第2章　线性定常系统的能控性

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 2.5 线性定常离散系统的能控性
   - 2.5.1 能控性与能达性
   - 2.5.2 能控子空间
   - 2.5.3 能控性判据
   - 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

1 2.5 线性定常离散系统的能控性

2.5 线性定常离散系统的能控性

- 线性定常离散系统的能控性概念，本质上和线性定常连续系统的能控性概念没有差别

1. 2.5 线性定常离散系统的能控性
   - 2.5.1 能控性与能达性
   - 2.5.2 能控子空间
   - 2.5.3 能控性判据
   - 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

2.5.1 能控性与能达性

- 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \; x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中, $x(k)$为n维状态向量, $u(k)$为p维输入向量, G, H分别为$n \times n$, $n \times p$常阵

2.5.1 能控性与能达性

- 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k),\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中, $x(k)$为n维状态向量, $u(k)$为p维输入向量, G, H分别为$n \times n$, $n \times p$常阵

定义

定义2.4 对于系统(1), 给定非零初始状态x_0

- 若存在$u(k)$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得$x(n) = 0$, 则称x_0为能控状态

2.5.1 能控性与能达性

- 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k),\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中, $x(k)$为n维状态向量, $u(k)$为p维输入向量, G, H分别为$n \times n$, $n \times p$常阵

定义

定义2.4 对于系统(1), 给定非零初始状态x_0

- 若存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得$x(n) = 0$, 则称$x_0$为能控状态
- 若状态空间中所有的非零状态都是能控状态, 则称系统(1)(或系统(G, H))是(完全)能控的

2.5.1 能控性与能达性

- 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k),\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中, $x(k)$为n维状态向量, $u(k)$为p维输入向量, G, H分别为$n \times n$, $n \times p$常阵

定义

定义2.4 对于系统(1), 给定非零初始状态x_0

- 若存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得$x(n) = 0$, 则称$x_0$为能控状态
- 若状态空间中所有的非零状态都是能控状态, 则称系统(1)(或系统(G, H))是(完全)能控的
- 若存在一个或一些非零状态是不能控的, 则称系统(G, H)是不完全能控的

- 考虑线性定常离散系统

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k),\ x(0) = x_0, \tag{1}$$

其中, $x(k)$为n维状态向量, $u(k)$为p维输入向量, G, H分别为$n \times n$, $n \times p$常阵

定义

定义2.4 对于系统(1), 给定非零初始状态x_0

- 若存在$u(k)$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得$x(n) = 0$, 则称x_0为能控状态
- 若状态空间中所有的非零状态都是能控状态, 则称系统(1)(或系统(G, H))是(完全)能控的
- 若存在一个或一些非零状态是不能控的, 则称系统(G, H)是不完全能控的
- 若所有的非零状态都是不能控的, 则称系统(G, H)是完全不能控的

定义

定义2.5 对于离散系统(1)，给定非零状态x_n，若存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$，使得$x_0 = 0$时，有$x(n) = x_n$，则称$x_n$为能达状态

定义

定义2.5 对于离散系统(1), 给定非零状态x_n, 若存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得$x_0 = 0$时, 有$x(n) = x_n$, 则称$x_n$为能达状态

注: 对于线性定常离散系统, 其能控性和能达性并不是等价的

定义

定义2.5 对于离散系统(1), 给定非零状态x_n, 若存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得$x_0 = 0$时, 有$x(n) = x_n$, 则称$x_n$为能达状态

注: 对于线性定常离散系统, 其能控性和能达性并不是等价的

定理

定理2.14 线性定常离散系统(1)的能控性和能达性等价的充分必要条件是系统矩阵G是非奇异的.

2.5.1 能控性与能达性

证明 先考虑能控性.

证明 先考虑能控性. 对能控状态x_0, 按定义, 存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} H u(i), \tag{2}$$

证明 先考虑能控性. 对能控状态x_0, 按定义, 存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} Hu(i), \tag{2}$$

- 从而可得

$$G^n x_0 = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} Hu(i). \tag{3}$$

证明 先考虑能控性. 对能控状态x_0, 按定义, 存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} H u(i), \tag{2}$$

- 从而可得

$$G^n x_0 = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} H u(i). \tag{3}$$

- 再考虑能达性.

证明 先考虑能控性. 对能控状态x_0, 按定义, 存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} H u(i), \tag{2}$$

- 从而可得

$$G^n x_0 = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} H u(i). \tag{3}$$

- 再考虑能达性. 对能达状态x_n, 按定义, 存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使成立

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} H u(i). \tag{4}$$

证明 先考虑能控性. 对能控状态x_0, 按定义, 存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} Hu(i), \tag{2}$$

- 从而可得

$$G^n x_0 = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} Hu(i). \tag{3}$$

- 再考虑能达性. 对能达状态x_n, 按定义, 存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使成立

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} Hu(i). \tag{4}$$

- 将(3), (4)中的控制$u(k)$取为同一控制, 则有

$$x_n = -G^n x_0. \tag{5}$$

证明 先考虑能控性. 对能控状态x_0, 按定义, 存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使得

$$0 = x(n) = G^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} H u(i), \tag{2}$$

- 从而可得

$$G^n x_0 = -\sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} H u(i). \tag{3}$$

- 再考虑能达性. 对能达状态x_n, 按定义, 存在$u(k), k = 0, 1, \cdots, n-1$, 使成立

$$x_n = \sum_{i=0}^{n-1} G^{n-i-1} H u(i). \tag{4}$$

- 将(3), (4)中的控制$u(k)$取为同一控制, 则有

$$x_n = -G^n x_0. \tag{5}$$

➥ 显然, 当且仅当G非奇异时, 能控状态$x(0)$与能达状态$x(n)$一一对应, 即能控性与能达性等价, 结论得证 ■

2.5.1 能控性与能达性

- 若系统(1)是相应连续系统的离散化模型, T为采样周期, 则$G = e^{AT}$为非奇异

2.5.1 能控性与能达性

- 若系统(1)是相应连续系统的离散化模型, T为采样周期, 则$G = e^{AT}$为非奇异

➥ 故有如下结论

推论

推论2.4 线性定常连续系统的以T为周期的离散化系统的能控性与能达性等价.

1. 2.5 线性定常离散系统的能控性
   - 2.5.1 能控性与能达性
   - 2.5.2 能控子空间
   - 2.5.3 能控性判据
   - 2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

考察离散系统(1)

2.5.2 能控子空间

考察离散系统(1)

- 若x_0为能控状态, 则根据能控性的定义, 知(2)成立, 从而可得(3), 即

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

2.5.2 能控子空间

考察离散系统(1)

- 若x_0为能控状态, 则根据能控性的定义, 知(2)成立, 从而可得(3), 即

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

- 容易验证, 系统(1)能控状态的全体构成欧式空间$\mathbb{R}^n$的一个线性子空间, 称为能控性子空间, 记为X_C

2.5.2 能控子空间

考察离散系统(1)

- 若x_0为能控状态, 则根据能控性的定义, 知(2)成立, 从而可得(3), 即

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

- 容易验证, 系统(1)能控状态的全体构成欧式空间$\mathbb{R}^n$的一个线性子空间, 称为**能控性子空间, 记为X_C**

➥ 下面, 分G非奇异、G奇异两种情况对X_C进行讨论

2.5.2 能控子空间

(1) G非奇异情形

(1) G非奇异情形

- 若G非奇异, 则由(6)可导出

$$x_0 = -\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right]\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

2.5.2 能控子空间

(1) G非奇异情形

- 若G非奇异, 则由(6)可导出

$$x_0 = -\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right]\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

➥ 于是, 我们有如下结论

定理

定理2.15 若G非奇异, 则系统(1)的能控子空间X_C为

$$X_C = span\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right]. \qquad (8)$$

(1) G非奇异情形

- 若G非奇异, 则由(6)可导出

$$x_0 = -\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right]\begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

➥ 于是, 我们有如下结论

定理

定理2.15 若G非奇异, 则系统(1)的能控子空间X_C为

$$X_C = span\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right]. \qquad (8)$$

证明 由(7), 显然

$$X_C \subseteq span\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right]. \qquad (9)$$

反之，若

$$x_0 \in span\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix},$$

2.5.2 能控子空间

反之，若

$$x_0 \in span\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix},$$

- 则

$$x_0 = \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

反之，若

$$x_0 \in span\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix},$$

- 则

$$x_0 = \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

- 根据(10), 记

$$u(n-1) = -\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_p \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad u(0) = -\begin{bmatrix} \xi_{(n-1)p+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

- 由(10)和(11), 即得

$$x_0 = -\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

- 由(10)和(11), 即得

$$x_0 = -\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

- 这证明$x_0 \in X_C$, 故有

$$span\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \subseteq X_C. \tag{13}$$

- 由(10)和(11), 即得

$$x_0 = -\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

- 这证明$x_0 \in X_C$, 故有

$$span\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \subseteq X_C. \tag{13}$$

➥ 由(9), (13)可得定理结论成立 ■

2.5.2 能控子空间

- 利用凯莱-哈密尔顿定理, 容易验证下面结论成立,

$$\begin{aligned} & span\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right] \\ & = span\left[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

2.5.2 能控子空间

- 利用凯莱-哈密尔顿定理, 容易验证下面结论成立,

$$
\begin{aligned}
& span\left[G^{-n}H \quad G^{-(n-1)}H \quad \cdots \quad G^{-1}H\right] \\
&= span\left[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H\right].
\end{aligned}
\tag{14}
$$

➥ 进而, 根据定理2.15, 可得如下定理

定理

定理2.16 若G非奇异, 则离散系统(1)的能控子空间X_C为

$$X_C = span\left[H \quad GH \quad \cdots \quad G^{n-1}H\right]. \tag{15}$$

2.5.2 能控子空间

- 利用凯莱-哈密尔顿定理, 容易验证下面结论成立,

$$\begin{aligned} & span\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \\ & = span\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

➥ 进而, 根据定理2.15, 可得如下定理

定理

定理2.16 若G非奇异, 则离散系统(1)的能控子空间X_C为

$$X_C = span\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}. \tag{15}$$

根据定理2.16, 显然有如下结论.

推论

推论2.5 若G非奇异, 则离散系统(1)的能控子空间X_C为G的不变子空间.

(2) G奇异情形

(2) G奇异情形

- 若G奇异, 则能控状态x_0满足(6), 即

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

(2) G奇异情形

- 若G奇异, 则能控状态x_0满足(6), 即

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

➥ 于是我们有如下结论

定理

定理2.17 若G奇异, 则系统(1)的能控子空间X_C为

$$X_C = \left\{ x_0 \middle| G^n x_0 \in span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \right\} \tag{16}$$

(2) G奇异情形

- 若G奇异, 则能控状态x_0满足(6), 即

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}.$$

➥ 于是我们有如下结论

定理

定理2.17 若G奇异, 则系统(1)的能控子空间X_C为

$$X_C = \left\{ x_0 \middle| G^n x_0 \in span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \right\} \tag{16}$$

证明 由(6), 显然

$$X_C \subseteq \left\{ x_0 \middle| G^n x_0 \in span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \right\} \tag{17}$$

反之，若x_0满足

$$G^n x_0 \in span\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix},$$

反之，若x_0满足

$$G^n x_0 \in span\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix},$$

- 则有

$$G^n x_0 = \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

反之，若x_0满足

$$G^n x_0 \in span\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix},$$

- 则有

$$G^n x_0 = \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

- 根据(18), 记

$$u(n-1) = -\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad u(0) = -\begin{bmatrix} \xi_{(n-1)p+1} \\ \cdots \\ \cdots \\ \xi_{np} \end{bmatrix}, \tag{19}$$

- 利用(19), 式(18)可表示为

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

这说明$x_0 \in X_C$

- 利用(19), 式(18)可表示为

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

这说明$x_0 \in X_C$

- 故有

$$\left\{ x_0 \middle| G^n x_0 \in span \begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \right\} \subseteq X_C. \tag{21}$$

2.5.2 能控子空间

- 利用(19), 式(18)可表示为

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

这说明$x_0 \in X_C$

- 故有

$$\left\{ x_0 \middle| G^n x_0 \in span\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \right\} \subseteq X_C. \tag{21}$$

➥ 由(17), (21)可知, 定理结论成立 ■

- 利用(19), 式(18)可表示为

$$G^n x_0 = -\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix}. \tag{20}$$

这说明$x_0 \in X_C$

- 故有

$$\left\{ x_0 \middle| G^n x_0 \in span\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \right\} \subseteq X_C. \tag{21}$$

➥ 由(17), (21)可知, 定理结论成立 ■

根据定理2.17, 并结合凯莱-哈密尔顿定理, 可得下面结论

推论

推论2.6 若G奇异, 则系统(1)的能控子空间X_C为G的不变子空间.

2.5.3 能控性判据

- 考察离散系统(1), 即

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = x_0$$

的能控性

2.5.3 能控性判据

- 考察离散系统(1), 即

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = x_0$$

的能控性

➥ 由定理2.16, 直接可得下面的定理

定理

定理2.18 若G非奇异, 则离散系统(1)完全能控的充要条件是:

$$rank\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n. \tag{22}$$

2.5.3 能控性判据

- 考察离散系统(1), 即

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \quad x(0) = x_0$$

的能控性

➥ 由定理2.16, 直接可得下面的定理

定理

定理2.18 若G非奇异, 则离散系统(1)完全能控的充要条件是:

$$rank\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n. \tag{22}$$

- 记

$$\begin{aligned} W_C(n) = &\begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} G^{-n}H & G^{-(n-1)}H & \cdots & G^{-1}H \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{23}$$

为系统(1)的能控Gram矩阵

则由定理2.15, 容易证明下面的定理

定理

定理2.19 若G非奇异, 则离散系统(1)完全能控的充要条件为$W_C(n)$非奇异.

则由定理2.15, 容易证明下面的定理

定理

定理2.19 若G非奇异, 则离散系统(1)完全能控的充要条件为$W_C(n)$非奇异.

另外, 若G非奇异, 我们还有类似于线性定常连续系统的PBH判据

定理

定理2.20 若G非奇异, 则离散系统(1)完全能控的充要条件为

$$rank\begin{bmatrix} sI-G & H \end{bmatrix} = n,\ \forall s \in \mathbb{C}. \tag{24}$$

2.5.3 能控性判据

对于G奇异的情形, 由定理2.17, 可得到下面的定理

定理

定理2.21 若G奇异, 则离散系统(1)完全能控的充要条件为

$$rank\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H & G^n \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}. \tag{25}$$

对于G奇异的情形, 由定理2.17, 可得到下面的定理

定理

定理2.21 若G奇异, 则离散系统(1)完全能控的充要条件为

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H & G^n \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix}. \tag{25}$$

注: 显然, G奇异时,

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n$$

只是系统(1)完全能控的充分条件, 而非必要条件

- 考虑线性定常连续系统

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{26}$$

和以T为采样周期的时间离散化系统为

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \tag{27}$$

其中, $G = e^{AT}$和$H = \int_0^T e^{At} dt B$

- 考虑线性定常连续系统

$$\dot{x} = Ax + Bu. \tag{26}$$

和以T为采样周期的时间离散化系统为

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k), \tag{27}$$

其中, $G = e^{AT}$和$H = \int_0^T e^{At} dtB$

➥ 下面讨论系统(A, B)的能控性和系统(G, H)的能控性之间的关系

首先, 若(G,H)能控, (A,B)是否能控呢?

首先，若(G,H)能控，(A,B)是否能控呢？

- 事实上，若(G,H)能控，则存在控制$\{u(0),u(1),\cdots,u(n-1)\}$将$x(0)$导引到原点$x(n)=0$

首先, 若(G,H)能控, (A,B)是否能控呢?

- 事实上, 若(G,H)能控, 则存在控制$\{u(0),u(1),\cdots,u(n-1)\}$将$x(0)$导引到原点$x(n)=0$
- 则对于系统(A,B)来说, 在区间$[0,nT)$上, 存在控制

$$u(t)=\begin{cases} u(0), & t\in[0,T),\\ u(1), & t\in[T,2T),\\ \cdots\cdots & \\ u(n-1), & t\in[(n-1)T,nT) \end{cases} \tag{28}$$

将$x(0)$导引到原点$x(nT)=0$

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

首先, 若(G,H)能控, (A,B)是否能控呢?

- 事实上, 若(G,H)能控, 则存在控制$\{u(0),u(1),\cdots,u(n-1)\}$将$x(0)$导引到原点$x(n)=0$
- 则对于系统(A,B)来说, 在区间$[0,nT)$上, 存在控制

$$u(t)=\begin{cases} u(0), & t\in[0,T), \\ u(1), & t\in[T,2T), \\ \cdots\cdots \\ u(n-1), & t\in[(n-1)T,nT) \end{cases} \tag{28}$$

将$x(0)$导引到原点$x(nT)=0$

- 这说明, 若(G,H)能控, 则(A,B)在$[0,nT]$中状态完全能控, 而系统(A,B)的能控性与控制区间的选择无关, 故(A,B)能控

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

首先, 若(G,H)能控, (A,B)是否能控呢?

- 事实上, 若(G,H)能控, 则存在控制$\{u(0),u(1),\cdots,u(n-1)\}$将$x(0)$导引到原点$x(n)=0$
- 则对于系统(A,B)来说, 在区间$[0,nT)$上, 存在控制

$$u(t)=\begin{cases} u(0), & t\in[0,T), \\ u(1), & t\in[T,2T), \\ \cdots\cdots & \\ u(n-1), & t\in[(n-1)T,nT) \end{cases} \tag{28}$$

将$x(0)$导引到原点$x(nT)=0$

- 这说明, 若(G,H)能控, 则(A,B)在$[0,nT]$中状态完全能控, 而系统(A,B)的能控性与控制区间的选择无关, 故(A,B)能控

➥ 于是, 我们有如下定理

定理

定理2.22 若离散系统(G,H)能控, 则连续系统(A,B)能控.

证明 若(G,H)能控, 则

$$rank\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n,$$

证明 若(G, H)能控, 则

$$rank\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n,$$

➥ 故只要

$$span\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (29)$$

即可得到

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n,$$

从而(A, B)能控

证明 若(G, H)能控，则

$$rank\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} = n,$$

➥ 故只要

$$span\begin{bmatrix} H & GH & \cdots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (29)$$

即可得到

$$rank\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n,$$

从而(A, B)能控

- 因此，下面证式(29)成立

证明 若(G,H)能控, 则

$$rank\begin{bmatrix}H & GH & \cdots & G^{n-1}H\end{bmatrix} = n,$$

➥ 故只要

$$span\begin{bmatrix}H & GH & \cdots & G^{n-1}H\end{bmatrix} \subseteq span\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} \quad (29)$$

即可得到

$$rank\begin{bmatrix}B & AB & \cdots & A^{n-1}B\end{bmatrix} = n,$$

从而(A,B)能控

- 因此, 下面证式(29)成立. 由凯莱-哈密尔顿定理, 可得

$$G = e^{AT} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(AT)^i}{i!} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(T)A^j, \quad (30)$$

- 以及

$$
\begin{aligned}
H &= \int_0^T e^{At} dt \cdot B \\
&= \int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j dt \cdot B \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} A^j B \int_0^T \alpha_j(t) dt =: \sum_{j=0}^{n-1} A^j B r_j(T),
\end{aligned} \tag{31}
$$

其中$\alpha_j(T), r_j(T)$为标量

- 以及

$$\begin{aligned} H &= \int_0^T e^{At} dt \cdot B \\ &= \int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j dt \cdot B \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} A^j B \int_0^T \alpha_j(t) dt =: \sum_{j=0}^{n-1} A^j B r_j(T), \end{aligned} \tag{31}$$

其中$\alpha_j(T), r_j(T)$为标量

- 式(31)说明

$$spanH \subseteq span \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{32}$$

- 以及

$$\begin{aligned} H &= \int_0^T e^{At} dt \cdot B \\ &= \int_0^T \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j dt \cdot B \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} A^j B \int_0^T \alpha_j(t) dt =: \sum_{j=0}^{n-1} A^j B r_j(T), \end{aligned} \tag{31}$$

其中$\alpha_j(T), r_j(T)$为标量

- 式(31)说明

$$spanH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{32}$$

- 并且, 由(30)和(31)可导出

$$GH = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(T) A^j H, \quad A^k H = \sum_{j=0}^{n-1} r_j(T) A^{j+k} B, \tag{33}$$

- 根据(33), 有

$$spanA^kH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

- 根据(33), 有

$$spanA^kH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

- 进而, 可得

$$spanGH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{34}$$

- 根据(33), 有

$$spanA^kH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

- 进而, 可得

$$spanGH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{34}$$

- 依次类推, 可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{35}$$

- 根据(33), 有

$$spanA^kH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

- 进而, 可得

$$spanGH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{34}$$

- 依次类推, 可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{35}$$

➥ 综合式(32), (34)和(35), 即可得(29)成立. 定理结论得证 ■

- 根据(33), 有

$$spanA^kH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

- 进而, 可得

$$spanGH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{34}$$

- 依次类推, 可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{35}$$

➥ 综合式(32), (34)和(35), 即可得(29)成立. 定理结论得证 ■

注: 定理2.22指出, 若连续系统(A, B)经采样周期T, 离散化得到的离散系统(G, H)是n步能控的, 则连续系统(A, B)一定是能控的

- 根据(33), 有

$$spanA^kH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

- 进而, 可得

$$spanGH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{34}$$

- 依次类推, 可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{35}$$

➥ 综合式(32), (34)和(35), 即可得(29)成立. 定理结论得证 ■

注: 定理2.22指出, 若连续系统(A,B)经采样周期T, 离散化得到的离散系统(G,H)是n步能控的, 则连续系统(A,B)一定是能控的

反之, 若连续系统(A,B)能控, 是否一定有(G,H)能控呢?

- 根据(33), 有

$$spanA^kH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix},$$

- 进而, 可得

$$spanGH \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{34}$$

- 依次类推, 可得

$$spanG^{n-1}H \subseteq span\begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \tag{35}$$

➥ 综合式(32), (34)和(35), 即可得(29)成立. 定理结论得证 ■

注: 定理2.22指出, 若连续系统(A, B)经采样周期T, 离散化得到的离散系统(G, H)是n步能控的, 则连续系统(A, B)一定是能控的

反之, 若连续系统(A, B)能控, 是否一定有(G, H)能控呢?

- 答案是否定的, 这与采样周期T 的选择有关. 故有如下结论

定理

定理2.23 令$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\sigma$为$A$的全部特征值，且当$i \neq j$时，$\lambda_i \neq \lambda_j$. 若$(A, B)$能控，则离散系统$(G, H)$能控的一个充分条件是：对一切满足

$$Re(\lambda_i - \lambda_j) = 0, \ i, j = 1, 2, \cdots, \sigma \tag{36}$$

的特征值，采样周期T应成立

$$T \neq \frac{2l\pi}{Im(\lambda_i - \lambda_j)}, \ l = \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{37}$$

定理

定理2.23 令$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\sigma$为$A$的全部特征值，且当$i \neq j$时，$\lambda_i \neq \lambda_j$. 若$(A, B)$能控，则离散系统$(G, H)$能控的一个充分条件是：对一切满足

$$Re(\lambda_i - \lambda_j) = 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, \sigma \tag{36}$$

的特征值，采样周期T应成立

$$T \neq \frac{2l\pi}{Im(\lambda_i - \lambda_j)},\ l = \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{37}$$

证明　利用若尔当标准型和PBH判据证明

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

- 对系统(A, B)作非奇异线性变换$x = P\hat{x}$, P为非奇异, 且使得

$$P^{-1}AP = J,\ P^{-1}B = \hat{B}, \tag{38}$$

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

- 对系统(A,B)作非奇异线性变换$x=P\hat{x}$, P为非奇异, 且使得

$$P^{-1}AP=J,\ P^{-1}B=\hat{B}, \tag{38}$$

其中,

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\sigma \end{bmatrix}_{n\times n}, \quad J_j=\begin{bmatrix} J_{j1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{j\alpha_j} \end{bmatrix}_{n_j\times n_j}$$

$$J_{jk}=\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_{jk}\times n_{jk}}, \quad \hat{B}=\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_\sigma \end{bmatrix}_{n\times p} \tag{39}$$

$$B_j=\begin{bmatrix} B_{j1} \\ \vdots \\ B_{j\alpha_j} \end{bmatrix}_{n_j\times p}, \quad B_{jk}=\begin{bmatrix} B_{1_{jk}} \\ \vdots \\ B_{n_{jk}} \end{bmatrix}_{n_{jk}\times p}$$

- 此时, 有

$$
\begin{aligned}
\hat{G} &= P^{-1}GP \\
&= P^{-1}e^{AT}P \\
&= e^{(P^{-1}AP)T} \\
&= e^{JT}, \\
\hat{H} &= P^{-1}H \\
&= P^{-1}\int_0^T e^{At}dt \cdot B \\
&= P^{-1}\int_0^T e^{At}Pdt \cdot P^{-1}B \\
&= \int_0^T e^{Jt}dt \cdot \hat{B}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

- 此时, 有

$$\begin{aligned}\hat{G} &= P^{-1}GP \\ &= P^{-1}e^{AT}P \\ &= e^{(P^{-1}AP)T} \\ &= e^{JT}, \\ \hat{H} &= P^{-1}H \\ &= P^{-1}\int_0^T e^{At}dt\cdot B \\ &= P^{-1}\int_0^T e^{At}Pdt\cdot P^{-1}B \\ &= \int_0^T e^{Jt}dt\cdot\hat{B}\end{aligned} \tag{40}$$

- 此外, 显然要证(G,H)能控, 只要$(\hat{G},\hat{H})$能控即可

(1) 首先证明, 若(37)成立, 则A的互异特征根λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_σ对应的$\hat{G}$的σ个特征值互异

(1) 首先证明，若(37)成立，则A的互异特征根λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_σ对应的$\hat{G}$的σ个特征值互异

- 由式(39)和(40)，可推得

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_\sigma t}\end{bmatrix},\quad e^{J_j t}=\begin{bmatrix} e^{J_{j1} t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_{j\alpha_j} t}\end{bmatrix},$$

$$e^{J_{jk} t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk}-1}}{(n_{jk}-1)!}e^{\lambda_j t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_j t} \\ & & & e^{\lambda_j t}\end{bmatrix},\tag{41}$$

(1) 首先证明，若(37)成立，则A的互异特征根λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_σ对应的$\hat{G}$的σ个特征值互异

- 由式(39)和(40)，可推得

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_\sigma t}\end{bmatrix},\quad e^{J_j t}=\begin{bmatrix} e^{J_{j1} t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{J_{j\alpha_j} t}\end{bmatrix},$$

$$e^{J_{jk}t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk}-1}}{(n_{jk}-1)!}e^{\lambda_j t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_j t} \\ & & & e^{\lambda_j t}\end{bmatrix}, \tag{41}$$

- 容易看出，$\hat{G}$的特征值为$e^{\lambda_1 T},e^{\lambda_2 T},\cdots,e^{\lambda_\sigma T}$，也即为$G$的特征值

- 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = 1, 2, \cdots, \sigma,\ i^2 = -1 \tag{42}$$

- 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = 1, 2, \cdots, \sigma,\ i^2 = -1 \tag{42}$$

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T}(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \tag{43}$$

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

- 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = 1, 2, \cdots, \sigma,\ i^2 = -1 \tag{42}$$

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T}(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \tag{43}$$

- 对A的任意不同特征值λ_j, λ_h,
  - 若λ_j, λ_h的实部不同, 则一定有$e^{\lambda_j T} \neq e^{\lambda_h T}$
  - 若λ_j, λ_h的实部相同, 虚部不同, 则由$\alpha_j = \alpha_h$可得$e^{\alpha_j T} = e^{\alpha_h T}$

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

- 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = 1, 2, \cdots, \sigma,\ i^2 = -1 \tag{42}$$

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T}(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \tag{43}$$

- 对A的任意不同特征值λ_j, λ_h,
  - 若λ_j, λ_h的实部不同, 则一定有$e^{\lambda_j T} \neq e^{\lambda_h T}$
  - 若λ_j, λ_h的实部相同, 虚部不同, 则由$\alpha_j = \alpha_h$可得$e^{\alpha_j T} = e^{\alpha_h T}$; 且由$\beta_j \neq \beta_h$以及$T$满足的关系式(37), 可推得

$$(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \neq (\cos\beta_h T + i\sin\beta_h T)$$

- 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = 1, 2, \cdots, \sigma,\ i^2 = -1 \tag{42}$$

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T}(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \tag{43}$$

- 对A的任意不同特征值λ_j, λ_h,
  - 若λ_j, λ_h的实部不同, 则一定有$e^{\lambda_j T} \neq e^{\lambda_h T}$
  - 若λ_j, λ_h的实部相同, 虚部不同, 则由$\alpha_j = \alpha_h$可得$e^{\alpha_j T} = e^{\alpha_h T}$; 且由$\beta_j \neq \beta_h$以及$T$满足的关系式(37), 可推得

$$(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \neq (\cos\beta_h T + i\sin\beta_h T)$$

据上述两个关系, 由(43)可得$e^{\lambda_j T} \neq e^{\lambda_h T}$, 即

$$\begin{aligned} e^{\lambda_j T} &= e^{\alpha_j T}(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \\ &\neq e^{\alpha_h T}(\cos\beta_h T + i\sin\beta_h T) = e^{\lambda_h T} \end{aligned} \tag{44}$$

- 令

$$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = 1, 2, \cdots, \sigma,\ i^2 = -1 \tag{42}$$

则

$$e^{\lambda_j T} = e^{\alpha_j T}(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \tag{43}$$

- 对A的任意不同特征值λ_j, λ_h,
  - 若λ_j, λ_h的实部不同, 则一定有$e^{\lambda_j T} \neq e^{\lambda_h T}$
  - 若λ_j, λ_h的实部相同, 虚部不同, 则由$\alpha_j = \alpha_h$可得$e^{\alpha_j T} = e^{\alpha_h T}$; 且由$\beta_j \neq \beta_h$以及$T$满足的关系式(37), 可推得

$$(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \neq (\cos\beta_h T + i\sin\beta_h T)$$

据上述两个关系, 由(43)可得$e^{\lambda_j T} \neq e^{\lambda_h T}$, 即

$$\begin{aligned} e^{\lambda_j T} &= e^{\alpha_j T}(\cos\beta_j T + i\sin\beta_j T) \\ &\neq e^{\alpha_h T}(\cos\beta_h T + i\sin\beta_h T) = e^{\lambda_h T} \end{aligned} \tag{44}$$

➡ 综合上面的结论, 即知当(37)成立时, 若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_\sigma$互异, 则$e^{\lambda_1 T}, e^{\lambda_2 T}, \cdots, e^{\lambda_\sigma T}$互异

(2) 然后证明, 若(37)成立, 则$e^{\lambda_j T}-1\neq 0$

(2) 然后证明，若(37)成立，则$e^{\lambda_j T}-1\neq 0$

- **反证法.** 假设$e^{\lambda_j T}-1=0$，则$e^{\lambda_j T}=1$

(2) 然后证明, 若(37)成立, 则$e^{\lambda_j T} - 1 \neq 0$

- **反证法.** 假设$e^{\lambda_j T} - 1 = 0$, 则$e^{\lambda_j T} = 1$
- 令$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, 则由$|e^{\lambda_j T}| = 1 = e^{\alpha_j T}$, 推得$\alpha_j = 0$, 故$\lambda_j$为纯虚数

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

(2) 然后证明, 若(37)成立, 则$e^{\lambda_j T} - 1 \neq 0$

- **反证法.** 假设$e^{\lambda_j T} - 1 = 0$, 则$e^{\lambda_j T} = 1$
- 令$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, 则由$|e^{\lambda_j T}| = 1 = e^{\alpha_j T}$, 推得$\alpha_j = 0$, 故$\lambda_j$为纯虚数
- 从而由

$$e^{\lambda_j T} = e^{i\beta_j T} = \cos\beta_j T + i\sin\beta_j T = 1$$

推得$\sin\beta_j T$(虚部为零), 即有

$$\beta_j T = 2k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

(2) 然后证明，若(37)成立，则$e^{\lambda_j T}-1\neq 0$

- **反证法.** 假设$e^{\lambda_j T}-1=0$，则$e^{\lambda_j T}=1$
- 令$\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$，则由$|e^{\lambda_j T}|=1=e^{\alpha_j T}$，推得$\alpha_j=0$，故$\lambda_j$为纯虚数
- 从而由

$$e^{\lambda_j T}=e^{i\beta_j T}=\cos\beta_j T+i\sin\beta_j T=1$$

推得$\sin\beta_j T$(虚部为零)，即有

$$\beta_j T=2k\pi,\ k=\pm1,\pm2,\cdots,$$

- 从而

$$T=\frac{2k\pi}{\beta_j}=\frac{4k\pi}{2\beta_j}. \tag{45}$$

(2) 然后证明，若(37)成立，则$e^{\lambda_j T} - 1 \neq 0$

- **反证法.** 假设$e^{\lambda_j T} - 1 = 0$，则$e^{\lambda_j T} = 1$
- 令$\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$，则由$|e^{\lambda_j T}| = 1 = e^{\alpha_j T}$，推得$\alpha_j = 0$，故$\lambda_j$为纯虚数
- 从而由
$$e^{\lambda_j T} = e^{i\beta_j T} = \cos\beta_j T + i\sin\beta_j T = 1$$
推得$\sin\beta_j T$(虚部为零)，即有
$$\beta_j T = 2k\pi,\ k = \pm1, \pm2, \cdots,$$
- 从而
$$T = \frac{2k\pi}{\beta_j} = \frac{4k\pi}{2\beta_j}. \tag{45}$$
- 又因为$\lambda_j = i\beta_j$是A的特征值，故$\lambda_h = -i\beta_j$也是A的特征值，则由(45)进一步推得
$$T = \frac{4k\pi}{2\beta_j} = \frac{4k\pi}{Im(\lambda_j - \lambda_h)},\ k = \pm1, \pm2, \cdots$$

(2) 然后证明, 若(37)成立, 则$e^{\lambda_j T}-1\neq 0$

- **反证法.** 假设$e^{\lambda_j T}-1=0$, 则$e^{\lambda_j T}=1$
- 令$\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$, 则由$|e^{\lambda_j T}|=1=e^{\alpha_j T}$, 推得$\alpha_j=0$, 故$\lambda_j$为纯虚数
- 从而由

$$e^{\lambda_j T}=e^{i\beta_j T}=\cos\beta_j T+i\sin\beta_j T=1$$

推得$\sin\beta_j T$(虚部为零), 即有

$$\beta_j T=2k\pi,\ k=\pm 1,\pm 2,\cdots,$$

- 从而

$$T=\frac{2k\pi}{\beta_j}=\frac{4k\pi}{2\beta_j}. \tag{45}$$

- 又因为$\lambda_j=i\beta_j$是A的特征值, 故$\lambda_h=-i\beta_j$也是A的特征值, 则由(45)进一步推得

$$T=\frac{4k\pi}{2\beta_j}=\frac{4k\pi}{Im(\lambda_j-\lambda_h)},\ k=\pm 1,\pm 2,\cdots$$

➥ 显然, 这与(37)矛盾, 说明假设不成立. 故, $e^{\lambda_j T}\neq 1$

(3) 下面, 计算$\hat{H}$

(3) 下面, 计算$\hat{H}$

- 由式(39)和(40), 可得

$$\hat{H} = \int_0^T e^{Jt}dt \cdot \hat{B} = \begin{bmatrix} \int_0^T e^{J_1 t}dt & & \\ & \ddots & \\ & & \int_0^T e^{J_\sigma t}dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_\sigma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^T e^{J_1 t}dt \cdot B_1 \\ \vdots \\ \int_0^T e^{J_\sigma t}dt \cdot B_\sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_\sigma \end{bmatrix},$$

$$H_j = \int_0^T e^{J_j t}dt \cdot B_j$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^T e^{J_{j1} t}dt \cdot B_{j1} \\ \vdots \\ \int_0^T e^{J_{j\alpha_j} t}dt \cdot B_{j\alpha_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{j1} \\ \vdots \\ H_{j\alpha_j} \end{bmatrix},$$

- 以及

$$
\begin{aligned}
H_{jk} &= \int_0^T e^{J_{jk}t}dt \cdot B_{jk} \\
&= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk}-1}}{(n_{jk}-1)!}e^{\lambda_j t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_j t} \\ & & & e^{\lambda_j t} \end{bmatrix} dt \cdot \begin{bmatrix} b_{1_{jk}} \\ \vdots \\ b_{n_{jk}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1_{jk}} \\ \vdots \\ h_{n_{jk}} \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{46}
$$

- 以及

$$H_{jk} = \int_0^T e^{J_{jk}t} dt \cdot B_{jk}$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk}-1}}{(n_{jk}-1)!} e^{\lambda_j t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_j t} \\ & & & e^{\lambda_j t} \end{bmatrix} dt \cdot \begin{bmatrix} b_{1_{jk}} \\ \vdots \\ b_{n_{jk}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1_{jk}} \\ \vdots \\ h_{n_{jk}} \end{bmatrix}, \qquad (46)$$

其中

$$h_{n_{jk}} = \int_0^T e^{\lambda_j t} dt \cdot b_{n_{jk}}, \qquad (47)$$

- 以及

$$
\begin{aligned}
H_{jk} &= \int_0^T e^{J_{jk}t} dt \cdot B_{jk} \\
&= \int_0^T \begin{bmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \cdots & \frac{t^{n_{jk}-1}}{(n_{jk}-1)!} e^{\lambda_j t} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda_j t} \\ & & & e^{\lambda_j t} \end{bmatrix} dt \cdot \begin{bmatrix} b_{1_{jk}} \\ \vdots \\ b_{n_{jk}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{1_{jk}} \\ \vdots \\ h_{n_{jk}} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{46}
$$

其中

$$
h_{n_{jk}} = \int_0^T e^{\lambda_j t} dt \cdot b_{n_{jk}}, \tag{47}
$$

- 并且, 有

$$
\int_0^T e^{\lambda_j t} dt = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_j}\left(e^{\lambda_j T} - 1\right), & \lambda_j \neq 0, \\ T, & \lambda_j = 0, \end{cases}
$$

- 由步骤(2)结果，因为(37)成立，故$e^{\lambda_j T} - 1 \neq 0$，从而可得

$$\int_0^T e^{\lambda_j t} dt \neq 0. \tag{48}$$

- 由步骤(2)结果, 因为(37)成立, 故$e^{\lambda_j T}-1\neq 0$, 从而可得

$$\int_0^T e^{\lambda_j t}dt \neq 0. \tag{48}$$

(4) 最后证明$(\hat{G},\hat{H})$的能控性

第2章
2.5 线性定常离散系统的能控性
2.5.1 能控性与能达性
2.5.2 能控子空间
2.5.3 能控性判据
2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

- 由步骤(2)结果, 因为(37)成立, 故$e^{\lambda_j T}-1\neq 0$, 从而可得

$$\int_0^T e^{\lambda_j t}dt\neq 0. \tag{48}$$

(4) 最后证明$(\hat{G},\hat{H})$的能控性

- 因为(A,B)能控, 所以$(J,\hat{B})$能控, 故

$$rank\begin{bmatrix} b_{n_{j1}} \\ b_{n_{j2}} \\ \cdots \\ b_{n_{j\alpha_j}} \end{bmatrix}=\alpha_j,\ j=1,2,\cdots,\sigma, \tag{49}$$

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

- 由步骤(2)结果, 因为(37)成立, 故$e^{\lambda_j T} - 1 \neq 0$, 从而可得

$$\int_0^T e^{\lambda_j t} dt \neq 0. \tag{48}$$

(4) 最后证明$(\hat{G}, \hat{H})$的能控性

- 因为(A, B)能控, 所以$(J, \hat{B})$能控, 故

$$rank \begin{bmatrix} b_{n_{j1}} \\ b_{n_{j2}} \\ \cdots \\ b_{n_{j\alpha_j}} \end{bmatrix} = \alpha_j,\ j = 1, 2, \cdots, \sigma, \tag{49}$$

- 从而由(48)得

$$rank \begin{bmatrix} h_{n_{j1}} \\ h_{n_{j2}} \\ \cdots \\ h_{n_{j\alpha_j}} \end{bmatrix} = rank \int_0^T e^{\lambda_j t} dt \cdot \begin{bmatrix} b_{n_{j1}} \\ b_{n_{j2}} \\ \cdots \\ b_{n_{j\alpha_j}} \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$= \alpha_j,\ j = 1, 2, \cdots, \sigma$$

- 下面，考察

$$rank\begin{bmatrix} sI-\hat{G} & \hat{H}\end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} sI-e^{J_1T} & & & H_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & sI-e^{J_\sigma T} & H_\sigma \end{bmatrix}. \qquad (51)$$

- 下面，考察

$$rank\begin{bmatrix} sI-\hat{G} & \hat{H}\end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} sI-e^{J_1T} & & & H_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & sI-e^{J_\sigma T} & H_\sigma \end{bmatrix}. \qquad (51)$$

- 令$s=e^{\lambda_1 T}$，则由$s=e^{\lambda_i T}$互异，$i=1,2,\cdots,\sigma$，得

$$\begin{aligned} rank\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T}I-\hat{G} & \hat{H}\end{bmatrix} &= rank\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T}I-e^{J_1T} & & & H_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & e^{\lambda_1 T}I-e^{J_\sigma T} & H_\sigma \end{bmatrix} \\ &= rank\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T}I-e^{J_1T} & & & H_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & e^{\lambda_1 T}I-e^{J_\sigma T} & 0 \end{bmatrix} \\ &= rank\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T}I-e^{J_1T} & H_1\end{bmatrix} + n_2+\cdots+n_\sigma \end{aligned} \qquad (52)$$

- 进一步，考察$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T}I - e^{J_1 T} & H_1 \end{bmatrix}$的秩

- 进一步，考察$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T}I - e^{J_1 T} & H_1 \end{bmatrix}$的秩
- 根据(50)，可得(类似于“若尔当规范形判据的证明过程”)

$$
\begin{aligned}
& rank\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T}I - e^{J_1 T} & H_1 \end{bmatrix} \\
&= rank\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 T}I - e^{J_{11} T} & & & H_{11} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & e^{\lambda_1 T}I - e^{J_{1\alpha_1} T} & H_{1\alpha_1} \end{bmatrix} \\
&= rank\begin{bmatrix} \Theta & & & \begin{bmatrix} * \\ h_{n_{11}} \end{bmatrix} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \Theta & \begin{bmatrix} * \\ h_{n_{1\alpha_1}} \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 0 & -Te^{\lambda_1 T} & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -Te^{\lambda_1 T} \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad (53) \\
&= n_1 - \alpha_1 + rank\begin{bmatrix} h_{n_{11}} \\ \cdots \\ h_{n_{1\alpha_1}} \end{bmatrix} \\
&= n_1 - \alpha_1 + \alpha_1 = n_1
\end{aligned}
$$

- 联合(51)~(53), 可得当$s = e^{\lambda_1 T}$时, 有

$$rank\begin{bmatrix} sI - \hat{G} & \hat{H} \end{bmatrix} = n. \tag{54}$$

- 联合(51)~(53), 可得当$s = e^{\lambda_1 T}$时, 有

$$rank\begin{bmatrix} sI - \hat{G} & \hat{H} \end{bmatrix} = n. \tag{54}$$

- 同理可证, 当$s = e^{\lambda_i T}, i = 1, 2, \cdots, \sigma$时, (54)成立

- 联合(51)~(53), 可得当$s = e^{\lambda_1 T}$时, 有

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} sI - \hat{G} & \hat{H} \end{bmatrix} = n. \tag{54}$$

- 同理可证, 当$s = e^{\lambda_i T}, i = 1, 2, \cdots, \sigma$时, (54)成立
- 又, 当$s \neq e^{\lambda_i T}$, (54)显然成立

- 联合(51)~(53), 可得当$s = e^{\lambda_1 T}$时, 有

$$rank\left[sI - \hat{G} \quad \hat{H}\right] = n. \tag{54}$$

- 同理可证, 当$s = e^{\lambda_i T}, i = 1, 2, \cdots, \sigma$时, (54)成立
- 又, 当$s \neq e^{\lambda_i T}$, (54)显然成立
- 即, (54)对任意$s \in \mathbb{C}$都成立

- 联合(51)~(53), 可得当$s = e^{\lambda_1 T}$时, 有

$$rank\left[sI - \hat{G} \quad \hat{H}\right] = n. \tag{54}$$

- 同理可证, 当$s = e^{\lambda_i T}, i = 1, 2, \cdots, \sigma$时, (54)成立
- 又, 当$s \neq e^{\lambda_i T}$, (54)显然成立
- 即, (54)对任意$s \in \mathbb{C}$都成立

➥ 故, $(\hat{G}, \hat{H})$能控, 从而(G, H)能控. 定理结论得证 ■

例2.5.1 线性定常连续系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

例2.5.1 线性定常连续系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

- 易知, 系统能控
- 简单计算, 可得系统特征值$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

例2.5.1 线性定常连续系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

- 易知, 系统能控
- 简单计算, 可得系统特征值$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

➥ 由定理2.23的结论知, 若采样周期T使成立

$$T \neq \frac{2l\pi}{Im(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{2l\pi}{2} = l\pi, \; l = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

时, 其离散化后系统为能控的

例2.5.1 线性定常连续系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u.$$

- 易知，系统能控
- 简单计算，可得系统特征值$\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$
- 由定理2.23的结论知，若采样周期T使成立

$$T \neq \frac{2l\pi}{Im(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{2l\pi}{2} = l\pi, \ l = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

时，其离散化后系统为能控的

- 下面用秩判据对这一结论进行核实验证

- 容易计算,时间离散化后系统为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \sin(T) \\ \cos(T) - 1 \end{bmatrix} u(k)$$

- 容易计算, 时间离散化后系统为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \sin(T) \\ \cos(T) - 1 \end{bmatrix} u(k)$$

- 且, 能控性判别矩阵为

$$Q_C = \begin{bmatrix} \sin(T) & 2\sin(T)\cos(T) - \sin(T) \\ \cos(T) - 1 & \cos^2(T) - \sin^2(T) - \cos(T) \end{bmatrix}$$

- 容易计算, 时间离散化后系统为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \sin(T) \\ \cos(T)-1 \end{bmatrix} u(k)$$

- 且, 能控性判别矩阵为

$$Q_C = \begin{bmatrix} \sin(T) & 2\sin(T)\cos(T)-\sin(T) \\ \cos(T)-1 & \cos^2(T)-\sin^2(T)-\cos(T) \end{bmatrix}$$

- 进而, 有$(T \neq 0)$

$$\det Q_C = 2\sin(T)[\cos(T)-1] \begin{cases} =0, & T = l\pi \\ \neq 0, & T \neq l\pi \end{cases}, \quad l = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

2.5.4 线性定常连续系统时间离散化后的能控性

- 容易计算, 时间离散化后系统为

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} \cos(T) & \sin(T) \\ -\sin(T) & \cos(T) \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \sin(T) \\ \cos(T)-1 \end{bmatrix} u(k)$$

- 且, 能控性判别矩阵为

$$Q_C = \begin{bmatrix} \sin(T) & 2\sin(T)\cos(T)-\sin(T) \\ \cos(T)-1 & \cos^2(T)-\sin^2(T)-\cos(T) \end{bmatrix}$$

- 进而, 有$(T \neq 0)$

$$\det Q_C = 2\sin(T)[\cos(T)-1] \begin{cases} =0, & T = l\pi \\ \neq 0, & T \neq l\pi \end{cases}, \quad l = \pm 1, \pm 2, \cdots$$

- 由此可见,

当$T \neq l\pi \ (l = \pm 1, \pm 2, \cdots)$时, 离散化后系统为能控的

与定理2.23所得结论一致!

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 52–63