陈帅李

2020280147228006

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

1. X_c为能控子空间, 试证明:

$$X_{c[A,B]} = X_{c[A+BK,B]}$$

证明: 已知 $X_c = span[B, AB, \cdots A^{n-1}B]$

$$(A+BK)B = AB+BKB = [B \ \ AB]\begin{bmatrix} KB \\ I \end{bmatrix}$$

$$(A+BK)^2B = A^2B + ABKB + B(KAB+KBKB) = [B \ \ AB \ \ A^2B]\begin{bmatrix} KAB+KBKB \\ KB \\ I \end{bmatrix}$$

依以类推, 可得:

$$(A+BK)^{n-1}B = [B \ \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]\begin{bmatrix} * \\ I \end{bmatrix}$$

由上述内容, 可得:

$$[B \ \ (A+BK)B \ \ (A+BK)^2B \cdots (A+BK)^{n-1}B]$$
$$= [B \ \ AB \ \ A^2B \cdots A^{n-1}B]\begin{bmatrix} I & KB & KAB+KBKB & & * \\ & I & KB & \ddots & \\ & & I & \ddots & KAB+KBKB \\ & & & \ddots & KB \\ & & & & I \end{bmatrix}$$

$\therefore span[B \ \ (A+BK)B \cdots (A+BK)^{n-1}B] \subseteq X_{c[A,B]}$

又 $\because X_{c[A+BK,B]} = span[B \ \ (A+BK)B \cdots (A+BK)^{n-1}B]$

且 $rank([B \ \ AB \cdots A^{n-1}B]) = rank([B \ \ (A+BK)B \cdots (A+BK)^{n-1}B])$

$\therefore X_{c[A,B]} = X_{c[A+BK,B]}$

年 月 日 第 页

陈帅卒

202028014728006

6.(1) 证明. $b=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ $Ab=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\3&0&0&2\\0&0&0&1\\0&-2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix}$

$A^2b=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\3&0&0&2\\0&0&0&1\\0&-2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\0\\-4\end{bmatrix}$ $A^3b=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\3&0&0&2\\0&0&0&1\\0&-2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\0\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-2\\-4\\0\end{bmatrix}$

$\therefore [b\ \ Ab\ \ A^2b\ \ A^3b]=\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&2&0&-2\\0&1&0&-4\\1&0&-4&0\end{bmatrix}$, Q_c 满秩.

$\therefore$ 系统完全能控.

(2) 设 $\hat{k}=[k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ k_4]$, 则

$\det(sI-A)=s^4+s^2$, 而期望的特征多项式为 $\alpha(s)=(s+1)^2(s+2-j)(s+2+j)=s^4+6s^3+14s^2+14s+5$

$\therefore \hat{k}=[-5\ \ -14\ \ -13\ \ -6]$

而 $T=[A^3b\ \ A^2b\ \ Ab\ \ b]\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\a_3&1&0&0\\a_2&a_3&1&0\\a_1&a_2&a_3&1\end{bmatrix}$

$\therefore T=\begin{bmatrix}0&2&0&0\\-2&0&2&0\\-4&0&1&0\\0&-4&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0&0\\0&0&2&0\\-3&0&1&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix}$

$\therefore T^{-1}=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{3}{2}&0&0&1\end{bmatrix}$

$\therefore k=\hat{k}\cdot T^{-1}=[-5\ \ -14\ \ -13\ \ -6]\begin{bmatrix}0&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}&0\\\frac{1}{2}&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{3}{2}&0&0&1\end{bmatrix}=[-16\ \ -\frac{22}{3}\ \ \frac{5}{3}\ \ -6]$

$\therefore k=[-16\ \ -\frac{22}{3}\ \ \frac{5}{3}\ \ -6]$

陈帅平

202028014728006

12. 设系统的传递函数为

$$g_o(s)=\frac{(s+2)(s+3)}{(s+1)(s-2)(s+4)}$$

试问是否存在状态反馈阵k，使得闭环传递函数为：

$$g_c(s)=\frac{(s+3)}{(s+2)(s+4)}$$

解：由 $g_o(s)=\frac{s^2+5s+6}{s^3+3s^2-6s-8}$ 可推出系统 $\dot{x}=Ax+bu$ 为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\8&6&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u.$$

$$Q_c=[b\ \ Ab\ \ A^2b]=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-3\\1&-3&15\end{bmatrix}$$ $\text{rank}\,Q_c=3$ ∴系统能控

∴存在状态反馈阵k，使得闭环传函为 $g_c(s)=\frac{s+3}{(s+2)(s+4)}$

由 $g_o(s)\rightarrow g_c(s)$ 可知要把期望极点配置在 $-2,-2,-4$

故期望的特征多项式为 $\alpha(s)=(s+2)^2(s+4)=s^3+8s^2+20s+16$

∴ $\hat{k}=[-24\ \ -26\ \ -5]$

而 $T=[A^2b\ \ Ab\ \ b]\begin{bmatrix}1&0&0\\a_2&1&0\\a_1&a_2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\15&-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\-6&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

∴ $T^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

∴ $k=\hat{k}T^{-1}=[-24\ \ -26\ \ -5]$

即当状态反馈阵 $k=[-24\ \ -26\ \ -5]$ 时

能将极点配置在 $-2,-2,-4$.

扫描全能王 创建

陈帅李

202028014728006

13. 给定系统为：$\dot{x}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}u$,

试求一个状态反馈阵 k，使得 $A+bk$ 相似于

$$F=\begin{bmatrix}-3&0&0\\0&-2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

解：$Q_c=[b\ \ Ab\ \ A^2b]=\begin{bmatrix}0&1&3\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$，$\mathrm{rank}\,Q_c=3$.

∴系统能控.

其系统的特征多项式为 $(sI-A)=(s-2)(s-1)(s-1)=s^3-4s^2+5s-2$，

而由题意可知，期望的极点配置在 $-3,-2,-1$

∴期望的特征多项式为 $\alpha(s)=(s+3)(s+2)(s+1)=s^3+6s^2+11s+6$

∴ $\hat{k}=[-8\ \ -6\ \ -10]$

而 $T=[A^2b\ \ Ab\ \ b]\begin{bmatrix}1&0&0\\a_2&1&0\\a_1&a_2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&0\\1&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\5&-4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&1&0\\2&-3&1\\1&0&0\end{bmatrix}$

∴ $T^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\3&1&1\end{bmatrix}$

∴ $k=\hat{k}T^{-1}=[-8\ \ -6\ \ -10]\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&1\\3&1&1\end{bmatrix}$

∴ $k=[-36\ \ -10\ \ -24]$