第7章　线性二次型最优控制与系统输入输出解耦

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 7.3 无限时间调节问题

1. 7.3 无限时间调节问题

7.3 无限时间调节问题

考虑线性定常系统的无限时间LQ调节问题,

- 系统为

$$\dot{x} = Ax + Bu, \;\; x(0) = x_0, \tag{1}$$

x为n维状态向量, u为p维输入向量, A, B分别为$n \times n, n \times p$实常阵

- 二次性能指标为

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \tag{2}$$

$Q \geq 0$为$n \times n$常矩阵, $R > 0$为$p \times p$常阵

目标 寻求最优控制$u^*(t)$, 使得指标值最小

假设 (A, B)能控, (A, C)能观, 其中C为$Q = C^T C$的任一分解

引理

引理7.1 令$Q = C^TC$为Q的任一分解，则(A, C)的能观性与Q的分解无关.

证明：令$Q = C_1^TC_1, Q = C_2^TC_2$ 为Q 的两个分解，证若(A, C_1) 能观，则(A, C_2) 能观

引理

引理7.1 令$Q=C^TC$为Q的任一分解，则(A,C)的能观性与Q的分解无关.

证明: 令$Q=C_1^TC_1, Q=C_2^TC_2$ 为Q 的两个分解，证若(A,C_1) 能观，则(A,C_2) 能观

- 用反证法. 反设(A,C_2)不能观，则矩阵$\begin{bmatrix} sI-A \\ C_2 \end{bmatrix}$对某$s=s_0$降秩，

  从而存在非零向量α 使得: $\begin{bmatrix} s_0I-A \\ C_2 \end{bmatrix}\alpha=0$

  即，有

$$(s_0I-A)\alpha=0,\ C_2\alpha=0.$$

- 故由$C_2\alpha=0$可得

$$\alpha^TC_2^TC_2\alpha=\alpha^TQ\alpha=\alpha^TC_1^TC_1\alpha=0.$$

  从而，有$C_1\alpha=0$

- 进一步, 联合$C_1\alpha = 0$和$(s_0 I - A)\alpha = 0$可得

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ C_1 \end{bmatrix} \alpha = 0,$$

➥ 表示$\begin{bmatrix} sI - A \\ C_1 \end{bmatrix}$降秩, 即由PBH判据知$(A, C_1)$不能观, 从而与$(A, C_1)$能观矛盾. 故反设不成立, (A, C_2)能观, 证毕 ■

- 进一步, 联合$C_1\alpha = 0$和$(s_0I - A)\alpha = 0$可得

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ C_1 \end{bmatrix} \alpha = 0,$$

➥ 表示$\begin{bmatrix} sI - A \\ C_1 \end{bmatrix}$降秩, 即由PBH判据知$(A, C_1)$不能观, 从而与$(A, C_1)$能观矛盾. 故反设不成立, (A, C_2)能观, 证毕 ■

由定理7.1知, 无限时间LQ调节问题对应的Riccati方程为

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t) &= P(t)A + A^T P(t) + Q - P(t)BR^{-1}B^T P(t), \\ P(t_f) &= 0, t \in [0, t_f], t_f \to \infty. \end{aligned} \tag{3}$$

- 首先, 讨论(3)的解的特征
  - 将此解表示为$P(t, 0, t_f)$, 它是满足末时刻条件$P(t_f, 0, t_f) = P(t_f) = 0$和以$t$为自变量的解

引理

引理7.2 $P(0,0,t_f)$对一切$t_f \geq 0$有上界. 即对任意$x_0 \neq 0$, 存在不依赖于t_f的正实数$M(0,x_0)$, 使对一切$t_f \geq 0$, 成立

$$x_0^T P(0,0,t_f)x_0 \leq M(0,x_0) \leq \infty. \tag{4}$$

引理

引理7.2 $P(0,0,t_f)$对一切$t_f \geq 0$有上界. 即对任意$x_0 \neq 0$, 存在不依赖于t_f的正实数$M(0,x_0)$, 使对一切$t_f \geq 0$, 成立

$$x_0^T P(0,0,t_f)x_0 \leq M(0,x_0) \leq \infty. \tag{4}$$

证明: 由(A,B)能控知, 对任意$x_0 \neq 0$, 存在控制$u_1(t)$和时刻$t_1 > 0$, 使相应的系统运动轨线$x_1(t)$满足$x_1(t_1) = 0$

- 取控制为

$$\tilde{u}_1(t) = \begin{cases} u_1(t), & t \in [0,t_1], \\ 0, & t > t_1, \end{cases} \tag{5}$$

其相应的轨线

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} x_1(t), & t \in [0,t_1], \\ 0, & t > t_1, \end{cases} \tag{6}$$

- 则由$u_1(t)$和$x_1(t)$的有界和连续, 可导出

$$\begin{aligned} J(\tilde{u}) &= \int_0^{\infty} (\tilde{x}^T Q\tilde{x} + \tilde{u}^T R\tilde{u})dt \\ &= \int_0^{t_1} (x^T Qx + u^T Ru)dt = M(0, x_0) < \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

- 进而, $u^*(t)$, $x^*(t)$表示无限时间LQ调节问题的最优控制和最优轨线, J^* 为相应的最优性能指标值, 则有

$$\begin{aligned} J^* &= x_0^T P(0,0,t_f)x_0 = \int_0^{t_f} ({x^*}^T Qx^* + {u^*}^T Ru^*)dt \\ &\leq \int_0^{t_f} (\tilde{x}^T Q\tilde{x} + \tilde{u}^T R\tilde{u})dt \\ &\leq \int_0^{\infty} (\tilde{x}^T Q\tilde{x} + \tilde{u}^T R\tilde{u})dt \\ &= M(0, x_0) < \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

➥ 这表明$P(0,0,t_f)$对一切$t_f \geq 0$有上界. 证毕 ■

引理

引理7.3 对任意$t \geq 0$, 极限$\lim_{t_f \to \infty} P(t, 0, t_f) = P(t, 0, \infty)$存在.

引理

引理7.3 对任意$t \geq 0$, 极限$\lim_{t_f \to \infty} P(t, 0, t_f) = P(t, 0, \infty)$存在.

证明: 由于(3)为定常矩阵微分方程, 故必成立

$$P(t, 0, t_f) = P(0, 0, t_f - t)$$

➥ 故上述命题等价于证明$P(0, 0, \infty)$的存在性

- 将$P(0, 0, t_f)$表示为

$$P(0, 0, t_f) = \begin{bmatrix} p_{11}(0, 0, t_f) & \cdots & p_{1n}(0, 0, t_f) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n1}(0, 0, t_f) & \cdots & p_{nn}(0, 0, t_f) \end{bmatrix}. \tag{9}$$

则由其为对称阵, 可知

$$p_{ij}(0, 0, t_f) = p_{ji}(0, 0, t_f), i \neq j. \tag{10}$$

7.3 无限时间调节问题

(1) 首先, 证明$p_{ii}(0,0,t_f)$当$t_f \to \infty$时的存在性

- 为此,
  - 令$x_0 \neq 0$为任意初态; 取$t_2 > t_f$
  - J_2^*和J^*分别表示末时刻为t_2和t_f的LQ 问题的最优性能指标值
  - u_2^*, x_2^*为末时刻为t_2的最优控制和最优轨线
  - u^*, x^*为末时刻为t_f的最优控制与最优轨线
- 于是, 有

$$
\begin{aligned}
x_0^T P(0,0,t_f)x_0 = J^* &= \int_0^{t_f} ({x^*}^T Q x^* + {u^*}^T R u^*)dt \\
&\leq \int_0^{t_f} ({x_2^*}^T Q x_2^* + {u_2^*}^T R u_2^*)dt \\
&\leq \int_0^{t_2} ({x_2^*}^T Q x_2^* + {u_2^*}^T R u_2^*)dt \\
&= J_2^* = x_0^T P(0,0,t_2)x_0.
\end{aligned} \tag{11}
$$

- 进而, 取

$$x_0 = e_i = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \ i = 1, 2, \cdots, n, \qquad (12)$$

将(12)代入(11), 并由

$$\begin{aligned} e_i^T P(0, 0, t_f) e_i &= p_{ii}(0, 0, t_f), \\ e_i^T P(0, 0, t_2) e_i &= p_{ii}(0, 0, t_2) \end{aligned}$$

➥ 可推得, 当$t_2 > t_f$时

$$p_{ii}(0, 0, t_f) \le p_{ii}(0, 0, t_2), \ i = 1, 2, \cdots, n. \qquad (13)$$

这表明, $p_{ii}(0, 0, t_f)$关于t_f是单调递增函数

- 又由引理7.2知, $p_{ii}(0, 0, t_f)$对t_f 有上界, 从而$p_{ii}(0, 0, t_f)$当$t \to \infty$时极限存在

(2) 下面, 再证明非对角线元$p_{ij}(0,0,t_f)$当$t \to \infty$时的存在性

- 为此, 取

$$x_0 = e_i + e_j,\ i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n, \tag{14}$$

于是有

$$(e_i + e_j)^T P(0,0,t_f)(e_i + e_j) = p_{ii}(0,0,t_f) + 2p_{ij}(0,0,t_f) + p_{jj}(0,0,t_f). \tag{15}$$

- 上式左端是关于t_f的单调递增函数, 同时, $p_{ii}(0,0,t_f)$, $p_{jj}(0,0,t_f)$也是关于t_f的单调递增函数

➥ 由问题的一般性可知, $p_{ij}(0,0,t_f)$也是关于t_f的单调递增函数

- 由引理7.2, $P(0,0,t_f)$对t_f有上界, 从而$p_{ij}(0,0,t_f)$对t_f有上界. 这说明, 对一切i和j, $p_{ij}(0,0,t_f)$当$t \to \infty$时极限存在

综合(1)(2), 可得$P(0,0,\infty)$存在. 引理7.3得证 ■

引理

引理7.4 $P(t,0,\infty)$必为不依赖于t的常阵, 记为P, 也即

$$P(t,0,\infty) = P. \tag{16}$$

引理

引理7.4 $P(t,0,\infty)$必为不依赖于t的常阵, 记为P, 也即

$$P(t,0,\infty)=P. \tag{16}$$

证明: 因为, $P(t,0,t_f)$为定常Riccati微分方程(3)的解, 从而知

$P(t,0,t_f)$为仅与t_f-t有关, 而与t_f和t的具体值无直接的关系

也即

$$P(t,0,t_f)=P(0,0,t_f-t). \tag{17}$$

- 从而

$$\begin{aligned} P(t,0,\infty) &= \lim_{t_f\to\infty} P(t,0,t_f) \\ &= \lim_{t_f\to\infty} P(0,0,t_f-t) \\ &= P(0,0,\infty) \end{aligned} \tag{18}$$

这表明$P(0,0,\infty)$与t 无关, 即$P(0,0,\infty)=P$ 为常阵. 证毕 ■

引理

引理7.5 P为正定对称阵, 且满足Riccati方程

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0. \tag{19}$$

引理

引理7.5 P为正定对称阵，且满足Riccati方程

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0. \tag{19}$$

证明：首先，因为$P(t, 0, \infty)$ 为定常Riccati 微分方程(3) 的解，而又已证明$P(t, 0, \infty) = P$ 为常阵，代入(3) 即得(19)

- P的对称性显然，下证P的正定性

引理

引理7.5 P为正定对称阵, 且满足Riccati方程

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0. \tag{19}$$

证明: 首先, 因为$P(t, 0, \infty)$ 为定常Riccati 微分方程(3) 的解, 而又已证明$P(t, 0, \infty) = P$ 为常阵, 代入(3) 即得(19)

- P的对称性显然, 下证P的正定性
- 反设P不是正定的, 则

$$\text{由}P(t, 0, t_f)\text{为半正定知}, P\text{为半正定}$$

从而, 必存在一非零向量x_0, 使得

$$\begin{aligned} 0 &= x_0^T P x_0 \\ &= \int_0^\infty ({x^*}^T Q x^* + {u^*}^T R u^*) dt. \end{aligned} \tag{20}$$

- 由于$R > 0$, $Q \geq 0$, 所以上式成立, 必有

$$\int_0^{\infty} {x^*}^T Q x^* dt = 0, \quad \int_0^{\infty} {u^*}^T R u^* dt = 0. \tag{21}$$

- 由于$R > 0$, $Q \geq 0$, 所以上式成立, 必有

$$\int_0^\infty x^{*T} Q x^* dt = 0, \quad \int_0^\infty u^{*T} R u^* dt = 0. \tag{21}$$

- 因为$R > 0$, 从而得出$u^*(t) \equiv 0$
- 又由$Q = C^T C$, 得

$$\int_0^\infty x^{*T} C^T C x^* dt = 0. \tag{22}$$

从而有

$$C x^*(t) = 0. \tag{23}$$

- 而由$\dot{x} = Ax, x(0) = x_0$得到

$$x^*(t) = e^{At} x_0,$$

故由(23)得

$$C e^{At} x_0 = 0. \tag{24}$$

➥ 这与(A, C)能观矛盾, 即反设不成立, 即P为正定矩阵. 结论得证

■

事实上, 对于Riccati方程(19), 有如下引理

引理

引理7.6 若(A, B)能控, (A, C)能观, 则Riccati方程(19)有唯一正定解.

基于上述讨论，可直接给出定常的无限时间LQ问题的最优解结论

定理

定理7.2 对于定常系统的无限时间LQ调节问题(1), (2), $u^*(t)$为最优控制的充分必要条件是

$$u^*(t) = -R^{-1}B^TPx(t), \tag{25}$$

其中, P为Riccati方程

$$PA + A^TP + Q - PBR^{-1}B^TP = 0 \tag{26}$$

的唯一正定解, 最优性能指标值为

$$J^* = x_0^TPx_0, \tag{27}$$

相应的最优轨线$x^*(t)$为下述状态方程的解

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^TP)x, \; x(0) = x_0. \tag{28}$$

下面考察最优调节系统(28)的稳定性，有下面的定理

定理

定理7.3 最优调节系统(28)是大范围渐近稳定的.

下面考察最优调节系统(28)的稳定性, 有下面的定理

定理

定理7.3 最优调节系统(28)是大范围渐近稳定的.

证明: 构造Lyapunov函数

$$V(x) = x^T P x.$$

- 由P正定知$V(x)$为正定函数, 沿轨线(28)对时间t求导,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} \\ &= x^T (A^T P - PBR^{-1}B^T P + PA - PBR^{-1}B^T P) x \\ &\overset{(26)}{=} -x^T (Q + PBR^{-1}B^T P) x.\end{aligned} \tag{29}$$

- 由$Q \geq 0$, $R > 0$知$\dot{V}(x) \leq 0$
- 下面证明, 对所有的$x_0 \neq 0$的解$x(t)$都有$\dot{V}(x) \neq 0$. 反设存在$x_0 \neq 0$使得相应解$x(t)$满足

$$\dot{V}(t) \equiv 0$$

7.3 无限时间调节问题

- 根据反设, 由(29)知, 必有

$$x^T(t)Qx(t) \equiv 0,\ x^T(t)PBR^{-1}B^TPx(t) \equiv 0; \tag{30}$$

- 而由

$$\begin{aligned} 0 &\equiv x^T(t)PBR^{-1}B^TPx(t) \\ &= \left(x^T(t)PBR^{-1}\right)^T R\left(x^T(t)PBR^{-1}\right) \\ &= u^{*T}Ru^*, \end{aligned} \tag{31}$$

推得$u^* \equiv 0$, 从而最优调节系统为

$$\dot{x}(t) = Ax,\ x(0) = x_0, \tag{32}$$

- 而由

$$0 \equiv x^T(t)Qx(t) = x^T(t)C^TCx(t) \tag{33}$$

得到$Cx(t) \equiv 0$

➥ 显然, 这与(A, C)能观矛盾. 即反设不成立, 也即$\dot{V}(x) \not\equiv 0$

- 再由当$\|x\| \to \infty$ 时有$\dot{V}(x) \to \infty$, 根据Lyapunov 稳定性理论知, 闭环系统(28) 大范围渐近稳定. 证毕 ■

推论

推论7.1 若Q正定, 则最优调节系统(28)渐近稳定的.

推论

推论7.1 若Q正定, 则最优调节系统(28)渐近稳定的.

证明: 若Q正定, 则存在非奇异矩阵C使得$C^T C = Q$

- 从而, $\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$对任意$s$都列满秩,
- 进而, 由PBH判据知(A, C)能观, 从而结论得证 ■

例7.3.1 设系统状态方程是

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

二次性能指标为

$$J(u) = \int_0^{\infty} [x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + u^2]dt.$$

求最优控制及最优性能指标值, 并验证定理7.3的正确性.

例7.3.1 设系统状态方程是

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, x_1(0) = 1, x_2(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

二次性能指标为

$$J(u) = \int_0^{\infty} [x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + u^2]dt.$$

求最优控制及最优性能指标值, 并验证定理7.3的正确性.

解: 容易看出,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, R = 1.$$

- 易知(A, B)能控, 又因$Q > 0$, 故(A, C)能观, 其中$C^T C = Q$

- 令$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$, 则最优控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t) = -p_{12}x_1(t) - p_{22}x_2(t),$$

- 且P满足

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

➥ 解出上面Riccati方程的正定解为

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{6}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

- 从而，最优控制为

$$u^*(t) = -x_1(t) - \sqrt{6}x_2(t),$$

- 最优指标为

$$J^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{6}-1,$$

- 最优控制导致的闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \sqrt{6}x_2. \end{aligned}$$

- 从而，最优控制为

$$u^*(t) = -x_1(t) - \sqrt{6}x_2(t),$$

- 最优指标为

$$J^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6}-1 & 1 \\ 1 & \sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{6}-1,$$

- 最优控制导致的闭环系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \sqrt{6}x_2. \end{aligned}$$

➥ 系统矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{6} \end{bmatrix}$，特征值为$\lambda_{1,2} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$，均具有负实部，故闭环系统渐近稳定

注：定理7.2和7.3都是在假定系统(A,B)能控，(A,C)能观的条件下得出的结论

- 事实上，(A,B)能控，(A,C)能观并不是定常系统无限时间LQ调节问题有界的充分必要条件，而只是充分条件. 此条件还可以减弱为(A,B)能稳，(A,C)可检测，如下结论所示

引理

引理7.7 若(A,B) 能稳，(A,C) 可检测，则Riccati 方程(19)存在唯一半正定解.

定理

定理7.4 若(A, B) 能稳, (A, C) 可检测, 则无限时间LQ调节问题(1), (2) 存在唯一解, 最优控制为

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t), \tag{34}$$

其中P为Riccati方程

$$PA + A^T P + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \tag{35}$$

的唯一半正定解, 最优性能指标值为

$$J^* = x_0^T Px_0, \tag{36}$$

相应的最优轨线$x^*(t)$为最优闭环

$$\dot{x} = (A - BR^{-1}B^T P)x, x(0) = x_0 \tag{37}$$

的解, 最优闭环(37)是渐近稳定的

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 148–155