第3章　状态反馈与极点配置

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

- 状态反馈，是实现被控系统综合问题目标的手段之一
  - 输出反馈
  - 动态反馈

- 状态反馈，是实现被控系统综合问题目标的手段之一
  - 输出反馈
  - 动态反馈
- 极点配置，是被控系统的基本综合问题之一
  - 镇定问题
  - 解耦问题
  - 跟踪问题
  - 线性二次型(LQ)最优控制问题

3.1.1 状态反馈的构成形式

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \ y = Cx, \tag{1}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, y为q维输出向量, A, B, C分别为$n \times n, n \times p, q \times n$阶常阵

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx, \tag{1}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, y为q维输出向量, A, B, C分别为$n \times n, n \times p, q \times n$阶常阵

- 当将系统的控制u取为状态x的线性函数

$$u = Kx + v, \tag{2}$$

时, 称其为线性的直接状态反馈, 简称为状态反馈

- 其中, K为$p \times n$阶常阵, 称为状态反馈矩阵, v为参考输入向量

3.1.1 状态反馈的构成形式

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ y = Cx, \tag{1}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, y为q维输出向量, A, B, C分别为$n \times n, n \times p, q \times n$阶常阵

- 当将系统的控制u取为状态x的线性函数

$$u = Kx + v, \tag{2}$$

时, 称其为线性的直接状态反馈, 简称为状态反馈

- 其中, K为$p \times n$阶常阵, 称为状态反馈矩阵, v为参考输入向量

注: 在有的教材中, 控制u取为状态x的如下线性函数

$$u = -Kx + v, \tag{3}$$

但, (3)与(2)没有实质区别, 只是信号x的反馈形式不同

- 将(2)代入(1)所导出的闭环结构的控制系统(简称闭环系统)

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, y = Cx \tag{4}$$

称为状态反馈系统

3.1.1 状态反馈的构成形式

- 将(2)代入(1)所导出的闭环结构的控制系统(简称闭环系统)

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, y = Cx \tag{4}$$

称为状态反馈系统

- 闭环系统的传递函数为

$$G_c(s) = C(sI - A - BK)^{-1}B. \tag{5}$$

3.1.1 状态反馈的构成形式

- 将(2)代入(1)所导出的闭环结构的控制系统(简称闭环系统)

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, y = Cx \tag{4}$$

称为状态反馈系统

- 闭环系统的传递函数为

$$G_c(s) = C(sI - A - BK)^{-1}B. \tag{5}$$

- 状态反馈的构成形式如下图3.1

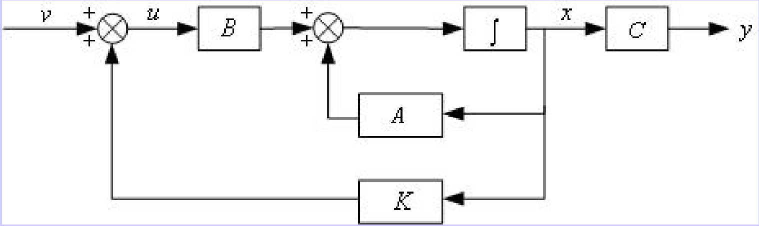

图3.1 状态反馈

从(4)(即, 闭环系统$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, y = Cx$)可以看出, 状态反馈可以改变系统矩阵

从(4)(即, 闭环系统$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, y = Cx$)可以看出, 状态反馈可以改变系统矩阵

- 那么, 状态反馈的引入, 对系统的能控性会有什么影响呢？对此, 有如下结论

定理

定理3.1 状态反馈的引入不改变系统的能控性. 即系统$(A + BK, B)$能控的充分必要条件是系统(A, B)能控.

3.1.2 状态反馈系统的能控性

从(4)(即, 闭环系统$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, y = Cx$)可以看出, 状态反馈可以改变系统矩阵

- 那么, 状态反馈的引入, 对系统的能控性会有什么影响呢? 对此, 有如下结论

定理

定理3.1 状态反馈的引入不改变系统的能控性. 即系统$(A + BK, B)$能控的充分必要条件是系统(A, B)能控.

证明: 因为

$$\begin{bmatrix} sI - A - BK & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix},$$

从(4)(即, 闭环系统$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, y = Cx$)可以看出, 状态反馈可以改变系统矩阵

- 那么, 状态反馈的引入, 对系统的能控性会有什么影响呢? 对此, 有如下结论

定理

定理3.1 状态反馈的引入不改变系统的能控性. 即系统$(A + BK, B)$能控的充分必要条件是系统(A, B)能控.

证明: 因为

$$\begin{bmatrix} sI - A - BK & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix},$$

- 故可推得

$$rank \begin{bmatrix} sI - A - BK & B \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}, \forall s \in \mathbb{C}.$$

从(4)(即, 闭环系统$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, y = Cx$)可以看出, 状态反馈可以改变系统矩阵

- 那么, 状态反馈的引入, 对系统的能控性会有什么影响呢? 对此, 有如下结论

定理

定理3.1 状态反馈的引入不改变系统的能控性. 即系统$(A + BK, B)$能控的充分必要条件是系统(A, B)能控.

证明: 因为

$$\begin{bmatrix} sI - A - BK & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix},$$

- 故可推得

$$rank \begin{bmatrix} sI - A - BK & B \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - A & B \end{bmatrix}, \forall s \in \mathbb{C}.$$

- 由PBH判据知定理结论成立 ■

- 给定线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{6}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, A, B分别为$n\times n, n\times p$阶常阵

3.2.1 问题的描述

- 给定线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{6}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, A, B分别为$n\times n, n\times p$阶常阵

- 再给定n个所期望的闭环系统的极点

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \tag{7}$$

其中, 若有复数, 则以共轭复数对的形式出现

- 给定线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{6}$$

其中,x为n维状态向量,u为p维控制向量,A,B分别为$n\times n, n\times p$阶常阵

- 再给定n个所期望的闭环系统的极点

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \tag{7}$$

其中, 若有复数, 则以共轭复数对的形式出现

➥ 所谓状态反馈闭环极点配置问题, 就是对于给定的受控系统(6), 确定状态反馈$u = Kx + v$, v为参考输入, 使得所导出的闭环系统

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv, \tag{8}$$

的极点(特征值)为$\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$

3.2.1 问题的描述

- 简单的说，就是确定状态反馈矩阵K，使得$A+BK$的特征值为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$

- 简单的说，就是确定状态反馈矩阵K，使得$A+BK$的特征值为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$
- 系统(A,B)满足什么条件矩阵K才存在，使得$A+BK$有任意指定的特征值呢?如何去求K呢?

—这正是我们将要解决的极点配置问题

考虑单输入系统(A,b), 其中, A为$n\times n$, b为$n\times 1$的常阵

考虑单输入系统(A,b)，其中，A为$n\times n$，b为$n\times 1$的常阵

定理

定理3.2 若单输入系统(A,b)能控，则对于任意给定的n个数$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$（复数共轭出现），必存在矩阵$K$，使得经状态反馈$u=Kx+v$构成的闭环系统$(A+bK,b)$以此$n$个数为极点.

考虑单输入系统(A,b), 其中, A为$n\times n$, b为$n\times 1$的常阵

定理

定理3.2 若单输入系统(A,b)能控, 则对于任意给定的n个数$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ (复数共轭出现), 必存在矩阵K, 使得经状态反馈$u=Kx+v$构成的闭环系统$(A+bK,b)$以此n个数为极点.

证明: 若(A,b)为单输入能控, 则一定存在非奇异矩阵T,

$$T=\begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

- 使得

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \hat{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

为能控规范型

- 使得

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \ \hat{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

为能控规范型

注: 其中, $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为A的特征多项式的系数, 即

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (11)$$

- 使得

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \hat{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

为能控规范型

注: 其中, $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 A 的特征多项式的系数, 即

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{11}$$

- 令

$$\hat{K} = KT = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

- 使得

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \ \hat{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

为能控规范型

注: 其中, $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为 A 的特征多项式的系数, 即

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \quad (11)$$

- 令

$$\hat{K} = KT = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

则由

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{b}\hat{K} &= T^{-1}AT + T^{-1}bKT \\ &= T^{-1}(A + bK)T \end{aligned}$$

知: $\hat{A} + \hat{b}\hat{K}$ 与 $A + bK$ 有相同的特征值

- 由(10),(12)得

$$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -(a_0-k_0) & -(a_1-k_1) & \cdots & -(a_{n-1}-k_{n-1}) \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

3.2.2 单输入系统的极点配置

- 由(10),(12)得

$$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -(a_0-k_0) & -(a_1-k_1) & \cdots & -(a_{n-1}-k_{n-1}) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

- 容易看出,$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}$的特征多项式为

$$\begin{aligned} &\det(sI-\hat{A}-\hat{b}\hat{K}) \\ &\quad = s^n+(a_{n-1}-k_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_1-k_1)s+(a_0-k_0) \end{aligned} \tag{14}$$

- 由(10),(12)得

$$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -(a_0-k_0) & -(a_1-k_1) & \cdots & -(a_{n-1}-k_{n-1}) \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

- 容易看出,$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}$的特征多项式为

$$\det(sI-\hat{A}-\hat{b}\hat{K}) = s^n+(a_{n-1}-k_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_1-k_1)s+(a_0-k_0) \qquad (14)$$

- 又$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}$的特征值为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$

3.2.2 单输入系统的极点配置

- 由(10),(12)得

$$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -(a_0-k_0) & -(a_1-k_1) & \cdots & -(a_{n-1}-k_{n-1}) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

- 容易看出, $\hat{A}+\hat{b}\hat{K}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned} &\det(sI-\hat{A}-\hat{b}\hat{K}) \\ &= s^n+(a_{n-1}-k_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_1-k_1)s+(a_0-k_0) \end{aligned} \quad (14)$$

- 又 $\hat{A}+\hat{b}\hat{K}$ 的特征值为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$, 令

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n) \\ &\triangleq s^n+\bar{a}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\bar{a}_1 s+\bar{a}_0, \end{aligned} \quad (15)$$

- 由(10),(12)得

$$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -(a_0-k_0) & -(a_1-k_1) & \cdots & -(a_{n-1}-k_{n-1}) \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

- 容易看出, $\hat{A}+\hat{b}\hat{K}$的特征多项式为

$$\begin{aligned} &\det(sI-\hat{A}-\hat{b}\hat{K}) \\ &= s^n+(a_{n-1}-k_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_1-k_1)s+(a_0-k_0) \end{aligned} \qquad (14)$$

- 又$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}$的特征值为$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$, 令

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= (s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\cdots(s-\alpha_n) \\ &\triangleq s^n+\bar{a}_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\bar{a}_1 s+\bar{a}_0, \end{aligned} \qquad (15)$$

- 故, 由$\det(sI-\hat{A}-\hat{b}\hat{K})=\alpha(s)$可得

$$a_{n-1}-k_{n-1}=\bar{a}_{n-1},\cdots,a_1-k_1=\bar{a}_1,a_0-k_0=\bar{a}_0. \qquad (16)$$

- 于是推得

$$k_{n-1} = a_{n-1} - \bar{a}_{n-1}, \cdots, k_1 = a_1 - \bar{a}_1, k_0 = a_0 - \bar{a}_0. \tag{17}$$

- 于是推得

$$k_{n-1} = a_{n-1} - \bar{a}_{n-1}, \cdots, k_1 = a_1 - \bar{a}_1, k_0 = a_0 - \bar{a}_0. \tag{17}$$

➥ 从而可得

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} a_0 - \bar{a}_0 & a_1 - \bar{a}_1 & \cdots & a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{18}$$

- 于是推得

$$k_{n-1} = a_{n-1} - \bar{a}_{n-1}, \cdots, k_1 = a_1 - \bar{a}_1, k_0 = a_0 - \bar{a}_0. \qquad (17)$$

➥ 从而可得

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} a_0 - \bar{a}_0 & a_1 - \bar{a}_1 & \cdots & a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (18)$$

- 由上述推导知(18)给出的$\hat{K}$使得$\hat{A} + \hat{b}\hat{K}$的特征值为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

- 于是推得

$$k_{n-1} = a_{n-1} - \bar{a}_{n-1}, \cdots, k_1 = a_1 - \bar{a}_1, k_0 = a_0 - \bar{a}_0. \tag{17}$$

➥ 从而可得

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} a_0 - \bar{a}_0 & a_1 - \bar{a}_1 & \cdots & a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{18}$$

- 由上述推导知(18)给出的$\hat{K}$使得$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}$的特征值为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$
- 令

$$K = \hat{K}T^{-1} = \begin{bmatrix} a_0 - \bar{a}_0 & a_1 - \bar{a}_1 & \cdots & a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} \end{bmatrix} T^{-1}, \tag{19}$$

则$A+BK$的特征值为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$

- 于是推得

$$k_{n-1}=a_{n-1}-\bar{a}_{n-1},\cdots,k_1=a_1-\bar{a}_1,k_0=a_0-\bar{a}_0. \tag{17}$$

➥ 从而可得

$$\hat{K}=\begin{bmatrix}a_0-\bar{a}_0 & a_1-\bar{a}_1 & \cdots & a_{n-1}-\bar{a}_{n-1}\end{bmatrix} \tag{18}$$

- 由上述推导知(18)给出的$\hat{K}$使得$\hat{A}+\hat{b}\hat{K}$的特征值为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$
- 令

$$K=\hat{K}T^{-1}=\begin{bmatrix}a_0-\bar{a}_0 & a_1-\bar{a}_1 & \cdots & a_{n-1}-\bar{a}_{n-1}\end{bmatrix}T^{-1}, \tag{19}$$

则$A+BK$的特征值为$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$

- 故K存在. 定理结论得证 ■

注: 定理3.2 说明, 单输入能控系统可通过状态反馈任意配置闭环系统的极点

注: 定理3.2 说明, 单输入能控系统可通过状态反馈任意配置闭环系统的极点

- 同时, 定理3.2也给出了单输入极点配置问题的算法:
  1. 求A的特征多项式, 即(11);
  2. 计算$\alpha(s)$, 即闭环系统的期望特征多项式(15);
  3. 由(18)计算$\hat{K}$;
  4. 由(9)计算变换矩阵T, 并求出T^{-1};
  5. 由(19), 计算状态反馈矩阵K.

例3.2.1 给定单输入线性定常系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

闭环特征值为

$$\alpha_1 = -2,\ \alpha_{2,3} = -1 \pm j,$$

例3.2.1 给定单输入线性定常系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

闭环特征值为

$$\alpha_1 = -2,\ \alpha_{2,3} = -1 \pm j,$$

解：首先，易知系统为能控

例3.2.1 给定单输入线性定常系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

闭环特征值为

$$\alpha_1 = -2,\ \alpha_{2,3} = -1 \pm j,$$

解: 首先, 易知系统为能控

1) 计算系统的特征多项式

$$\det(sI - A) = s^3 + 18s^2 + 72s,$$

3.2.2 单输入系统的极点配置

例3.2.1 给定单输入线性定常系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

闭环特征值为

$$\alpha_1 = -2,\ \alpha_{2,3} = -1 \pm j,$$

解: 首先, 易知系统为能控

1) 计算系统的特征多项式

$$\det(sI - A) = s^3 + 18s^2 + 72s,$$

2) 求得闭环系统的期望特征多项式

$$\alpha(s) = (s+2)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

例3.2.1 给定单输入线性定常系统为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & -12 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u,$$

闭环特征值为

$$\alpha_1 = -2,\ \alpha_{2,3} = -1 \pm j,$$

解: 首先, 易知系统为能控

1) 计算系统的特征多项式

$$\det(sI - A) = s^3 + 18s^2 + 72s,$$

2) 求得闭环系统的期望特征多项式

$$\alpha(s) = (s+2)(s+1-j)(s+1+j) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

3) 于是, 可推得

$$\hat{K} = [-4\ \ 66\ \ 14].$$

4) 再计算变换阵

$$T = \begin{bmatrix} A^2b & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ a_2 & 1 & \\ a_1 & a_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 & 18 & 1 \\ 12 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

并, 求其逆

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -12 \\ 1 & -18 & 144 \end{bmatrix},$$

3.2.2 单输入系统的极点配置

4) 再计算变换阵

$$T=\begin{bmatrix}A^2b & Ab & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ a_2 & 1 & \\ a_1 & a_2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}72 & 18 & 1\\ 12 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

并，求其逆

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -12\\ 1 & -18 & 144\end{bmatrix},$$

5) 确定反馈增益阵K为

$$K=\hat{K}T^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 66 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -12\\ 1 & -18 & 144\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14 & -186 & 1220\end{bmatrix}$$

4) 再计算变换阵

$$T=\begin{bmatrix}A^2b & Ab & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ a_2 & 1 & \\ a_1 & a_2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}72 & 18 & 1\\ 12 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

并, 求其逆

$$T^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -12\\ 1 & -18 & 144\end{bmatrix},$$

5) 确定反馈增益阵K为

$$K=\hat{K}T^{-1}=\begin{bmatrix}-4 & 66 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -12\\ 1 & -18 & 144\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}14 & -186 & 1220\end{bmatrix}$$

- 则, $A+BK$的特征值为$-2, -1\pm j$ ■

考虑多输入系统(A,B), 其中A为$n\times n$阶常阵, B为$n\times p$阶常阵, 且(A,B)为能控

考虑多输入系统(A,B), 其中A为$n\times n$阶常阵, B为$n\times p$阶常阵, 且(A,B)为能控

- 对于多输入系统, 情形要比单输入系统复杂得多, 下面我们分两种情形进行讨论

考虑多输入系统(A, B), 其中A为$n\times n$阶常阵, B为$n\times p$阶常阵, 且(A, B)为能控

- 对于多输入系统, 情形要比单输入系统复杂得多, 下面我们分两种情形进行讨论

(1). A为循环矩阵

考虑多输入系统(A,B), 其中A为$n\times n$阶常阵, B为$n\times p$阶常阵, 且(A,B)为能控

- 对于多输入系统, 情形要比单输入系统复杂得多, 下面我们分两种情形进行讨论

(1). A为循环矩阵

引理

引理3.1 若(A,B)能控, A为循环矩阵, 则必有向量$\alpha \in \mathbb{R}^{p\times 1}$, 使得$(A,B\alpha)$单输入能控.

考虑多输入系统(A, B), 其中A为$n\times n$阶常阵, B为$n\times p$阶常阵, 且(A, B)为能控

- 对于多输入系统, 情形要比单输入系统复杂得多, 下面我们分两种情形进行讨论

(1). A为循环矩阵

引理

引理3.1 若(A, B)能控, A为循环矩阵, 则必有向量$\alpha \in \mathbb{R}^{p\times 1}$, 使得$(A, B\alpha)$单输入能控.

证明: 因为A为循环矩阵, 故A的互异特征根各自对应一个若尔当块

考虑多输入系统(A,B), 其中A为$n\times n$阶常阵, B为$n\times p$阶常阵, 且(A,B)为能控

- 对于多输入系统, 情形要比单输入系统复杂得多, 下面我们分两种情形进行讨论

(1). A为循环矩阵

引理

引理3.1 若(A,B)能控, A为循环矩阵, 则必有向量$\alpha\in\mathbb{R}^{p\times 1}$, 使得$(A,B\alpha)$单输入能控.

证明: 因为A为循环矩阵, 故A的互异特征根各自对应一个若尔当块

- 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_\sigma$ 为A的互异特征根

- 对(A,B)进行非奇异线性变换，令

$$J = T^{-1}AT,\ \hat{B} = T^{-1}B, \tag{20}$$

其中，T为$n\times n$非奇异矩阵，J为若尔当标准型，

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\sigma \end{bmatrix},\ J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_j\times n_j}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_\sigma \end{bmatrix},\ B_j = \begin{bmatrix} b_{j1} \\ \vdots \\ b_{jn_j} \end{bmatrix}_{n_j\times p} \tag{21}$$

且$\sum_{j=1}^{\sigma} n_j = n$

- 对(A,B)进行非奇异线性变换，令

$$J=T^{-1}AT,\ \hat{B}=T^{-1}B, \tag{20}$$

其中，T为$n\times n$非奇异矩阵，J为若尔当标准型，

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\sigma \end{bmatrix},\ J_j=\begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_j\times n_j}$$

$$\hat{B}=\begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_\sigma \end{bmatrix},\ B_j=\begin{bmatrix} b_{j1} \\ \vdots \\ b_{jn_j} \end{bmatrix}_{n_j\times p} \tag{21}$$

且$\sum_{j=1}^{\sigma} n_j=n$

- 对(A,B)进行非奇异线性变换，令

$$J = T^{-1}AT,\ \hat{B} = T^{-1}B, \tag{20}$$

其中，T为$n\times n$非奇异矩阵，J为若尔当标准型，

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_\sigma \end{bmatrix},\ J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}_{n_j\times n_j}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_\sigma \end{bmatrix},\ B_j = \begin{bmatrix} b_{j1} \\ \vdots \\ b_{jn_j} \end{bmatrix}_{n_j\times p} \tag{21}$$

且$\sum_{j=1}^{\sigma} n_j = n$

- 因为(A,B)能控，故$(J,\hat{B})$ 能控

3.2.3 多输入系统的极点配置

- 由定理2.10可得: $b_{jn_j} \in \mathbb{R}^{1\times p} \neq 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma$

- 由定理2.10可得: $b_{jn_j} \in \mathbb{R}^{1\times p} \neq 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma$
- 从而存在$\alpha \in \mathbb{R}^{p\times 1}$使得

$$b_{jn_j}\alpha \in \mathbb{R} \neq 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma. \tag{22}$$

- 由定理2.10可得: $b_{jn_j} \in \mathbb{R}^{1\times p} \neq 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma$
- 从而存在$\alpha \in \mathbb{R}^{p\times 1}$使得

$$b_{jn_j}\alpha \in \mathbb{R} \neq 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma. \tag{22}$$

- 同样由定理2.10知, 式(22)等价于$(J, \hat{B}\alpha)$能控

- 由定理2.10可得: $b_{jn_j} \in \mathbb{R}^{1\times p} \neq 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma$
- 从而存在$\alpha \in \mathbb{R}^{p\times 1}$使得

$$b_{jn_j}\alpha \in \mathbb{R} \neq 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma. \tag{22}$$

- 同样由定理2.10知, 式(22)等价于$(J, \hat{B}\alpha)$能控
- 又由(20)可得

$$J = T^{-1}AT, \; \hat{B}\alpha = T^{-1}B\alpha,$$

故$(A, B\alpha)$能控. 结论得证 ■

- 由定理2.10可得: $b_{jn_j} \in \mathbb{R}^{1\times p} \neq 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma$
- 从而存在$\alpha \in \mathbb{R}^{p\times 1}$使得

$$b_{jn_j}\alpha \in \mathbb{R} \neq 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma. \tag{22}$$

- 同样由定理2.10知, 式(22)等价于$(J, \hat{B}\alpha)$能控
- 又由(20)可得

$$J = T^{-1}AT, \ \hat{B}\alpha = T^{-1}B\alpha,$$

故$(A, B\alpha)$能控. 结论得证 ■

注: 事实上, 因为使得

$$b_{jn_j}\alpha = 0, j = 1, 2, \cdots, \sigma$$

的实向量α是$\mathbb{R}^p$的有限维子空间, 故对几乎任意的$p\times 1$实向量α, 引理3.1都是成立的

3.2.3 多输入系统的极点配置

- 引理3.1将多输入能控系统(A,B)的闭环极点配置问题转化成单输入能控系统$(A,B\alpha)$的闭环极点配置问题

- 引理3.1将多输入能控系统(A,B)的闭环极点配置问题转化成单输入能控系统$(A,B\alpha)$的闭环极点配置问题
- 直接由定理3.2可知，若$(A,B\alpha)$能控，一定存在矩阵K_0使得$A+B\alpha K_0$以任意指定的n个数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为特征值

- 引理3.1将多输入能控系统(A, B)的闭环极点配置问题转化成单输入能控系统$(A, B\alpha)$的闭环极点配置问题
- 直接由定理3.2可知，若$(A, B\alpha)$能控，一定存在矩阵K_0使得$A + B\alpha K_0$以任意指定的n个数$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为特征值
- 记$K = \alpha K_0$，从而$A + BK$以$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为特征值

- 引理3.1将多输入能控系统(A,B)的闭环极点配置问题转化成单输入能控系统$(A,B\alpha)$的闭环极点配置问题
- 直接由定理3.2可知，若$(A,B\alpha)$能控，一定存在矩阵K_0使得$A+B\alpha K_0$以任意指定的n个数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为特征值
- 记$K=\alpha K_0$，从而$A+BK$以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为特征值
- 于是，我们有下面的结论

定理

定理3.3 若多输入系统(A,B)能控，A为循环矩阵，则必存在状态反馈矩阵K，使得$A+BK$有任意指定的特征值.

(2) A不是循环矩阵

(2) A不是循环矩阵

- 此种情形较为复杂, 我们不加以证明给出下面的引理

引理

引理3.2 若(A, B)能控, A不是循环矩阵, 则存在矩阵$K \in \mathbb{R}^{p\times n}$, 使得$A + BK$为循环矩阵.

(2) A不是循环矩阵

- 此种情形较为复杂，我们不加以证明给出下面的引理

引理

引理3.2 若(A, B)能控，A不是循环矩阵，则存在矩阵$K \in \mathbb{R}^{p\times n}$，使得$A + BK$为循环矩阵.

注：事实上，对几乎任意$p \times n$阶矩阵K，引理3.2的结论成立

(2) A不是循环矩阵

- 此种情形较为复杂，我们不加以证明给出下面的引理

引理

引理3.2 若(A, B)能控，A不是循环矩阵，则存在矩阵$K \in \mathbb{R}^{p\times n}$，使得$A + BK$为循环矩阵.

注：事实上，对几乎任意$p \times n$阶矩阵K，引理3.2的结论成立

- 基于此，再由定理3.3可得下面的结论

定理

定理3.4 若多输入系统(A, B)能控，则必存在反馈矩阵K，使得$A + BK$有任意指定的特征值.

注: 通过上面的讨论可以看到, 对于多输入系统(A, B), 不管A是不是循环阵, 只要(A, B)能控, 就一定存在状态反馈$u = Kx + v$, 使得闭环系统$(A + BK, B)$有任意指定的极点

注: 通过上面的讨论可以看到, 对于多输入系统(A, B), 不管A是不是循环阵, 只要(A, B)能控, 就一定存在状态反馈$u = Kx + v$, 使得闭环系统$(A + BK, B)$有任意指定的极点

- 再联系到单输入系统情形, 我们可以得到下面的结论

能控系统可通过状态反馈任意配置极点. 反之, 也是成立的

注: 通过上面的讨论可以看到, 对于多输入系统(A,B), 不管A是不是循环阵, 只要(A,B)能控, 就一定存在状态反馈$u=Kx+v$, 使得闭环系统$(A+BK,B)$有任意指定的极点

- 再联系到单输入系统情形, 我们可以得到下面的结论

  能控系统可通过状态反馈任意配置极点. 反之, 也是成立的

- 于是, 有如下定理

定理

定理3.5 系统(A,B)能控的充要条件是存在反馈矩阵K, 使得$A+BK$有任意指定的特征值.

注: 通过上面的讨论可以看到, 对于多输入系统(A, B), 不管A是不是循环阵, 只要(A, B)能控, 就一定存在状态反馈$u = Kx + v$, 使得闭环系统$(A + BK, B)$有任意指定的极点

- 再联系到单输入系统情形, 我们可以得到下面的结论

  能控系统可通过状态反馈任意配置极点. 反之, 也是成立的

- 于是, 有如下定理

定理

定理3.5 系统(A, B)能控的充要条件是存在反馈矩阵K, 使得$A + BK$有任意指定的特征值.

证明: 必要性: 即定理3.4

- 充分性：用反证法

3.2.3 多输入系统的极点配置

- 充分性: 用反证法. 设(A,B)不完全能控, 则对其进行能控性分解

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \ \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (23)$$

其中, (A_{11}, B_1)为完全能控

- 充分性: 用反证法. 设(A,B)不完全能控, 则对其进行能控性分解

$$\hat{A}=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix},\ \hat{B}=T^{-1}B=\begin{bmatrix}B_1\\ 0\end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中, (A_{11},B_1)为完全能控

- 则对任一状态反馈矩阵K, 令$\hat{K}=KT=[K_1\ \ K_2]$, 有

$$\begin{aligned}\det(sI-A-BK)&=\det(sI-\hat{A}-\hat{B}\hat{K})\\ &=\det\begin{bmatrix}sI-A_{11}-B_1K_1 & -A_{12}-B_1K_2\\ 0 & sI-A_{22}\end{bmatrix}\\ &=\det(sI-A_{11}-B_1K_1)\det(sI-A_{22}).\end{aligned} \tag{24}$$

这表明状态反馈不能改变系统不能控部分的特征值

- 充分性: 用反证法. 设(A, B)不完全能控, 则对其进行能控性分解

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \ \hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

其中, (A_{11}, B_1)为完全能控

- 则对任一状态反馈矩阵K, 令$\hat{K} = KT = [K_1 \ \ K_2]$, 有

$$\begin{aligned} \det(sI - A - BK) &= \det(sI - \hat{A} - \hat{B}\hat{K}) \\ &= \det \begin{bmatrix} sI - A_{11} - B_1K_1 & -A_{12} - B_1K_2 \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix} \\ &= \det(sI - A_{11} - B_1K_1)\det(sI - A_{22}). \end{aligned} \tag{24}$$

这表明状态反馈不能改变系统不能控部分的特征值

- 故, 不能随意配置系统的特征值, 此与已知前提矛盾, 故反设不成立, 也就是(A, B)能控. 充分性得证 ■

3.2.4 状态反馈对传递函数零点的影响

- 若系统(A, B)能控, 则通过引入状态反馈, 可以任意配置闭环系统的特征值, 或者等价地说可以任意配置闭环系统传递函数的极点

- 若系统(A, B)能控, 则通过引入状态反馈, 可以任意配置闭环系统的特征值, 或者等价地说可以任意配置闭环系统传递函数的极点

➥ 与此同时, 一个有待进一步研究的问题是, 状态反馈在改变系统的极点的同时, 是否也对系统的传递函数的零点有影响

3.2.4 状态反馈对传递函数零点的影响

首先, 讨论单输入系统的情形. 给定能控线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \ y = Cx, \tag{25}$$

其中, x为n维状态向量, u为1维控制向量, y为q维输出向量, A, b, C分别为$n \times n, n \times 1, q \times n$阶常阵

3.2.4 状态反馈对传递函数零点的影响

首先，讨论单输入系统的情形. 给定能控线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \ y = Cx, \tag{25}$$

其中, x为n维状态向量, u为1维控制向量, y为q维输出向量, A, b, C分别为$n \times n, n \times 1, q \times n$阶常阵

- 其传递函数矩阵为

$$G_o(s) = C(sI - A)^{-1}b \tag{26}$$

3.2.4 状态反馈对传递函数零点的影响

首先, 讨论单输入系统的情形. 给定能控线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \ y = Cx, \tag{25}$$

其中, x为n维状态向量, u为1维控制向量, y为q维输出向量, A, b, C分别为$n \times n, n \times 1, q \times n$阶常阵

- 其传递函数矩阵为

$$G_o(s) = C(sI - A)^{-1}b \tag{26}$$

- 对系统(25)作状态反馈

$$u = Kx + v, \tag{27}$$

其中, K为$1 \times n$阶反馈增益阵, v为参考输入, 则闭环系统为

$$\dot{x} = (A + bK)x + bv, \ y = Cx. \tag{28}$$

首先, 讨论单输入系统的情形. 给定能控线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \ y = Cx, \tag{25}$$

其中, x为n维状态向量, u为1维控制向量, y为q维输出向量, A, b, C分别为$n \times n, n \times 1, q \times n$阶常阵

- 其传递函数矩阵为

$$G_o(s) = C(sI - A)^{-1}b \tag{26}$$

- 对系统(25)作状态反馈

$$u = Kx + v, \tag{27}$$

其中, K为$1 \times n$阶反馈增益阵, v为参考输入, 则闭环系统为

$$\dot{x} = (A + bK)x + bv, \ y = Cx. \tag{28}$$

- 闭环系统的传递函数为

$$G_c(s) = C(sI - (A + bK))^{-1}b \tag{29}$$

3.2.4 状态反馈对传递函数零点的影响

首先, 讨论单输入系统的情形. 给定能控线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + bu,\ y = Cx, \tag{25}$$

其中, x为n维状态向量, u为1维控制向量, y为q维输出向量, A, b, C分别为$n \times n, n \times 1, q \times n$阶常阵

- 其传递函数矩阵为

$$G_o(s) = C(sI - A)^{-1}b \tag{26}$$

- 对系统(25)作状态反馈

$$u = Kx + v, \tag{27}$$

其中, K为$1 \times n$阶反馈增益阵, v为参考输入, 则闭环系统为

$$\dot{x} = (A + bK)x + bv,\ y = Cx. \tag{28}$$

- 闭环系统的传递函数为

$$G_c(s) = C(sI - (A + bK))^{-1}b \tag{29}$$

➥ 对于传递函数$G_o(s)$和$G_c(s)$的零点, 有下面的结论

定理

定理3.6 若单输入系统(A, b, C)能控, 则状态反馈不改变传递函数的零点.

定理

定理3.6 若单输入系统(A, b, C)能控, 则状态反馈不改变传递函数的零点.

证明: 因为(A, b)能控, 对系统(25)引进非奇异线性变换$x = T\hat{x}$, 其中

$$T = \begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

定理

定理3.6 若单输入系统(A, b, C)能控, 则状态反馈不改变传递函数的零点.

证明: 因为(A, b)能控, 对系统(25)引进非奇异线性变换$x = T\hat{x}$, 其中

$$T = \begin{bmatrix} A^{n-1}b & \cdots & Ab & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ a_{n-1} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \tag{30}$$

- 则系统(25)化成能控规范型

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \hat{A}\hat{x} + \hat{b}u, \\ y &= \hat{C}\hat{x}, \end{aligned} \tag{31}$$

3.2.4 状态反馈对传递函数零点的影响

- 其中

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\hat{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{bmatrix}.$$

- 其中

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$\hat{b} = T^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = CT = \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{bmatrix}.$$

且$a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$为$A$的特征多项式的系数, 即

$$\det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \tag{33}$$

- 令

$$\hat{K} = KT = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

- 令

$$\hat{K} = KT = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

➥ 下面分别计算$G_o(s)$和$G_c(s)$

3.2.4 状态反馈对传递函数零点的影响

- 令

$$\hat{K} = KT = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

➥ 下面分别计算$G_o(s)$和$G_c(s)$

- 为此, 先计算$(sI - \hat{A})^{-1}\hat{b}$

- 令

$$\hat{K} = KT = \begin{bmatrix} k_0 & k_1 & \cdots & k_{n-1} \end{bmatrix}, \tag{34}$$

➥ 下面分别计算$G_o(s)$和$G_c(s)$

- 为此, 先计算$(sI - \hat{A})^{-1}\hat{b}$. 考虑

$$(sI - \hat{A})(sI - \hat{A})^{-1} = I$$

即

$$\begin{bmatrix} s & -1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & s & -1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} & s + a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & z_1 \\ & z_2 \\ * & \vdots \\ & z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \tag{35}$$

其中, $z_1, z_2, \cdots, z_n$为$(sI - \hat{A})^{-1}$的最后一列元素

- 由上式(35), 可得

$$\begin{aligned} sz_1 - z_2 &= 0, \\ sz_2 - z_3 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ sz_{n-1} - z_n &= 0 \end{aligned} \tag{36}$$

及

$$a_0 z_1 + a_1 z_2 + \cdots + a_{n-2} z_{n-1} + (s + a_{n-1}) z_n = 1, \tag{37}$$

- 由上式(35), 可得

$$
\begin{aligned}
sz_1 - z_2 &= 0,\\
sz_2 - z_3 &= 0,\\
&\cdots\cdots\\
sz_{n-1} - z_n &= 0
\end{aligned}
\tag{36}
$$

及

$$
a_0 z_1 + a_1 z_2 + \cdots + a_{n-2} z_{n-1} + (s + a_{n-1}) z_n = 1, \tag{37}
$$

- 由(36), 容易看出

$$
\begin{aligned}
z_2 &= sz_1,\\
z_3 &= sz_2 = s^2 z_1,\\
&\cdots\cdots\\
z_n &= sz_{n-1} = s^{n-1} z_1,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

- 将上式(38)代入(37), 可得

$$a_0 z_1 + a_1 s z_1 + \cdots + a_{n-2} s^{n-1} z_1 + s^n z_1 = 1, \tag{39}$$

- 将上式(38)代入(37), 可得

$$a_0 z_1 + a_1 s z_1 + \cdots + a_{n-2} s^{n-1} z_1 + s^n z_1 = 1, \tag{39}$$

- 于是

$$z_1 = \frac{1}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{1}{\det(sI - A)}. \tag{40}$$

- 将上式(38)代入(37), 可得

$$a_0 z_1 + a_1 s z_1 + \cdots + a_{n-2} s^{n-1} z_1 + s^n z_1 = 1, \tag{39}$$

- 于是

$$z_1 = \frac{1}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{1}{\det(sI - A)}. \tag{40}$$

- 由(38), (40), 得

$$\begin{aligned} (sI - \hat{A})^{-1}\hat{b} &= \begin{bmatrix} & z_1 \\ & z_2 \\ & \vdots \\ * & z_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{41}$$

- 从而可得开环传递函数$G_o(s)$为

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{b} \\ &= \begin{bmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \frac{1}{(\det sI - A)} \\ &= \frac{1}{\det(sI - A)}(C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0). \end{aligned} \tag{42}$$

- 同理, 可得闭环传递函数$G_c(s)$为

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \hat{C}(sI - (\hat{A} + \hat{b}\hat{K}))^{-1}\hat{b} \\
&= \frac{C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0}{s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)} \qquad (43) \\
&= \frac{1}{\det(sI - (A + bK))}(C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0).
\end{aligned}
$$

3.2.4 状态反馈对传递函数零点的影响

- 同理, 可得闭环传递函数$G_c(s)$为

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \hat{C}(sI - (\hat{A} + \hat{b}\hat{K}))^{-1}\hat{b} \\
&= \frac{C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0}{s^n + (a_{n-1} - k_{n-1})s^{n-1} + \cdots + (a_1 - k_1)s + (a_0 - k_0)} \qquad (43) \\
&= \frac{1}{\det(sI - (A + bK))}(C_{n-1}s^{n-1} + \cdots + C_1 s + C_0).
\end{aligned}
$$

- 显然, $G_o(s)$和$G_c(s)$有相同的分子矩阵

- 同理, 可得闭环传递函数$G_c(s)$为

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \hat{C}(sI-(\hat{A}+\hat{b}\hat{K}))^{-1}\hat{b} \\
&= \frac{C_{n-1}s^{n-1}+\cdots+C_1s+C_0}{s^n+(a_{n-1}-k_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_1-k_1)s+(a_0-k_0)} \\
&= \frac{1}{\det(sI-(A+bK))}(C_{n-1}s^{n-1}+\cdots+C_1s+C_0).
\end{aligned}
\tag{43}
$$

- 显然, $G_o(s)$和$G_c(s)$有相同的分子矩阵
- 故$G_o(s)$和$G_c(s)$有相同的零点. 定理结论得证 ■

- 同理, 可得闭环传递函数$G_c(s)$为

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \hat{C}(sI-(\hat{A}+\hat{b}\hat{K}))^{-1}\hat{b} \\
&= \frac{C_{n-1}s^{n-1}+\cdots+C_1s+C_0}{s^n+(a_{n-1}-k_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(a_1-k_1)s+(a_0-k_0)} \qquad (43)\\
&= \frac{1}{\det(sI-(A+bK))}(C_{n-1}s^{n-1}+\cdots+C_1s+C_0).
\end{aligned}
$$

- 显然, $G_o(s)$和$G_c(s)$有相同的分子矩阵
- 故$G_o(s)$和$G_c(s)$有相同的零点. 定理结论得证 ■

注: 定理3.6说明, 对于单输入系统(A,b,C)来说, 若(A,b)能控, 则经状态反馈后的闭环系统的传递函数具有开环传递函数的零点

➥ 故, 此定理称作传递函数的零点不变定理

对于一般的多输入系统(A, B, C), 其中A, B, C分别是$n\times n, n\times p, q\times n$阶常阵

- 若(A, B)能控, 也有同样的结果, 即状态反馈的引入不影响传递函数$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$的零点

3.2.4 状态反馈对传递函数零点的影响

对于一般的多输入系统(A, B, C), 其中A, B, C分别是$n\times n, n\times p, q\times n$阶常阵

- 若(A, B)能控, 也有同样的结果, 即状态反馈的引入不影响传递函数$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$的零点
- 但是, 并不意味着$G(s)$的每个元的分子不受状态反馈的影响. 对于多输入系统, $G(s)$的每一个元的零点是受状态反馈的影响的, 此与单输入系统不同

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{44}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, 且A, B分别为$n \times n, n \times p$阶常阵

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{44}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, 且A, B分别为$n \times n, n \times p$阶常阵

定义

定义3.1 称线性定常系统(A, B)是能稳的, 若存在状态反馈矩阵K, 使得$A + BK$的特征值全在左半平面.

考虑线性定常系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{44}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, 且A, B分别为$n \times n, n \times p$阶常阵

定义

定义3.1 称线性定常系统(A, B)是能稳的, 若存在状态反馈矩阵K, 使得$A + BK$的特征值全在左半平面.

注: 显然, 若(A, B) 能控, 则存在状态反馈矩阵K, 使得$A + BK$ 的特征值任意配置, 当然包含了$A + BK$ 的特征值全部落在左半平面的情形

➥ 故, 若(A, B) 能控, 则其必能稳

- 当(A,B)不完全能控时, 对(A,B)进行能控性分解:

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中, (A_{11}, B_1)完全能控

- 当(A,B)不完全能控时，对(A,B)进行能控性分解：

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中，(A_{11}, B_1)完全能控

- 对任意状态反馈增益阵K，令$\hat{K} = KT = [K_1 \quad K_2]$，则有

$$\begin{aligned} \det(sI - A - BK) &= \det(sI - \hat{A} - \hat{B}\hat{K}) \\ &= \det\begin{bmatrix} sI - A_{11} - B_1K_1 & -A_{12} - B_1K_2 \\ 0 & sI - A_{22} \end{bmatrix} \qquad (45) \\ &= \det(sI - A_{11} - B_1K_1)\det(sI - A_{22}), \end{aligned}$$

由上式(45), 可以看出

- $A+BK$ 的特征值为$A_{11}+B_1K_1$ 的特征值和A_{22} 特征值

由上式(45), 可以看出

- $A+BK$ 的特征值为$A_{11}+B_1K_1$ 的特征值和A_{22} 特征值
- $A+BK$ 的特征值全位于左半平面等价于$A_1+B_1K_1$ 和A_{22} 的特征值全在左半平面

由上式(45), 可以看出

- $A+BK$ 的特征值为$A_{11}+B_1K_1$ 的特征值和A_{22} 特征值
- $A+BK$ 的特征值全位于左半平面等价于$A_1+B_1K_1$ 和A_{22} 的特征值全在左半平面
- (A_{11},B_1) 能控, 存在K_1 使得$A_{11}+B_1K_1$ 的特征值全在左半平面, 只要A_{22} 的特征根全在左半平面, 总存在$K=[K_1\quad K_2]T^{-1}$ 使得$A+BK$ 的特征值全部落在左半平面

由上式(45), 可以看出

- $A+BK$ 的特征值为$A_{11}+B_1K_1$ 的特征值和A_{22} 特征值
- $A+BK$ 的特征值全位于左半平面等价于$A_1+B_1K_1$ 和A_{22} 的特征值全在左半平面
- (A_{11},B_1) 能控, 存在K_1 使得$A_{11}+B_1K_1$ 的特征值全在左半平面, 只要A_{22} 的特征根全在左半平面, 总存在$K=[K_1\quad K_2]T^{-1}$ 使得$A+BK$ 的特征值全部落在左半平面
- 于是, 有如下结论

定理

定理3.7 (A,B)能稳的充要条件是不能控部分的特征值全部落在左半平面.

- 再由

$$\begin{aligned} rank\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} &= rank\begin{bmatrix} sI-\hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix} \\ &= rank\begin{bmatrix} sI-A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI-A_{22} & 0 \end{bmatrix} \\ &= rank\begin{bmatrix} sI-A_{11} & B_1 & -A_{12} \\ 0 & 0 & sI-A_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (46)$$

可得下面的结论

定理

定理3.8 (A,B)能稳的充要条件是

$$rank\begin{bmatrix} sI-A & B \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}, Res \geq 0 \quad (47)$$

下面考虑系统(44)的状态反馈镇定问题

下面考虑系统(44)的状态反馈镇定问题

- 若可以找到状态反馈控制律

$$u = Kx + v \tag{48}$$

使得通过状态反馈构成的闭环系统

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv \tag{49}$$

是渐近稳定的，即其特征值全部落在左半平面，则称系统(44)实现了状态反馈镇定. 或说系统(44) 是通过状态反馈可镇定的

下面考虑系统(44)的状态反馈镇定问题

- 若可以找到状态反馈控制律

$$u = Kx + v \tag{48}$$

使得通过状态反馈构成的闭环系统

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv \tag{49}$$

是渐近稳定的，即其特征值全部落在左半平面，则称系统(44)实现了状态反馈镇定. 或说系统(44) 是通过状态反馈可镇定的

- 由上面对(A, B)能稳的讨论知，若(A, B)能稳，则系统(44)通过状态反馈可镇定. 反之，亦然

下面考虑系统(44)的状态反馈镇定问题

- 若可以找到状态反馈控制律

$$u = Kx + v \tag{48}$$

使得通过状态反馈构成的闭环系统

$$\dot{x} = (A + BK)x + Bv \tag{49}$$

是渐近稳定的, 即其特征值全部落在左半平面, 则称系统(44)实现了状态反馈镇定. 或说系统(44) 是通过状态反馈可镇定的

- 由上面对(A, B)能稳的讨论知, 若(A, B)能稳, 则系统(44)通过状态反馈可镇定. 反之, 亦然

- 故有下面的结论

定理

定理3.9 系统(44)是由状态反馈可镇定的, 当且仅当(A, B)是能稳的.

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 68–79