_{lk}, k = 1, \cdots, \alpha_1$ 具有如下特殊形式

$$\Delta_{r_{1k} \times r_{1k}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots, \alpha_1$$

### 第2章

2.1 能控性足>

2.2.1 配控任判据 2.2.2 能控性指数

2.3 形位生分析

2.4 平输入—<u>。</u> 输出系统的能 控规范型 • 注意:  $\Delta_{r_{lk} \times r_{lk}} = \lambda_1 I - J_{1k}, k = 1, \cdots, \alpha_1$ 具有如下特殊形式

$$\Delta_{r_{1k}\times r_{1k}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots, \alpha_1$$

- ⇒ 从而,对任意的 $k = 1, \dots, \alpha_1$ ,有
  - $rank\Delta_{r_{1k}\times r_{1k}}=r_{1k}-1$
  - $\Delta_{r_{lk} \times r_{lk}}$  前 $r_{lk}$  1行满秩; 最后一行(即, 第 $r_{lk}$ 行)为零行, 即仅有最后一行降秩



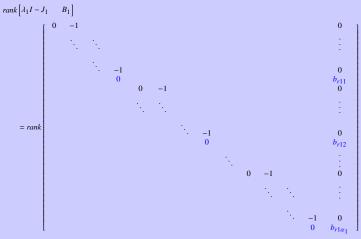
### 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据

23 能捻性名

2.4 单输入— s 输出系统的能 • 进而,有



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>§</sup> 输出系统的能 控规范型 • 由前式,我们有

$$rank \begin{bmatrix} \lambda_1 I - J_1 & B_1 \end{bmatrix} = \sigma_1 - \alpha_1 + rank \begin{bmatrix} b_{r11} \\ b_{r12} \\ \vdots \\ b_{r1\alpha_1} \end{bmatrix}$$
 (60)

• 进而, 由(59)和(60)知,  $rank \left[ \lambda_1 I - \hat{A} \quad \hat{B} \right] = n$  等价于

$$rank \begin{bmatrix} b_{r11} \\ b_{r12} \\ \vdots \\ b_{r1\alpha_1} \end{bmatrix} = \alpha_1.$$
 (61)

• 同理, 可推得:  $rank \left[ \lambda_1 I - \hat{A} \quad \hat{B} \right] = n, i = 1, 2, \cdots, l$  等价于

$$rank \begin{vmatrix} b_{ri1} \\ b_{ri2} \\ \vdots \\ b_{ri} \end{vmatrix} = \alpha_i, \ i = 1, 2, \cdots, l. \tag{62}$$

### 第2章

综合上面的推导, 我们有如下能控性判据的结论

### 定理

定理2.10(若尔当规范型判据) 若由系统(37)导出的若尔当规范型为(54)~(56),则

• 系统(37)为完全能控的充要条件是 $B_{ik}(k=1,2,\cdots,\alpha_i)$ 的最后一行所组成的矩阵对 $i=1,2,\cdots,l$ 均为行线性无关. 即,(62)成立

### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 挖规范型

### 例2.2.3 线性定常系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 0 & -2 & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & 0 & 3 \\ \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} u,$$

### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分戶

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型

### 例2.2.3 线性定常系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & & -2 & & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} u,$$

● 由若尔当规范性, 容易写出

$$\begin{bmatrix} b_{r11} \\ b_{r12} \\ b_{r13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} b_{r21} \\ b_{r22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 第2章

2.1 能控性定义

2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分制

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型

### 例2.2.3 线性定常系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & & -2 & & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} u,$$

• 由若尔当规范性, 容易写出

$$\begin{bmatrix} b_{r11} \\ b_{r12} \\ b_{r13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \ \begin{bmatrix} b_{r21} \\ b_{r22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

- ➡ 显然,他们均为行满秩
- 故由定理2.10知, 系统为完全能控



### 第2章

2.1 能控性定义 2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据

2.1 能控性判据 2.2 能控性指数 3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 根据定理2.10, 可得下面两个推论:

推论

推论2.2 (最小输入数定理) 系统(A,B)状态能控的必要条件为

$$p \geqslant \alpha_j, \ j = 1, 2, \cdots, l. \tag{63}$$



### 第2章

1.1 能控性定义
 2.2 能控性判据
 2.2.2 能控性有数
 3 能 於 於 公 公

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 根据定理2.10, 可得下面两个推论:

### 推论

推论2.2(最小输入数定理) 系统(A,B)状态能控的必要条件为

$$p \geqslant \alpha_j, \ j = 1, 2, \cdots, l. \tag{63}$$

### 定义:

• 若(54), (56)中,  $\alpha_j = 1, j = 1, 2, \dots, l$ . 即A的互异特征根各自对应一个若尔当块,则称A为非减次矩阵,或循环矩阵

### 第2章

.1 能控性定义
.2 能控性判据
22.1 能控性判据
22.2 能控性判据
2.2 2 能控性相称
.3 能控性分解
.4 单输入—单

根据定理2.10, 可得下面两个推论:

### 推论

推论2.2(最小输入数定理) 系统(A,B)状态能控的必要条件为

$$p \geqslant \alpha_j, \ j = 1, 2, \cdots, l. \tag{63}$$

### 定义:

• 若(54), (56)中,  $\alpha_j = 1, j = 1, 2, \dots, l$ . 即A的互异特征根各自对应一个若尔当块,则称A为非减次矩阵,或循环矩阵

### 推论

推论2.3 单输入系统(A,B)状态能控的必要条件为: A是非减次矩阵.



### 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分離

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型

- (1) 2.1 維整性定义。
  - 2.1.1 问题的提出
  - 2.1.2 能控性定义
  - 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- 2 2.2 能控性判据
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- (3) 2
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- 4 24 学输入一学输出系统的维控规范型



### 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

3 能控性分離

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 ● 考察完全能控的系统(37),即

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

其中,x为n维状态向量,u 为p 维输入向量,A,B分别为 $n \times n$ , $n \times p$ 实常阵



### 第2章

2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据

73 能捻性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 考察完全能控的系统(37),即

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

其中,x为n维状态向量,u 为p 维输入向量,A,B分别为 $n \times n$ , $n \times p$ 实常阵

• 定义

$$Q_k = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \tag{64}$$

### 第2章

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据

2.3 能控性分解

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 ● 考察完全能控的系统(37),即

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

其中,x为n维状态向量,u 为p 维输入向量,A,B分别为 $n \times n$ , $n \times p$ 实常阵

• 定义

$$Q_k = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \tag{64}$$

• 显然, 
$$Q_n = Q_C$$
, 且 $rankQ_n = n$ 

### 第2章

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性判据

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 考察完全能控的系统(37),即

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ x(0) = x_0,$$

其中,x为n维状态向量,u 为p 维输入向量,A,B分别为 $n \times n$ , $n \times p$ 实常阵

● 定义

$$Q_k = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{k-1}B \end{bmatrix} \tag{64}$$

为 $n \times kp$ 常阵,其中k为正整数

• 显然, 
$$Q_n = Q_C$$
, 且 $rankQ_n = n$ 

• 依次将k由1增加,直至使 $rankQ_{\mu}=n$ ,即

$$rankQ_1 < rankQ_2 < \dots < rankQ_{\mu-1}$$
  
 $< rankQ_{\mu} = rankQ_{\mu+1} = \dots = rankQ_C,$  (65)

则称µ为系统的能控性指数



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能理性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 估计能控性指数 $\mu$ 的一个关系式为: 令 $rankB = r \leq p$ , 则必成立

$$\frac{n}{p} \le \mu \le n - r + 1. \tag{66}$$



#### 第2章

2.1 能控性定义2.2 能控性判据

2.2.2 NO 32 12 14 9K

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 估计能控性指数 $\mu$ 的一个关系式为: 令 $rankB = r \leq p$ , 则必成立

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant n - r + 1. \tag{66}$$

- ➡ 证明关系式(66):
  - 首先, 考虑到 $Q_{\mu}$  为 $n \times \mu p$ 阵, 要使 $rankQ_{\mu} = n$ , 其前提是矩阵 $Q_{\mu}$ 的列数必须大于或等于其行数, 即 $\mu p \geq n$ , 此可导出(66)的左端



#### 第2章

• 估计能控性指数 $\mu$ 的一个关系式为:  $\Diamond$  rank $B = r \leq p$ , 则必成立

$$\frac{n}{p} \le \mu \le n - r + 1. \tag{66}$$

- ➡ 证明关系式(66):
  - 首先, 考虑到 $Q_{\mu}$  为 $n \times \mu p$ 阵, 要使 $rankQ_{\mu} = n$ , 其前提是 矩阵 $Q_{\mu}$ 的列数必须大于或等于其行数, 即 $\mu p \ge n$ , 此可导 出(66)的左端
  - 再由rankB = r, 若r = n, 则 $\mu = 1$ , (66)的右端成立; 若r < rn, 则AB,  $A^2B$ , ...,  $A^{\mu-1}B$  的每一个矩阵至少有一个列向量 和 $Q_{\mu}$ 中左侧所有线性独立的列向量线性无关,否则,(A,B)将不完全能控

#### 第2章

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 • 估计能控性指数 $\mu$ 的一个关系式为: 令 $rankB = r \leq p$ , 则必成立

$$\frac{n}{p} \leqslant \mu \leqslant n - r + 1. \tag{66}$$

- ➡ 证明关系式(66):
  - 首先, 考虑到 $Q_{\mu}$  为 $n \times \mu p$ 阵, 要使 $rankQ_{\mu} = n$ , 其前提是矩阵 $Q_{\mu}$ 的列数必须大于或等于其行数, 即 $\mu p \geqslant n$ , 此可导出(66)的左端
  - 再由rankB = r, 若r = n, 则 $\mu = 1$ , (66)的右端成立; 若r < n, 则AB,  $A^2B$ ,  $\cdots$ ,  $A^{\mu-1}B$  的每一个矩阵至少有一个列向量和 $Q_{\mu}$  中左侧所有线性独立的列向量线性无关, 否则, (A,B) 将不完全能控, 因此成立

$$r + \mu - 1 \leq n$$
,

此即 $\mu \leq n-r+1$ ,于是,(66)的右不等式得证



由关系式(66), 对能控性指数给出如下五点结论:

### 第2章

2.1 能控性定

2.3 能控性分

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分離

2.4 单输入——输出系统的能 控规范型 由关系式(66), 对能控性指数给出如下五点结论:

(1) 对于单输入系统, 即p=1时, 系统的能控性指数 $\mu=n$ 

• 由

$$\frac{n}{p} \le \mu \le n - r + 1$$

其中,
$$p = 1$$
, $r = 1$ ,易得 $\mu = n$ 

第2章

2.1 能控性定义
2.2 能控性判据
2.2.1 能控性判据
2.2.2 能检性判据

.3 能控性分角

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 由关系式(66), 对能控性指数给出如下五点结论:

- (1) 对于单输入系统, 即p=1时, 系统的能控性指数 $\mu=n$ 
  - 由

$$\frac{n}{p} \le \mu \le n - r + 1$$

其中,
$$p = 1$$
, $r = 1$ ,易得 $\mu = n$ 

- (2) 对于系统 (37), 可导出简化的能控性秩判据:
  - 系统完全能控的充分必要条件是

$$rankQ_{n-r+1} = rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-r}B \end{bmatrix} = n,$$
 (67)

其中, r = rankB



#### 第2章

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 由关系式(66), 对能控性指数给出如下五点结论:

- (1) 对于单输入系统, 即p=1时, 系统的能控性指数 $\mu=n$ 
  - 由

$$\frac{n}{p} \le \mu \le n - r + 1$$

其中,
$$p = 1$$
, $r = 1$ ,易得 $\mu = n$ 

- (2) 对于系统 (37), 可导出简化的能控性秩判据:
  - 系统完全能控的充分必要条件是

$$rankQ_{n-r+1} = rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-r}B \end{bmatrix} = n,$$
 (67)

其中, r = rankB

注: 由 $span[B \ AB \ \cdots \ A^{n-r}B]$ 为A的不变子空间, 故有

$$rank\left[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-r}B\right] = rank\left[B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B\right] = rankQ_C$$
 从而, 可知系统完全能控等价于条件(67)成立



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据2.2.1 能控性判据2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 (3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数,则 $l \leq n$ , (66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \le \mu \le \min(l, n - r + 1). \tag{68}$$



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 (3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数,则 $l \leq n$ ,(66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \le \mu \le \min(l, n - r + 1). \tag{68}$$

• 若最小多项式定义为

$$\varphi(s) = s^{l} + a_{l-1}s^{l-1} + \dots + a_{1}s + a_{0},$$

则必有
$$\varphi(A) = 0$$

#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 (3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数,则 $l \le n$ ,(66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \le \mu \le \min(l, n - r + 1). \tag{68}$$

• 若最小多项式定义为

$$\varphi(s) = s^{l} + a_{l-1}s^{l-1} + \dots + a_{1}s + a_{0},$$

则必有 $\varphi(A) = 0$ 

• 故 $A^{l}$ 是I, A,  $\cdots$ ,  $A^{l-1}$ 的线性组合, 从而 $A^{l}$ B是B, AB,  $\cdots$ ,  $A^{l-1}$ B的线性组合, 这说明

$$rankQ_{l+1} = rankQ_{l+2} = \cdots = rankQ_C$$
.

#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 (3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数,则 $l \le n$ ,(66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \le \mu \le \min(l, n - r + 1). \tag{68}$$

• 若最小多项式定义为

$$\varphi(s) = s^{l} + a_{l-1}s^{l-1} + \dots + a_{1}s + a_{0},$$

则必有 $\varphi(A) = 0$ 

• 故 $A^{l}$ 是I, A,  $\cdots$ ,  $A^{l-1}$ 的线性组合, 从而 $A^{l}$ B是B, AB,  $\cdots$ ,  $A^{l-1}$ B的线性组合, 这说明

$$rankQ_{l+1} = rankQ_{l+2} = \cdots = rankQ_C.$$

• 由能控性指数定义知, $\mu \leq l$ 

#### 第2章

2.2 能控性判据
2.2.1 能控性判据
2.2.1 能控性判据
2.2.2 能控性判据

1.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 (3) 令l为矩阵A的最小多项式的次数,则 $l \le n$ ,(66)还可表示为

$$\frac{n}{p} \le \mu \le \min(l, n - r + 1). \tag{68}$$

• 若最小多项式定义为

$$\varphi(s) = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + \dots + a_1s + a_0,$$

则必有 $\varphi(A) = 0$ 

• 故 $A^{l}$ 是I, A,  $\cdots$ ,  $A^{l-1}$ 的线性组合, 从而 $A^{l}$ B是B, AB,  $\cdots$ ,  $A^{l-1}$ B的线性组合, 这说明

$$rankQ_{l+1} = rankQ_{l+2} = \cdots = rankQ_C.$$

- 由能控性指数定义知,μ≤l
- 再由关系式(66), 即可得(68)成立



#### 第2章

2.1 能控性定 x

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性判据

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

### (4) 将Qμ表为

$$Q_{\mu} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_p \ Ab_1 \ Ab_2 \ \cdots \ Ab_p \ \cdots \ A^{\mu-1}b_1 \ \cdots \ A^{\mu-1}b_p] \ (69)$$



#### 第2章

2.1 能控性定义 2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据

2.3 能控性分戶

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 (4) 将Qμ表为

$$Q_{\mu} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_p \ Ab_1 \ Ab_2 \ \cdots \ Ab_p \ \cdots \ A^{\mu-1}b_1 \ \cdots \ A^{\mu-1}b_p] \ (69)$$

• 依次从左至右搜索 $Q_{\mu}$ 的n个线性无关的列,并重新排列后记为  $b_1,Ab_1,\cdots,A^{\mu_1-1}b_1,b_2,Ab_2,\cdots,A^{\mu_2-1}b_2,\cdots,b_r,\cdots,A^{\mu_r-1}b_r.$  (70)

#### 第2章

2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数 2.3 能控性分解

### (4) 将Qμ表为

$$Q_{\mu} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_p \ Ab_1 \ Ab_2 \ \cdots \ Ab_p \ \cdots \ A^{\mu-1}b_1 \ \cdots \ A^{\mu-1}b_p] \ (69)$$

• 依次从左至右搜索 $Q_{\mu}$ 的n个线性无关的列,并重新排列后记为  $b_1,Ab_1,\cdots,A^{\mu_1-1}b_1,b_2,Ab_2,\cdots,A^{\mu_2-1}b_2,\cdots,b_r,\cdots,A^{\mu_r-1}b_r.$  (70)

• 对能控系统,显然有

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n,$$
 (71)

且, 能控性指数μ满足

$$\mu = \max\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\},\tag{72}$$

#### 第2章

2.2 能控性判制
22.1 能控性判制
22.2 能控性判据
2.2.2 能控性有数
2.3 能控性分离
2.4 单输入—单

### (4) 将Q<sub>μ</sub>表为

$$Q_{\mu} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_p \ Ab_1 \ Ab_2 \ \cdots \ Ab_p \ \cdots \ A^{\mu-1}b_1 \ \cdots \ A^{\mu-1}b_p] \ (69)$$

• 依次从左至右搜索 $Q_{\mu}$ 的n个线性无关的列,并重新排列后记为  $b_1,Ab_1,\cdots,A^{\mu_1-1}b_1,b_2,Ab_2,\cdots,A^{\mu_2-1}b_2,\cdots,b_r,\cdots,A^{\mu_r-1}b_r.$  (70)

• 对能控系统,显然有

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n,$$
 (71)

且, 能控性指数µ满足

$$\mu = \max\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\},\tag{72}$$

并称 $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$ 为系统(A, B)的能控性指数集



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

3 能控性分

2.4 单输入—单输出系统的能 控规范型 (5) 对系统(37)作非奇异线性变换, 其能控性指数 $\mu$ 和能控性指数  $\#\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$ 保持不变



### 第2章

- 2.1 能控性定义
- 2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数
- 2.3 能控性分解
- 2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- (5) 对系统(37)作非奇异线性变换, 其能控性指数 $\mu$ 和能控性指数 集 $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$ 保持不变
  - 这是因为, 对系统(37)作非奇异线性变换 $x = P\hat{x}, P \to n \times n$  非奇异阵, 则有 $\hat{A} = P^{-1}AP, \hat{B} = P^{-1}B$ , 故可导出

$$\hat{A}\hat{B} = P^{-1}AB$$
$$\hat{A}^2\hat{B} = P^{-1}A^2B$$

:

$$\hat{A}^{\mu - 1}\hat{B} = P^{-1}A^{\mu - 1}B$$



#### 第2章

- 2.1 能控性足叉
   2.2 能控性判据
   221 能控性判据
- 2.2.2 能控性指数
- 2.3 形化工工工
- 2.4 平输入—斗 输出系统的能 控规范型

- (5) 对系统(37)作非奇异线性变换, 其能控性指数 $\mu$ 和能控性指数  $\$\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r\}$ 保持不变
  - 这是因为, 对系统(37)作非奇异线性变换 $x = P\hat{x}, P \rightarrow n \times n$  非奇异阵, 则有 $\hat{A} = P^{-1}AP, \hat{B} = P^{-1}B$ , 故可导出

$$\hat{A}\hat{B} = P^{-1}AB$$

$$\hat{A}^2\hat{B} = P^{-1}A^2B$$
:

. ..-1 &

$$\hat{A}^{\mu-1}\hat{B} = P^{-1}A^{\mu-1}B$$

• 从而有

$$\hat{Q}_{\mu} = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \cdots & \hat{A}^{\mu-1}\hat{B} \end{bmatrix}$$

$$= P^{-1} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{\mu-1}B \end{bmatrix}$$

$$= P^{-1}Q_{\mu},$$
(73)



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.2.1 能控性判据 2.2.2 能控性指数

2.3 能控性分角

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型

#### 以及

$$\begin{bmatrix}
\hat{b}_{1}, \hat{A}\hat{b}_{1}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{1}-1}\hat{b}_{1}, \hat{b}_{2}, \hat{A}\hat{b}_{2}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{2}-1}\hat{b}_{2}, \\
\cdots, \hat{b}_{r}, \hat{A}\hat{b}_{r}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{r}-1}\hat{b}_{r}
\end{bmatrix} 
= P^{-1} \begin{bmatrix} b_{1}, Ab_{1}, \cdots, A^{\mu_{1}-1}b_{1}, b_{2}, Ab_{2}, \cdots, A^{\mu_{2}-1}b_{2}, \\
\cdots, b_{r}, Ab_{r}, \cdots, A^{\mu_{r}-1}b_{r}
\end{bmatrix}.$$
(74)

#### 第2章

2.1 能控性足叉
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性指数

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 以及

$$\begin{bmatrix}
\hat{b}_{1}, \hat{A}\hat{b}_{1}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{1}-1}\hat{b}_{1}, \hat{b}_{2}, \hat{A}\hat{b}_{2}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{2}-1}\hat{b}_{2}, \\
\cdots, \hat{b}_{r}, \hat{A}\hat{b}_{r}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{r}-1}\hat{b}_{r}
\end{bmatrix} \\
= P^{-1} \begin{bmatrix} b_{1}, Ab_{1}, \cdots, A^{\mu_{1}-1}b_{1}, b_{2}, Ab_{2}, \cdots, A^{\mu_{2}-1}b_{2}, \\
\cdots, b_{r}, Ab_{r}, \cdots, A^{\mu_{r}-1}b_{r}
\end{bmatrix}.$$
(74)

• 式(73)和(74)表明,  $rank\hat{Q}_{\mu} = rankQ_{\mu} = n$ , 且  $\hat{b}_{1}, \hat{A}\hat{b}_{1}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{1}-1}\hat{b}_{1}, \hat{b}_{2}, \hat{A}\hat{b}_{2}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{2}-1}\hat{b}_{2},$   $\cdots, \hat{b}_{r}, \hat{A}\hat{b}_{r}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{r}-1}\hat{b}_{r}$ 

为 $\hat{Q}_u$ 中按前述方法搜索到的n个线性无关列

#### 第2章

2.1 能控性足叉
 2.2 能控性判据
 2.2.1 能控性判据
 2.2.2 能控性捐款

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 以及

$$\begin{bmatrix}
\hat{b}_{1}, \hat{A}\hat{b}_{1}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{1}-1}\hat{b}_{1}, \hat{b}_{2}, \hat{A}\hat{b}_{2}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{2}-1}\hat{b}_{2}, \\
\cdots, \hat{b}_{r}, \hat{A}\hat{b}_{r}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{r}-1}\hat{b}_{r}
\end{bmatrix}$$

$$= P^{-1} \begin{bmatrix} b_{1}, Ab_{1}, \cdots, A^{\mu_{1}-1}b_{1}, b_{2}, Ab_{2}, \cdots, A^{\mu_{2}-1}b_{2}, \\
\cdots, b_{r}, Ab_{r}, \cdots, A^{\mu_{r}-1}b_{r}
\end{bmatrix}.$$
(74)

• 式(73)和(74)表明,  $rank\hat{Q}_{\mu} = rankQ_{\mu} = n$ , 且  $\hat{b}_{1}, \hat{A}\hat{b}_{1}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{1}-1}\hat{b}_{1}, \hat{b}_{2}, \hat{A}\hat{b}_{2}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{2}-1}\hat{b}_{2},$   $\cdots, \hat{b}_{r}, \hat{A}\hat{b}_{r}, \cdots, \hat{A}^{\mu_{r}-1}\hat{b}_{r}$ 

为 $\hat{Q}_u$ 中按前述方法搜索到的n个线性无关列

注:上述推导说明,能控性指数和能控性指数集在非奇异变换下保持不变



#### 第2章

- 2.1 能控性定义
- 2.2 能控性判据
- 2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分
- 2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- (1) 2.1 能控性定义。
  - 2.1.1 问题的提出
  - 2.1.2 能控性定义
  - 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- 2 2.2 #
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- 3 2.3 能控性分解
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- 4 24 半轴入一半轴由系织的能容规范型



## 2.3 能控性分解

### 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判法

2.3 能控性分離

2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 本节我们将讨论不完全能控的系统



### 2.3 能控性分解

### 第2章

2.1 能控性足叉
 2.2 能控性判据

2.3 能控性分角

2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分 解

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

#### 本节我们将讨论不完全能控的系统

- 对于这一类系统,可以通过结构分解,将其结构以明显的形式 区分为能控部分和不能控部分
- 研究系统的结构分解,有助于更深刻的了解系统的结构特性, 也有助于更深入揭示状态空间描述和输入输出描述间的本质 差别



#### 第2章

- 2.1 能控性定义
- 2.2 能控性判据
- 2.3.1 能控性在非奇界 线性变换下的属性
  2.3.2 核能控性结构分
- 2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- (1) 2.1 維控性定
  - 2.1.1 问题的提出
  - 2.1.2 能控性定义
  - 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- 2 2.
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- 3 2.3 能控性分解
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解
- (4) 2.4 学的人一学的出系の的能控则或型



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判:

2.3.1 能控性在非奇。 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构。

2.4 单输入— 输出系统的能 对系统进行结构分解是通过引入适当的线性非奇异变换来实现的



### 第2章

- 2.1 能控性定义
   2.2 能控性判据
   2.3 能控性分解
   2.3.1 能控性在非专用
- 型 2.4 单输入—单 输出系统的能

- 对系统进行结构分解是通过引入适当的线性非奇异变换来实现的
- 因此, 首先对系统的能控性在线性非奇异变换下的属性给出如下讨论:

### 定理

定理2.11 线性定常系统(A,B)的能控性在线性非奇异变换下不变.



### 第2章

- 2.1 能控性定义
   2.2 能控性判据
   2.3 能控性分解
- 解 2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- 对系统进行结构分解是通过引入适当的线性非奇异变换来实现的
- 因此, 首先对系统的能控性在线性非奇异变换下的属性给出如下讨论:

### 定理

定理2.11 线性定常系统(A,B)的能控性在线性非奇异变换下不变.

证明 对系统的状态空间描述为

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

● 引入非奇异线性变换x = Px̄, P为非奇异矩阵, 则与其代数等价的状态空间描述为

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u,$$

其中,
$$\bar{A} = P^{-1}AP$$
, $\bar{B} = P^{-1}B$ 



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判

2.3.1 能控性在非奇 线性变换下的属性 2.3.2 核能控性结构

2.4 单输入——输出系统的能 输出系统的能 按规范型 • 考察(Ā, B)的能控性矩阵, 有

$$\bar{Q}_C = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} P^{-1}\bar{B} & P^{-1}AB & \cdots & P^{-1}A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
$$= P^{-1}Q_C.$$



### 第2章

2.1 能控性定义
2.2 能控性判据
2.3 能控性分解
2.3.1 能控性分解
战性变换下的属性

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 考察(Ā, B)的能控性矩阵,有

$$\bar{Q}_C = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} P^{-1}\bar{B} & P^{-1}AB & \cdots & P^{-1}A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
$$= P^{-1}Q_C.$$

于是

$$rankQ_C = rank\bar{Q}_C.$$

定理结论得证



#### 第2章

2.1 能控性定义
2.2 能控性判据
2.3 能控性分解
2.3.1 能控性分解
(社交换下的属性
2.3.2 技能控性结构分

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 考察(Ā, B)的能控性矩阵,有

$$\bar{Q}_C = \begin{bmatrix} \bar{B} & \bar{A}\bar{B} & \cdots & \bar{A}^{n-1}\bar{B} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} P^{-1}\bar{B} & P^{-1}AB & \cdots & P^{-1}A^{n-1}B \end{bmatrix}$$
$$= P^{-1}Q_C.$$

• 于是

$$rankQ_C = rank\bar{Q}_C$$
.

定理结论得证

注: 事实上, 在定理2.8的充分性证明中, 已证明和利用了

$$rank \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}, \forall s$$

这也能说明(A,B)的能控性在非奇异线性变换下的不变性



#### 第2章

- 2.1 能控性定义
- 2.2 能控性判却
- 2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性
  2.3.2 按能控性结构分
- 2.4 早输入——早 输出系统的能 挖规范型

- 2.1.1 问题的提出
- 2.1.2 能控性定义
- 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- 2
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- ③ 2.3 能控性分解
  - 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
  - 2.3.2 按能控性结构分解





## 2.3.2 按能控性结构分解

## 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分

2.4 单输入—单输出系统的能 控规范型 • 考虑不完全能控的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\tag{75}$$

其中,x为n维状态向量,u为p维控制向量,(A,B)分别为 $n \times n, n \times p$ 的实常阵



## 2.3.2 按能控性结构分解

### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.3 能控性分解 2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 核能控性结构分

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 ● 考虑不完全能控的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\tag{75}$$

其中,x为n维状态向量,u为p维控制向量,(A,B)分别为 $n \times n, n \times p$ 的实常阵

➡ 则,根据

$$rankQ_C = rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = k < n,$$

任选 $Q_C$ 中k个线性无关的列,记为 $t_1,t_2,\cdots,t_k$ ,并令

$$T_1 = [t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_k],$$



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据
2.3 能控性分解
2.3.1 能控性在非奇异
线性变换下的属性
2.3.2 核能控性结构分

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 ● 考虑不完全能控的线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\tag{75}$$

其中,x为n维状态向量,u为p维控制向量,(A,B)分别为 $n \times n, n \times p$ 的实常阵

➡ 则,根据

$$rankQ_C = rank \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = k < n,$$

任选 $Q_C$ 中k个线性无关的列, 记为 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ , 并令

$$T_1 = [t_1 \ t_2 \ \cdots \ t_k],$$

• 则由 • 定理2.4 知, T1的列构成Xc的基底



### 第2章

2.1 能控性定:

2.2 能控性判据

2.3.1 総控性在非奇 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构:

2.4 单输入—单输出系统的能控规范型

• 再任选n-k个与 $T_1$ 线性无关的列向量 $t_{k+1},t_{k+2},\cdots,t_n$ , 记  $T_2 = [t_{k+1} \ t_{k+2} \ \cdots \ t_n],$ 



#### 第2章

2.1 能控性足)

2.2 能控性判制

2.3.1 能控性在非奇引 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分 att

2.4 单输入—— 输出系统的能 控规范型 • 再任选n-k个与 $T_1$ 线性无关的列向量 $t_{k+1}, t_{k+2}, \cdots, t_n$ , 记

$$T_2 = [t_{k+1} \ t_{k+2} \ \cdots \ t_n],$$

令

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} \quad k \not\uparrow \bar{\tau}$$

$$(76)$$



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.3.1 能控性在非奇。 2.3.1 能控性在非奇。 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 再任选n-k个与 $T_1$ 线性无关的列向量 $t_{k+1},t_{k+2},\cdots,t_n$ , 记

$$T_2 = [t_{k+1} \ t_{k+2} \ \cdots \ t_n],$$

• 令

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} \quad k \not\uparrow \bar{\tau}$$

$$(76)$$

● 则由T-1T = I, 推得

$$F_2^T T_1 = 0. (77)$$

这说明 $F_2$ 各列属于 $X_{NC}$ 



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性
2.3.2 按能控性结构分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 再任选n-k个与 $T_1$ 线性无关的列向量 $t_{k+1},t_{k+2},\cdots,t_n$ ,记

$$T_2 = [t_{k+1} \ t_{k+2} \ \cdots \ t_n],$$

令

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} \quad k \mathring{\uparrow} \mathring{\tau}$$

$$(76)$$

● 则由T-1T = I, 推得

$$F_2^T T_1 = 0. (77)$$

这说明 $F_2$ 各列属于 $X_{NC}$ 

● 又由推论2.1, Xc是A的不变子空间, 故有

$$F_2^T A T_1 = 0,$$



#### 第2章

2.1 肥松生火人

2.2 能控性判据

2.3.1 能控性在非奇多 线性变换下的属性
2.3.2 按能控性结构分解

2.4 单输入—<sup>2</sup> 输出系统的能 控规范型 • 再任选n-k个与 $T_1$ 线性无关的列向量 $t_{k+1},t_{k+2},\cdots,t_n$ ,记

$$T_2 = [t_{k+1} \ t_{k+2} \ \cdots \ t_n],$$

令

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} \ \begin{array}{c} k \mathring{\uparrow} \mathring{\tau} \\ n - k \mathring{\uparrow} \mathring{\tau} \end{array}$$
 (76)

则由T<sup>-1</sup>T = I, 推得

$$F_2^T T_1 = 0. (77)$$

这说明 $F_2$ 各列属于 $X_{NC}$ 

• 又由推论2.1, Xc是A的不变子空间, 故有

$$F_2^T A T_1 = 0,$$

• 此外, B的各列属于 $X_C$ , 故有

$$F_2^T B = 0.$$



#### 第2章

2.3 能控性分解 2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分 解

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 基于上述关系式, 对系统(75)作非奇异线性变换 $x = T\hat{x}$ , 则系统(75)可等价地转化为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u,\tag{78}$$

其中,

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_1^T A T_1 & F_1^T A T_2 \\ 0 & F_2^T A T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \end{bmatrix} B$$

$$= \begin{bmatrix} F_1^T B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
(79)



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判

2.3.1 能控性在非奇员 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分

2.4 单输入—— 输出系统的能 按规范规 ● 显然, 由Â, B的形式, 容易看出

$$k = rankQ_{C}$$

$$= rank[\hat{B} \ \hat{A}\hat{B} \ \cdots \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$$

$$= rank\begin{bmatrix} B_{1} & A_{11}B_{1} & \cdots & A_{11}^{n-1}B_{1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
(80)



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 ● 显然, 由Â, B的形式, 容易看出

$$k = rankQ_{C}$$

$$= rank[\hat{B} \ \hat{A}\hat{B} \ \cdots \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$$

$$= rank\begin{bmatrix} B_{1} & A_{11}B_{1} & \cdots & A_{11}^{n-1}B_{1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
(80)

• 进而,可得

$$rank \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = k.$$



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.3.1 能控性在非奇。 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构的

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 ● 显然, 由Â, B的形式, 容易看出

$$k = rankQ_{C}$$

$$= rank[\hat{B} \ \hat{A}\hat{B} \ \cdots \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$$

$$= rank\begin{bmatrix} B_{1} & A_{11}B_{1} & \cdots & A_{11}^{n-1}B_{1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
(80)

• 进而,可得

$$rank \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = k.$$

• 又由 $span \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{k-1}B_1 \end{bmatrix}$ 为 $A_{11}$ 不变子空间,从而有 $rank \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{k-1}B_1 \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix}$  $= k \tag{81}$ 



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.3.1 能控性在非奇导 线性变换下的属性
2.3.2 按能控性结构分

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 ● 显然, 由Â, B的形式, 容易看出

$$k = rankQ_{C}$$

$$= rank[\hat{B} \ \hat{A}\hat{B} \ \cdots \ \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$$

$$= rank\begin{bmatrix} B_{1} & A_{11}B_{1} & \cdots & A_{11}^{n-1}B_{1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$
(80)

• 进而,可得

$$rank \begin{bmatrix} B_1 & A_{11}B_1 & \cdots & A_{11}^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = k.$$

• 又由 $span \left[ B_1 \quad A_{11}B_1 \quad \cdots \quad A_{11}^{k-1}B_1 \right]$ 为 $A_{11}$ 不变子空间,从而有 $rank \left[ B_1 \quad A_{11}B_1 \quad \cdots \quad A_{11}^{k-1}B_1 \right] = rank \left[ B_1 \quad A_{11}B_1 \quad \cdots \quad A_{11}^{n-1}B_1 \right]$  $= k \tag{81}$ 

● 即, 可知(A<sub>11</sub>, B<sub>1</sub>)能控

#### 第2章

综合前述的推导, 我们有下面的结论

#### 定理

**定理2.12** 对于不完全能控系统(75), 存在非奇异线性变换 $x = T\hat{x}$ , 使系统结构按能控性分解的规范表达式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \tag{82}$$

其中,  $x_1$ 为k维能控分状态向量,  $x_2$ 为n-k维不能控分状态向量,  $k=rankQ_c$ .



• 由定理2.12, 可得

#### 第2章

2.1 能控性定

2.2 能程性判

2.3 能控性分角

2.3.1 能控性在非奇 线性变换下的属性

2.3.2 按能控性结构 解

2.4 單輸入— 輸出系統的能 控规范型



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判

2.3 能控性分解 2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分解

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- 由定理2.12, 可得
  - n − k维子系统

$$\dot{x}_2 = A_{22} x_2 \tag{83}$$

是完全不能控的

· k维子系统

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{84}$$

是完全能控的



#### 第2章

- 2.1 能控性定义
- 2.2 能控性判据
   2.3 能控性分解
- 2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分 解
- 2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- 由定理2.12, 可得
  - n − k维子系统

$$\dot{x}_2 = A_{22} x_2 \tag{83}$$

是完全不能控的

· k维子系统

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{84}$$

是完全能控的

• 对子系统(84)的能控性, 由(A<sub>11</sub>, B<sub>1</sub>)能控, 故能控Gram矩阵

$$\bar{W}_C[0,T] = \int_0^T e^{-A_{11}t} B_1 (e^{-A_{11}t} B_1)^T dt$$

为非奇异



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判制

2.3.1 能拉性在非奇异 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分 解

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 由定理2.12, 可得

n − k维子系统

$$\dot{x}_2 = A_{22} x_2 \tag{83}$$

是完全不能控的

· k维子系统

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{84}$$

是完全能控的

• 对子系统(84)的能控性, 由(A<sub>11</sub>, B<sub>1</sub>)能控, 故能控Gram矩阵

$$\bar{W}_C[0,T] = \int_0^T e^{-A_{11}t} B_1 (e^{-A_{11}t} B_1)^T dt$$

为非奇异

• 若取控制u(t)为

$$u(t) = -B_1^T e^{-A_{11}^T t} \bar{W}_C^{-1}[0, T] \left( x_1(0) + \int_0^T e^{-A_{11} t} A_{12} e^{A_{22} t} x_2(0) dt \right)$$









#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

 2.3 能控性分角
 2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性
 2.3.2 按能控性结构分

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 ➡ 则系统(84)在时刻T的状态为

$$\begin{split} x_1(T) &= e^{A_{11}T} x_1(0) + \int_0^T e^{A_{11}(T-t)} A_{12} e^{A_{22}t} x_2(0) dt \\ &- \int_0^T e^{A_{11}(T-t)} B_1 B_1^T e^{-A_{11}^T t} \bar{W}_C^{-1}[0,T] \Big( x_1(0) + \int_0^T e^{-A_{11}t} A_{12} e^{A_{22}t} x_2(0) dt \Big) dt \\ &= e^{A_{11}T} x_1(0) + \int_0^T e^{A_{11}(T-t)} A_{12} e^{A_{22}t} x_2(0) dt \\ &- e^{A_{11}T} \int_0^T e^{-A_{11}t} B_1 B_1^T e^{-A_{11}^T t} dt \cdot \bar{W}_C^{-1}[0,T] \Big( x_1(0) \\ &+ \int_0^T e^{-A_{11}t} A_{12} e^{A_{22}t} x_2(0) dt \Big) \\ &= e^{A_{11}T} x_1(0) + \int_0^T e^{A_{11}(T-t)} A_{12} e^{A_{22}t} x_2(0) dt \\ &- e^{A_{11}T} \bar{W}_C[0,T] \bar{W}_C^{-1}[0,T] \Big( x_1(0) + \int_0^T e^{-A_{11}t} A_{12} e^{A_{22}t} x_2(0) dt \Big) \\ &= 0 \end{split}$$



#### 第2章

• 上式说明, 对任意初始状态 $x_1(0) \neq 0$ , 存在控制u(t), 使得 $x_1(T) =$ 0, 故子系统(84)为完全能控的



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判制

2.3 能控性分角 2.3.1 能控性在非奇员 线性变换下的属性 2.3.2 接能控性结构分

2.4 单输入—<sup>2</sup> 输出系统的能 控规范型 ● 上式说明, 对任意初始状态 $x_1(0) \neq 0$ , 存在控制u(t), 使得 $x_1(T) = 0$ , 故子系统(84)为完全能控的

#### 注1: 考虑到

$$\det(sI - A) = \det(sI - \hat{A}) = \det\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \det(sI - A_{11}) \det(sI - A_{22}),$$



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.3 能控性分解 2.3.1 能控性在非奇所 發性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构分

2.4 單輸入—單 輸出系統的能 控规范型 ● 上式说明, 对任意初始状态 $x_1(0) \neq 0$ , 存在控制u(t), 使得 $x_1(T) = 0$ , 故子系统(84)为完全能控的

#### 注1: 考虑到

$$\det(sI - A) = \det(sI - \hat{A}) = \det\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \det(sI - A_{11}) \det(sI - A_{22}),$$

这说明系统(75)的特征值由两部分构成

- 一部分为A11的特征值, 称为系统的能控振型
- 另一部分为A22的特征值, 称为系统的不能控振型



#### 第2章

...2 能控性判据
...3 能控性分解
2.3.1 能控性在非奇所
战性发展下的属性

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 • 上式说明, 对任意初始状态 $x_1(0) \neq 0$ , 存在控制u(t), 使得 $x_1(T) = 0$ , 故子系统(84)为完全能控的

#### 注1: 考虑到

$$\det(sI - A) = \det(sI - \hat{A}) = \det\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \det(sI - A_{11}) \det(sI - A_{22}),$$

这说明系统(75)的特征值由两部分构成

- 一部分为A11的特征值, 称为系统的能控振型
- 另一部分为A22的特征值, 称为系统的不能控振型
- 可以看出, 控制u的引入, 只能改变能控振型的位置, 而不能改变不能控振型的位置



#### 第2章

0, 故子系统(84)为完全能控的

注1: 考虑到

$$\det(sI - A) = \det(sI - \hat{A}) = \det\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix}$$
$$= \det(sI - A_{11}) \det(sI - A_{22}),$$

• 上式说明, 对任意初始状态 $x_1(0) \neq 0$ , 存在控制u(t), 使得 $x_1(T) =$ 

这说明系统(75)的特征值由两部分构成

- 一部分为A11的特征值, 称为系统的能控振型
- 另一部分为A22的特征值, 称为系统的不能控振型
- 可以看出, 控制u的引入, 只能改变能控振型的位置, 而不能改变不能控振型的位置

注2: 能控性结构分解中,变换矩阵T的选取并不是唯一的,T的选取不同,(83)中规范表达式虽然不变,但各块的值却不同



#### 第2章

2.1 能控性定

2.2 能控性判扎

2.3.1 能控性在非奇 线性变换下的属性 2.3.2 按能控性结构

# 2.4 单输入—

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型

**例2.3.1** 给定线性定常系统 
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$



第2章

2.1 能控性定3

2.2 能控性判据

 2.3 能控性分解
 2.3.1 能控性在非奇员 线性变换下的属性
 2.3.2 按能控性结构分

2.4 单输入——输出系统的能 输出系统的能 例2.3.1 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

• 因为
$$rank$$
  $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2$ . 故系统不完全能控

#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性列描 2.3 能控性分解 2.3.1 能控性在非奇界 线性变换下的属性

2.4 单输入—单 输出系统的能 按細节型 例2.3.1 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

- 因为rank  $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2$ . 故系统不完全能控
- ➡ 若取

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#### 第2章

2.1 能控性定义

2.3 能控性分解 2.3.1 能控性在非奇异 线性变换下的属性

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型 例2.3.1 给定线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

- 因为rank  $\begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 < 2$ . 故系统不完全能控
- ⇒ 若取

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \ T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

则

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

• 系统的能控性分解为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据 2.3 能控性分解

2.4 单输入—单 输出系统的能 控规范型

- 1) 2.1 能控性定义。
  - 2.1.1 问题的提出
  - 2.1.2 能控性定义
  - 2.1.3 能控子空间与不能控子空间
- 2
  - 2.2.1 能控性判据
  - 2.2.2 能控性指数
- (3)
- 2.3.1 能控性在非奇异线性变换下的属性
- 0232接能控性结构分解
- ▲ 2.4 单输入—单输出系统的能控规范型



#### 第2章

2.1 能控性定义2.2 能控性判却2.3 能控性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 对于完全能控的线性定常系统,

如果从能控这个基本属性出发来构造一个非奇异的变换矩阵, 那么可把系统的状态空间描述在这一线性变换下, 化成只有能控系统才具有的标准形式, 称之为能控规范型



# 第2章

2.1 能控性定3

2.2 能程性判

....

2.4 半输入—— 输出系统的能 控规范型 ➡ 考虑完全能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, 
y = cx,$$
(85)

其中,A为 $n \times n$ 常阵,b和c分别为 $n \times 1$ , $1 \times n$ 常阵



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 HOUSE 1274.

2.4 单输入—单 输出系统的能 <sub>挖韧范</sub>刑 ➡ 考虑完全能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, 
y = cx,$$
(85)

其中,A为 $n \times n$ 常阵,b和c分别为 $n \times 1$ , $1 \times n$ 常阵

• 由于系统为完全能控,故有

$$rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n.$$
 (86)



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判析
 2.3 能控性分析

2.4 平输人—— 输出系统的能 控规范型 ➡ 考虑完全能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, 
y = cx,$$
(85)

其中,A为 $n \times n$ 常阵,b和c分别为 $n \times 1,1 \times n$ 常阵

• 由于系统为完全能控,故有

$$rank \begin{bmatrix} b & Ab & \cdots & A^{n-1}b \end{bmatrix} = n.$$
 (86)

• 此外,令系统的特征多项式为

$$\det(sI - A) = \alpha(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0.$$
 (87)



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.4 单输入—— 输出系统的能 控规范型 • 构造变换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$
(88)

显然,P在系统能控条件下为非奇异



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能發性利

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 • 构造变换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$
(88)

显然,P在系统能控条件下为非奇异

• 定义n个常数

$$\beta_{n-1} = cb,$$

$$\beta_{n-2} = cAb + a_{n-1}cb,$$

$$\cdots$$

$$\beta_1 = cA^{n-2}b + a_{n-1}cA^{n-3}b + \cdots + a_2cb,$$

$$\beta_0 = cA^{n-1}b + a_{n-1}cA^{n-2}b + \cdots + a_1cb.$$
(89)



### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据
 3 能挖性分解

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 在前述基础上, 可导出系统能控规范型的基本结论

定理

定理2.13 对于完全能控的单输入—单输出系统(85), 引入线性非奇异变换 $x = P\bar{x}$ , 即可导出其能控规范型为

$$\dot{\bar{x}} = A_c \bar{x} + b_c u, 
y = c_c \bar{x},$$
(90)

其中,

$$A_{c} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ -a_{0} & -a_{1} & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, b_{c} = P^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, (91)$$

$$c_{c} = cP = \begin{bmatrix} \beta_{0} & \beta_{1} & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$



证明 (1) 推导Ac的形式

第2章

2.1 能控性定3

\_\_\_\_\_\_

2.3 肥松性分

2.4 平输人— 输出系统的自 控规范型



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.4 单输入— 输出系统的能 证明 (1) 推导A<sub>c</sub>的形式

• 利用 $A_c = P^{-1}AP$ , 可导出

$$PA_c = AP = \begin{bmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \cdots & Ae_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^n b & \cdots & A^2 b & Ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n-1} & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}. \tag{92}$$



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.4 单输入— 输出系统的自 控规范型 证明 (1) 推导 $A_c$ 的形式

• 利用 $A_c = P^{-1}AP$ ,可导出

$$PA_c = AP = \begin{bmatrix} Ae_1 & Ae_2 & \cdots & Ae_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{n}b & \cdots & A^{2}b & Ab \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ a_{1} & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

利用凯莱-哈密顿定理, α(A) = 0和(88)可进一步得到

$$Ae_1 = (A^nb + a_{n-1}A^{n-1}b + \dots + a_1Ab + a_0b) - a_0b = -a_0e_n,$$
  

$$Ae_2 = (A^{n-1}b + a_{n-1}A^{n-2}b + \dots + a_2Ab + a_1b) - a_1b = e_1 - a_1e_n,$$

$$Ae_{n-1} = (A^2b + a_{n-1}Ab + a_{n-2}b) - a_{n-2}b = e_{n-2} - a_{n-2}e_n,$$
  

$$Ae_n = (Ab + a_{n-1}b) - a_{n-1}b = e_{n-1} - a_{n-1}e_n,$$



# 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判決

2.3 能控性分)

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 • 将(93)代入(92), 可得

$$PA_{c} = \begin{bmatrix} -a_{0}e_{n} & e_{1} - a_{1}e_{n} & \cdots & e_{n-2} - a_{n-2}e_{n} & e_{n-1} - a_{n-1}e_{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_{1} & e_{2} & \cdots & e_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \\ -a_{0} & -a_{1} & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$(94)$$



## 第2章

2.1 能控性定义

2.2 月じりエリエテリト

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 • 将(93)代入(92), 可得

$$PA_{c} = \begin{bmatrix} -a_{0}e_{n} & e_{1} - a_{1}e_{n} & \cdots & e_{n-2} - a_{n-2}e_{n} & e_{n-1} - a_{n-1}e_{n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e_{1} & e_{2} & \cdots & e_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & & 1 \\ -a_{0} & -a_{1} & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$(94)$$

• 因为 $[e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_n] = P$ ,将上式左乘 $P^{-1}$ ,即可得 $A_c$ 的表达式



# 第2章

2.1 能控性定3

2.2 NO 11 12 7

2.3 肥松生为

2.4 半输入— 输出系统的自 控规范型 (2) 推导b<sub>c</sub>的形式



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 (2) 推导bc的形式

• 利用 $b_c = P^{-1}b$ 和(88), 可导出

$$Pb_c = b = e_n$$

$$= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

(95)



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性利引

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 (2) 推导b<sub>c</sub>的形式

• 利用 $b_c = P^{-1}b$ 和(88), 可导出

$$= P \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

 $Pb_c = b = e_n$ 

• 将上式左乘P-1,即可得b。的表达式

(95)



# 第2章

2.1 能控性定义

2.2 肥役生产

2.4 单输入— 输出系统的能 按細蓝型 • (3) 推导 $c_c$ 的形式



# 第2章

2.1 能控性定义

乙.乙 月巳寸至り王チり寸が

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 ● (3) 推导c<sub>c</sub>的形式

• 由 $c_c = cP$ 和式(88)及(89), 可得

$$c_c = cP$$

$$= c \begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n-1} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$(96)$$

即得 $c_c$ 的表达式



# 第2章

● (3) 推导c<sub>c</sub>的形式

• 由 $c_c = cP$ 和式(88)及(89), 可得

$$c_c = cP$$

$$= c \begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{n-1} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{n-1} \end{bmatrix}.$$

$$(96)$$

即得 $c_c$ 的表达式

⇒ 综合(1)~(3), 定理结论得证



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判

2.3 能控性分

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型 例2.4.1 给定能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \ n = 3,$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 例2.4.1 给定能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \ n = 3,$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

• 其特征多项式

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^3 - 5s + 4,$$

#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能控性判据

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型 例2.4.1 给定能控的单输入—单输出线性定常系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u, \ n = 3,$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

• 其特征多项式

$$\alpha(s) = \det(sI - A) = s^3 - 5s + 4,$$

• 进而,有

$$\beta_2 = cb = 3$$
  
 $\beta_1 = cAb + a_2cb = 4$   
 $\beta_0 = cA^2b + a_2cAb + a_1cb = 0$ 



#### 第2章

#### ▶ 则系统的能控规范型为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}$$

#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 能拉性分

2.4 单输入— 输出系统的能 控规范型

#### ➡ 则系统的能控规范型为

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \bar{x}$$

由(88)式,还可求得变换阵

$$P = \begin{bmatrix} A^2b & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 化红红外

2.4 单输入— 输出系统的自 控规范型

- 注1: 能控规范型 $(A_c,b_c)$ 以明显的形式与反映系统结构特性的特征 多项式系数直接联系起来,对于综合系统的状态反馈,是很方便的



#### 第2章

2.1 能控性定义

2.2 HC411274

...3 能控性分

2.4 单输入—<sup>3</sup> 输出系统的能 控规范型

#### • 教材:

程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 29-52