第4章　线性定常系统的能观性

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 4.1 能观性定义
   - 4.1.2 问题的提出
   - 4.1.2 能观性定义
   - 4.1.3 不能观子空间与能观子空间

- 在线性定常系统的定性分析中，除了第2章讨论的能控性外，还有就是系统的能观性分析，它是系统的一个基本结构属性
- 本章将对线性定常系统的能观性定义，能观性判据，规范型，结构分解，及其与能控性的关系进行讨论

1 4.1 能观性定义

- 4.1.2 问题的提出
- 4.1.2 能观性定义
- 4.1.3 不能观子空间与能观子空间

1. 4.1 能观性定义
   - 4.1.2 问题的提出
   - 4.1.2 能观性定义
   - 4.1.3 不能观子空间与能观子空间

4.1.2 问题的提出

- 给出了系统的状态空间描述后，系统的运动特性在输入给定的条件下，完全取决于系统的初始状态
- 而状态变量是系统的一个内部变量

➥ 能否通过系统“输入，输出”这一对外部变量来确定系统的初始状态呢？

——这就是系统的能观性所研究的内容

- 给出了系统的状态空间描述后，系统的运动特性在输入给定的条件下，完全取决于系统的初始状态
- 而状态变量是系统的一个内部变量

➥ 能否通过系统“输入，输出”这一对外部变量来确定系统的初始状态呢？

——这就是系统的能观性所研究的内容

- 直观上讲，如果系统内部所有的状态变量的任意运动形式均可由输出完全的反映出来，则称系统为完全能观的。否则，就称系统为不完全能观的或不能观的

例4.1.1 给定系统的状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u,$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

4.1.2 问题的提出

例4.1.1 给定系统的状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

- 直观上看，输出y只能反映状态变量x_2，不能反映x_1，故系统是不完全能观测的

例4.1.1 给定系统的状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

- 直观上看，输出y只能反映状态变量x_2，不能反映x_1，故系统是不完全能观测的

例4.1.1′ 给定系统的状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

4.1.2 问题的提出

例4.1.1 给定系统的状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

- 直观上看，输出y只能反映状态变量x_2，不能反映x_1，故系统是不完全能观测的

例4.1.1′ 给定系统的状态空间描述为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}u,$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

- 直观上看，输出y只能反映状态变量x_2，不能反映x_1，故系统是不完全能观测的

4.1.2 问题的提出

例4.1.2 如图4.1所示的电路, 系统的状态变量为电容端电压x, 输入为电压源$u(t)$, 输出为电压y.

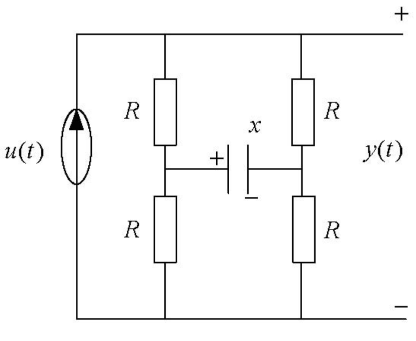

图4.1

例4.1.2 如图4.1所示的电路，系统的状态变量为电容端电压x，输入为电压源$u(t)$，输出为电压y.

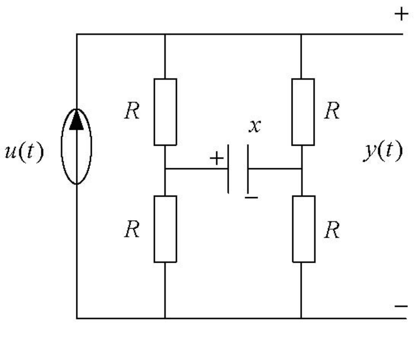

图4.1

- 若$u(t)=0$，则不论电容的初始端电压$x(t_0)=x_0$为多少，对所有的$t \geqslant t_0$，恒有$y(t)=0$

➥ 即$x(t)$不能由$y(t)$反映. 此电路是状态不能观测的.

1. 4.1 能观性定义
   - 4.1.2 问题的提出
   - 4.1.2 能观性定义
   - 4.1.3 不能观子空间与能观子空间

4.1.2 能观性定义

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \ x(t_0) = x_0, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{1}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, y为q维输出向量, A, B, C, D 分别为$n \times n, n \times p, q \times n, q \times p$阶实常阵.

4.1.2 能观性定义

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu,\ x(t_0) = x_0, \\ y &= Cx + Du, \end{aligned} \tag{1}$$

其中, x为n维状态向量, u为p维控制向量, y为q维输出向量, A, B, C, D 分别为$n \times n, n \times p, q \times n, q \times p$阶实常阵.

- 则由第1章知, 系统(1) 的状态方程的解得表达式为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \tag{2}$$

将(2) 代入(1), 得输出响应为:

$$y(t) = C\left[e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau\right] + Du(t). \tag{3}$$

4.1.2 能观性定义

- 在研究能观性问题时，输出y和输入u都假定为已知，只有初始状态x_0是未知的，故定义

$$\tilde{y}(t) = y(t) - C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau - Du(t), \tag{4}$$

则由上两式(3)和(4)，可得

$$\tilde{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0). \tag{5}$$

4.1.2 能观性定义

- 在研究能观性问题时，输出y和输入u都假定为已知，只有初始状态x_0是未知的，故定义

$$\tilde{y}(t) = y(t) - C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau - Du(t), \tag{4}$$

则由上两式(3)和(4)，可得

$$\tilde{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0). \tag{5}$$

- 这表明，所谓能观性即是研究x_0是可由$\tilde{y}$唯一确定的特性

4.1.2 能观性定义

- 在研究能观性问题时，输出y和输入u都假定为已知，只有初始状态x_0是未知的，故定义

$$\tilde{y}(t) = y(t) - C\int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau - Du(t), \tag{4}$$

则由上两式(3)和(4)，可得

$$\tilde{y}(t) = Ce^{A(t-t_0)}x(t_0). \tag{5}$$

- 这表明，所谓能观性即是研究x_0是可由$\tilde{y}$唯一确定的特性
- 又由(5)可看出，$\tilde{y}$即如下零输入系统的输出：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax,\ x(t_0) = x_0, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{6}$$

➥ 因此，研究由$\tilde{y}$唯一确定x_0的问题，即成为研究由(6)的输出y唯一确定x_0的问题

- 下面由(6)出发，给出系统能观性的有关定义

定义

定义4.1 对于系统(6), 若给定非零初始状态x_0, 任意给定有限时刻$T > t_0$, 使得自x_0出发的系统轨线$x(t)$在$[t_0\ T]$上的输出恒为0, 则称x_0为不能观状态.

4.1.2 能观性定义

定义

定义4.1 对于系统(6), 若给定非零初始状态x_0, 任意给定有限时刻$T > t_0$, 使得自x_0出发的系统轨线$x(t)$在$[t_0\ T]$上的输出恒为0, 则称x_0为不能观状态.

定义

定义4.2 对于系统(6), 若状态空间中的所有非零状态都不是不能观状态, 则称系统(6)(或(A, C)) 是(完全)能观的.

4.1.2 能观性定义

定义

定义4.1 对于系统(6), 若给定非零初始状态x_0, 任意给定有限时刻$T > t_0$, 使得自x_0出发的系统轨线$x(t)$在$[t_0\ T]$上的输出恒为0, 则称x_0为不能观状态.

定义

定义4.2 对于系统(6), 若状态空间中的所有非零状态都不是不能观状态, 则称系统(6)(或(A, C)) 是(完全)能观的.

定义

定义4.3 对于系统(6), 若状态空间中存在一个或一些非零状态是不能观的, 则称系统(6)(或(A, C)) 是不完全能观的.

1. 4.1 能观性定义
   - 4.1.2 问题的提出
   - 4.1.2 能观性定义
   - 4.1.3 不能观子空间与能观子空间

4.1.3 不能观子空间与能观子空间

由定义4.1, 可知

- 若x_0为不能观状态, 则有

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 \equiv 0, t \in [t_0, T], \tag{7}$$

- 若x_1为不能观状态, 则有

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_1 \equiv 0, t \in [t_0, T]. \tag{8}$$

4.1.3 不能观子空间与能观子空间

由定义4.1, 可知

- 若x_0为不能观状态, 则有

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 \equiv 0, t \in [t_0, T], \tag{7}$$

- 若x_1为不能观状态, 则有

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_1 \equiv 0, t \in [t_0, T]. \tag{8}$$

➥ 因而, 有

$$\begin{aligned} Ce^{A(t-t_0)}(x_0 + x_1) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + Ce^{A(t-t_0)}x_1 \equiv 0, \\ Ce^{A(t-t_0)}kx_0 = kCe^{A(t-t_0)}x_0 \equiv 0, t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{9}$$

4.1.3 不能观子空间与能观子空间

由定义4.1, 可知

- 若x_0为不能观状态, 则有

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 \equiv 0, t \in [t_0, T], \tag{7}$$

- 若x_1为不能观状态, 则有

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_1 \equiv 0, t \in [t_0, T]. \tag{8}$$

➥ 因而, 有

$$\begin{aligned} Ce^{A(t-t_0)}(x_0 + x_1) &= Ce^{A(t-t_0)}x_0 + Ce^{A(t-t_0)}x_1 \equiv 0, \\ Ce^{A(t-t_0)}kx_0 &= kCe^{A(t-t_0)}x_0 \equiv 0, t \in [t_0, T]. \end{aligned} \tag{9}$$

- 由(9)可以看出,
  - 系统(6)的不能观状态再添上零向量构成$\mathbb{R}^n$的子空间, 称为不能观子空间, 记为X_{NO}.
  - 不能观子空间的正交余空间称为能观子空间, 记为X_O.
  - 显然, $\mathbb{R}^n = X_{NO} \oplus X_O$.

4.1.3 不能观子空间与能观子空间

- 对于不能观子空间X_{NO}和能观子空间X_O, 有如下结论

- 对于不能观子空间X_{NO}和能观子空间X_O, 有如下结论

定理

定理4.1 系统(6)的不能观子空间X_{NO}等价于方程

$$Ce^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, \ \forall t \in [t_0, T] \tag{10}$$

的常矢量解空间.

- 对于不能观子空间X_{NO}和能观子空间X_O, 有如下结论

定理

定理4.1 系统(6)的不能观子空间X_{NO}等价于方程

$$Ce^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, \ \forall t \in [t_0, T] \tag{10}$$

的常矢量解空间.

证明: 显然, 定理4.1的结论是定义4.1的直接结果

定理

定理4.2 系统(6)的不能观子空间X_{NO}等价于方程

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \alpha = 0 \tag{11}$$

的解空间.

定理

定理4.2 系统(6)的不能观子空间X_{NO}等价于方程

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \alpha = 0 \tag{11}$$

的解空间.

定理4.2的结论等价于

1. 若$\alpha \in X_{NO}$, 则α使得式(11)成立
2. 若α使得式(11)成立, 则$\alpha \in X_{NO}$

➥ 为此, 考虑定理4.1可知, 若$\alpha \in X_{NO}$, 则α满足式(10), 即

$$Ce^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, \ \forall t \in [t_0, T]$$

证明　首先, 设$\alpha \in X_{NO}$, 由定理4.1, α为(10)的常解, 则有

$$Ce^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, t \in [t_0\ T].$$

4.1.3 不能观子空间与能观子空间

证明 首先, 设$\alpha \in X_{NO}$, 由定理4.1, α为(10)的常解, 则有

$$Ce^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, t \in [t_0\ T].$$

- 将上式求导直至$n-1$次, 得

$$CAe^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, t \in [t_0\ T],$$

$$\cdots\cdots$$

$$CA^{n-1}e^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, t \in [t_0\ T].$$

- 令$t = t_0$, 则可得到

$$C\alpha \equiv 0,\ CA\alpha \equiv 0,\ \cdots,\ CA^{n-1}\alpha \equiv 0,$$

4.1.3 不能观子空间与能观子空间

证明　首先, 设$\alpha \in X_{NO}$, 由定理4.1, α为(10)的常解, 则有

$$Ce^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, t \in [t_0\ T].$$

- 将上式求导直至$n-1$次, 得

$$CAe^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, t \in [t_0\ T],$$

$$\cdots\cdots$$

$$CA^{n-1}e^{A(t-t_0)}\alpha \equiv 0, t \in [t_0\ T].$$

- 令$t = t_0$, 则可得到

$$C\alpha \equiv 0,\ CA\alpha \equiv 0,\ \cdots,\ CA^{n-1}\alpha \equiv 0,$$

- 故有

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \cdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \alpha \equiv 0$$

➥ 所以, α是(11)的解.

反之 若α是(11)的解, 则有

$$CA^j\alpha = 0, j = 1, 2, \cdots, n-1$$

4.1.3 不能观子空间与能观子空间

反之 若α是(11)的解, 则有

$$CA^j\alpha = 0, j = 1, 2, \cdots, n-1$$

- 由凯莱-哈密顿定理, $A^n, A^{n+1}, \cdots$是$I, A, \cdots, A^{n-1}$的线性组合, 故

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j}{j!} A^j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j,$$

其中, $\alpha_j(t)$是t的多项式

反之 若α是(11)的解, 则有

$$CA^j\alpha = 0, j = 1, 2, \cdots, n-1$$

- 由凯莱-哈密顿定理, $A^n, A^{n+1}, \cdots$是$I, A, \cdots, A^{n-1}$的线性组合, 故

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j}{j!} A^j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j,$$

其中, $\alpha_j(t)$是t的多项式

- 从而

$$Ce^{A(t-t_0)}\alpha = C\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j\alpha = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) CA^j\alpha = 0,$$

即α是(10)的解, 故由定理4.1可知$\alpha \in X_{NO}$

反之 若α是(11)的解, 则有

$$CA^j\alpha = 0, j = 1, 2, \cdots, n-1$$

- 由凯莱-哈密顿定理, $A^n, A^{n+1}, \cdots$ 是$I, A, \cdots, A^{n-1}$的线性组合, 故

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^j}{j!} A^j = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j,$$

  其中, $\alpha_j(t)$是t的多项式

- 从而

$$Ce^{A(t-t_0)}\alpha = C\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) A^j\alpha = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) CA^j\alpha = 0,$$

  即α是(10)的解, 故由定理4.1可知$\alpha \in X_{NO}$

➥ 综合上述证明, 定理4.2结论成立. ■

基于定理4.2, 我们还可进一步得如下定理4.3

基于定理4.2, 我们还可进一步得如下定理4.3

定理

定理4.3 系统(6)的能观子空间X_O满足

$$X_O = span\left[C^T \quad (CA)^T \quad \cdots \quad (CA^{n-1})^T\right] \tag{12}$$

基于定理4.2, 我们还可进一步得如下定理4.3

定理

定理4.3 系统(6)的能观子空间X_O满足

$$X_O = span\left[C^T \quad (CA)^T \quad \cdots \quad (CA^{n-1})^T\right] \tag{12}$$

证明 由定理4.2, 将方程(11)两端取转置得

$$\alpha^T\left[C^T \quad (CA)^T \quad \cdots \quad (CA^{n-1})^T\right] = 0,$$

基于定理4.2, 我们还可进一步得如下定理4.3

定理

定理4.3 系统(6)的能观子空间X_O满足

$$X_O = span\begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \cdots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix} \tag{12}$$

证明 由定理4.2, 将方程(11)两端取转置得

$$\alpha^T \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \cdots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix} = 0,$$

- 故$C^T, (CA)^T, \cdots, (CA^{n-1})^T$ 的各列与任一不能观状态正交, 所以

$$span\begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \cdots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix} \subseteq X_O. \tag{13}$$

- 因为

$$
\begin{aligned}
&\dim\left(span\left[C^T \quad (CA)^T \quad \cdots \quad (CA^{n-1})^T\right]\right)\\
&= rank\left[C^T \quad (CA)^T \quad \cdots \quad (CA^{n-1})^T\right]\\
&= rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- 因为

$$
\begin{aligned}
&\dim\left(span\begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \cdots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix}\right) \\
&= rank\begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \cdots & (CA^{n-1})^T \end{bmatrix} \\
&= rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- 又因为X_{NO}是(11)的解空间, 并利用矩阵解空间维数和零空间维数的关系, 可得

$$
\dim X_{NO} = n - rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}.
$$

- 而由$X_{NO} \oplus X_O = \mathbb{R}^n$得

$$\dim X_{NO} + \dim X_O = n,$$

故

$$\begin{aligned} \dim X_O &= n - \dim X_{NO} \\ &= rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \dim\left(span\left[C^T \quad (CA)^T \quad \cdots \quad (CA^{n-1})^T\right]\right). \end{aligned} \tag{14}$$

- 而由$X_{NO} \oplus X_O = \mathbb{R}^n$得

$$\dim X_{NO} + \dim X_O = n,$$

故

$$\begin{aligned}\dim X_O &= n - \dim X_{NO} \\ &= rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \dim \left(span \left[C^T \quad (CA)^T \quad \cdots \quad (CA^{n-1})^T \right] \right).\end{aligned} \tag{14}$$

➥ 由(13)和(14)得定理结论成立. ■

注1: 由定理4.2和定理4.3, 可以看到系统(6)的能观子空间X_O, 不能观子空间X_{NO}只与系统的结构参数A, C有关, 而与测量区间$[t_0, T]$无关, 故不妨可直接设$t_0 = 0$

4.1.3 不能观子空间与能观子空间

注1: 由定理4.2和定理4.3, 可以看到系统(6)的能观子空间X_O, 不能观子空间X_{NO}只与系统的结构参数A, C有关, 而与测量区间$[t_0, T]$无关, 故不妨可直接设$t_0 = 0$

4.1.3 不能观子空间与能观子空间

注1: 由定理4.2和定理4.3, 可以看到系统(6)的能观子空间X_O, 不能观子空间X_{NO}只与系统的结构参数A, C有关, 而与测量区间$[t_0, T]$无关, 故不妨可直接设$t_0 = 0$

注2: 定理4.2说明系统(6)的不能观子空间即为$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$的核空间, 即

$$X_{NO} = \ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

另外, 由定理4.2和4.3, 还可以得到如下结论.

推论

推论4.1 不能观子空间X_{NO}是A的不变子空间, 能观子空间X_O是A^T的不变子空间.

另外，由定理4.2和4.3，还可以得到如下结论.

推论

推论4.1 不能观子空间X_{NO}是A的不变子空间，能观子空间X_O是A^T的不变子空间.

证明 分别结合定理4.2和4.3的结论以及凯莱-哈密尔顿定理，易得. 自证

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 82–87