第1章　线性定常系统的状态空间描述及运动分析

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 1.3 输入输出描述导出状态空间描述
2. 1.4 由状态空间描述导出的传递函数矩阵
   - 1.4.1 传递函数矩阵$G(s)$的基于(A, B, C, D)表示的关系式
   - 1.4.2 $G(s)$的实用关系式
3. 1.5 线性定常系统在坐标变换下的特性

本节内容实为一类“实现问题” (详见第5章)

——SISO-LTI系统的实现问题

其他参考书：

[1] 郑大钟，线性系统理论，清华大学出版社，2005

考虑单输入—单输出线性定常系统

- 表征系统动态过程的输入—输出描述的时域形式为

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\ = {} & b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \end{aligned} \tag{1}$$

其中, $m \leqslant n$; $y^{(i)}$和$u^{(i)}$分别表示y和u的第i阶导数 返回5 返回7

- 等价的频域描述, 即传递函数描述为

$$g(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{2}$$

其中, $Y(s)$和$U(s)$分别为$y(t)$和$u(t)$的拉普拉斯变换

- 对于由式子(1)或(2)描述的系统, 可以引入状态变量x, 将其写成状态空间描述形式

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu, \\ y = cx + du, \end{cases} \tag{3}$$

其中, x 为n维状态变量, A, b, c, d分别为$n\times n, n\times 1, 1\times n, 1\times 1$的常阵

- 将(1)或(2)写成(3)的形式, 称为实现问题(第5章专门介绍)

➥ 基本步骤:

1. 选取适当的状态变量组, 构成x
2. 确定对应的参数矩阵组A, b, c, d

注: 随状态变量组的选取不同, 参数矩阵组也相应不同, 即实现的不唯一性. 下面给出(1)或(2)的不同状态空间描述形式

(1) 当$m < n$时，有如下结论

定理

定理1.2 给定单输入—单输出线性定常系统的输入输出描述(1)或(2)，当$m < n$时，其对应的一个状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x. \end{cases} \tag{4}$$

返回(7) ▸ 定理1.5

证明 由时域关系式(1)来证明

证明 由时域关系式(1)来证明. 引入中间变量z, 并令

$$\begin{aligned} u &= z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1 z^{(1)} + a_0 z \\ y &= b_m z^{(m)} + \cdots + b_1 z^{(1)} + b_0 z. \end{aligned} \tag{5}$$

显然, u, y与(1)有相同的输入输出关系$Y(s)/U(s)$

证明 由时域关系式 (1) 来证明. 引入中间变量z, 并令

$$\begin{aligned} u &= z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1 z^{(1)} + a_0 z \\ y &= b_m z^{(m)} + \cdots + b_1 z^{(1)} + b_0 z. \end{aligned} \tag{5}$$

显然, u, y与(1)有相同的输入输出关系$Y(s)/U(s)$

- 若取$x_1 = z, x_2 = \dot{z}, \cdots, x_n = z^{(n-1)}$

证明 由时域关系式 (1) 来证明. 引入中间变量z, 并令

$$\begin{aligned} u &= z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1 z^{(1)} + a_0 z \\ y &= b_m z^{(m)} + \cdots + b_1 z^{(1)} + b_0 z. \end{aligned} \tag{5}$$

显然, u, y与(1)有相同的输入输出关系$Y(s)/U(s)$

- 若取$x_1 = z, x_2 = \dot{z}, \cdots, x_n = z^{(n-1)}$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ &\cdots\cdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n, \\ \dot{x}_n &= -a_{n-1}x_n - \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u, \\ y &= b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_{m+1}. \end{aligned} \tag{6}$$

证明 由时域关系式(1)来证明. 引入中间变量z, 并令

$$
\begin{aligned}
u &= z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \cdots + a_1 z^{(1)} + a_0 z \\
y &= b_m z^{(m)} + \cdots + b_1 z^{(1)} + b_0 z.
\end{aligned} \tag{5}
$$

显然, u, y与(1)有相同的输入输出关系$Y(s)/U(s)$

- 若取$x_1 = z, x_2 = \dot{z}, \cdots, x_n = z^{(n-1)}$, 则有

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= x_3, \\
&\cdots\cdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n, \\
\dot{x}_n &= -a_{n-1}x_n - \cdots - a_1 x_2 - a_0 x_1 + u, \\
y &= b_0 x_1 + b_1 x_2 + \cdots + b_m x_{m+1}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

- 再取$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$, 即有(4)成立. 证毕 ■

(2) 当$m=n$时，式(1)或(2)的状态空间描述求法如下：

(2) 当$m=n$时, 式(1)或(2)的状态空间描述求法如下:

- 先求极限

$$\lim_{s\to\infty} g(s)=d, \tag{7}$$

- 然后, 令

$$g_1(s)=g(s)-d, \tag{8}$$

➥ 则$g_1(s)$为严格真, 可直接按(4)的形式写出A, b, c, 即获得了A, b, c, d

(3) 当$m=0$时

(3) 当$m=0$时, 此输入输出关系为

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_0u \tag{9}$$

(3) 当$m=0$时, 此输入输出关系为

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y^{(1)}+a_0y=b_0u \tag{9}$$

- 令

$$x_1=y, x_2=y^{(1)},\cdots,x_n=y^{(n-1)}, \tag{10}$$

➥ 则由(9)推得

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1&=x_2,\\
\dot{x}_2&=x_3,\\
&\cdots\cdots\\
\dot{x}_{n-1}&=x_n,\\
\dot{x}_n&=y^{(n)}=-a_{n-1}y^{(n-1)}-\cdots-a_1y^{(1)}-a_0y+b_0u,\\
y&=x_1
\end{aligned} \tag{11}$$

- 进一步，记$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$, 从而(9)有状态空间描述形式

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x. \end{cases} \tag{12}$$

1.4 由状态空间描述导出的传递函数矩阵

- 对于多输入—多输出线性定常系统，传递函数矩阵是表征系统输入输出特性的最基本的形式
- 本小节从系统的状态空间描述出发，来导出系统的传递函数矩阵，也就是从另一个角度，来揭示状态空间描述和输入输出之间的关系

定理

定理1.3 对应于状态空间描述

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{13}$$

的传递函数矩阵为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{14}$$

定理

定理1.3 对应于状态空间描述

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu, \quad x(0) = 0, \\ y &= Cx + Du\end{aligned} \tag{13}$$

的传递函数矩阵为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{14}$$

并且，当$D \neq 0$时，$G(s)$为真的，$D = 0$时，$G(s)$为严格真的，且有

$$\lim_{s\to\infty} G(s) = D. \tag{15}$$

返回(21)

证明 对(13)作拉普拉斯变换, 可导出

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s), \\ Y(s) = CX(s) + DU(s). \end{cases} \tag{16}$$

证明 对(13)作拉普拉斯变换, 可导出

$$\begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s), \\ Y(s) = CX(s) + DU(s). \end{cases} \tag{16}$$

- 由(16)的第一式又得到

$$(sI - A)X(s) = BU(s). \tag{17}$$

- 且考虑到$(sI-A)$作为多项式矩阵必是非奇异的, 因此(17)可以改写成

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s). \tag{18}$$

- 将(18)代入到(16)的第二式, 即得到

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \tag{19}$$

从而可以导出(14)

- 再考虑到

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)} \tag{20}$$

其中，$adj(sI-A)$表示特征矩阵$(sI-A)$的伴随矩阵，其每个元多项式的次数(至高为$n-1$)均小于$det(sI-A)$的次数(为n)

➥ 所以，必有

$$\lim_{s\to\infty}(sI-A)^{-1}=0 \tag{21}$$

- 于是由(21), (14)即可得出 (15)
- 进一步，易知
  - 当$D\neq 0$时，$G(\infty)$为非零常阵，故有(14)给出的$G(s)$是真的
  - 当$D=0$时，$G(\infty)$为零矩阵，故相应的$G(s)$为严格真的

定理得证 ■

- 由(14)给出的关系式建立了传递函数矩阵$G(s)$和状态空间描述的系数矩阵之间的关系，它在理论分析上是很重要的，但从计算的角度而言，却不是很方便

- 下面我们给出由$\{A, B, C\}$计算$G(s)$的两个实用算式

定理

定理1.4 给定状态空间描述的系数矩阵$\{A, B, C\}$, 求出

$$\alpha(s) = det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0, \tag{22}$$

$$\begin{cases} E_{n-1} = CB, \\ E_{n-2} = CAB + a_{n-1}CB, \\ \qquad \cdots\cdots \\ E_1 = CA^{n-2}B + a_{n-1}CA^{n-3}B + \cdots + a_2 CB, \\ E_0 = CA^{n-1}B + a_{n-1}CA^{n-2}B + \cdots + a_1 CB, \end{cases} \tag{23}$$

则相应的传递函数矩阵$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$可表示为 返回(28)

$$G(s) = \frac{1}{\alpha(s)}(E_{n-1}s^{n-1} + E_{n-2}s^{n-2} + \cdots + E_1 s^1 + E_0). \tag{24}$$

证明 首先, 考虑$(sI-A)^{-1}$的关系式. 记$P=(sI-A)^{-1}$

证明 首先, 考虑$(sI-A)^{-1}$的关系式. 记$P=(sI-A)^{-1}$

➥ 则注意到, $(sI-A)P=I$, 可得

$$
\begin{aligned}
&sP = AP + I,\\
&\Downarrow\\
&s^2P = sAP + sI = A^2P + A + sI,\\
&\Downarrow\\
&\cdots\cdots\\
&\Downarrow\\
&s^lP = A^lP + A^{l-1} + A^{l-2}s + \cdots + As^{l-2} + s^{l-1}I,\\
&\Downarrow\\
&\cdots\cdots\\
&\Downarrow\\
&s^nP = A^nP + A^{n-1} + A^{n-2}s + \cdots + As^{n-2} + s^{n-1}I.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

- 另外由凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理知

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I = 0, \tag{26}$$

- 则由(22), (25)可得

$$\begin{aligned}
\alpha(s)P = & \underbrace{A^n P + A^{n-1} + A^{n-2}s + \cdots + As^{n-2} + s^{n-1}I}_{s^n P} \\
& + \underbrace{a_{n-1}(A^{n-1}P + A^{n-2} + A^{n-3}s + \cdots + s^{n-2}I)}_{a_{n-1}s^{n-1}P} \\
& + \cdots + \underbrace{a_2(A^2 P + A + sI)}_{a_2 s^2 P} + \underbrace{a_1(AP + I)}_{a_1 sP} + a_0 P \\
= & \underbrace{(A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_2 A^2 + a_1 A + a_0 I)}_{=0} P \\
& + (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 I) \\
& + (A^{n-2} + a_{n-1}A^{n-3} + \cdots + a_2 I)s \\
& + \cdots + (A + a_{n-1}I)s^{n-2} + Is^{n-1},
\end{aligned} \tag{27}$$

1.4.2 $G(s)$的实用关系式

- 再由(26)即可得

$$
\begin{aligned}
P &= (sI - A)^{-1} \\
&= \frac{1}{\alpha(s)}\Big[(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_2 A + a_1 I) \\
&\quad + (A^{n-2} + a_{n-1}A^{n-3} + \cdots + a_2 I)s + \cdots \\
&\quad + (A + a_{n-1}I)s^{n-2} + Is^{n-1}\Big].
\end{aligned}
\tag{28}
$$

- 再将(28)代入

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

即得 (24). 结论得证 ■

1.4.2 $G(s)$的实用关系式

- 另外, 根据式(28), 可知$(sI-A)^{-1}$还可简记为

$$\begin{aligned}(sI-A)^{-1} &= \frac{1}{\alpha(s)}\sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{i=j+1}^{n} a_i A^{i-j-1} \\ &= \frac{1}{\alpha(s)}\sum_{j=0}^{n-1} A^j \sum_{i=j+1}^{n} a_i s^{i-j-1}, a_n = 1,\end{aligned} \tag{29}$$

➥ 故传递函数矩阵$G(s)$还可以表示为

$$\begin{aligned}G(s) &= C\frac{\sum_{j=0}^{n-1} s^j \sum_{i=j+1}^{n} a_i A^{i-j-1}}{\alpha(s)}B \\ &= C\frac{\sum_{j=0}^{n-1} A^j \sum_{i=j+1}^{n} a_i s^{i-j-1}}{\alpha(s)}B.\end{aligned} \tag{30}$$

推论

推论1.1 若A的最小多项式为

$$\varphi(s) = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + \cdots + a_0,\ l \leqslant n, \tag{31}$$

推论

推论1.1 若A的最小多项式为

$$\varphi(s) = s^l + a_{l-1}s^{l-1} + \cdots + a_0,\ l \leqslant n, \tag{31}$$

则系统(A, B, C)的传递函数矩阵可表示为

$$\begin{aligned} G(s) =& C\frac{\sum_{j=0}^{l-1} s^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i A^{i-j-1}}{\varphi(s)} B \\ =& C\frac{\sum_{j=0}^{l-1} A^j \sum_{i=j+1}^{l} a_i s^{i-j-1}}{\varphi(s)} B, \quad a_l = 1. \end{aligned} \tag{32}$$

1.4.2 $G(s)$的实用关系式

推论

推论1.1 若A的最小多项式为

$$\varphi(s)=s^l+a_{l-1}s^{l-1}+\cdots+a_0,\ l\leqslant n, \tag{31}$$

则系统(A,B,C)的传递函数矩阵可表示为

$$\begin{aligned}G(s)=&C\frac{\sum_{j=0}^{l-1}s^j\sum_{i=j+1}^{l}a_iA^{i-j-1}}{\varphi(s)}B\\=&C\frac{\sum_{j=0}^{l-1}A^j\sum_{i=j+1}^{l}a_is^{i-j-1}}{\varphi(s)}B,\quad a_l=1.\end{aligned} \tag{32}$$

- 类似于单输入—单输出传递函数零点和极点的定义，对于多输入-多输出系统的传递函数$G(s)$,
  - 若传递函数(32) 是不可简约(既约)的，则$\varphi(s)=0$的根称为传递函数$G(s)$的极点，$G(s)=0$的s值称为传递函数$G(s)$的零点

1.5 线性定常系统在坐标变换下的特性

- 根据 定理1.2，坐标变换实质上就是一种线性非奇异变换，考察系统在坐标变换下的特性，归结为研究其在非奇异变换下的基本属性

- 根据 定理1.2, 坐标变换实质上就是一种线性非奇异变换, 考察系统在坐标变换下的特性, 归结为研究其在非奇异变换下的基本属性

定理

定理1.5 给定线性定常系统的状态空间描述为

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{cases} \tag{33}$$

引入变换$\bar{x} = Px$, P为非奇异, 并令变换后的状态空间描述为

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u, \end{cases} \tag{34}$$

- 根据定理1.2，坐标变换实质上就是一种线性非奇异变换，考察系统在坐标变换下的特性，归结为研究其在非奇异变换下的基本属性

定理

定理1.5 给定线性定常系统的状态空间描述为

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du. \end{cases} \tag{33}$$

引入变换$\bar{x} = Px$, P为非奇异，并令变换后的状态空间描述为

$$\bar{\Sigma} : \begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \\ y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u, \end{cases} \tag{34}$$

则必成立

$$\bar{A} = PAP^{-1},\ \bar{B} = PB,\ \bar{C} = CP^{-1},\ \bar{D} = D. \tag{35}$$

证明 由关系式:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{x}} &= P\dot{x} \\
&= P(Ax + Bu) \\
&= PAP^{-1}\bar{x} + PBu \\
&= \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u, \\
y &= Cx + Du \\
&= CP^{-1}\bar{x} + Du \\
&= \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u
\end{aligned} \tag{36}
$$

即可得结论成立 ■

定理

定理1.6 考虑由(33), (34)给出的状态空间描述Σ和$\bar{\Sigma}$, 两者具有相同的特征值, 也即成立

$$\lambda_i(A) = \lambda_i(\bar{A}), i = 1, 2, \cdots, n. \tag{37}$$

定理

定理1.6 考虑由(33), (34)给出的状态空间描述Σ和$\bar{\Sigma}$, 两者具有相同的特征值, 也即成立

$$\lambda_i(A) = \lambda_i(\bar{A}), i = 1, 2, \cdots, n. \tag{37}$$

证明 由$\bar{A} = PAP^{-1}$, 就可导出

$$\begin{aligned} \det(\lambda_i I - \bar{A}) &= \det(\lambda_i I - PAP^{-1}) \\ &= \det P(\lambda_i I - A)P^{-1} \\ &= \det P \cdot \det P^{-1} \cdot \det(\lambda_i I - A) \\ &= \det(\lambda_i I - A). \end{aligned} \tag{38}$$

定理

定理1.6 考虑由(33), (34)给出的状态空间描述Σ和$\bar{\Sigma}$, 两者具有相同的特征值, 也即成立

$$\lambda_i(A) = \lambda_i(\bar{A}), i = 1, 2, \cdots, n. \tag{37}$$

证明 由$\bar{A} = PAP^{-1}$, 就可导出

$$\begin{aligned}
\det(\lambda_i I - \bar{A}) &= \det(\lambda_i I - PAP^{-1}) \\
&= \det P(\lambda_i I - A)P^{-1} \\
&= \det P \cdot \det P^{-1} \cdot \det(\lambda_i I - A) \\
&= \det(\lambda_i I - A).
\end{aligned} \tag{38}$$

这表明:

若λ_i为A的特征值, 则必为$\bar{A}$的特征值; 反之亦然

即, (37)成立. 定理结论得证 ∎

定理

定理1.7 线性定常系统的传递函数矩阵在坐标变换下保持不变

定理

定理1.7 线性定常系统的传递函数矩阵在坐标变换下保持不变

证明 令系统在不同坐标系下的传递函数矩阵分别为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \tag{39}$$

$$\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}, \tag{40}$$

且有

$$\bar{A} = PAP^{-1},\ \bar{B} = PB,\ \bar{C} = CP^{-1},\ \bar{D} = D \tag{41}$$

定理

定理1.7 线性定常系统的传递函数矩阵在坐标变换下保持不变

证明 令系统在不同坐标系下的传递函数矩阵分别为

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D, \tag{39}$$

$$\bar{G}(s) = \bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D}, \tag{40}$$

且有

$$\bar{A} = PAP^{-1},\ \bar{B} = PB,\ \bar{C} = CP^{-1},\ \bar{D} = D \tag{41}$$

➥ 即可导出

$$\begin{aligned}\bar{G}(s) &= CP^{-1}(sI - PAP^{-1})^{-1}PB + D\\ &= C[P^{-1}(sI - PAP^{-1})P]^{-1}B + D\\ &= C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)\end{aligned}$$

从而定理结论得证

下面，我们对上面导出的结论进行如下几点讨论：

下面，我们对上面导出的结论进行如下几点讨论：

1. 若两个状态空间描述之间满足(35) (定理1.5的结论)，则称它们是代数等价的，也即它们具有相同的一些代数特性
2. 定理1.5说明，同一系统采用不同的状态变量组所导出的两个状态空间描述之间必然是代数等价的
3. 定理1.6，定理1.7说明代数等价的线性定常系统有相同的特征值及传递函数
   - 由于坐标系的选择带有人为的性质，而系统的特性具有客观性，因此系统在坐标变换下的不变量和不变属性，反映了其固有的系统特性
   - 例如，特征值反映系统的稳定性，传递函数反映了系统的输入输出特性

致谢

- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 7–14