8.1 问题的描述与定义

8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

第8章　不确定线性系统的鲁棒二次稳定

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 8.1 问题的描述与定义
2. 8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

1. 8.1 问题的描述与定义
2. 8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

第8章

8.1 问题的描述与定义

8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

考虑不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(q(t))]x(t) + [B + \Delta B(q(t))]u(t), \qquad (1)$$

其中,

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统的状态和控制向量, A, B 分别为$n \times n$, $n \times m$ 的实常阵
- $\Delta A(\cdot)$, $\Delta B(\cdot)$ 是连续的实矩阵值函数, $q(t) \in \mathbb{R}^k$ 是一个不确定参数向量, 它可以是时变的, 也可以依赖系统状态, 它们反映了系统模型中的参数不确定性
- $q(t)$是Lebesgue可测的, 且$q(t) \in \Omega$ ($\mathbb{R}^k$ 中的一个紧集)

考虑不确定线性系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(q(t))]x(t) + [B + \Delta B(q(t))]u(t), \qquad (1)$$

其中,

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 分别为系统的状态和控制向量, A, B 分别为$n \times n$, $n \times m$ 的实常阵
- $\Delta A(\cdot)$, $\Delta B(\cdot)$ 是连续的实矩阵值函数, $q(t) \in \mathbb{R}^k$ 是一个不确定参数向量, 它可以是时变的, 也可以依赖系统状态, 它们反映了系统模型中的参数不确定性
- $q(t)$是Lebesgue可测的, 且$q(t) \in \Omega$ ($\mathbb{R}^k$ 中的一个紧集)

➥ 本章主要考虑不确定系统(1)的二次镇定问题

- 为此, 首先对不确定自治系统

$$\dot{x}(t) = [A + \Delta A(q(t))]x \qquad (2)$$

下面引入二次稳定的概念

第8章
8.1 问题的描述与定义
8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

定义

定义8.1 对系统(2),

- 若存在一个n阶正定对称矩阵P 和一个常数$\alpha > 0$, 使得对任意允许的不确定性$q(t)$,

$$L(x,t) = 2x^T P[A + \Delta A(q(t))]x \le -\alpha \|x\|^2 \tag{3}$$

对所有的$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$成立, 则称系统(2)为二次稳定的

定义

定义8.1 对系统(2),

- 若存在一个n阶正定对称矩阵P和一个常数$\alpha > 0$, 使得对任意允许的不确定性$q(t)$,

$$L(x,t) = 2x^T P[A + \Delta A(q(t))]x \leq -\alpha \|x\|^2 \tag{3}$$

对所有的$(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$成立, 则称系统(2)为二次稳定的

定义

定义8.2 对不确定系统(1),

- 若存在一个反馈控制律(可以是动态, 或静态反馈, 也可以是线性或非线性反馈), 使得所导出的闭环系统是二次稳定的, 则称系统(1)是二次能镇定的, 相应的控制律称为系统(1) 的一个二次稳定控制律
- 若存在线性状态反馈控制律$u = Kx$, 其中$K \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 使得闭环系统是二次稳定的, 则称系统(1)是可以通过线性状态反馈二次镇定的

第8章

8.1 问题的描述与定义

8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

注1: 根据上面的定义, 若系统(2)是二次稳定的, 则存在一个Lyapunov 函数, $V(t) = x^T P x$, 使得沿系统(2)的轨线, $V(t)$ 关于时间的导数恰好是$L(x, t)$

- 因此, 根据Lyapunov 稳定性理论知: 系统的平衡状态$x = 0$是大范围一致渐近稳定的

注2: 二次稳定性要求对所有允许的不确定参数, 系统存在一个统一的Lyapunov 函数

- 显然, 这样的要求是比较苛刻的, 由此导出的结果必然是比较保守的. 但此方法仍不失为处理时变不确定性的一种有效方法

注3: 系统的二次稳定性可推出系统在Lyapunov 意义下的稳定性, 但反之则不成立

- 对线性定常系统, 二次稳定性和Lyapunov 意义下的稳定性是等价的

8.1 问题的描述与定义

- 本章主要考虑范数有界, 且具有如下形式的不确定性

$$[\Delta A(t) \;\; \Delta B(t)] = DF(t)[E_1 \;\; E_2], \tag{4}$$

其中,

- D, E_1, E_2是具有适当维数的已知常矩阵, 它们反映了出现在系统模型中的不确定性结构
- $F(t) \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 是具有Lebesgue可测元的不确定矩阵, 且满足

$$F(t) \in \Omega = \{F(t) | F^T(t)F(t) \leq I\}, \tag{5}$$

I表示适当维数的单位矩阵

注: 对范数有界时变不确定性, 假设有(4)的结构形式, 并不失一般性

- 首先, 一个含有装置和不确定性$F(t)$线性关联(如图8.1)可以表示成(1)和(4)的形式
- 其次, 对一般的范数有界不确定性, 总可以选择适当的结构矩阵, 使其具有(4)的形式

- 事实上，若

$$\Delta\bar{A}(t) = \bar{D}_1 F_1(t)\bar{E}_1,\ \Delta\bar{B}(t) = \bar{D}_2 F_2(t)\bar{E}_2,\ F_1^T(t)F_1(t) \le I,\ F_2^T(t)F_2(t) \le I,$$

则可选取

$$F(t) = \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 \\ 0 & F_2(t) \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} \bar{D}_1 & \bar{D}_2 \end{bmatrix},\ E_1 = \begin{bmatrix} \bar{E}_1 \\ 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} \bar{E}_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

➥ 从而，不确定矩阵$\Delta A(t)$和$\Delta B(t)$可以表示成(4)的形式

- 另外，还有许多系统的不确定性可以按此方式表示

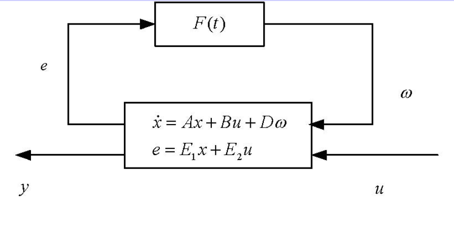

图8.1 不确定线性反馈关联

1 8.1 问题的描述与定义

2 8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

第8章

8.1 问题的描述与定义

8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

考虑不确定线性系统

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x, \tag{6}$$

其中, $x(t) \in \mathbb{R}^n$为状态向量, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为已知常阵, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为不确定部分, 关于t连续

- 假定ΔA满足

$$\Delta A = DF(t)E, \tag{7}$$

其中$D \in \mathbb{R}^{n\times i}$, $E \in \mathbb{R}^{j\times n}$是已知常阵, $F(t) \in \mathbb{R}^{i\times j}$是具有Lebesgue可测元的不确定矩阵, 且$F(t) \in \Omega$

定理

定理8.1 系统(6)是二次稳定的充分必要条件是存在正定矩阵$P > 0$使得Riccati不等式

$$A^T P + PA + PDD^T P + E^T E < 0 \tag{8}$$

成立.

第8章

8.1 问题的描述与定义

8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

为了证明定理8.1, 先给出几个有用的引理.

引理

引理8.1 对任意适当维数的矩阵X, Y, 有

$$X^TY + Y^TX \leq \epsilon X^TX + \epsilon^{-1}Y^TY, \quad \forall \epsilon > 0. \tag{9}$$

第8章

8.1 问题的描述与定义

8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

为了证明定理8.1, 先给出几个有用的引理.

引理

引理8.1 对任意适当维数的矩阵X, Y, 有

$$X^TY + Y^TX \leq \epsilon X^TX + \epsilon^{-1}Y^TY, \quad \forall \epsilon > 0. \tag{9}$$

引理

引理8.2 对任意给定的$\xi \in \mathbb{R}^n$, 存在$F_0(t) \in \Omega$, 使得

$$\begin{aligned} \max_{F(t)\in\Omega} \left(\xi^T PDF(t)E\xi\right)^2 &= \left(\xi^T PDF_0(t)E\xi\right)^2 \\ &= \xi^T PDD^T P\xi\xi^T E^T E\xi. \end{aligned} \tag{10}$$

证明: 令$v = D^T P\xi$, $\eta_1 = F(t)E\xi$, $\eta = E\xi$, 则

$$\left(\xi^T PDF(t)E\xi\right)^2 = \left(v^T\eta_1\right)^2. \tag{11}$$

- 根据Schwarz不等式, 对于任意给定$\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\left|v^T\eta_1\right| \le \sqrt{v^T v\eta_1^T\eta_1}, \tag{12}$$

所以

$$\begin{aligned}\left(v^T\eta_1\right)^2 &\le v^T v\eta^T\left(F^T(t)F(t)\right)\eta \\ &\le v^T v\eta^T\eta, \quad \forall F(t)\in\Omega.\end{aligned} \tag{13}$$

- 上式(13)即为

$$\left(\xi^T PDF(t)E\xi\right)^2 \le \xi^T PDD^T P\xi\xi^T E^T E\xi, \quad \forall F(t)\in\Omega \tag{14}$$

$$\Rightarrow \quad \max_{F(t)\in\Omega}(\xi^T PDF(t)E\xi)^2 \le \xi^T PDD^T P\xi\xi^T E^T E\xi. \tag{15}$$

第8章
8.1 问题的描述与定义
8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

- 令

$$F_0(t) = \frac{v\eta^T}{\|v\|\|\eta\|}, \tag{16}$$

其中$\|v\| = \sqrt{v^T v}$

- 显然

$$F_0^T(t)F_0(t) = \frac{\eta v^T v \eta^T}{\|v\|^2\|\eta\|^2} = \frac{\eta\eta^T}{\|\eta\|^2} \le I,$$

且, 有

$$\begin{aligned}\left(\xi^T PDF_0(t)E\xi\right)^2 &= \frac{\left(v^T v\eta^T\eta\right)^2}{\|v\|^2\|\eta\|^2} \\ &= v^T v\eta^T\eta \\ &= \xi^T PDD^T P\xi\xi^T E^T E\xi.\end{aligned} \tag{17}$$

➥ 由(16), (17)引理可得证 ■

第8章
8.1 问题的描述与定义
8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

引理

引理8.3 设X, Y, Z为给定的n阶方阵，且$X \geq 0$, $Y < 0$, $Z \geq 0$. 若对任意非零向量$\xi \in \mathbb{R}^n$, 有

$$(\xi^T Y \xi)^2 > 4\xi^T X \xi \xi^T Z \xi, \tag{18}$$

则存在适当的标量$\lambda > 0$使得

$$\lambda^2 X + \lambda Y + Z < 0. \tag{19}$$

此引理证明参见文献

褚键, 俞立, 苏宏业. 鲁棒控制理论及应用. 杭州. 浙江大学出版社. 2000

定理8.1的证明

- 充分性. 已知存在$P > 0$, 使得Riccati不等式(8)成立
- 若令

$$Q = -(A^TP + PA + PDD^TP + E^TE) > 0$$

则由引理8.1, 有

$$\begin{aligned}
2x^TP[A + \Delta A(t)]x =& x^T\left[(A + \Delta A(t))^TP + P(A + \Delta A(t))\right]x \\
=& x^T\left(A^TP + PA\right)x + x^T\left[E^TF^T(t)D^TP + PDF(t)E\right]x \\
\le& x^T\left(A^TP + PA\right)x + x^T\left(E^TF^T(t)F(t)E + PDD^TP\right)x \\
\le& x^T\left(A^TP + PA + E^TE + PDD^TP\right)x \\
=& -x^TQx \\
\le& -\alpha\|x\|^2,
\end{aligned} \tag{20}$$

其中$\alpha > 0$为满足$\alpha \le \lambda_{min}(Q)$的任意正常数

➥ 故由定义8.1可知, 系统(6)是二次稳定的

第8章
8.1 问题的描述与定义
8.2 不确定线性系统的二次稳定条件

- 必要性. 设存在n阶正定阵$\bar{P} > 0$和常数$\alpha > 0$使得

$$2x^T\bar{P}[A + \Delta A(t)]x \leq -\alpha\|x\|^2, \forall F(t) \in \Omega$$

成立

- 则由

$$2x^T\bar{P}[A + \Delta A(t)]x = x^T\left[(A + \Delta A(t))^T\bar{P} + \bar{P}(A + \Delta A(t))\right]x \leq -\alpha\|x\|^2,$$

可得

$$x^T\left(A^T\bar{P} + \bar{P}A\right)x \leq -\alpha\|x\|^2 - 2x^T\bar{P}\Delta A(t)x < -2x^T\bar{P}DF(t)Ex, \quad \forall F(t) \in \Omega.$$

- 上式两边平方得

$$\left(x^T(A^T\bar{P} + \bar{P}A)x\right)^2 > 4\left(x^T\bar{P}DF(t)Ex\right)^2, \quad \forall F(t) \in \Omega$$
$$> 4\max_{F(t)\in\Omega}\left(x^T\bar{P}DF(t)Ex\right)^2. \tag{21}$$

- 根据引理8.2, 由上式(21)可得

$$\left(x^T(A^T\bar{P}+\bar{P}A)x\right)^2 > 4x^T\bar{P}DD^T\bar{P}xx^TE^TEx. \qquad (22)$$

- 令$Y=\bar{P}A+A^T\bar{P}$, $X=\bar{P}DD^T\bar{P}$, $Z=E^TE$, 则由假设, 显然当$\Delta A=0$时, 对任意$x\in\mathbb{R}^n$,

$$x^T\left(A^T\bar{P}+\bar{P}A\right)x\le -\alpha\|x\|^2$$

成立, 故有

$$Y=\bar{P}A+A^T\bar{P}<0. \qquad (23)$$

- 所以, 根据引理8.3, 存在$\lambda>0$, 使得

$$\lambda^2\bar{P}DD^T\bar{P}+\lambda A^T\bar{P}+\lambda\bar{P}A+E^TE<0. \qquad (24)$$

- 令$P=\lambda\bar{P}$, 则上式即为

$$A^TP+PA+PDD^TP+E^TE<0$$

必要性得证. ■

基于定理8.1,

- 将Riccati不等式(8)的两端分别左, 右乘P^{-1}, 并记$X = P^{-1} > 0$, 则可得

$$XA^T + AX + XE^TEX + DD^T < 0. \tag{25}$$

- 利用Schur补偿方法(定理A.17, pp. 189-190), 不等式(25) 等价于下面的线性矩阵不等式(LMI)

$$\begin{bmatrix} XA^T + AX & D & XE^T \\ D^T & -I_i & 0 \\ EX & 0 & -I_j \end{bmatrix} < 0. \tag{26}$$

➥ 于是, 对于系统(6)的二次稳定性, 由如下定理

定理

定理8.2 系统(6)是二次稳定的充分必要条件是存在正定矩阵$X > 0$使得LMI(26)成立.

致谢

- 教材:

    程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 167–171