



# 机器人学(第三版)

蔡自兴 主编

中南大学

2016

### 2.1 位姿和坐标系描述

#### ■ 位置描述

$${}^A\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

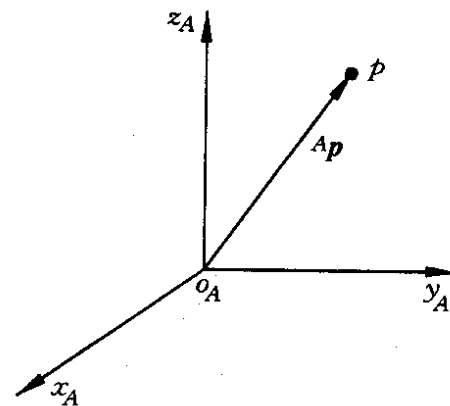


图2.1 位置表示

#### ■ 方位描述

$${}^A_B\mathbf{R} = \begin{bmatrix} {}^A x_B & {}^A y_B & {}^A z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

## 2.1 位姿和坐标系描述

### ■ 方位描述

$$R(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$R(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$R(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

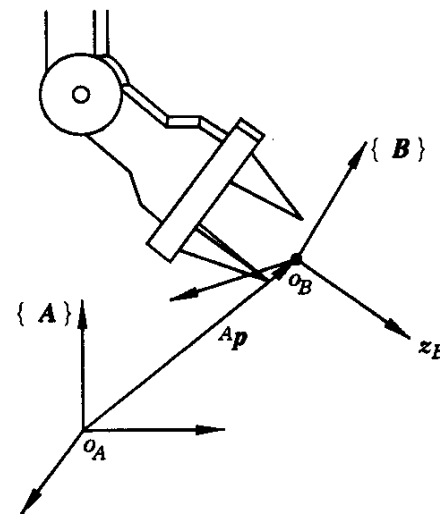


图2.2 方位表示

## 2.1 位姿和坐标系描述

### ■ 位姿描述

相对参考系，坐标系的原点位置和坐标轴的方位，分别由位置矢量和旋转矩阵描述。这样，刚体的位姿可由坐标系来描述，即有

$$\{B\} = \left\{ {}^A_B R \quad {}^A p_{Bo} \right\} \quad (2.9)$$

## 2.2 平移和旋转坐标系映射

### ■ 平移坐标变换

$${}^A \mathbf{p} = {}^B \mathbf{p} + {}^A \mathbf{p}_{B_0} \quad (2.10)$$

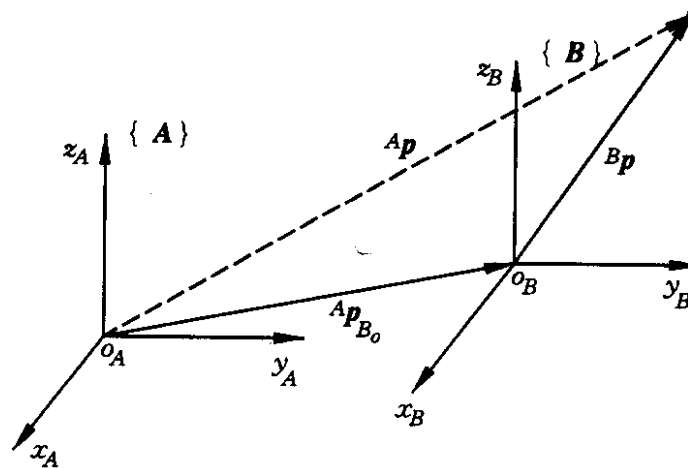


图2.3 平移变换

## 2.2 平移和旋转坐标系映射

### ■ 旋转坐标变换

$${}^A \mathbf{p} = {}^A R^B \mathbf{p} \quad (2.11)$$

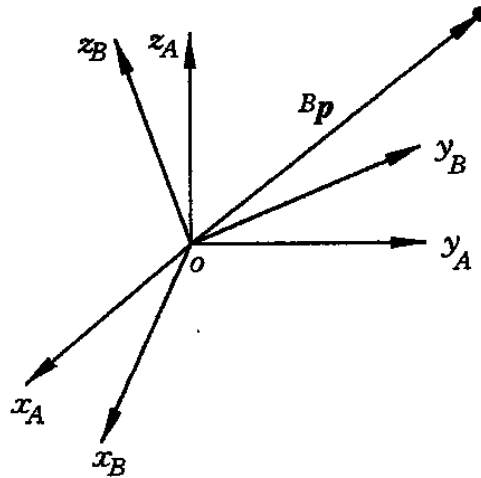


图2.4 旋转变换

## 2.2 平移和旋转坐标系映射

### ■ 复合变换

$${}^A \mathbf{p} = {}^A R^B \mathbf{p} + {}^A \mathbf{p}_{B0} \quad (2.13)$$

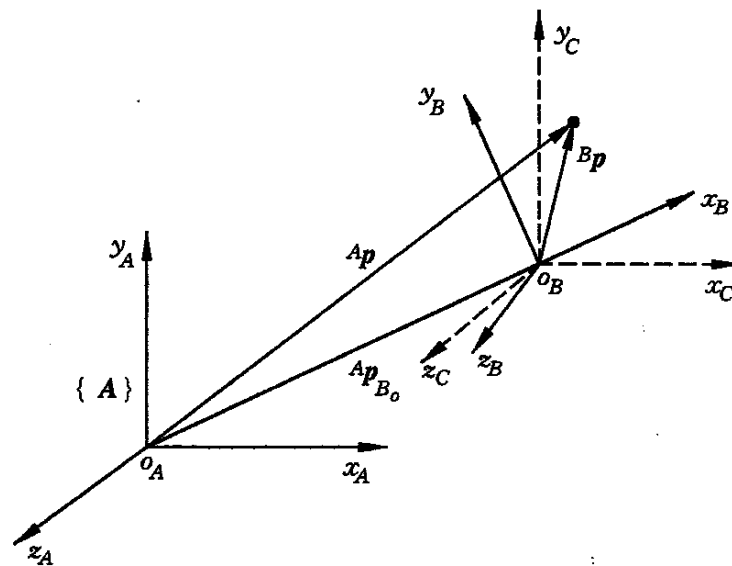


图2.5 复合变换

## 2.3 平移和旋转齐次坐标变换

### ■ 齐次变换

$$\begin{bmatrix} {}^A \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^A_B R & {}^A \mathbf{p}_{Bo} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^B \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

矩阵形式:

$${}^A \mathbf{p} = {}^A_B T {}^B \mathbf{p} \quad (2.15)$$



## 2.3 平移和旋转齐次坐标变换

### ■ 齐次变换

规定两矢量的点积为一标量

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.17)$$

而两矢量的交积为另一个与此两相乘矢量所决定的平面垂直的矢量

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} \quad (2.18)$$

## 2.3 平移和旋转齐次坐标变换

### ■ 齐次变换

两矢量的交积

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.19)$$



## 2.3 平移和旋转齐次坐标变换

### ■ 平移齐次坐标变换

$$Trans(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

## 2.3 平移和旋转齐次坐标变换

### ■ 旋转齐次坐标变换

$$Rot(x, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta & 0 \\ 0 & s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$Rot(y, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

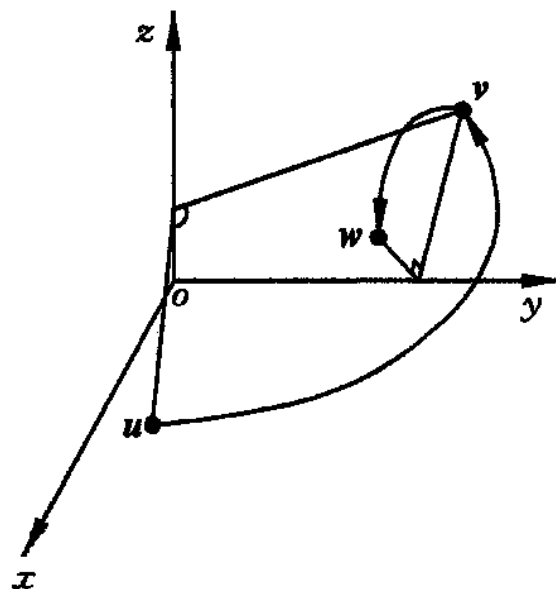


## 2.3 平移和旋转齐次坐标变换

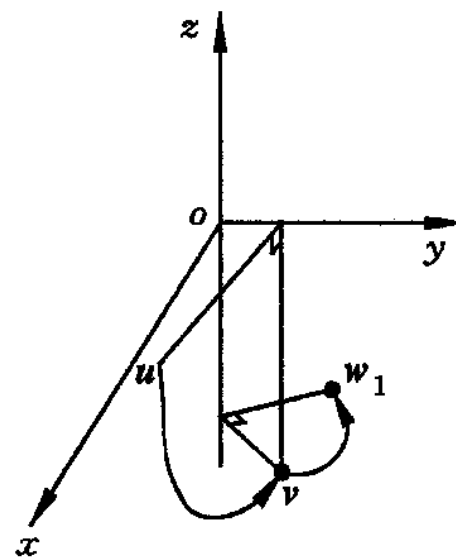
### ■ 旋转齐次坐标变换

$$Rot(z, \theta) = \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

## 2.3 平移和旋转齐次坐标变换



(a)



(b)

图2.6 旋转次序对变换结果的影响

## 2.3 平移和旋转齐次坐标变换



把旋转变换与平移变换结合起来，变换结果如图2.7所示。

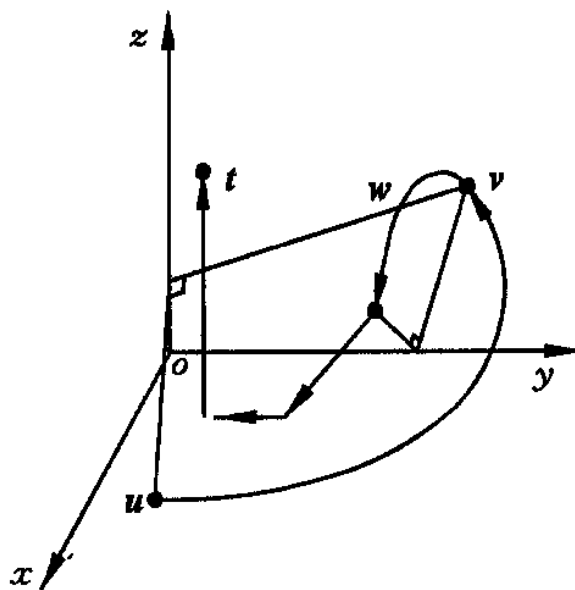


图2.7 平移变换和旋转变换的组合

## 2.4 物体的变换和变换方程

### ■ 物体位置描述

我们可以用描述空间一点的变换方法来描述物体在空间的位置和方向。例如，图2.8(a)所示物体可由固定该物体的坐标系内的六个点来表示。我们可对上述楔形物体的六个点变换如下：

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 6 & 6 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



## 2.4 物体的变换和变换方程

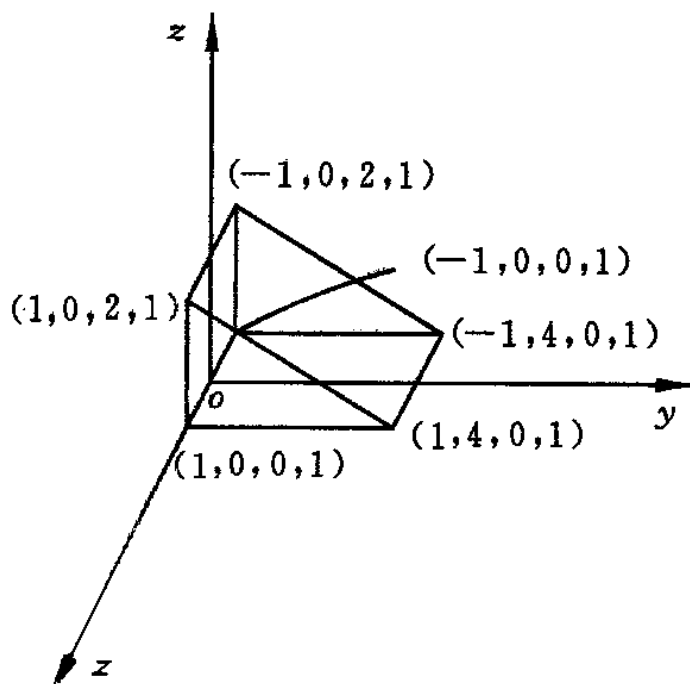
### ■ 齐次变换的逆变换

$${}^B \mathbf{p} = {}^B T^C \mathbf{p} \quad (2.27)$$

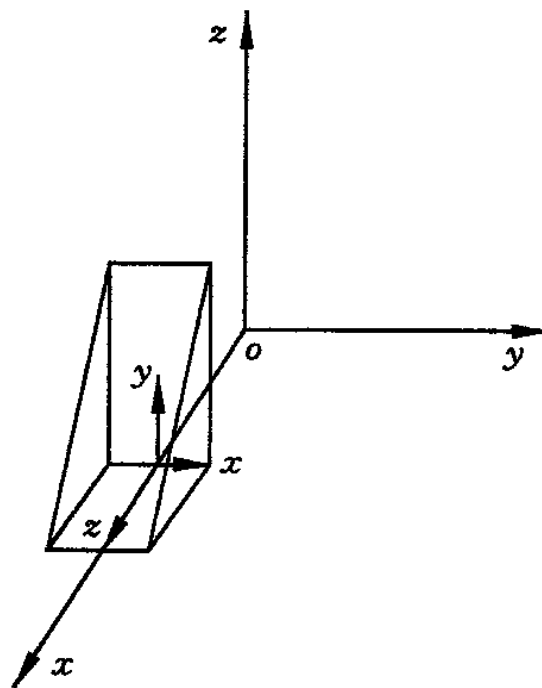
$${}^A \mathbf{p} = {}^A T^B {}^B \mathbf{p} = {}^A T^B {}^B T^C {}^C \mathbf{p} \quad (2.28)$$

$${}^A T^C = {}^A T^B {}^B T^C \quad (2.29)$$

## 2.4 物体的变换和变换方程



(a) 变换前的坐标系



(b) 变换后的坐标系

图2.8 对楔形物体的变换

## 2.4 物体的变换和变换方程

### ■ 齐次变换的逆变换

对于给定的  ${}^A_B T$ ，求  ${}^B_A T$ ，等价于给定  ${}^A_B R$  和  ${}^A \mathbf{p}_{Bo}$ ，  
计算  ${}^A_B R$  和  ${}^A \mathbf{p}_{Ao}$

$${}^B_A T = \begin{bmatrix} {}^A_B R^T & -{}^A_B R^{TA} \mathbf{p}_{Bo} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

## 2.4 物体的变换和变换方程

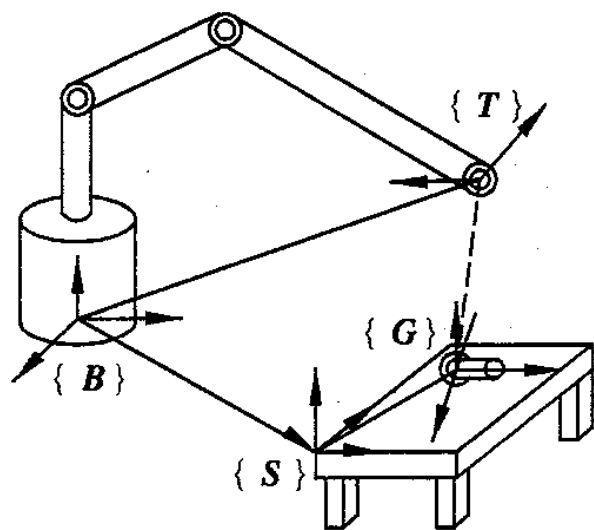
### ■ 变换方程初步

必须建立机器人各连杆之间，机器人与周围环境之间的运动关系，用于描述机器人的操作。要规定各种坐标系来描述机器人与环境的相对位姿关系。在图2.9(a)中，位姿关系可用相应的齐次变换来描述，机器人控制和规划的目标与其他变换之间的关系可用空间尺寸链（有向变换图）来表示，如图2.9(b)所示。

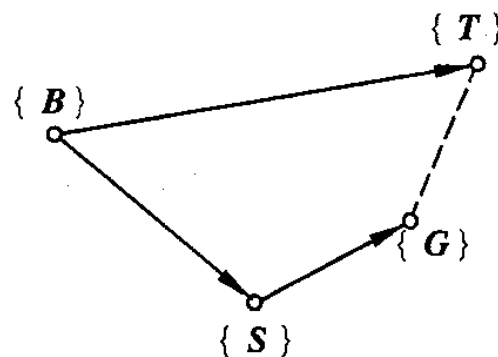
$${}^B_T T = {}^B_S T {}^S_G T {}^G_T T \quad (2.37)$$

## 2.4 物体的变换和变换方程

### ■ 变换方程初步



(a) 机械手与环境间的运动关系



(b) 对应的有向变换图

图2.9 变换方程及其有向变换图

## 2.5 通用旋转变换

### ■ 通用旋转变换公式

$$C = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{f} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} \quad (2.39)$$



## 2.5 通用旋转变换

### ■ 通用旋转变换公式

绕矢量  $f$  旋转等价于绕坐标系  $\{C\}$  的轴旋转

$$Rot(f, \theta) = Rot(c_z, \theta) \quad (2.40)$$

## 2.5 通用旋转变换

- 通用旋转变换公式  
因为

$$T = CS \quad (2.41)$$

$$S = C^{-1}T \quad (2.42)$$

$T$  绕  $f$  旋转等价于  $S$  绕坐标系  $\{C\}$  的轴旋转:

$$Rot(f, \theta)T = C Rot(z, \theta)S$$

$$Rot(f, \theta)T = C Rot(z, \theta)C^{-1}T$$



## 2.5 通用旋转变换



- 通用旋转变换公式  
可得

$$Rot(\mathbf{f}, \theta) = C Rot(\mathbf{z}, \theta) C^{-1} \quad (2.43)$$

$$Rot(\mathbf{f}, \theta) = \begin{bmatrix} f_x f_x \text{vers} \theta + c\theta & f_y f_x \text{vers} \theta - f_z s\theta & f_z f_x \text{vers} \theta + f_y s\theta & 0 \\ f_x f_y \text{vers} \theta + f_z s\theta & f_y f_y \text{vers} \theta + c\theta & f_z f_y \text{vers} \theta - f_x s\theta & 0 \\ f_x f_z \text{vers} \theta + f_z s\theta & f_y f_z \text{vers} \theta + f_x s\theta & f_z f_z \text{vers} \theta + c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

## 2.5 通用旋转变换

### ■ 等效转角与转轴

$$R = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

## 2.5 通用旋转变换

### ■ 等效转角与转轴

令  $R = Rot(f, \theta)$ , 即 :

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x f_x \text{vers} \theta + c \theta & f_y f_x \text{vers} \theta - f_z s \theta & f_z f_x \text{vers} \theta + f_y s \theta & 0 \\ f_x f_y \text{vers} \theta + f_z s \theta & f_y f_y \text{vers} \theta + c \theta & f_z f_y \text{vers} \theta - f_x s \theta & 0 \\ f_x f_z \text{vers} \theta - f_y s \theta & f_y f_z \text{vers} \theta + f_x s \theta & f_z f_z \text{vers} \theta + c \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$



## 2.5 通用旋转变换

### ■ 等效转角与转轴

$$\begin{aligned}f_x &= (o_z - a_y) / 2s\theta \\f_y &= (a_x - n_z) / 2s\theta \\f_z &= (n_y - n_x) / 2s\theta\end{aligned}\tag{2.52}$$



- 机器人的数学基础
  - 空间任意点的位置和姿态的表示
  - 坐标和齐次坐标变换
  - 物体的变换与逆变换
  - 通用旋转变换
- 为研究机器人运动学、动力学、控制建模提供了数学工具。