第6章　状态观测器

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 6.3 降维状态观测器
   - 6.3.1 $C = [I_q \quad 0]$ 时的降维观测器
   - 6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
   - 6.3.3 C行满秩时的降维观测器
   - 6.3.4 C行降秩时的降维观测器

1 6.3 降维状态观测器

- 6.3.1 $C = [I_q \quad 0]$ 时的降维观测器
- 6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
- 6.3.3 C行满秩时的降维观测器
- 6.3.4 C行降秩时的降维观测器

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

考虑到系统的输出y中已含有系统状态x的部分信息, 因此,

- 可以直接利用这部分信息, 去构造维数低于被估计系统维数的状态观测器, 称为降维观测器

$$\int_1^t e^{-t+s}\frac{1}{s}dW(s) \tag{1}$$

6.3 降维状态观测器

考虑到系统的输出y中已含有系统状态x的部分信息，因此，

- 可以直接利用这部分信息，去构造维数低于被估计系统维数的状态观测器，称为降维观测器

$$\int_1^t e^{-t+s}\frac{1}{s}dW(s) \tag{1}$$

- 考虑线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{2}$$

其中，x为n维状态变量，u为p维输入变量，y为q维输出变量，A, B, C分别为$n\times n, n\times p, q\times n$,实常阵

- 设计系统(2)的降维状态观测器，我们以C的形式分以下三种类型进行讨论
- 假定(A, C)为可检测的

1 6.3 降维状态观测器

- 6.3.1 $C = [I_q \ \ 0]$ 时的降维观测器
- 6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
- 6.3.3 C行满秩时的降维观测器
- 6.3.4 C行降秩时的降维观测器

6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器

对系统(2)设计$n-q$维的状态观测器

- 令

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中, x_1为q维状态变量, x_2为$n-q$维状态变量

- 相应地, 记

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\A_{21} & A_{22}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}B_1\\B_2\end{bmatrix}, \tag{4}$$

$A_{11},A_{12},A_{21},A_{22},B_1,B_2$ 分别为$q\times q$, $q\times(n-q)$, $(n-q)\times q$, $(n-q)\times(n-q)$, $q\times p$, $(n-q)\times p$的实常阵

- 则系统(2)可表示为:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1&=A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u,\\ \dot{x}_2&=A_{21}x_1+A_{22}x_2+B_2u,\\ y&=x_1.\end{aligned} \tag{5}$$

注: 显然, 分状态x_1即为系统输出, 可直接利用, 需要被估计的状态是x_2.

6.3.1 $C = [I_q \ \ 0]$ 时的降维观测器

- 系统(5)可重新写为

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= A_{11}y + A_{12}x_2 + B_1u, \\
\dot{x}_2 &= A_{21}y + A_{22}x_2 + B_2u,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

则可导出相对于x_2的状态方程和输出方程

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_2 &= A_{22}x_2 + (A_{21}y + B_2u), \\
\dot{y} - A_{11}y - B_1u &= A_{12}x_2.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

6.3.1 $C = [I_q \;\; 0]$ 时的降维观测器

- 系统(5)可重新写为

$$\begin{aligned}\dot{y} &= A_{11}y + A_{12}x_2 + B_1u,\\ \dot{x}_2 &= A_{21}y + A_{22}x_2 + B_2u,\end{aligned} \tag{6}$$

则可导出相对于x_2的状态方程和输出方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= A_{22}x_2 + (A_{21}y + B_2u),\\ \dot{y} - A_{11}y - B_1u &= A_{12}x_2.\end{aligned} \tag{7}$$

- 定义

输入$\bar{u} = A_{21}y + B_2u$和输出$\tilde{y} = \dot{y} - A_{11}y - B_1u$

则系统(7)还可表示为如下的规范形式

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= A_{22}x_2 + \bar{u},\\ \tilde{y} &= A_{12}x_2.\end{aligned} \tag{8}$$

系统(8)为$n-q$维系统

- 若(A_{22}, A_{12})可检测, 则系统(8)全维状态观测器一定存在

6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器

考察(A_{22},A_{12})可检测性, 有如下结论:

引理

引理6.3 矩阵对(A_{22},A_{12})是可检测的, 当且仅当(A,C)可检测;矩阵对(A_{22},A_{12})能观, 当且仅当(A,C)能观.

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C = [I_q \ \ 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

考察(A_{22}, A_{12})可检测性，有如下结论：

引理

引理6.3 矩阵对(A_{22}, A_{12})是可检测的，当且仅当(A, C)可检测;矩阵对(A_{22}, A_{12})能观，当且仅当(A, C)能观.

证明：注意$C = [I_q \ \ 0]$，则考虑PBH判据可得

$$
\begin{aligned}
rank\begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} &= rank\begin{bmatrix} sI - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & sI - A_{22} \\ I_q & 0 \end{bmatrix} \\
&= rank\begin{bmatrix} 0 & -A_{12} \\ 0 & sI - A_{22} \\ I_q & 0 \end{bmatrix} \\
&= q + rank\begin{bmatrix} sI - A_{22} \\ A_{12} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

- 由PBH秩判据即可得引理中的结论成立 ■

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C = [I_q \ \ 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 基于引理6.3, 令系统(8)的全阶观测器为

$$\dot{z} = (A_{22} - GA_{12})z + \bar{u} + G\tilde{y}. \tag{9}$$

通过选取G, 使得$A_{22} - GA_{12}$的特征值均具有负实部, 显然

$$z(t) - x_2(t) = e^{(A_{22}-GA_{12})t}(z(0) - x(0)), \ t \geq 0,$$

从而, $\lim_{t\to\infty}(z(t) - x_2(t)) = 0$成立

6.3.1 $C = [I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器

- 基于引理6.3, 令系统(8)的全阶观测器为

$$\dot{z} = (A_{22} - GA_{12})z + \bar{u} + G\tilde{y}. \tag{9}$$

通过选取G, 使得$A_{22} - GA_{12}$的特征值均具有负实部, 显然

$$z(t) - x_2(t) = e^{(A_{22}-GA_{12})t}(z(0) - x(0)),\ \ t \geq 0,$$

从而, $\lim_{t\to\infty}(z(t) - x_2(t)) = 0$成立

- 将$\bar{u}, \tilde{y}$代入(9), 即可得观测器

$$\dot{z} = (A_{22} - GA_{12})z + (A_{21}y + B_2u) + G(\dot{y} - A_{11}y - B_1u). \tag{10}$$

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C = [I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 基于引理6.3, 令系统(8)的全阶观测器为

$$\dot{z} = (A_{22} - GA_{12})z + \bar{u} + G\tilde{y}. \tag{9}$$

通过选取G, 使得$A_{22} - GA_{12}$的特征值均具有负实部, 显然

$$z(t) - x_2(t) = e^{(A_{22} - GA_{12})t}(z(0) - x(0)),\ t \geq 0,$$

从而, $\lim_{t\to\infty}(z(t) - x_2(t)) = 0$成立

- 将$\bar{u}, \tilde{y}$代入(9), 即可得观测器

$$\dot{z} = (A_{22} - GA_{12})z + (A_{21}y + B_2u) + G(\dot{y} - A_{11}y - B_1u). \tag{10}$$

注: 由于上式中含有$\dot{y}$, 将$\dot{y}$作为人造系统的输入, 则使系统对于干扰十分敏感, 由于干扰影响, 系统输出y有微小变化, 可能造成$\dot{y}$有很大变化

6.3.1 $C = [I_q \;\; 0]$ 时的降维观测器

- 对上述系统(10)进行改造, 因为

$$
\begin{aligned}
(\dot{z} - G\dot{y}) =&(A_{22} - GA_{12})(z - Gy) + (A_{22} - GA_{12})Gy \\
&+ A_{21}y + B_2u - (GA_{11}y + GB_1u) \\
=&(A_{22} - GA_{12})(z - Gy) + [(A_{22} - GA_{12})G \\
&+ (A_{21} - GA_{11})]y + (B_2 - GB_1)u,
\end{aligned} \tag{11}
$$

➥ 若令

$$
\omega = z - Gy, \tag{12}
$$

则上式(11)即为

$$
\dot{\omega} = (A_{22} - GA_{12})\omega + [(A_{22} - GA_{12})G + (A_{21} - GA_{11})]\,y + (B_2 - GB_1)u. \tag{13}
$$

6.3.1 $C = [I_q \;\; 0]$ 时的降维观测器

- 对上述系统(10)进行改造, 因为

$$\begin{aligned}(\dot z - G\dot y) =&(A_{22} - GA_{12})(z - Gy) + (A_{22} - GA_{12})Gy \\ &+ A_{21}y + B_2u - (GA_{11}y + GB_1u) \\ =&(A_{22} - GA_{12})(z - Gy) + [(A_{22} - GA_{12})G \\ &+ (A_{21} - GA_{11})]y + (B_2 - GB_1)u,\end{aligned} \tag{11}$$

➥ 若令

$$\omega = z - Gy, \tag{12}$$

则上式(11)即为

$$\dot\omega = (A_{22} - GA_{12})\omega + [(A_{22} - GA_{12})G + (A_{21} - GA_{11})]\,y + (B_2 - GB_1)u. \tag{13}$$

- 由$z = \omega + Gy$渐近逼近x_2, 则取估计状态

$$\hat x = \begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ G & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \omega \end{bmatrix}, \tag{14}$$

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C = [I_q \;\; 0]$ 时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

那么，有

$$\lim_{t\to\infty}(\hat{x}(t) - x(t)) = \lim_{t\to\infty}\left(\begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix} 0 \\ z - x_2 \end{bmatrix} = 0.$$

那么，有

$$\lim_{t\to\infty}(\hat{x}(t)-x(t))=\lim_{t\to\infty}\left(\begin{bmatrix} y\\ \omega+Gy\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\right)=\lim_{t\to\infty}\begin{bmatrix}0\\ z-x_2\end{bmatrix}=0.$$

- 式(13), (14)即为系统(2)在$C=[I_q\ 0]$时的$n-q$维状态观测器和估计状态，其结构见图6.3

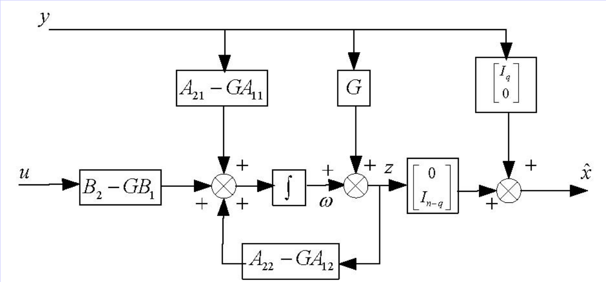

图6.3 降维状态观测器

1. 6.3 降维状态观测器
   - 6.3.1 $C = [I_q \;\; 0]$ 时的降维观测器
   - 6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
   - 6.3.3 C行满秩时的降维观测器
   - 6.3.4 C行降秩时的降维观测器

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C = [I_q \quad 0]$ 时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 考虑线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \tag{15}$$

其$n-q$维观测器为

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= (A_{22} - GA_{12})\omega + [(A_{22} - GA_{12})G + (A_{21} - GA_{11})]y \\ &\quad + (B_2 - GB_1)u, \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{16}$$

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C=[I_q \quad 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 考虑线性系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} x. \end{aligned} \tag{15}$$

其$n-q$维观测器为

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= (A_{22} - GA_{12})\omega + [(A_{22} - GA_{12})G + (A_{21} - GA_{11})]y \\ &\quad + (B_2 - GB_1)u, \\ \hat{x} &= \begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{16}$$

➥ 对系统(15)作输出反馈

$$\begin{aligned} u &= K\hat{x} + v = K \begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix} + v \\ &= K \begin{bmatrix} I_q \\ G \end{bmatrix} y + K \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-q} \end{bmatrix} \omega + v, \end{aligned} \tag{17}$$

- 则闭环系统为:

$$
\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{\omega}\end{bmatrix}=\underbrace{\left[\begin{array}{c|c} A+BK\begin{bmatrix}I_q\\ G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix} & BK\begin{bmatrix}0\\ I_{n-q}\end{bmatrix} \\ \hline \begin{array}{l}\big[(A_{22}-GA_{12})G\\ +(A_{21}-GA_{11})\big]\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}\\ +(B_2-GB_1)K\begin{bmatrix}I_q\\ G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}\end{array} & \begin{array}{l}(A_{22}-GA_{12})\\ +(B_2-GB_1)K\begin{bmatrix}0\\ I_{n-q}\end{bmatrix}\end{array}\end{array}\right]}_{\triangleq\widetilde{A}}\underbrace{\begin{bmatrix}x\\ \omega\end{bmatrix}}_{\triangleq\widetilde{x}}
$$

$$
+\underbrace{\begin{bmatrix}B\\ B_2-GB_1\end{bmatrix}}_{\triangleq\widetilde{B}}v
$$

$$
y=\underbrace{\begin{bmatrix}I_q & 0 & 0\end{bmatrix}}_{\triangleq\widetilde{C}}\begin{bmatrix}x\\ \omega\end{bmatrix} \tag{18}
$$

- 下面, 讨论上述闭环系统(18)的特征值和传递函数. 为此, 引入非奇异线性变换

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}}_{\widetilde{x}} = P \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix}}_{\triangleq x_c}, \quad 即, 令 x_c = P^{-1}\widetilde{x} \tag{19}$$

其中,

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \tilde{P} & I_{n-q} \end{bmatrix}, \ \tilde{P} = \begin{bmatrix} -G & I_{n-q} \end{bmatrix} \\ P^{-1} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\tilde{P} & I_{n-q} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{20}$$

➥ 则, 可知

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c v$$
$$y = C_c x_c$$

其中,

$$A_c = P^{-1}\widetilde{A}P, \ \ B_c = P^{-1}\widetilde{B}, \ \ C_c = \widetilde{C}P$$

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 考虑

$$A_c = P^{-1}\left[\begin{array}{c|c} A+BK\begin{bmatrix}I_q\\G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix} & BK\begin{bmatrix}0\\I_{n-q}\end{bmatrix} \\ \hline \begin{array}{l}\Big[(A_{22}-GA_{12})G\\ +(A_{21}-GA_{11})\Big]\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}\\ +(B_2-GB_1)K\begin{bmatrix}I_q\\G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}\end{array} & \begin{array}{l}(A_{22}-GA_{12})\\ +(B_2-GB_1)K\begin{bmatrix}0\\I_{n-q}\end{bmatrix}\end{array}\end{array}\right]P$$

$$=\begin{bmatrix}A_{c1} & A_{c2}\\ A_{c3} & A_{c4}\end{bmatrix}$$

➥ 则，可知

$$\begin{aligned}A_{c1} &= A+BK\begin{bmatrix}I_q\\G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}+BK\begin{bmatrix}0\\I_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-G & I_{n-q}\end{bmatrix}\\ &= A+BK\left(\begin{bmatrix}I_q & 0\\G & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\-G & I_{n-q}\end{bmatrix}\right)\\ &= A+BK\end{aligned}$$

$$A_{c2} = BK\begin{bmatrix}0\\I_{n-q}\end{bmatrix}$$

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

以及

$$
\begin{aligned}
A_{c4} &= -\begin{bmatrix}-G & I_{n-q}\end{bmatrix} BK \begin{bmatrix}0\\ I_{n-q}\end{bmatrix} + (A_{22}-GA_{12}) + (B_2-GB_1)K\begin{bmatrix}0\\ I_{n-q}\end{bmatrix}\\
&= -\begin{bmatrix}-G & I_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix} K \begin{bmatrix}0\\ I_{n-q}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-G & I_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix} K \begin{bmatrix}0\\ I_{n-q}\end{bmatrix}\\
&\quad + (A_{22}-GA_{12})\\
&= A_{22}-GA_{12}\\
A_{c3} &= -\begin{bmatrix}-G & I_{n-q}\end{bmatrix}\left(A + BK\begin{bmatrix}I_q\\ G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}\right)\\
&\quad + [(A_{22}-GA_{12})G + (A_{21}-GA_{11})]\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix}\\
&\quad + (B_2-GB_1)K\begin{bmatrix}I_q\\ G\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_q & 0\end{bmatrix} + (A_{22}-GA_{12})\begin{bmatrix}-G & I_{n-q}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}G & -I_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(A_{22}-GA_{12})G + (A_{21}-GA_{11}) & 0\end{bmatrix}\\
&\quad + \begin{bmatrix}-(A_{22}-GA_{12})G & (A_{22}-GA_{11})\end{bmatrix}\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

综合上面的推导，于是有

$$A_c=\begin{bmatrix} A+BK & BK\begin{bmatrix}0\\ I_{n-q}\end{bmatrix} \\ 0 & A_{22}-GA_{12}\end{bmatrix} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} B_c &= P^{-1}\begin{bmatrix} B \\ B_2-GB_1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\tilde{P} & I_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B \\ B_2-GB_1\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B \\ 0\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} C_c &= \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \tilde{P} & I_{n-q}\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_q & 0 & 0\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C = [I_q \ \ 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 由(21)可以看到闭环系统(18)的特征值即为

$$\lambda_i(A+BK) \cup \lambda_j(A_{22}-GA_{12}),\ i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,n-q,$$

即闭环系统的特征值满足分离原理

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C = [I_q \;\; 0]$ 时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 由(21)可以看到闭环系统(18)的特征值即为

$$\lambda_i(A+BK) \cup \lambda_j(A_{22}-GA_{12}),\; i=1,2,\cdots,n,\; j=1,2,\cdots,n-q,$$

即闭环系统的特征值满足分离原理

- 闭环传递函数

$$G(s) = C_c(sI-A_c)^{-1}B_c = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix}(sI-(A+BK))^{-1}B \qquad (24)$$

即为系统直接经状态反馈$u = Kx + v$的闭环传递函数，也就是说，

  - 降维状态观测器的而引入，并不改变原状态反馈系统的传递函数

➥ 基于全维状态观测器和降维状态观测器构造输出动态反馈，所导致的闭环系统都具有特征根分离定理；并且状态观测器的引入都不改变原状态反馈系统的传递函数

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

例6.3.1 给定系统为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -1\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x.$$

试设计一降维观测器(特征值为$\lambda_1=-3$, $\lambda_{2,3}=-3\pm 2j$), 并构造输出动态反馈, 使得闭环传递函数的极点为-1, $-1\pm j$, -2.

解: (1) 设计状态反馈矩阵K

- 闭环特征多项式为:

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (s+1)(s+1-j)(s+1+j)(s+2)\\ &= s^4+5s^3+10s^2+10s+4\end{aligned}$$

- 令$K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3 \;\; k_4]$, 则

$$A+BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3-2 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & 4-k_3 & -k_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= \det(sI-A-Bk)\\ &= s^4+(k_4-k_2)s^3+(k_3-k_1-4)s^2+2k_2s+2k_1.\end{aligned}$$

➥ 比较系数即可得

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 16 & 10 \end{bmatrix}.$$

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

(2)设计降维状态观测器

- 由于降维观测器特征值为$\lambda_1=-3$, $\lambda_{2,3}=-3\pm 2j$, 对应的特征多项式为

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(s) &= (s+3)(s+3-2j)(s+3-2j)\\ &= s^3+9s^2+31s+39\end{aligned}$$

- 令

$$G=\begin{bmatrix} g_1\\ g_2\\ g_3\end{bmatrix} \quad \Rightarrow A_{22}-GA_{12}=\begin{bmatrix} -g_1 & -2 & 0\\ -g_2 & 0 & 1\\ -g_3 & 4 & 0\end{bmatrix}.$$

且, 可知

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}(s) &= \det sI-A_{22}+GA_{12}\\ &= s^3+g_1s^2-(2g_2+4)s-(2g_3+4g_1)\end{aligned}$$

➥ 比较$\bar{\alpha}(s)$的系数, 即得

$$G=\begin{bmatrix} 9\\ -\dfrac{35}{2}\\ -\dfrac{75}{2}\end{bmatrix}$$

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C = [I_q \quad 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 此外, 由G计算可得

$$A_{22} - GA_{12} = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 0 \\ \frac{35}{2} & 0 & 1 \\ \frac{75}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A_{22} - GA_{12})G + (A_{21} - GA_{11}) = \begin{bmatrix} -46 \\ 120 \\ \frac{535}{2} \end{bmatrix}$$

$$B_2 - GB_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

由上计算, 则根据分离原理可知, 实现闭环极点配置的

- 降维观测器为:

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} -9 & -2 & 0 \\ \frac{35}{2} & 0 & 1 \\ \frac{75}{2} & 4 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -46 \\ 120 \\ \frac{535}{2} \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u.$$

- 估计状态

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} y \\ z + Gy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{35}{2} & 1 & 0 & \\ \frac{75}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}.$$

- 输出动态反馈为

$$u = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 16 & 10 \end{bmatrix} \hat{x} + v.$$

1. 6.3 降维状态观测器
   - 6.3.1 $C = [I_q \quad 0]$ 时的降维观测器
   - 6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
   - 6.3.3 C行满秩时的降维观测器
   - 6.3.4 C行降秩时的降维观测器

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

- 取

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix}. \tag{25}$$

➥ 对系统(2)作非奇异线性变换$x = T\bar{x}$, 则有

$$T^{-1}T = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} CT \\ RT \end{bmatrix} = I_n.$$

可得

$$\bar{C} = CT = \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix}. \tag{26}$$

- 相应地, 记

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \bar{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{27}$$

6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

- 由(27), 即将系统(2)在C行满秩时的降维状态观测器的设计转化成为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \\ y &= \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix}\bar{x}. \end{aligned} \tag{28}$$

的降维状态观测器设计

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

- 由(27), 即将系统(2)在C行满秩时的降维状态观测器的设计转化成为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \\ y &= \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \bar{x}. \end{aligned} \tag{28}$$

  的降维状态观测器设计

- 容易验证, 矩阵对(A_{22}, A_{12})能观(可检测)等价于矩阵对$(\bar{A}, \bar{C})$能观(可检测), 等价于矩阵对(A, C)能观(可检测)

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

- 由(27), 即将系统(2)在C行满秩时的降维状态观测器的设计转化成为

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \\ y &= \begin{bmatrix} I_q & 0 \end{bmatrix} \bar{x}. \end{aligned} \tag{28}$$

的降维状态观测器设计

- 容易验证, 矩阵对(A_{22}, A_{12})能观(可检测)等价于矩阵对$(\bar{A}, \bar{C})$能观(可检测), 等价于矩阵对(A, C)能观(可检测)

➥ 由前面的推导直接可得系统(2)的降维状态观测器为(13)

➥ 且由

$$\lim_{t\to\infty}\left(\begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix} - \bar{x}\right) = 0,$$

可令估计状态为

$$\hat{x} = T\begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix} \tag{29}$$

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 故有

$$\hat{x}(t)-x(t)=T\begin{bmatrix} y \\ \omega+Gy \end{bmatrix}-T\bar{x}=T\left(\begin{bmatrix} y \\ \omega+Gy \end{bmatrix}-\bar{x}\right),$$

从而, $\lim_{t\to\infty}(\hat{x}(t)-x(t))=0$

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C = [I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 故有

$$\hat{x}(t) - x(t) = T\begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix} - T\bar{x} = T\left(\begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix} - \bar{x}\right),$$

从而, $\lim_{t\to\infty}(\hat{x}(t) - x(t)) = 0$

➥ 基于降维状态观测器的输出动态反馈律为

$$u = K\hat{x} + v = KT\begin{bmatrix} y \\ \omega + Gy \end{bmatrix} + v. \tag{30}$$

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$ 时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

- 故有

$$\hat{x}(t)-x(t)=T\begin{bmatrix} y \\ \omega+Gy \end{bmatrix}-T\bar{x}=T\left(\begin{bmatrix} y \\ \omega+Gy \end{bmatrix}-\bar{x}\right),$$

从而, $\lim_{t\to\infty}(\hat{x}(t)-x(t))=0$

➥ 基于降维状态观测器的输出动态反馈律为

$$u=K\hat{x}+v=KT\begin{bmatrix} y \\ \omega+Gy \end{bmatrix}+v. \tag{30}$$

注: 类似前面的推导, 同样有闭环系统的特征值满足特征值分离定理, 且闭环传递函数即为系统(2)直接状态反馈$u=Kx+v$的闭环传递函数

1. 6.3 降维状态观测器
   - 6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$时的降维观测器
   - 6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
   - 6.3.3 C行满秩时的降维观测器
   - 6.3.4 C行降秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 设$rankC = m < q$. 对C作满秩分解,

$$C = EF, \tag{31}$$

其中E, F分别为$q \times m, m \times n$ 的满秩实常阵, 即

$$rankC = rankE = rankF = m. \tag{32}$$

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 设$rankC = m < q$. 对C作满秩分解,

$$C = EF, \tag{31}$$

其中E, F分别为$q \times m, m \times n$ 的满秩实常阵, 即

$$rankC = rankE = rankF = m. \tag{32}$$

- 由$y = Cx = EFx$ 可得

$$(E^T E)^{-1} E^T y = Fx. \tag{33}$$

记

$$\tilde{y} = (E^T E)^{-1} E^T y, \tag{34}$$

则系统(2)可写为:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ \tilde{y} &= Fx \end{aligned} \tag{35}$$

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 若(A, F)可检测(能观),则(35)的降维观测器设计即为第二种情形(C行满秩时)的降维观测器设计

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 若(A, F)可检测(能观),则(35)的降维观测器设计即为第二种情形(C行满秩时)的降维观测器设计

? 上述变换能否保证(A, F)的可检测(能观)性呢? 我们有如下结论

引理

引理6.4 矩阵对(A, F)能观(可检测)当且仅当矩阵对(A, C)能观(可检测).

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 若(A,F)可检测(能观),则(35)的降维观测器设计即为第二种情形(C行满秩时)的降维观测器设计

? 上述变换能否保证(A,F)的可检测(能观)性呢? 我们有如下结论

引理

引理6.4 矩阵对(A,F)能观(可检测)当且仅当矩阵对(A,C)能观(可检测).

证明: 由

$$\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI-A \\ EF \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI-A \\ F \end{bmatrix}$$

可得

$$rank\begin{bmatrix} sI-A \\ C \end{bmatrix} \le rank\begin{bmatrix} sI-A \\ F \end{bmatrix}$$

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C = [I_q \quad 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 反过来，又由

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A \\ (E^T E)^{-1}(E^T E)F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & \\ & (E^T E)^{-1} E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A \\ EF \end{bmatrix}$$

推得:

$$rank \begin{bmatrix} sI - A \\ F \end{bmatrix} \leq rank \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C = [I_q \ \ 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 反过来, 又由

$$\begin{bmatrix} sI - A \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sI - A \\ (E^T E)^{-1}(E^T E)F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & \\ & (E^T E)^{-1}E^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A \\ EF \end{bmatrix}$$

推得:

$$rank \begin{bmatrix} sI - A \\ F \end{bmatrix} \le rank \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}$$

➥ 从而有:

$$rank \begin{bmatrix} sI - A \\ F \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix}, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

故根据PBH判据, 可知引理结论成立. 证毕 ■

第6章

6.3 降维状态观测器

6.3.1 $C = [I_q \ \ 0]$ 时的降维观测器

6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性

6.3.3 C行满秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

下面设计系统(35)即$\dot{x} = Ax + Bu, \tilde{y} = Fx$的降维状态观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

下面设计系统(35)即$\dot{x} = Ax + Bu, \tilde{y} = Fx$的降维状态观测器

- 引入非奇异线性变换

$$x = T\bar{x},\ T^{-1} = \begin{bmatrix} F \\ N \end{bmatrix} \tag{36}$$

则有

$$\begin{aligned} \bar{F} &= FT = \begin{bmatrix} I_m & 0 \end{bmatrix} \\ \bar{A} &= T^{-1}AT = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ \bar{B} &= T^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ \bar{x} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{37}$$

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C=[I_q\ \ 0]$时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 系统$(\bar{A},\bar{B},\bar{F})$的降维状态观测器为:

$$\dot{\omega}=(A_{22}-GA_{12})\omega+[(A_{22}-GA_{12})G+(A_{21}-GA_{11})]\tilde{y}+(B_2-GB_1)u, \tag{38}$$

其中, G使得$A_{22}-GA_{12}$的特征值均具有负实部

- 且有

$$\lim_{t\to\infty}\left(\begin{bmatrix}\tilde{y}\\ \omega+G\tilde{y}\end{bmatrix}-\bar{x}\right)=0.$$

- 将$\tilde{y}$代入(38), 则得系统(2)在C降秩时的降维状态观测器

$$\begin{aligned}\dot{\omega}=&(A_{22}-GA_{12})\omega+[(A_{22}-GA_{12})G+(A_{21}-GA_{11})](E^TE)^{-1}E^Ty\\&+(B_2-GB_1)u.\end{aligned} \tag{39}$$

6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 令估计状态为:

$$\hat{x} = T\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \omega + G\tilde{y} \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} (E^TE)^{-1}E^Ty \\ \omega + G(E^TE)^{-1}E^Ty \end{bmatrix}, \qquad (40)$$

显然, 有

$$\lim_{t\to\infty}(\hat{x}(t) - x(t)) = \lim_{t\to\infty} T\left(\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \omega + G\tilde{y} \end{bmatrix} - \bar{x}\right) = 0$$

即, $\hat{x}$渐近逼近原系统状态x

- 考虑系统(2), 在$rankC = m < q$ 时的基于降维状态观测器的输出动态反馈. 令输出动态反馈律为

$$u = K\hat{x} + v = KT\begin{bmatrix} (E^TE)^{-1}E^Ty \\ \omega + G(E^TE)^{-1}E^Ty \end{bmatrix} + v. \qquad (41)$$

第6章
6.3 降维状态观测器
6.3.1 $C = [I_q \ \ 0]$ 时的降维观测器
6.3.2 基于降维状态观测器的输出动态反馈特性
6.3.3 C行满秩时的降维观测器
6.3.4 C行降秩时的降维观测器

- 令估计状态为:

$$\hat{x} = T\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \omega + G\tilde{y} \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} (E^TE)^{-1}E^Ty \\ \omega + G(E^TE)^{-1}E^Ty \end{bmatrix}, \qquad (40)$$

显然, 有

$$\lim_{t\to\infty}(\hat{x}(t) - x(t)) = \lim_{t\to\infty} T\left(\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \omega + G\tilde{y} \end{bmatrix} - \bar{x}\right) = 0$$

即, $\hat{x}$渐近逼近原系统状态x

- 考虑系统(2), 在$rankC = m < q$时的基于降维状态观测器的输出动态反馈. 令输出动态反馈律为

$$u = K\hat{x} + v = KT\begin{bmatrix} (E^TE)^{-1}E^Ty \\ \omega + G(E^TE)^{-1}E^Ty \end{bmatrix} + v. \qquad (41)$$

注 类似于前面的推导, 即有闭环系统的特征值满足特征值分离原理, 闭环系统传递函数即为原系统直接状态反馈的闭环传递函数

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 132–142