2、r,g,b 是 RGB 彩色空间沿 R,G,B 轴的单位向量，定义向量 $\mathrm{u}=\frac{\partial R}{\partial x}r+\frac{\partial G}{\partial x}g+\frac{\partial B}{\partial x}b$ 和 $\mathrm{v}=\frac{\partial R}{\partial y}r+\frac{\partial G}{\partial y}g+\frac{\partial B}{\partial y}b$，$g_{xx},g_{yy},g_{xy}$ 定义为这些向量的点乘：

$$g_{xx}=\mathrm{u}\cdot\mathrm{u}=\mathrm{u}^T\mathrm{u}=\left|\frac{\partial R}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial B}{\partial x}\right|^2$$

$$g_{yy}=\mathrm{v}\cdot\mathrm{v}=\mathrm{v}^T\mathrm{v}=\left|\frac{\partial R}{\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right|^2+\left|\frac{\partial B}{\partial y}\right|^2$$

$$g_{xy}=\mathrm{u}\cdot\mathrm{v}=\mathrm{u}^T\mathrm{v}=\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial B}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y}$$

推导出最大变换率方向 θ 和 (x,y) 点在 θ 方向上变化率的值 $\mathrm{F}(\theta)$

解：我们要求解最大变化率方向，即求解令 $|u\cos\theta+v\sin\theta|^2$ 取得最大值的 θ，由题目中的已知条件，可得以下式子：

$$\begin{aligned}|u\cos\theta+v\sin\theta|^2&=u^2\cos^2\theta+v^2\sin^2\theta+2uv\cos\theta\sin\theta\\&=\frac{1}{2}g_{xx}(1+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}g_{yy}(1-\cos 2\theta)+g_{xy}\sin 2\theta\\&=\frac{1}{2}(g_{xx}+g_{yy})+\frac{1}{2}\cos 2\theta(g_{xx}-g_{yy})+g_{xy}\sin 2\theta\end{aligned}$$

然后对于上式我们对 θ 求偏导，可得：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\theta}[\frac{1}{2}(g_{xx}+g_{yy})+\frac{1}{2}\cos 2\theta(g_{xx}-g_{yy})+g_{xy}\sin 2\theta]\\&=-\sin 2\theta(g_{xx}-g_{yy})+2\cos 2\theta g_{xy}\end{aligned}$$

令上面得到的结果等于 0，便可求出 θ 值：

$$-\sin 2\theta(g_{xx}-g_{yy})+2\cos 2\theta g_{xy}=0$$

$$\sin 2\theta(g_{xx}-g_{yy})=2\cos 2\theta g_{xy}$$

$$\therefore \tan 2\theta=\frac{2g_{xy}}{g_{xx}-g_{yy}}$$

$$\therefore \theta=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2g_{xy}}{g_{xx}-g_{yy}}$$

因此最大变化率的方向 θ 便已求出。

故而，最大变化率方向的变化率的值即为：

$$F_\theta(x,y)=\sqrt{\frac{1}{2}(g_{xx}+g_{yy})+\frac{1}{2}\cos 2\theta(g_{xx}-g_{yy})+g_{xy}\sin 2\theta}$$