第4章　线性定常系统的能观性

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 4.2 能观性判据
   - 4.2.1 能观性判据
   - 4.2.2 能观性指数

1. 4.2 能观性判据
   - 4.2.1 能观性判据
   - 4.2.2 能观性指数

1. 4.2 能观性判据
   - 4.2.1 能观性判据
   - 4.2.2 能观性指数

考虑输入$u=0$的线性定常系统

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = Ax,\ x(t_0) = x_0, t \geqslant 0, \\
&y = Cx,
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中, x为n维状态向量, y为q维输出向量, A, C分别为$n\times n, q\times n$阶实常阵.

考虑输入$u=0$的线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax,\ x(t_0) = x_0, t \geqslant 0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

其中, x为n维状态向量, y为q维输出向量, A, C分别为$n \times n, q \times n$阶实常阵.

定理

定理4.4 (Gram矩阵判据) 线性定常系统(1)完全能观的充分必要条件是对任意指定的有限时刻$T > 0$, 使得能观Gram矩阵

$$W_O[0,T] = \int_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} dt \tag{2}$$

为非奇异.

证明 充分性: 已知$W_O[0,T]$非奇异, 证系统(1)完全能观

证明 充分性: 已知$W_O[0,T]$非奇异, 证系统(1)完全能观

- 采用构造法证明. 对$[0,T]$上已知的输出$y(t)$, 有

$$\begin{aligned} W_O^{-1}[0,T]\int_0^T e^{A^Tt}C^Ty(t)dt &= W_O^{-1}[0,T]\int_0^T e^{A^Tt}C^TCe^{At}dt\cdot x_0 \\ &= W_O^{-1}[0,T]W_O[0,T]x_0 \\ &= x_0. \end{aligned}$$

证明 充分性: 已知$W_O[0,T]$非奇异, 证系统(1)完全能观

- 采用构造法证明. 对$[0,T]$上已知的输出$y(t)$, 有

$$
\begin{aligned}
W_O^{-1}[0,T]\int_0^T e^{A^T t}C^T y(t)dt &= W_O^{-1}[0,T]\int_0^T e^{A^T t}C^T C e^{At}dt\cdot x_0 \\
&= W_O^{-1}[0,T]W_O[0,T]x_0 \\
&= x_0.
\end{aligned}
$$

- 这表明, 在$W_O[0,T]$非奇异的条件下,总可以根据$[0,T]$上的输出$y(t)$来构造任意的非零状态x_0.

证明 充分性: 已知$W_O[0,T]$非奇异, 证系统(1)完全能观

- 采用构造法证明. 对$[0,T]$上已知的输出$y(t)$, 有

$$\begin{aligned} W_O^{-1}[0,T]\int_0^T e^{A^T t}C^T y(t)dt &= W_O^{-1}[0,T]\int_0^T e^{A^T t}C^T C e^{At}dt \cdot x_0 \\ &= W_O^{-1}[0,T]W_O[0,T]x_0 \\ &= x_0. \end{aligned}$$

- 这表明, 在$W_O[0,T]$非奇异的条件下,总可以根据$[0,T]$上的输出$y(t)$来构造任意的非零状态x_0.
- 故系统为完全能观的, 充分性得证.

4.2.1 能观性判据

- 必要性：系统完全能观，证$W_O[0,T]$非奇异

- 必要性：系统完全能观，证$W_O[0,T]$非奇异
- 反证法，设$W_O[0,T]$奇异，则存在某个非零$\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，使得

$$0 = \bar{x}_0^T W_O[0,T]\bar{x}_0 = \int_0^T \bar{x}_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} \bar{x}_0 dt = \int_0^T \|Ce^{At}\bar{x}_0\|^2 dt,$$

故

$$Ce^{At}\bar{x}_0 \equiv 0, t \in [0,T].$$

由定理4.1知$\bar{x}_0$为不能观状态

4.2.1 能观性判据

- 必要性: 系统完全能观, 证$W_O[0,T]$非奇异
- 反证法, 设$W_O[0,T]$奇异, 则存在某个非零$\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$0 = \bar{x}_0^T W_O[0,T]\bar{x}_0 = \int_0^T \bar{x}_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} \bar{x}_0 dt = \int_0^T \|Ce^{At}\bar{x}_0\|^2 dt,$$

故

$$Ce^{At}\bar{x}_0 \equiv 0, t \in [0,T].$$

由定理4.1知$\bar{x}_0$为不能观状态

➥ 此与系统完全能观矛盾, 故反设不成立, 必要性得证. ■

- 必要性：系统完全能观，证$W_O[0,T]$非奇异
- 反证法，设$W_O[0,T]$奇异，则存在某个非零$\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$，使得

$$0 = \bar{x}_0^T W_O[0,T]\bar{x}_0 = \int_0^T \bar{x}_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} \bar{x}_0 dt = \int_0^T \|Ce^{At}\bar{x}_0\|^2 dt,$$

故

$$Ce^{At}\bar{x}_0 \equiv 0, t \in [0,T].$$

由定理4.1知$\bar{x}_0$为不能观状态

➥ 此与系统完全能观矛盾，故反设不成立，必要性得证. ■

推论

推论4.2 不能观子空间X_{NO}为$W_O[0,T]\alpha = 0$的解空间；能观子空间$X_O = span W_O[0,T]$.

4.2.1 能观性判据

由定理4.2和4.3, 对于系统(1)的能观性, 可直接有如下判据

定理

定理4.5 (秩判据) 线性系统(1)完全能观的充分必要条件为

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n, \tag{3}$$

其中, $Q_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 称为系统的能观性矩阵.

例4.2.1 给出系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}4 & 5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},$$

试判断其能观性.

例4.2.1 给出系统的状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}4&5&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

试判断其能观性.

解 很容易可以计算出

$$rank\begin{bmatrix}C\\CA\\CA^2\end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix}4&5&1\\-6&-7&-1\\6&5&1\end{bmatrix}=2<3$$

故由定理4.5知, 此系统是状态不完全能观的.

定理

定理4.6 (PBH秩判据) 线性定常系统(1)完全能观的充分必要条件是, 对矩阵A的所有特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$均满足

$$rank\begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n, i = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

或等价地

$$rank\begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

定理

定理4.6 (PBH秩判据) 线性定常系统(1)完全能观的充分必要条件是，对矩阵A的所有特征值$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$均满足

$$rank\begin{bmatrix} C \\ \lambda_i I - A \end{bmatrix} = n, i=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

或等价地

$$rank\begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

- (4)可等价地写为$rank\begin{bmatrix} \lambda_i I - A \\ C \end{bmatrix} = n, i=1,2,\cdots,n$
- (5)可等价地写为$rank\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}.$

定理

定理4.7 (PBH特征向量判据) 系统(1)完全能观的充分必要条件是, 矩阵A的所有非零右特征向量都不与矩阵C的各行正交, 即不存在非零列向量q, 同时满足

$$Aq = \lambda_i q, \ Cq = 0, \tag{6}$$

其中, $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$为$A$的特征值.

4.2.1 能观性判据

当(A,C)具有若尔当规范型的形式时，即

$$A=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix}_{n\times n},\quad J_i=\begin{bmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i\alpha_i} \end{bmatrix}_{\sigma_i\times\sigma_i}$$

$$J_{ik}=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{r_{ik}\times r_{ik}},\quad C=\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_l \end{bmatrix}_{q\times n}$$

$$C_i=\begin{bmatrix} C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{i\alpha_i} \end{bmatrix}_{q\times\sigma_i},\quad C_{ik}=\begin{bmatrix} C_{1ik} & C_{2ik} & \cdots & C_{rik} \end{bmatrix}_{q\times r_{ik}}$$

其中，σ_i为特征值λ_i的重数，$n=\sum_{i=1}^{l}\sigma_i$，λ_i互异，且$r_{i1}+r_{i2}+\cdots+r_{i\alpha_i}=\sigma_i$.

可建立若尔当规范型判据如下：

定理

定理4.8 具有若尔当规范型的线性系统(1)完全能观的充分必要条件是由$C_{ik}(k=1,2,\cdots,\alpha_i)$的第一列组成的矩阵对$i=1,2,\cdots,l$均列线性无关，即

$$rank[C_{1i1}\quad C_{1i2}\quad\cdots\quad C_{1i\alpha_i}]=\alpha_i,\ i=1,2,\cdots,l. \tag{7}$$

第4章

4.2 能观性判据

4.2.1 能观性判据

4.2.2 能观性指数

例4.2.2 给定具有若尔当规范型的动态系统

$$
\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & & & & & \\ & & -2 & & & & \\ & & & -2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3 \end{bmatrix} x
$$

$$
y = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x
$$

例4.2.2 给定具有若尔当规范型的动态系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & & & & & \\ 0 & -2 & & & & & \\ & & -2 & & & & \\ & & & -2 & & & \\ & & & & 3 & 1 & \\ & & & & 0 & 3 & \\ & & & & & & 3\end{bmatrix}x$$

$$y=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

解: 容易定出

$$\begin{bmatrix}c_{111} & c_{112} & c_{113}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}c_{121} & c_{122}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$$

均为列线性无关，因此系统是完全能观的.

另外，由定理4.8，有如下结论

推论

推论4.3(最少输出数定理) 线性定常系统(A, C)能观，则(A, C)能观的必要条件为：$q \geqslant \max\{\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, l\}$.

另外, 由定理4.8, 有如下结论

推论

推论4.3(最少输出数定理) 线性定常系统(A, C)能观, 则(A, C)能观的必要条件为: $q \geqslant \max\{\alpha_i, i = 1, 2, \cdots, l\}$.

推论

推论4.4 单输出线性系统(A, c)能观的必要条件为: A为非减次(循环)矩阵.

4.2.1 能观性判据

定理

定理4.9　线性系统(1)能观的充分必要条件为：存在矩阵G，使$A-GC$的特征值可以任意配置.

定理

定理4.9 线性系统(1)能观的充分必要条件为：存在矩阵G，使$A-GC$的特征值可以任意配置.

证明 系统(1)能观即(A,C)能观，等价于

$$rank\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix}=n,\ \forall s\in\mathbb{C}$$

定理

定理4.9 线性系统(1)能观的充分必要条件为：存在矩阵G，使$A-GC$的特征值可以任意配置.

证明 系统(1)能观即(A,C)能观，等价于

$$rank\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix}=n,\ \forall s\in\mathbb{C} \quad\Leftrightarrow\quad rank\begin{bmatrix} sI-A^T & C^T \end{bmatrix}=n,\ \forall s\in\mathbb{C}.$$

这说明(A,C)能观，等价于(A^T,C^T)能控

- 从而由(A^T,C^T)能控的充要条件是存在矩阵G^T使

$$A^T-C^TG^T=(A-GC)^T$$

的特征值可以任意配置，可得定理结论. ■

4.2.2 能观性指数

考虑完全能观的系统(1), A, C分别为$n\times n, q\times n$常阵, 定义

$$Q_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

为$kq\times n$常阵, 其中k为正整数

4.2.2 能观性指数

考虑完全能观的系统(1), A, C分别为$n \times n, q \times n$常阵, 定义

$$Q_k = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{k-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

为$kq \times n$常阵, 其中k为正整数

- 显然$Q_n = Q_O$, 且$rankQ_n = n$.
- 依次将k 由1 增加, 直到$k = v$, 使得$rankQ_v = n$, 即

$$\begin{aligned} rankQ_1 &< rankQ_2 < \cdots < rankQ_{v-1} \\ &< rankQ_v = rankQ_{v+1} = \cdots = rankQ_o \end{aligned} \tag{9}$$

则, v为系统(A, C)能观性指数.

4.2.2 能观性指数

- 若$rankC = m$, 则必成立

$$\frac{n}{q} \leqslant v \leqslant n - m + 1. \tag{10}$$

- 若$rankC = m$, 则必成立

$$\frac{n}{q} \leqslant v \leqslant n - m + 1. \tag{10}$$

- 若令l为矩阵A的最小多项式的次数, 则(10)还可以表示为

$$\frac{n}{q} \leqslant v \leqslant \min(l, n - m + 1). \tag{11}$$

- 若再把Q_v表示为

$$Q_v = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_q \\ c_1A \\ c_2A \\ \vdots \\ c_qA \\ \vdots \\ c_1A^{v-1} \\ c_2A^{v-1} \\ \vdots \\ c_qA^{v-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

- 并且从上到下搜索Q_v中的n个线性无关的行，并将这n个线性无关的行重新排列为

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_1A \\ \vdots \\ c_1A^{v_1-1} \\ c_2 \\ \vdots \\ c_2A^{v_2-1} \\ \vdots \\ c_m \\ c_mA \\ \vdots \\ c_mA^{v_m-1} \end{array} \tag{13}$$

称$\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$为系统$(A, C)$的能观性指数集

4.2.2 能观性指数

- 并且有

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m = n, \tag{14}$$

$$v = max\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}. \tag{15}$$

4.2.2 能观性指数

- 并且有

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m = n, \tag{14}$$

$$v = max\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}. \tag{15}$$

- 显然, 由(10)知, 若(A, C)为单输出系统, 即$q = 1$时, $v = n$.

4.2.2 能观性指数

- 并且有

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m = n, \tag{14}$$

$$v = max\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}. \tag{15}$$

- 显然，由(10)知，若(A, C)为单输出系统，即$q = 1$时，$v = n$.
- 利用能观性指数，可将观测秩判据简化为：
  - 若$rankC = m$，则系统(A, C)能观的充分必要条件为

$$rankQ_{n-m+1} = rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-m} \end{bmatrix} = n. \tag{16}$$

4.2.2 能观性指数

- 并且有

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_m = n, \tag{14}$$

$$v = max\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}. \tag{15}$$

- 显然, 由(10)知, 若(A, C)为单输出系统, 即$q = 1$时, $v = n$.
- 利用能观性指数, 可将观测秩判据简化为:
  - 若$rankC = m$, 则系统(A, C)能观的充分必要条件为

$$rankQ_{n-m+1} = rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-m} \end{bmatrix} = n. \tag{16}$$

- 最后, 给出能观性指数集在非奇异线性变换下的特性

定理

定理4.10 线性系统(A, C)能观测性指数及能观测指数集在非奇异变换下保持不变.

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 87–92