第8章　不确定线性系统的鲁棒二次稳定

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 8.3 鲁棒状态反馈控制

1. 8.3 鲁棒状态反馈控制

考虑不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x + (B + \Delta B(t))u \tag{1}$$

其中,

- $x \in \mathbb{R}^n$为状态向量, $u \in \mathbb{R}^m$为控制向量, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$为已知实常阵
- $\Delta A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\Delta B(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 是关于t 连续的实矩阵值函数, 且满足

  $$[\Delta A(t) \;\; \Delta B(t)] = DF(t)[E_1 \;\; E_2], \tag{2}$$

  其中, D, E_1, E_2 是具有适当维数的已知常矩阵, $F(t) \in \mathbb{R}^{i\times j}$是具有Lebesgue 可测元的不确定矩阵, 且满足

  $$F^T(t)F(t) \leq I. \tag{3}$$

本节 讨论系统(1)能用状态反馈二次镇定的条件, 以及二次稳定化状态反馈控制器的设计

先给出如下两个引理

引理

引理8.4 设$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称阵, $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$, 若对于满足$Lx = 0$的任意非零向量$x \in \mathbb{R}^n$, $x^T Qx < 0$成立, 则存在一常数$\mu > 0$, 使得

$$Q - \mu L^T L < 0. \qquad (4)$$

先给出如下两个引理

引理

引理8.4 设$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$为对称阵, $L \in \mathbb{R}^{r\times n}$, 若对于满足$Lx = 0$的任意非零向量$x \in \mathbb{R}^n$, $x^TQx < 0$成立, 则存在一常数$\mu > 0$, 使得

$$Q - \mu L^T L < 0. \tag{4}$$

证明: 设$rankL = m$, 则存在非奇异矩阵$T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 使得$LT = [L_1 \quad 0]$, $L_1 \in \mathbb{R}^{r\times m}$, $rankL_1 = m$

- 令$x = Ty$, 则

$$Lx = LTy = \begin{bmatrix} L_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0, \quad y_1 \in \mathbb{R}^m, y_2 \in \mathbb{R}^{n-m}.$$

故有$L_1 y_1 = 0$

- 由L_1列满秩, 得$y_1 = 0$. 从而, $x = T\begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$的任意值

- 若记

$$T^TQT = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}, Q_{11} \in \mathbb{R}^{m\times m}, Q_{12} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}, Q_{22} \in \mathbb{R}^{(n-m)\times(n-m)}.$$

则由

$$x^TQx = \begin{bmatrix} 0 & y_2^T \end{bmatrix} T^TQT \begin{bmatrix} 0 \\ y_2 \end{bmatrix} = y_2^TQ_{22}y_2 < 0$$

可推得$Q_{22} < 0$

- 再由

$$T^T(Q - \mu L^TL)T = \begin{bmatrix} Q_{11} - \mu L_1^TL_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$$

知(Schur补引理, 见定理A.17, pp.189-190), 当且仅当

$$Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T - \mu L_1^TL_1 < 0$$

时, 有$Q - \mu L^TL < 0$

- 容易验证, 若取

$$\mu > \lambda_{max}\left[\left(L_1^T L_1\right)^{-\frac{1}{2}}\left(Q_{11} - Q_{12}Q_{22}^{-1}Q_{12}^T\right)\left(L_1^T L_1\right)^{-\frac{1}{2}}\right],$$

即可满足条件. 证毕 ■

引理

引理8.5 设$R_1 = R_1^T, Q_1 > 0, P$ 是Riccati方程

$$A^T P + PA + PR_1 P + Q_1 = 0$$

的正定解, 则对满足$R_2 \leq R_1, 0 < Q_2 < Q_1$的任意对称矩阵$R_2$和$Q_2$, Riccati方程

$$A^T S + SA + SR_2 S + Q_2 = 0$$

有一个使得$A + R_2 S$稳定的对称解, 且$S > 0$.

引理

引理8.5 设$R_1 = R_1^T, Q_1 > 0, P$ 是Riccati方程

$$A^T P + PA + PR_1 P + Q_1 = 0$$

的正定解, 则对满足$R_2 \leq R_1, 0 < Q_2 < Q_1$的任意对称矩阵$R_2$和$Q_2$, Riccati方程

$$A^T S + SA + SR_2 S + Q_2 = 0$$

有一个使得$A + R_2 S$稳定的对称解, 且$S > 0$.

此引理证明参见文献

褚键, 俞立, 苏宏业. 鲁棒控制理论及应用. 杭州. 浙江大学出版社. 2000

基于前述引理，下面建立鲁棒二次镇定的结论

- 设$r = rank(E_2)$, $U \in \mathbb{R}^{i\times r}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{r\times m}$ 是使得(满秩分解)

$$E_2 = U\Sigma, \text{且} rank(U) = rank(\Sigma) = r \tag{5}$$

的任意矩阵

- 选取矩阵$\Phi \in \mathbb{R}^{(m-r)\times m}$使得

$$\Phi\Sigma^T = 0,\ \Phi\Phi^T = I \in \mathbb{R}^{(m-r)\times(m-r)} (\text{若} r = m, \text{则取} \Phi = 0). \tag{6}$$

不难看出，Φ为行满秩，且

$$\begin{bmatrix} \Sigma \\ \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma^T & \Phi^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma\Sigma^T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \text{非奇异，从而} \begin{bmatrix} \Sigma^T & \Phi^T \end{bmatrix} \text{非奇异}$$

- 定义

$$\Xi = \Sigma^T(\Sigma\Sigma^T)^{-1}(U^T U)^{-1}(\Sigma\Sigma^T)^{-1}\Sigma. \tag{7}$$

➥ 显然有

$$E_2\Phi^T = 0 \tag{8}$$

$$\Xi E_2^T E_2 \Xi = \Xi. \tag{9}$$

定理

定理8.3 对不确定系统(1), 若存在一个常数$\epsilon > 0$, 使得Riccati方程

$$\left(A - B\Xi E_2^T E_1\right)^T P + P\left(A - B\Xi E_2^T E_1\right) + P\Big(DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\epsilon}B\Phi^T\Phi B^T\Big) + E_1^T\left(I - E_2\Xi E_2^T\right)E_1 + \epsilon I = 0 \tag{10}$$

有一个正定对称解$P > 0$, 则不确定系统(1)可以用一个状态反馈控制律二次镇定, 且

$$u(t) = -\left[\left(\frac{1}{2\epsilon}\Phi^T\Phi + \Xi\right)B^T P + \Xi E_2^T E_1\right]x(t) \tag{11}$$

是系统(1)的一个二次稳定化状态反馈控制律

定理

定理8.3 对不确定系统(1), 若存在一个常数$\epsilon > 0$, 使得Riccati方程

$$\begin{aligned}&\left(A - B\Xi E_2^T E_1\right)^T P + P\left(A - B\Xi E_2^T E_1\right) + P\Big(DD^T - B\Xi B^T \\ &- \frac{1}{\epsilon} B\Phi^T\Phi B^T\Big) + E_1^T\left(I - E_2\Xi E_2^T\right)E_1 + \epsilon I = 0\end{aligned} \tag{10}$$

有一个正定对称解$P > 0$, 则不确定系统(1)可以用一个状态反馈控制律二次镇定, 且

$$u(t) = -\left[\left(\frac{1}{2\epsilon}\Phi^T\Phi + \Xi\right)B^T P + \Xi E_2^T E_1\right]x(t) \tag{11}$$

是系统(1)的一个二次稳定化状态反馈控制律.

反之, 若不确定系统(1)可以用状态反馈$u = Kx$二次镇定, 则必存在一个常数$\epsilon^* > 0$, 使得对所有的$\epsilon \in (0, \epsilon^*)$, Riccati 方程(10) 有一个稳定解$P_0$, 且$P_0 > 0$.

证明: 若存在某个$\epsilon > 0$, 使得Riccati方程(10) 有一个正定解$P > 0$, 证明(11)是系统(1)的一个二次稳定化状态反馈控制律

- 事实上, 由(1) 和控制律(11) 构成的闭环系统是

$$\dot{x} = \left\{A + DF(t)E_1 - (B + DF(t)E_2)\left[\left(\frac{1}{2\epsilon}\Phi^T\Phi + \Xi\right)B^TP + \Xi E_2^TE_1\right]\right\}x. \tag{12}$$

- 考虑Lyapunov函数$V(x) = x^TPx$, 沿系统(12) 的轨线, $V(x)$关于时间的导数为

$$\begin{aligned} L(x,t) =& \dot{V}(x) \\ =& x^T\left[(A + DF(t)E_1)^TP + P(A + DF(t)E_1)\right]x \\ & - 2x^TP(B + DF(t)E_2)\left[\left(\frac{1}{2\epsilon}\Phi^T\Phi + \Xi\right)B^TP + \Xi E_2^TE_1\right]x \\ \overset{(8)}{=}& x^T\Big(A^TP + PA - \frac{1}{\epsilon}PB\Phi^T\Phi B^TP - 2PB\Xi B^TP \\ & - E_1^TE_2\Xi B_2^TP - PB\Xi E_2^TE_1\Big)x \\ & + 2x^TPDF(t)\left[E_1 - E_2^T\Xi(B^TP + E_2E_1)\right]x. \end{aligned} \tag{13}$$

- 由引理8.1可得

$$
\begin{aligned}
& 2x^T PDF(t)[E_1 - E_2\Xi(B^T P + E_2^T E_1)]x \\
=& x^T\Big\{PDF(t)[E_1 - E_2\Xi(B^T P + E_2^T E_1)] \\
& + \left[E_1 - E_2\Xi(B^T P + E_2^T E_1)\right]^T F^T(t)D^T P\Big\}x \\
\leq & x^T PDD^T Px \\
& + x^T\left[E_1 - E_2\Xi(B^T P + E_2^T E_1)\right]^T\left[E_1 - E_2\Xi(B^T P + E_2^T E_1)\right]x \\
\overset{(9)}{=} & x^T\left(PDD^T P + E_1^T E_1 + PB\Xi B^T P - E_1^T E_2\Xi E_2^T E_1\right)x.
\end{aligned} \tag{14}
$$

- 将(14)代入到(13)中，并利用Riccati方程(10)，得到

$$
\begin{aligned}
L(x,t) \leq & x^T\Big(A^T P + PA - \frac{1}{\epsilon}PB\Phi^T\Phi B^T P - 2PB\Xi B^T P \\
& - E_1^T E_2\Xi E_2^T E_1 - PB\Xi E_2^T E_1 - E_1^T E_2\Xi B^T P + PDD^T P + E_1^T E_1\Big)x \\
\overset{(10)}{\leq} & -\epsilon x^T x.
\end{aligned}
$$

- 根据定义8.1, 系统(12)是二次稳定的, 故控制律(11)是系统(1)的一个二次稳定化状态反馈控制律
- 反之, 若系统(1)可以用状态反馈$u = Kx$二次镇定, 则闭环系统

$$\dot{x}(t) = (A + BK + DF(t)(E_1 + E_2K))x \tag{15}$$

是二次稳定的

- 根据定理8.1, 一定存在正矩阵$P > 0$, 使得

$$\begin{aligned}(A + BK)^T P + P(A + BK) + PDD^T P \\ + (E_1 + E_2K)^T (E_1 + E_2K) < 0\end{aligned} \tag{16}$$

此即

$$\begin{aligned}A^T P + PA + PDD^T P + E_1^T E_1 + K^T (E_2^T E_2)K \\ + K^T (E_2^T E_1 + B^T P) + (E_2^T E_1 + B^T P)^T K < 0\end{aligned} \tag{17}$$

8.3 鲁棒状态反馈控制

- 对含有K的项配方处理, 从而得到一个不含K的矩阵不等式. 利用分解式(5), 定义$T = [\Sigma^T \;\; \Phi^T] \in \mathbb{R}^{m\times m}$ (若$\Sigma = 0$, 则$T = \Phi$), 则

$$T\text{非奇异}, T^{-1}\text{存在}$$

并且

$$E_2T = U\Sigma\left[\Sigma^T \;\; \Phi^T\right] = \left[U\Sigma\Sigma^T \;\; 0\right] = \left[E_2\Sigma^T \;\; 0\right].$$

- 定义$L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = T^{-1}K$, 则

$$\begin{aligned}
&K^T(E_2^TE_2)K + K^T(E_2^TE_1 + B^TP) + (E_2^TE_1 + B^TP)K \\
=&L^T(E_2T)^T(E_2T)L + L^TT^T(E_2^TE_1 + B^TP) + (E_2^TE_1 + B^TP)^TTL \\
=&L_1^T\Sigma E_2^TE_2\Sigma^TL_1 + L_1^T\Sigma(E_2^TE_1 + B^TP) + (E_1^TE_2 + B^TP)\Sigma^TL_1 \\
&+ L_2^T\Phi B^TP + PB\Phi^TL_2 \\
=&W^TW - (E_1^TE_2 + PB)\Xi(E_2^TE_1 + B^TP) + L_2^T\Phi B^TP + PB\Phi^TL_2
\end{aligned}$$

其中

$$W = U\Sigma\Sigma^TL_1 + U(U^TU)^{-1}(\Sigma\Sigma^T)^{-1}\Sigma(E_2^TE_1 + B^TP).$$

- 因此, (17)变为

$$\begin{aligned} & A^T P + PA + PDD^T P + E_1^T E_1 + W^T W \\ & - (E_1^T E_2 + PB)\Xi(E_2^T E_1 + B^T P) \\ & + L_2^T \Phi B^T P + PB\Phi^T L_2 < 0 \end{aligned} \tag{18}$$

- 对任意满足$\Phi B^T Px = 0$的非零向量x, 由上式可得

$$\begin{aligned} x^T\Big(& A^T P + PA + PDD^T P + E_1^T E_1 \\ & - (E_1^T E_2 + PB)\Xi(E_2^T E_1 + B^T P)\Big)x < 0. \end{aligned}$$

- 记

$$X = A^T P + PA + PDD^T P + E_1^T E_1 - (E_1^T E_2 + PB)\Xi(E_2^T E_1 + B^T P)$$
$$G = \Phi B^T P.$$

- 则根据引理8.4, 存在常数$\epsilon > 0$, 使得

$$A^TP + PA + PDD^TP + E_1^TE_1 - \left(E_1^TE_2 + PB\right)\Xi\left(E_2^TE_1 + B^TP\right) - \frac{1}{\epsilon}PB\Phi^T\Phi B^TP < 0$$

- 以上不等式进一步写成

$$(A - B\Xi E_2^TE_1)^TP + P(A - B\Xi E_2^TE_1) + P\left(DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\epsilon}B\Phi^T\Phi B^T\right)P + E_1^T(I - E_2\Xi E_2^T)E_1 < 0 \tag{19}$$

- 定义矩阵Q

$$-\epsilon Q = (A - B\Xi E_2^TE_1)^TP + P(A - B\Xi E_2^TE_1) + P(DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\epsilon}B\Phi^T\Phi B^T)P + E_1^T(I - E_2\Xi E_2^T)E_1.$$

- 由(19), 知$Q > 0$且

$$\left(A - B\Xi E_2^T E_1\right)^T P + P\left(A - B\Xi E_2^T E_1\right) + P\left(DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\epsilon}B\Phi^T\Phi B^T\right)P + E_1^T\left(I - E_2\Xi E_2^T\right)E_1 + \epsilon Q = 0.$$

- 对以上确定的矩阵$Q > 0$, 和常数$\epsilon > 0$, 存在一个常数$\epsilon^* > 0$, $\epsilon > \epsilon^* > 0$, 使得对所有的常数$\tilde{\epsilon} \in (0, \epsilon^*]$,

$$\tilde{\epsilon} I < \epsilon Q.$$

- 另一方面,

$$I - E_2\Xi E_2^T = I - U\left(U^T U\right)^{-1} U^T \geq 0.$$

因此, 对所有的常数$\tilde{\epsilon} \in (0, \epsilon^*]$,

$$D^T D - B\Xi B^T - \frac{1}{\tilde{\epsilon}}B\Phi^T\Phi B^T < D^T D - B\Xi B^T - \frac{1}{\epsilon}B\Phi^T\Phi B^T,$$

$$0 < E_1^T(I - E_2\Xi E_2^T)E_1 + \tilde{\epsilon} I < E_1^T(I - E_2\Xi E_2^T)E_1 + \epsilon Q.$$

- 根据引理8.5, 对所有的常数$\tilde{\epsilon} \in (0, \epsilon^*]$, Riccati方程

$$\begin{aligned}
&\left(A - B\Xi E_2^T E_1\right)^T P + P\left(A - B\Xi E_2^T E_1\right) \\
&+ P\left(DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\tilde{\epsilon}} B\Phi^T \Phi B^T\right) P \\
&+ E_1^T (I - E_2 \Xi E_2^T) E_1 + \tilde{\epsilon} I = 0.
\end{aligned}$$

有唯一对称解$P_0 > 0$, 使得

$$A - B\Xi E_2^T E_1 + \left(DD^T - B\Xi B^T - \frac{1}{\tilde{\epsilon}} B\Phi^T \Phi B^T\right) P_0$$

渐近稳定. 定理得证 ■

推论

推论8.1 若$E_2^T E_2$非奇异, 则Riccati方程(10) 变为

$$(A - B(E_2^T E_2)^{-1} E_2^T E_1)^T P + P(A - B(E_2^T E_2)^{-1} E_2^T E_1) + P(DD^T - B(E_2^T E_2)^{-1} B^T)P + E_1^T (I - E_2(E_2^T E_2)^{-1} E_2^T)E_1 + \epsilon I = 0, \tag{20}$$

相应的控制器为

$$u(t) = -(E_2^T E_2)^{-1}(B^T P + E_2^T E_1)x. \tag{21}$$

推论

推论8.2 若$E_2^TE_2$非奇异, 则不确定系统(10)可以用状态反馈$u = Kx$二次镇定的充分必要条件是Riccati不等式

$$A^TP+PA+PDD^TP+E_1^TE_1-(E_1^TE_2+PB)(E_2^TE_2)^{-1}(E_2^TE_1+B^TP) < 0 \quad (22)$$

有正定解$P > 0$. 若上式有正定解$P > 0$, 则使闭环系统二次稳定的控制器为相应的控制律为

$$K = -(E_2^TE_2)^{-1}(B^TP + E_2^TE_1). \quad (23)$$

下面利用定理8.2给出不确定系统(1)能用状态反馈二次镇定的LMI条件.

定理

定理8.4 确定系统(1)能用状态反馈$u = Kx$二次镇定的充分必要条件是存在正定矩阵$X > 0$及矩阵W, 使得LMI

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX + W^TB^T + BW & D & XE_1 + W^TE_2^T \\ D^T & -I & 0 \\ E_1X + E_2W & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (24)$$

成立. 若LMI (24)有解$X > 0$及W, 则反馈阵$K = WX^{-1}$.

证明: 必要性. 若系统(1)能用$u = Kx$二次镇定, 则闭环系统(15) 二次稳定

- 根据定理8.2, 则LMI

$$\begin{bmatrix} X(A+BK)^T + (A+BK)X & D & X(E_1+E_2K)^T \\ D^T & -I & 0 \\ (E_1+E_2K)X & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (25)$$

有正定解$X > 0$

➥ 令$W = KX$即LMI (24) 成立

证明: 必要性. 若系统(1)能用$u = Kx$二次镇定, 则闭环系统(15) 二次稳定

- 根据定理8.2, 则LMI

$$\begin{bmatrix} X(A+BK)^T + (A+BK)X & D & X(E_1+E_2K)^T \\ D^T & -I & 0 \\ (E_1+E_2K)X & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \qquad (25)$$

有正定解$X > 0$

➥ 令$W = KX$即LMI (24) 成立

- 充分性. 若LMI (24)有正定解$X > 0$及W, 则

$$由K = WX^{-1}得W = KX$$

代入(24), 即有LMI(25)成立

➥ 故, 闭环系统(15)是二次稳定的. 定理得证 ■

注: 我们分别用Riccati方程, Riccati不等式及LMI给出了系统(1) 用状态反馈二次镇定的条件及控制器的设计

- 相对来说LMI条件较为简单, 其解可以通过Matlab中的LMI软件包求得

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 172–177