



机器人学(第三版)

蔡自兴 主编

中南大学

2016



- 分析机器人操作的动态数学模型，主要采用下列两种理论：
 - 动力学基本理论，包括牛顿—欧拉方程。
 - 拉格朗日力学，特别是二阶拉格朗日方程。
- 对于动力学，有两个相反的问题：
 - 其一是已知机械手各关节的作用力或力矩，求各关节的位移、速度和加速度，求得运动轨迹。
 - 其二是已知机械手的运动轨迹，即各关节的位移、速度和加速度，求各关节所需要的驱动力或力矩。

4.1 刚体的动力学方程

- 拉格朗日函数 L 被定义为系统的动能 K 和位能 P 之差，即：

$$L = K - P \quad (4.1)$$

- 系统动力学方程式，即拉格朗日方程如下：

$$\mathbf{F}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

式中， q_i 为表示动能和位能的坐标， \dot{q}_i 为相应的速度，而 \mathbf{F}_i 为作用在第 i 个坐标上的力或是力矩。

4.1.1 刚体的动能与位能

$$K = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_0 \dot{x}_0^2$$

$$P = \frac{1}{2} k (x_1 - x_0)^2 - M_1 g x_1 - M_0 g x_0$$

$$D = \frac{1}{2} (\dot{x}_1 - \dot{x}_0)^2$$

$$W = F x_1 - F x_0$$

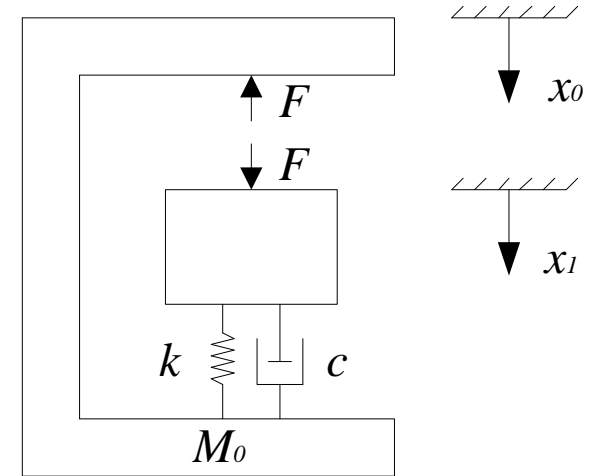


图4.1 一般物体的动能与位能

4.1.1 刚体的动能与位能

- $x = 0, x_1$ 为广义坐标

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}_1} \right) - \frac{\partial K}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial W}{\partial x_1}$$

其中，左式第一项为动能随速度（或角速度）和时间的变化；第二项为动能随位置（或角度）的变化；第三项为能耗随速度变化；第四项为位能随位置的变化。右式为实际外加力或力矩。表示为一般形式：

$$M_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + dx_1 = F + M_1 g$$

4.1.1 刚体的动能与位能

- $x_0 = 0$, x_0 和 x_1 均为广义坐标, 有下式:

$$M_1 \ddot{x}_1 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) + k(x_1 - x_0) - M_1 g = F$$

$$M_0 \ddot{x}_0 + c(\dot{x}_1 - \dot{x}_0) - k(x_1 - x_0) - M_0 g = -F$$

或用矩阵形式表示为:

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix}$$

4.1.1 刚体的动能与位能



■ 二连杆机械手的动能和位能

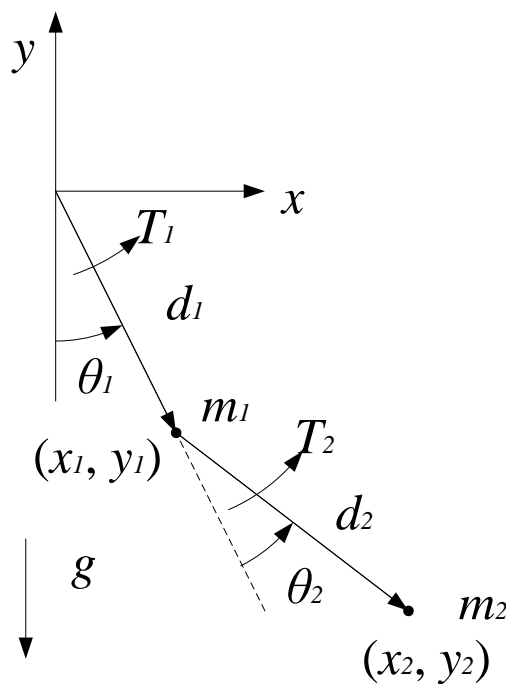


图4.2 二连杆机器人（1）

4.1.1 刚体的动能与位能

二连杆机械手系统的总动能和总位能分别为：

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)d_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2d_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2d_1d_2\cos\theta_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ &= -(m_1 + m_2)gd_1\cos\theta_1 - m_2gd_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.1.2 拉格朗日方程和牛顿-欧拉方程

■ 拉格朗日功能平衡法

二连杆机械手系统的拉格朗日函数L为：

$$L = K - P$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)d_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2d_2^2(\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2) \\ &\quad + m_2d_1d_2\cos\theta_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2) + (m_1 + m_2)gd_1\cos\theta_1 + m_2gd_2\cos(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

求得力矩的动力学方程式：

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{111} & D_{122} \\ D_{211} & D_{222} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{112} & D_{121} \\ D_{212} & D_{221} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_2\dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

比较可得本系统各系数如下：

- 有效惯量

$$D_{11} = (m_1 + m_2)d_1^2 + m_2d_2^2 + 2m_2d_1d_2 \cos \theta_2$$

$$D_{22} = m_2d_2^2$$

- 耦合惯量

$$D_{12} = m_2d_2^2 + m_2d_1d_2 \cos \theta_2 = m_2(d_2^2 + d_1d_2 \cos \theta_2)$$

- 向心加速度系数

$$D_{111} = 0$$

$$D_{122} = -m_2d_1d_2 \sin \theta_2$$

$$D_{211} = m_2d_1d_2 \sin \theta_2$$

$$D_{222} = 0$$

- 哥氏加速度系数

$$D_{112} = D_{121} = -m_2 d_1 d_2 \sin \theta_2$$

$$D_{212} = D_{221} = 0$$

- 重力项

$$D_1 = (m_1 + m_2) g d_1 \sin \theta_1 + m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

$$D_2 = m_2 g d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

- 表4.1给出这些系数值及其与位置 θ_2 的关系。

表4.1

负载	θ_2	$\cos\theta_2$	D_{11}	D_{12}	D_{22}	I_1	I_f
地面空载	0°	1	6	2	1	6	2
	90°	0	4	1	1	4	3
	180°	-1	2	0	1	2	2
	270°	0	4	1	1	4	3
地面满载	0°	1	18	8	4	18	2
	90°	0	10	4	4	10	6
	180°	-1	2	0	4	2	2
	270°	0	10	4	4	10	6
外空间负载	0°	1	402	200	100	402	2
	90°	0	202	100	100	202	102
	180°	-1	2	0	100	2	2
	270°	0	202	100	100	202	102

4.1.2 拉格朗日方程和牛顿-欧拉方程

■ 牛顿-欧拉动态平衡法

二连杆系统的动力学方程的一般形式为：

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial K}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (4.11)$$

式中的 W 、 K 、 D 、 P 和 q_i 等的含义与拉格朗日法一样； i 为连杆代号， n 为连杆数目。

质量 m_1 和 m_2 的位置矢量 \mathbf{r}_1 和 \mathbf{r}_2 (见图4.3) 为:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + (d_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} + (d_1 \sin \theta_1) \mathbf{j}$$

$$= (d_1 \cos \theta_1) \mathbf{i} + (d_1 \sin \theta_1) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + [d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{i} + [d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{j}$$

$$= [d_1 \cos \theta_1 + d_2 \cos(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{i} + [d_1 \sin \theta_1 + d_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \mathbf{j}$$

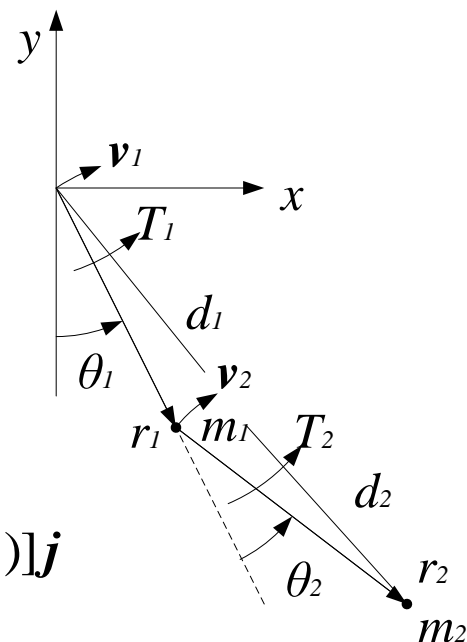


图4.3 二连杆机械

牛顿-欧拉动态平衡法



可得:

$$\begin{aligned} T_1 = & [(m_1 + m_2)d_1^2 + m_2d_2^2 + 2m_2d_1d_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_1 \\ & + [m_2d_2^2 + m_2d_1d_2 \cos \theta_2] \ddot{\theta}_2 + c_1\dot{\theta}_1 - (2m_2d_1d_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \\ & - (m_2d_1d_2 \sin \theta_2) \dot{\theta}_2^2 + [(m_1 + m_2)gd_1 \sin \theta_1 + m_2d_2g \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} T_2 = & (m_2d_2^2 + m_2d_1d_2 \cos \theta_2) \ddot{\theta}_1 + m_2d_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2d_1d_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_1^2 \\ & + c_2\dot{\theta}_2 + m_2gd_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2 机械手动力学方程的计算与简化



分析由一组A变换描述的任何机械手，求出其动力学方程。推导过程分五步进行：

- 计算任一连杆上任一点的速度；
- 计算各连杆的动能和机械手的总动能；
- 计算各连杆的位能和机械手的总位能；
- 建立机械手系统的拉格朗日函数；
- 对拉格朗日函数求导，以得到动力学方程式。

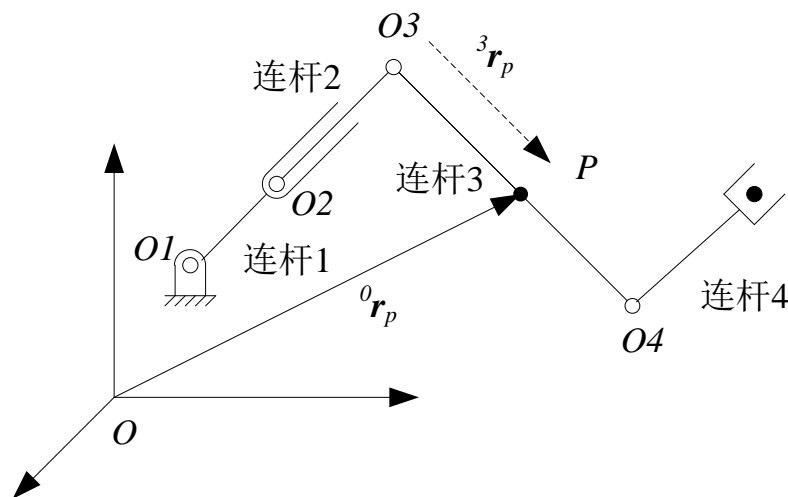


图4.4 四连杆机械手

4.2.1 质点速度的计算

- 连杆3上点P的速度为:

$${}^0\mathbf{v}_p = \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{r}_p) = \frac{d}{dt}(T_3 {}^3\mathbf{r}_p) = \dot{T}_3 {}^3\mathbf{r}_p$$

- 对于连杆i上任一点的速度为:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\sum_{j=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \mathbf{r} \quad (4.15)$$

4.2.1 质点速度的计算

- P点的加速度为:

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{a}_p &= \frac{d}{dt}({}^0\mathbf{v}_p) = \frac{d}{dt}(\dot{T}_3 {}^3\mathbf{r}_p) = \dot{T}_3 {}^3\mathbf{r}_p = \frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_3}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j\right) {}^3\mathbf{r}_p \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_3}{\partial \dot{q}_j} \frac{d}{dt} \dot{q}_j\right) ({}^3\mathbf{r}_p) + \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \dot{q}_j\right) ({}^3\mathbf{r}_p) \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_3}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j\right) ({}^3\mathbf{r}_p) + \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \dot{q}_k \dot{q}_j\right) ({}^3\mathbf{r}_p) \end{aligned}$$

4.2.1 质点速度的计算

■ 速度的平方

$$\begin{aligned}({}^0\mathbf{v}_p)^2 &= ({}^0\mathbf{v}_p) \cdot ({}^0\mathbf{v}_p) = \text{Trace}[({}^0\mathbf{v}_p) \cdot ({}^0\mathbf{v}_p)^T] \\&= \text{Trace}\left[\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_3}{\partial q_j} \dot{q}_j ({}^3\mathbf{r}_p) \cdot \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k} \dot{q}_k\right) ({}^3\mathbf{r}_p)^T\right] \\&= \text{Trace}\left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_3}{\partial q_j} ({}^3\mathbf{r}_p) ({}^3\mathbf{r}_p)^T \frac{\partial T_3^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k\right]\end{aligned}$$

式中，Trace表示矩阵的迹。对于 n 阶方程来说，其迹即为它的主对角线上各元素之和。

4.2.1 质点速度的计算

- 任一机械手上一点的速度平方为:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^2 &= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}_j} \dot{\mathbf{q}}_j {}^i\mathbf{r} \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}_k} \dot{\mathbf{q}}_k {}^i\mathbf{r} \right)^T \right] \\ &= \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}_k} {}^i\mathbf{r} {}^i\mathbf{r}^T \left(\frac{\partial T_i}{\partial \mathbf{q}_k} \right)^T \dot{\mathbf{q}}_k \dot{\mathbf{q}}_k \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

4.2.2 动能和位能的计算

■ 动能的计算

令连杆3上任一质点 P 的质量为 dm ，则其动能为：

$$\begin{aligned} dK_3 &= \frac{1}{2} v_p^2 dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_3}{\partial q_i} {}^3r_p ({}^3r_p)^T \left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_i \dot{q}_k \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_3}{\partial q_i} ({}^3r_p dm {}^3r_p^T)^T \left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_i \dot{q}_k \right] \end{aligned}$$

- 任一机械手连杆 i 上位置矢量 ${}^i\mathbf{r}$ 的质点，其动能为：

$$\begin{aligned} dK_i &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} {}^i\mathbf{r} {}^i\mathbf{r}^T \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] dm \\ &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} ({}^i\mathbf{r} dm {}^i\mathbf{r}^T)^T \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \end{aligned}$$

- 连杆3的动能为：

$$K_3 = \int_{\text{连杆3}} dK_3 = \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \frac{\partial T_3}{\partial q_j} \left(\int_{\text{连杆3}} {}^3\mathbf{r}_p {}^3\mathbf{r}_p^T dm \right) \left(\frac{\partial T_3}{\partial q_k} \right)^T \dot{q}_j \dot{q}_k \right]$$

- 任何机械手上任一连杆*i*动能为:

$$\begin{aligned} K_i &= \int_{\text{连杆}i} dK_i \\ &= \frac{1}{2} \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} I_i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

式中 I_i 为伪惯量矩阵。

- 具有*n*个连杆的机械手总的功能为:

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^i \frac{\partial T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k \right] \quad (4.19)$$

- 连杆 i 的传动装置动能为:

$$K_{ai} = \frac{1}{2} I_{ai} \dot{q}_i^2$$

- 所有关节的传动装置总动能为:

$$K_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_{ai} \dot{q}_i^2$$

- 机械手系统（包括传动装置）的总动能为:

$$K_t = K + K_a$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_i} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 I_{ai} \dot{q}_i^2 \quad (4.20)$$

4.2.2 动能和位能的计算

■ 位能的计算

一个在高度 h 处质量 m 为的物体，其位能为：

$$P = mgh$$

连杆 i 上位置 ${}^i r$ 处的质点 dm ，其位能为：

$$dP_i = -dm \mathbf{g}^T {}^{T_0} r = -\mathbf{g}^T T_i {}^i r dm$$

式中， $\mathbf{g}^T = [g_x, g_y, g_z, 1]$

$$\begin{aligned} P_i &= \int_{\text{连杆 } i} dP_i = - \int_{\text{连杆 } i} \mathbf{g}^T T_i {}^i r dm = -\mathbf{g}^T T_i \int_{\text{连杆 } i} {}^i r dm \\ &= -\mathbf{g}^T T_i m_i {}^i r_i = -m_i \mathbf{g}^T T_i {}^i r_i \end{aligned}$$

- 连杆上位置 ${}^i r$ 处的质点 dm ，其位能为：

$$dP_i = -dm \mathbf{g}^{T_0} r = -\mathbf{g}^T T_i^i r dm$$

- 机械手系统的总位能为：

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^n (P_i - P_{ai}) \approx \sum_{i=1}^n P_i \\ &= -\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T T_i^i r_i \end{aligned} \quad (4.21)$$

4.2.3 机械手动力学方程的推导

- 据式(4.1)求拉格朗日函数

$$L = K_t - P$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_i} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n I_{ai} \dot{q}_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T T_i^i r_i,$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

4.2.3 机械手动力学方程的推导

- 再据式(4.2)求动力学方程，先求导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_p} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_i} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p} \right) \dot{q}_j + I_{ap} \dot{q}_p\end{aligned}$$

$$p = 1, 2, \dots, n$$

4.2.3 机械手动力学方程的推导

- 据式(4.18)知, I_i 为对称矩阵, 即 $I_i^T = I_i$, 所以下式成立:

$$\text{Trace}\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k}\right) = \text{Trace}\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i^T \frac{\partial W_i^T}{\partial q_j}\right) = \text{Trace}\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i \frac{\partial W_i^T}{\partial q_j}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace}\left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p}\right) \dot{q}_k + I_{ap} \dot{q}_p$$

4.2.3 机械手动力学方程的推导

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_p} &= \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p} \right) \ddot{q}_k + I_{ap} \ddot{q}_p \\
 &+ \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_j \partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \\
 &+ \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_p \partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \\
 &= \sum_{i=p}^n \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_p} \right) \ddot{q}_k + I_{ap} \ddot{q}_p \\
 &+ 2 \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_j \partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k
 \end{aligned}$$

4.2.3 机械手动力学方程的推导

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial q_p} &= \frac{1}{2} \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_j \partial q_k} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k \\
 &+ \frac{1}{2} \sum_{i=p}^n \sum_{i=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_k \partial q_p} I_i \frac{\partial T_i^t}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=p}^n m_i \mathbf{g}^T \frac{\partial T_i}{\partial q_p} r_i \\
 &= \sum_{i=p}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_p \partial q_j} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \right) \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{i=p}^n m_i \mathbf{g}^T \frac{\partial T_i}{\partial q_p} r_i
 \end{aligned}$$

4.2.3 机械手动力学方程的推导

- 具有 n 个连杆的机械手系统动力学方程如下：

$$\begin{aligned}
 T_i = & \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \text{Trace} \left(\frac{\partial T_j}{\partial q_k} I_j \frac{\partial T_j^T}{\partial q_i} \right) \ddot{q}_k + I_{ai} \ddot{q}_i \\
 & + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^j \sum_{m=1}^j \text{Trace} \left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial q_k \partial q_m} I_j \frac{\partial T_j^T}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \dot{q}_m - \sum_{j=1}^n m_j \mathbf{g}^T \frac{\partial T_i}{\partial q_i} \mathbf{r}_i
 \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$T_i = \sum_{j=1}^n D_{ij} \ddot{q}_j + I_{ai} \ddot{q}_i + \sum_{j=1}^6 \sum_{k=1}^6 D_{ijk} \dot{q}_j \dot{q}_k + D_i \quad (4.24)$$

4.2.4 机械手动力学方程的简化

■ 惯量项 D_{ij} 的简化

$$D_{ij} = \sum_{p=\max i, j}^6 m_p [{}^p \delta_i^T k_p {}^p \delta_j + {}^p \mathbf{d}_i {}^p \mathbf{d}_j + {}^p \bar{\mathbf{r}}_p ({}^p \mathbf{d}_i \times {}^p \delta_j + {}^p \mathbf{d}_j \times {}^p \delta_i)] \quad (4.31)$$

$$D_{ij} = \sum_{p=\max i, j}^6 m_p \left\{ [{}^p \delta_{ix} k_{p_{xx}}^2 {}^p \delta_{jx} + {}^p \delta_{iy} k_{p_{yy}}^2 {}^p \delta_{jy} + {}^p \delta_{iz} k_{p_{zz}}^2 {}^p \delta_{jz}] \right. \\ \left. + [{}^p \mathbf{d}_i \cdot {}^p \mathbf{d}_j] + [{}^p \bar{\mathbf{r}}_p \cdot (\mathbf{d}_i \times {}^p \delta_j + {}^p \mathbf{d}_j \times {}^p \delta_i)] \right\} \quad (4.32)$$

4.2.4 机械手动力学方程的简化

- 惯量项 D_{ii} 的简化

$$D_{ii} = \sum_{p=i}^6 m_p \quad (4.35)$$

- 重力项 D_i 的简化

$$D_i = {}^{i-1}\mathbf{g} \sum_{p=i}^6 m_p {}^{i-1}\bar{\mathbf{r}}_p \quad (4.40)$$

4.3 机械手动力学方程实例

4.3.1 二连杆机械手动力学方程

- 规定机械手的坐标系

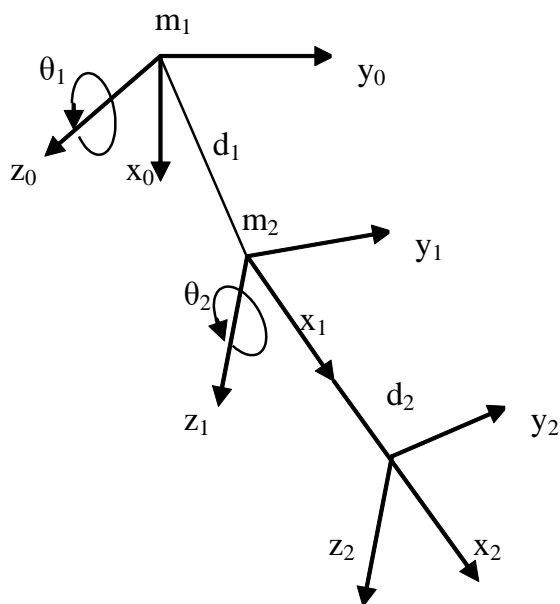


图4.5 二连杆机械手的坐标系

4.3.1 二连杆机械手动力学方程

■ 各连杆参数

表 4.2 二连杆机械手连杆参数

连 杆	变 量	α	a	d	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
1	θ_1	0°	d_1	0	1	0
2	θ_2	0°	d_2	0	1	0

4.3.1 二连杆机械手动力学方程

■ 计算A矩阵和T矩阵

$$A_1 = {}^0T_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & d_1c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & d_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = {}^1T_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & d_2c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & d_2s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & d_1c_1 + d_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & d_1s_1 + d_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.3.1 二连杆机械手动力学方程

- 可据式 (4.38) 求得 D_1 和 D_2 :

$$\begin{aligned} D_1 &= m_1 {}^0\mathbf{g}^0 \bar{\mathbf{r}}_1 + m_2 {}^0\mathbf{g}^0 \bar{\mathbf{r}}_2 = m_1 g s_1 d_1 + m_2 g (s_1 d_1 + s_{12} d_2) \\ &= (m_1 + m_2) g d_1 s_1 + m_2 g d_2 s_{12} \end{aligned}$$

$$D_2 = m_2 {}^1\mathbf{g}^1 \bar{\mathbf{r}}_2 = m_2 g (s_1 c_2 + c_1 s_2) = m_2 g d_2 s_{12}$$

以上所求得各项, 可与 § 4.1.2 中的 D_{11} 、 D_{22} 、 D_1 和 D_2 加以比较, 以检验计算结果的正确性。

4.3.2 三连杆机械手的速度和加速度方程

■ 位置方程

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix} = T_3 \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ 速度方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [\omega_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \omega_2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34}$$

$$+ \omega_3 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34}] \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.3.2 三连杆机械手的速度和加速度方程



■ 加速度方程

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 0 \end{bmatrix} = [(\omega_1^2 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \omega_1 \omega_2 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} \\
 &\quad + \omega_1 \omega_3 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} + \alpha_1 \theta_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34}) \\
 &\quad + (\omega_2 \omega_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{34} + \omega_2^2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \theta_2 \phi_2 T_{23} \phi_3 T_{23} \\
 &\quad + \omega_2 \omega_3 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} + \alpha_2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{12} \phi_3 T_{34}) \\
 &\quad + (\omega_3 \omega_1 \theta_1 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} + \omega_3 \omega_2 \phi_1 T_{12} \theta_2 \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34} \\
 &\quad + \omega_3^2 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \theta_3 \phi_3 T_{34} + \alpha_3 \phi_1 T_{12} \phi_2 T_{23} \theta_3 \phi_3 T_{34})] T_4 \\
 &= (\ddot{T}_{31} + \ddot{T}_{32} + \ddot{T}_{33}) T_4 = \ddot{T}_3 T_4
 \end{aligned}$$

4.4 机器人的动态特性

■ 动态特性包括：

- 工作精度
- 重复能力
- 稳定度
- 空间分辨度

4.4.1 动态特性概述

- 能够移动得多快，能以怎样的准确性快速地停在给定点，以及它对停止位置超调了多少距离等等。
- 中继点是工具触头应当经过而不必停止的点。
- 必须谨慎地采用中继点。

4.4.2 稳定性

- 稳定性（stability）涉及系统、装置或工具运动过程中无振荡问题。
- 两种不同类型的振荡：
 - 衰减振荡
 - 非衰减振荡
- 维持振荡是一种临界情况。

4.4.3 空间分辨率

- 空间分辨率（spatial resolution）是描述机器人工具末端运动的一个重要因素。
- 分辨率指明系统能够区别工作空间所需要的最小运动增量。
- 分辨率可以是控制系统能够控制的最小位置增量的函数，或者是控制测量系统能够辨别的最小位置增量。

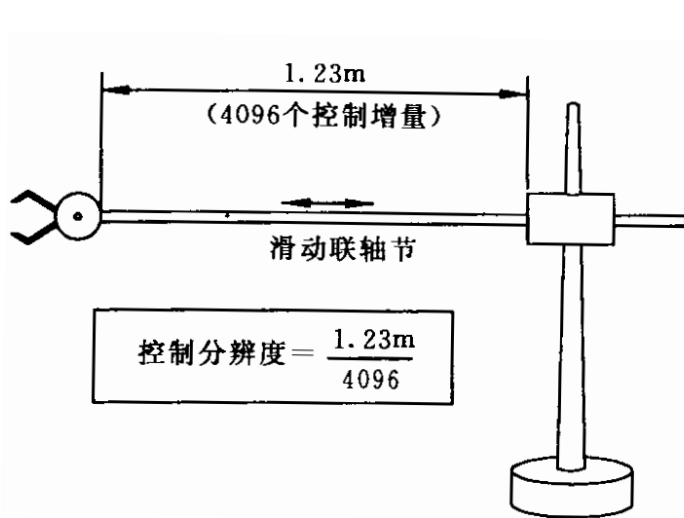


图4.8 控制对分辨率的影响

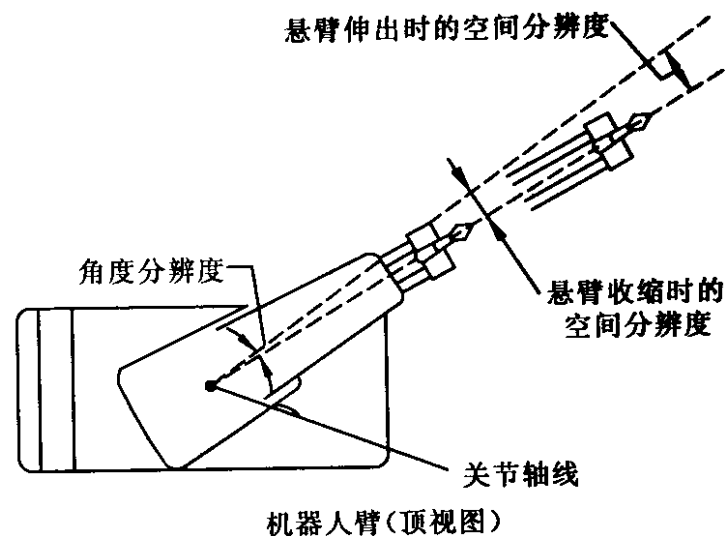


图4.9 悬臂伸缩对空间分辨率的影响

4.4.4 精度



- 精度（accuracy）这一术语常常与分辨率及重复性能相混淆。
- 三个因素：
 - 各控制部件的分辨率；
 - 各机械部件的偏差；
 - 某个任意的从未接近的固定位置（目标）。

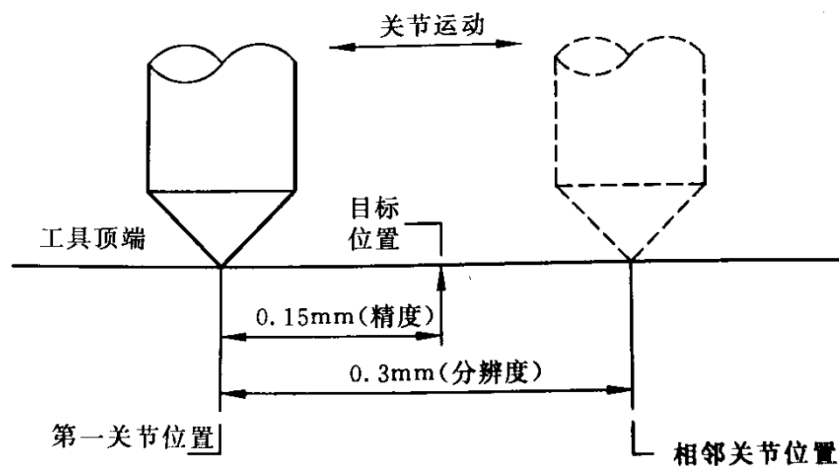


图4.11 考虑机械偏差时精度与空间分辨率的关系

4.4.5 重复性

- 重复性（repeatability）又称重复定位精度，指的是机器人自身重复到达原先被命令或训练位置的能力。
- 三个因素：
 - 分辨率
 - 部件偏差
 - 某个任意目标位置

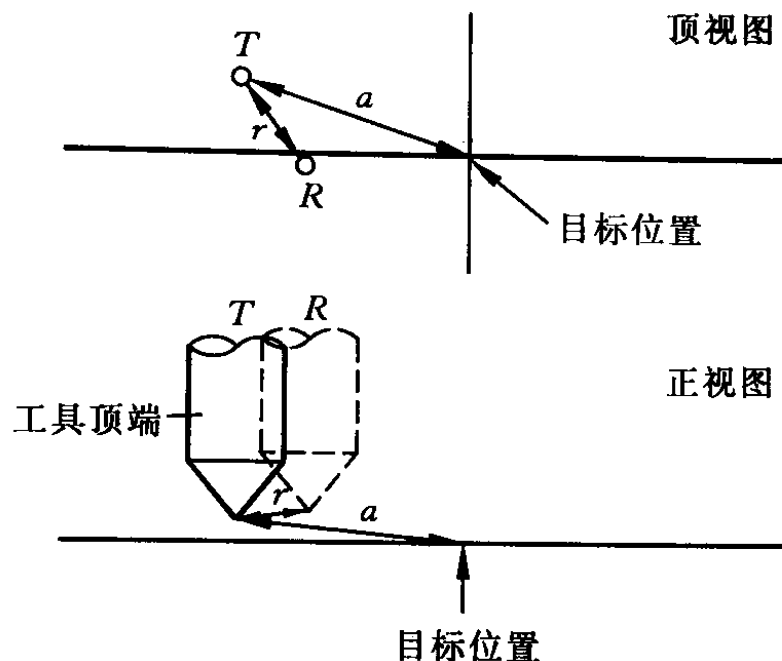


图4.12 精度与重复性关系

4.5 机械手的静态特性

- 稳态（或静态）问题是动态问题的特例，研究机械手的稳态负荷（包括力和力矩）问题，包括：
 - 静力和力矩表示方法；
 - 不同坐标系间静负荷的变换；
 - 确定机械手静态关节力矩；
 - 确定机械手所载物体的质量。



4.5.1 静力和静力矩的表示

■ 广义力

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \\ m_x \\ m_y \\ m_z \end{bmatrix} \quad (4.41)$$



4.5.2 不同坐标系间静力的变换

$$\left. \begin{aligned} {}^c m_x &= \mathbf{n} \cdot ((\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \mathbf{m}) \\ {}^c m_y &= \mathbf{o} \cdot ((\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \mathbf{m}) \\ {}^c m_z &= \mathbf{a} \cdot ((\mathbf{f} \times \mathbf{p}) + \mathbf{m}) \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^c f_x &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} \\ {}^c f_y &= \mathbf{o} \cdot \mathbf{f} \\ {}^c f_z &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{f} \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$



4.5.3 关节力矩的确定

■ 虚功法

$$\delta W = {}^{T_6}\mathbf{F}^T {}^{T_6}\mathbf{D} = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{Q} \quad (4.55)$$

$${}^{T_6}\mathbf{F}^T {}^{T_6}\mathbf{D} = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{Q} \quad (4.56)$$

$${}^{T_6}\mathbf{F}^T \mathbf{J} \mathbf{Q} = \boldsymbol{\tau}^T \mathbf{Q} \quad (4.57)$$

$${}^{T_6}\mathbf{F}^T \mathbf{J} = \boldsymbol{\tau}^T$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T {}^{T_6}\mathbf{F} \quad (4.58)$$

4.5.4 负荷质量的确定

- 假定最严重的负荷情况，并设定速度增益高得足以防止系统产生欠阻尼响应。
- 命令机械手运动，以恒速提升该负荷。
- 一旦所有关节都进行运动，即可由下式计算其静态误差力矩和力。

$$T = k_e k_m \theta_e \quad (4.59)$$

- 假定机械手相对于基坐标系的位置由变换 Z 来表示，而且未知负荷被末端工具夹持在负荷质心上。
- 用 X 表示负荷在基坐标系中的位置，即

$$X = ZT_6 E \quad (4.60)$$

4.5.4 负荷质量的确定

- 规定坐标系处于负荷质心且与基坐标系平行，在坐标系中，末端夹手上1公斤负荷所产生的力为：

$${}^G\mathbf{F} = [0 \ 0 \ -g \ 0 \ 0 \ 0] \quad (4.60)$$

- 定义一个与 G 和 X 有关的变换 Y 。
- 计算负荷质量

(4.64)

$$m = \frac{\boldsymbol{\tau}^T \mathbf{T}}{\mathbf{T}^T \boldsymbol{\tau}}$$

4.6 小结



- 研究刚体动力学问题，着重分析了机器人机械手动力学方程的两种求法：
 - 拉格朗日功能平衡法
 - 牛顿—欧拉动态平衡法
- 在分析二连杆机械手的基础上，总结出建立拉格朗日方程的步骤，并据之计算出机械手连杆上一点的速度、动能和位能，进而推导出四连杆机械手的动力学方程及其简化计算公式。
- 机械手的静态特性
- 机械手的动态特性