

## 直线一级倒立摆的自抗扰控制方法及实现

王瑶为, 邢科新, 马剑, 张文安

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)



**摘要:** 针对直线一级倒立摆设计了线性自抗扰控制器(Liner Active Disturbance Rejection Controller, LADRC)。通过扩张状态观测器估计摆杆角度及角速度, 使用2个跟踪微分器分别得到小车位移和速度及参考位移和速度, 并将它们组合成控制量, 实现了对摆杆偏角与小车位移的良好控制。最后, 在固高公司生产的GLIP2001型直线一级倒立摆上设计了实验, 并验证了所设计的线性自抗扰控制方法的有效性与优越性。

**关键词:** 倒立摆; 线性自抗扰控制; 扩张状态观测器

**中图分类号:** TP18

**文献标识码:** A

### Implementation and Design of Active Disturbance Rejection Control for the Linear Inverted Pendulum

WANG Yao-wei, XING Ke-xing, MA Jian, ZHANG Wen-an

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

**Abstract:** In this paper, the linear active disturbance rejection controller (LADRC) is designed for the linear inverted pendulum. An extended state observer (ESO) is designed to estimate the pendulum angle and its angle velocity, and two tracking differentiators (TD) are designed, respectively, to obtain the car displacement and velocity and the reference displacement and velocity. Then, a linear control law is properly designed based on the ESO and TD to achieve satisfying performance in controlling both the pendulum angle and the car displacement. Finally, experiments are carried out on the GLIP2001 linear inverted pendulum produced by Googol company, and the experiments demonstrate the effectiveness and superiority of the proposed LADRC.

**Key words:** Inverted pendulum; linear active disturbance rejection control; extended state observer

### 1 引言

倒立摆是1个绝对不稳定、高阶次、多变量、强耦合的非线性系统。近年来, 新的控制方法不断出现, 人们试图通过倒立摆这样1个典型的控制对象, 来验证某种控制理论或方法的典型方案, 以及检验新的控制方法是否有较强的处理多变量、非线性和绝对不稳定系统的能力, 因此对倒立摆的研究具有重要的实际意义。已在倒立摆系统上实现的控制方法有很多, 如: 非线性控制<sup>[1]</sup>、变结构控制<sup>[2]</sup>、预测控制<sup>[3]</sup>、鲁棒控制<sup>[4]</sup>、模糊控制<sup>[5]</sup>等。

基于扩张状态观测器的自抗扰控制器(Active Disturbance Rejection Controller, ADRC)<sup>[6-7]</sup>吸收现代控制理论成果, 采取了PID误差反馈控制的核心

理念。其最突出的特征就是把作用于被控对象的所有不确定因素作用都归结为“总和扰动”, 并用对象的输入输出数据对其进行估计并给予补偿, 进而将控制对象变为普通的积分串联型系统, 实现动态系统的反馈线性化。它具有算法简单、抗干扰能力强等特点。

通常的自抗扰控制技术处理的对象是单输入单输出系统, 但直线一级小车倒立摆系统由摆杆偏角和小车位移2个二阶系统构成, 它们受同1个电机的输出脉冲控制, 2个系统相互耦合。因此, 难以用常规的自抗扰控制技术直接处理。注意到倒立摆系统控制的关键是对摆杆偏角的控制, 故控制律设计

收稿日期: 2015-06-24; 修回日期: 2016-11-04

基金项目: 国家自然科学基金(61202203、61573319); “钱江人才计划”项目(QJD1302012); 浙江省浙江工业大学信息工程学院重中之重学科开放基金资助(20140808)。

作者简介: 王瑶为(1991-), 男, 湖北大冶人, 研究生, 主要研究方向为自抗扰控制技术及其在运动控制系统中的应用等; 张文安(1982-), 男, 浙江温州人, 教授, 博士生导师, 主要从事网络化控制、多传感器信息融合估计等方面的教学与研究工作。

以摆杆偏角的控制为主,同时兼顾对小车位移的控制。

本文采用文献[8]提出的处理方法,设计倒立摆系统的线性自抗扰控制器,在固高科技(深圳)有限公司生产的GLIP2001型直线一级倒立摆<sup>[9]</sup>上实现了该算法,并与LQR方法的控制效果进行了比较。实验结果表明所设计的线性自抗扰控制方法的有效性与优越性。

## 2 倒立摆的数学模型

实验所采用的倒立摆系统为固高科技(深圳)有限公司的GLIP2001型直线一级倒立摆,该系统由水平移动的小车和安装在小车上的摆杆组成。直线一级倒立摆是1个单输入双输出的四阶、强耦合、非线性、欠驱动系统,其控制输入量为小车的加速度 $\ddot{x}_p$ ,输出量也即被控的变量为摆杆偏角 $\theta_p$ 和小车位移 $x_p$ 。

分别对小车和摆杆受力分析,在忽略了空气阻力和各种摩擦之后,可将直线一级倒立摆系统抽象成小车和匀质杆组成的系统,并可得到该系统的2个动力学方程:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x}_p + ml\ddot{\theta}_p \cos\theta_p + \mu\dot{x}_p = ml\dot{\theta}_p^2 \sin\theta_p + F \\ (ml^2 \cos(2\theta_p) - I)\ddot{\theta}_p + ml \cos\theta_p \ddot{x}_p = ml^2 \dot{\theta}_p^2 \sin(2\theta_p) - mgl \sin\theta_p \end{cases} \quad (1)$$

式中, $M$ 为小车质量, $m$ 为摆杆质量, $\mu$ 为摩擦系数, $l$ 为质心距节点的距离, $g$ 为重力加速度, $I$ 为摆的转动惯量, $F$ 为控制输入量产生对系统的作用力。

用 $u$ 来表示倒立摆的控制输入量,即小车的加速度 $\ddot{x}_p$ ,且 $F = (M+m)u$ ,由式(1)可得直线一级倒立摆的状态空间模型为

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \ddot{x}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-agb + \mu c \dot{x}_p - ml \dot{\theta}_p^2 bc + al \dot{\theta}_p d - abu}{l(ae - mc^2)} \\ \frac{mgbc - e(ml \dot{\theta}_p^2 b + au - \mu \dot{x}_p) - ml \dot{\theta}_p d c}{ae - mc^2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中, $a=M+m$ , $b=\sin(\theta_p)$ , $c=\cos(\theta_p)$ , $d=\sin(2\theta_p)$ , $e=\cos(2\theta_p)-1/3$ 。

用 $\theta_v$ 表示摆杆角速度, $x_v$ 表示小车位移速度,则由式(2)可得:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_p \\ \dot{\theta}_v \\ \dot{x}_p \\ \dot{x}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_v \\ \frac{-agb + \mu c x_v - ml \theta_v^2 bc + al \theta_v d - abu}{l(ae - mc^2)} \\ x_v \\ \frac{mgbc - e(ml \theta_v^2 b + au - \mu x_v) - ml \theta_v d c}{ae - mc^2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

## 3 线性自抗扰控制器(LADRC)设计

注意到倒立摆控制的关键是对摆偏角的控制,同时兼顾对小车位移的控制,因此控制律设计以摆杆偏角的控制为主。参考文献[8]的设计方法,在典型自抗扰控制算法基础上,增加1个跟踪微分器并将控制律由2个输出量与设定值的误差及其微分组合的方法,突破了典型自抗扰控制算法只适用于单输入单输出系统的限制,实现摆杆偏角和小车位移的稳定控制。设计的基于线性自抗扰控制方法的直线一级倒立摆控制系统结构,如图1所示。

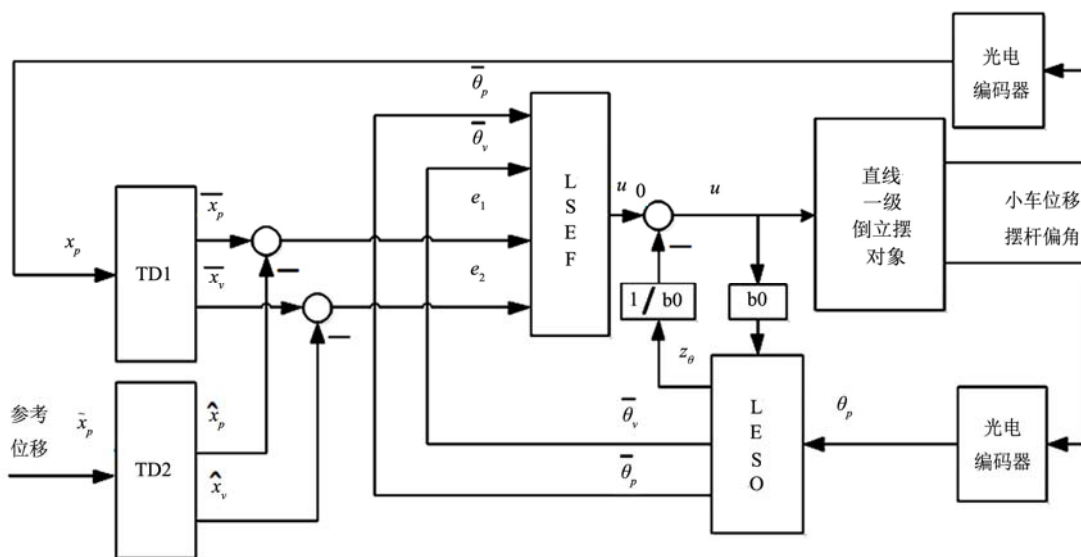


图1 基于线性自抗扰控制方法的直线一级倒立摆系统结构图

Fig. 1 The structure diagram of the linear inverted pendulum based on LADRC

设计的线性自抗扰控制器包括三部分。第一部分为跟踪微分器。由于实际可测的只有小车位移 $x_p$

与摆杆偏角  $\theta_p$ , 而所设计的控制律所需要小车位移  $x_p$  与小车位移参考值  $\bar{x}_p$  的误差及其微分。为此, 设计线性跟踪微分器 TD1, 其形式为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_p = \bar{x}_v, \\ \dot{\bar{x}}_v = -1.76r_1\bar{x}_v - r_1(\bar{x}_p - x_p) \end{cases} \quad (4)$$

式中,  $x_p$  为编码器测得的小车实际位移,  $\bar{x}_p$  为通过调节  $r_1$  的大小对  $x_p$  安排适当的过渡过程也即小车位移的跟踪值,  $\bar{x}_v$  为  $x_p$  的微分即小车速度估计值。所设计的 TD1 不仅可以获得  $\bar{x}_p$  和  $\bar{x}_v$ , 还具有一定的滤波功能。再设计 1 个与式(4)形式相同的线性跟踪微分器 TD2, 记可调参数为  $r_2$ , 设计该跟踪微分器的目的是为了得到小车参考位移  $\bar{x}_p$  的跟踪值  $\hat{x}_p$  与其微分值  $\hat{x}_v$ 。

第二部分为扩张状态观测器, 目的是为了得到摆杆偏角的跟踪值  $\bar{\theta}_p$ , 微分值  $\bar{\theta}_v$  与“总和扰动”  $Z_\theta$  其中, 摆杆偏角的跟踪值  $\bar{\theta}_p$  与微分值  $\bar{\theta}_v$  作为控制律的一部分,  $Z_\theta$  作为摆杆偏角“总和扰动”的实时估计。

对摆偏角设计的线性扩张状态观测器形式为

$$\begin{cases} e = \bar{\theta}_p - \theta_p \\ \dot{\bar{\theta}}_p = \bar{\theta}_v - \beta_{01}e \\ \dot{\bar{\theta}}_v = Z_\theta - \beta_{02}e + b_0u \\ \dot{Z}_\theta = -\beta_{03}e \end{cases} \quad (5)$$

求得式(5)所示的线性扩张状态观测器的特征方程为

$$s^3 + \beta_{01}s^2 + \beta_{02}s + \beta_{03} \quad (6)$$

将式(6)改写为理想特征方程  $(s+w)^3$ , 于是把参数  $\beta_{01}, \beta_{02}, \beta_{03}$  配置成  $3w, 3w^2, w^3$  形式,  $w$  称为观测器带宽<sup>[10]</sup>。其中的  $w$  根据系统带宽的要求确定或在线整定, 一般情况下  $w$  的适应范围很宽, 因此比较容易调整出合适的  $w$ 。

由上述分析可将式(5)改写为如下。

$$\begin{cases} e = \bar{\theta}_p - \theta_p \\ \dot{\bar{\theta}}_p = \bar{\theta}_v - 3we \\ \dot{\bar{\theta}}_v = Z_\theta - 3w^2e + b_0u \\ \dot{Z}_\theta = -w^3e \end{cases} \quad (7)$$

第三部分为控制律, 其形式如下。

$$\begin{cases} u_0 = k_1\bar{\theta}_p + k_2\bar{\theta}_v + k_3(\bar{x}_p - \hat{x}_p) + k_4(\bar{x}_v - \hat{x}_v) \\ u = u_0 - Z_\theta / b_0 \end{cases} \quad (8)$$

式中,  $k_i, i=1,2,3,4$  为控制器增益, 它们的符号以构成负反馈为准。

## 4 仿真实验

采用的直线一级倒立摆系统参数为  $l=0.25$  m,  $M=1.096$  kg,  $m=0.109$  kg,  $b=0.1$  N/m/sec,  $g=9.8$  m/s<sup>2</sup>,  $I=0.002$  23 kg\*m\*m, 取采样周期  $h=0.005$  s, 采用的自抗扰控制器参数如下。

$$\begin{cases} r_1 = 40, r_2 = 60, b_0 = -3, w = 70 \\ k_1 = 45, k_2 = 9, k_3 = 0.32, k_4 = 6.5 \end{cases} \quad (9)$$

式中,  $r_1$  和  $r_2$  决定系统跟踪目标的快慢, 根据系统响应的快慢需求预先调试得到;  $b_0$  近似为系统稳定时控制输入放大系数的近似值。易知控制律采用 2 个 PD 控制组合, 因此整个调参过程中需要调节的只有  $k_1, k_2, k_3, k_4$  这 4 个量, 它们符号以构成负反馈为准, 由 PID 调参原则, 使得系统响应最优<sup>[8]</sup>。

在系统稳定运行 2 s 后, 对小车给出  $\bar{x}_p = 0.2$  m 的参考位移, 控制的摆杆偏角、小车位移以及控制量的仿真曲线, 如图 2 所示。

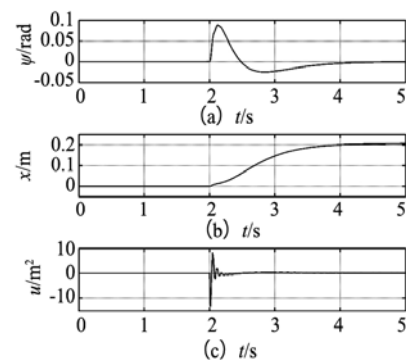


图2 摆杆偏角、小车位移以及控制量的曲线  
Fig. 2 The trajectory of the angle, the car position and the control input

图 2(a)表明摆杆偏角偏量微小且近 3 s 就回归稳定; 图 2(b)表明小车位移经过 2 s 进入稳态, 但有一定的稳态误差, 这是因为小车位移控制未设计能实时估计小车位移“总和扰动”的干扰观测器, 存在一定的误差或干扰。仿真结果表明系统具有良好的响应, LADRC 方法可以实现对倒立摆系统的稳定控制。

## 5 实验研究

实验中取采样周期均为  $h=0.005$  s, 所用的 LADRC 控制器参数由式(9)所定, LQR 方法中所整定的控制器参数为

$$k_1=20.360\ 7, k_2=15.513\ 3, k_3=55.963\ 3, k_4=7.900\ 2。$$

在对象参数相对准确的情况下, 实验结果, 如图 3 所示。

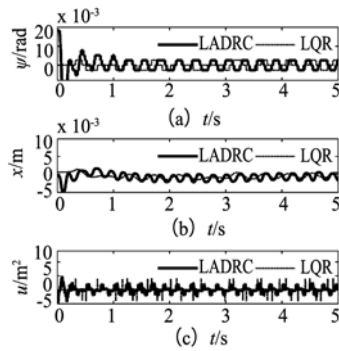


图3 基于 LADRC 方法与 LQR 方法的摆杆偏角、小车位移以及控制量的比较曲线

Fig. 3 Comparison of the angle, the car position and the control input based on LADRC and LQR

LQR 方法与 LADRC 方法的控制效果几乎一样, 图 3(a)表明两者的摆杆偏角均控制得非常好, 图 3(b)表明两者的小车位移控制均有微小的误差; 图 3(c)表明 LADRC 方法的控制量比 LQR 方法控制量小, 用较小的控制量达到和 LQR 方法一样的控制效果。

在系统稳定运行 2 s 后, 给摆杆 0.1 rad 幅度的脉冲干扰, 即给摆杆偏 18° 的干扰, LQR 方法与 LADRC 方法抗干扰性有显著区别, 如图 4 所示。

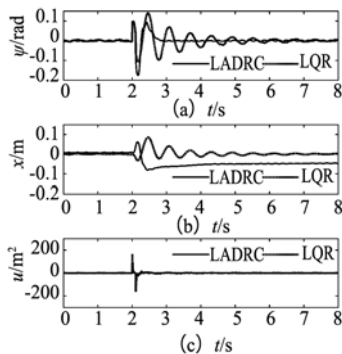


图4 加干扰的摆杆偏角、小车位移以及控制量的比较曲线

Fig. 4 Comparison of the angle, the car position and the control input by adding disturbances

图 4(a)、(b)表明 LQR 方法需要将近 4 s 后, 系统才能回到平衡态, 而 LADRC 方法只需约 0.5 s 就能回到平衡态, 但小车位移干扰前与干扰后均未能稳定在参考位置, 这是因为对小车位移未设计抗干扰观测器, 未能实时估计出小车位移的“总和扰动”, 存在一定的误差; 图 4(c)表明在 2 s 时 LQR 方法的控制量明显比 LADRC 方法大, 易产生震荡。说明 LADRC 方法较 LQR 方法有更好的抗干扰能力。

在实验对象参数改变(摆杆顶端绑定 50 g 重物即改变摆杆的质量  $m$ , 其他参数不变)情况下, LQR 方法与 LADRC 方法抗干扰能力有显著区别, 如图

5 所示。

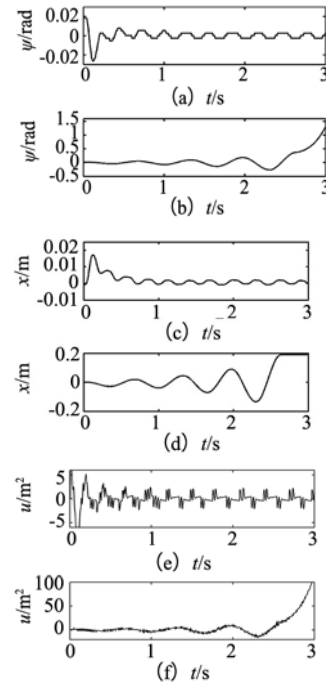


图5 实验对象参数改变时, LADRC 方法与 LQR 方法的摆杆偏角、小车位移以及控制量的比较曲线

Fig. 5 Comparison of the angle, the car position and the control variables between LADRC and LQR when pendulum parameters are changed

图 5(b)、(d)、(f)分别表示 LQR 方法控制的系统摆杆偏角、小车位移和控制量大小, 容易看到系统已发散, 而图 5(a)、(c)、(e)分别表示 LADRC 方法控制的系统摆杆偏角、小车位移和控制量大小, 容易观察到 LADRC 方法依然有很好的控制效果, 说明 LADRC 方法较 LQR 方法有更强的鲁棒性。

LADRC 方法在倒立摆参数改变前后的控制效果, 如图 6 所示。

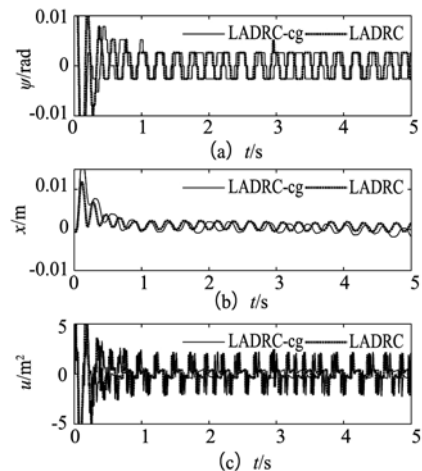


图6 实验对象参数改变前后的 LADRC 方法控制效果对比结果

Fig. 6 Comparison of experiments with original parameters and changed parameters for LADRC based control

由实验结果可看出, 对象参数改变前后的控制效果相当, 因此, LADRC 方法对被控对象的参数摄动具有很好的鲁棒性。

## 6 结 论

本文设计并实现了直线一级倒立摆的线性自抗扰控制器。仿真与实验均表明, 自抗扰控制方法具有良好的抗干扰能力以及对被控对象参数摄动的鲁棒性, 对倒立摆这样的单输入多输出、不稳定、非线性、强耦合和欠驱动的系统能够实现有效的控制。设计存在的不足在于, 小车位移未能达到和角度一样的控制效果, 有待进一步改进。

## 参考文献(References)

- [1] 唐慧, 郭小定, 刘章, 等. 基于多指标非线性控制的单级倒立摆控制[J]. 应用科技, 2013, 40(5): 44-47.  
Tang H, Guo X D, Liu Z, et al. Control of a single inverted pendulum based on multi-index nonlinear method[J]. Applied Science and Technology, 2013, 40(5): 44-47.
- [2] 刘慧文, 王生铁, 等. 二级倒立摆的滑模变结构控制[J]. 内蒙古工业大学学报(自然科学版), 2014, 33(2): 117-124.  
Liu H W, Wang S T, et al. Slide mode variable structure control for double inverted pendulum[J]. Journal of Inner Mongolia University of Technology(Natural Science Edition), 2014, 33(2): 117-124.
- [3] 王丹. 直线二级倒立摆稳摆的建模与预测控制研究[D]. 长沙: 中南大学, 2014.  
Wang D. Research on modeling and model predictive control for stabilization of double inverted pendulum[D]. Changsha: Central South University, 2014.
- [4] 杜壁秀. 倒立摆系统的鲁棒  $H_{\infty}$  加权混合控制[J]. 现代电子技术, 2013, 36(2): 77-82.  
Du B X. Robust  $H_{\infty}$  weighted hybrid control for inverted pendulum system[J]. Modern Electronics Technique, 2013, 36(2): 77-82.
- [5] 黄彦海, 张镭, 张朋朋. 单级倒立摆模糊控制研究[J]. 制造业自动化, 2015, 31(1): 1-10.  
Huang Y H, Zhang L, Zhang P P. Research on fuzzy control of single inverted pendulum[J]. Manufacturing Automation, 2015, 31(1): 1-10.
- [6] 胡琼, 费庆, 等. 基于自抗扰控制技术的实时飞行仿真研究[J]. 控制工程, 2014, 21(4): 537-546.  
Hu Q, Fei Q, et al. Real-time simulation of flight control system based on ADRC Technique[J]. Control Engineering of China, 2014, 21(4): 537-546.
- [7] 韩京清. 自抗扰控制器及其应用[J]. 控制与决策, 1998, 13(1): 19-23.  
Hang J. Active disturbances rejection controller and its application [J]. Control and Decision, 1998, 13(1): 19-23.
- [8] 武利强, 韩京清. 直线型倒立摆的自抗扰控制设计方案[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 665-669, 688.  
Wu L Q, Han J Q. Active disturbance rejection controller scheme for the linear inverted pendulum[J]. Control Theory and Applications, 2004, 21(5): 665-669, 688.
- [9] 固高科技公司. 直线倒立摆系统 GLIP 系列用户手册和实验指导书[R]. 深圳: 固高科技公司, 2012.  
Googol company. linear inverted pendulum GLIP series user instruction manuals and experiment[R]. Shenzhen: Googol company, 2012.
- [10] Gao Z Q. Scaling and bandwidth-parameterization based on control tuning[C]. Proceedings of the American Control Conference. Denver, Colorado: IEEE, 2003: 4989-499.