第1章

第1.3节 补充知识

输入输出描述导出状态空间描述

——补充知识

第1.3节 思考题

问题：对于所考察的输入输出描述$(m \le n)$

$$\begin{aligned} & y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y \\ & = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

1. 状态变量组个数**为什么选择为**n?

   状态变量组个数**能否小于**n?

   状态变量组个数**能否大于**n?

2. 结论中给出的状态变量组选取方式，有什么好处？例如，定理1.2的状态变量组选取为：

$$\begin{cases} x_1 = z \\ x_2 = \dot{x}_1 \\ x_3 = \dot{x}_2 \\ \quad \cdots \\ x_n = \dot{x}_{n-1} \end{cases}$$

I. 由传递函数描述导出状态空间描述

由传递函数描述导出状态空间描述

给定SISO-LTI系统的传递函数描述为

$$g(s)=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

- 表$g(s)$为

$$\begin{aligned} g(s) &= b_n+\frac{(b_{n-1}-b_n a_{n-1})s^{n-1}+\cdots+(b_1-b_n a_1)s+(b_0-b_n a_0)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \\ &\triangleq b_n+\bar{g}(s) \end{aligned}$$

- 并假设
  1. $g(s)$极点即传递函数分母方程的根$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为**两两相异实数**
  2. $\bar{k}_i=\lim_{s\to\lambda_i}\bar{g}(s)(s-\lambda_i),\ \ i=1,2,\cdots,n$

➥ 若取状态变量组为

$$x_i=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\bar{k}_i U(s)}{s-\lambda_i}\right],\quad i=1,2,\cdots,n$$

➥ 则对应$g(s)$的一个状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\bar{k}_1\\ \bar{k}_2\\ \vdots\\ \bar{k}_n\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}x+b_n u$$

- 特别地，如果$b_n=0$，那么$g(s)$的一个状态空间描述为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}k_1\\ k_2\\ \vdots\\ k_n\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}x$$

其中，$k_i=\lim_{s\to\lambda_i} g(s)(s-\lambda_i)$，$i=1,2,\cdots,n$（此时，$g(s)=\bar{g}(s)$）

说明

1. 由状态变量组的选取方式

$$x_i = \mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\bar{k}_i U(s)}{s-\lambda_i}\right] \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_i = \lambda_i x_i + \bar{k}_i u, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{k}_1 \\ \bar{k}_2 \\ \vdots \\ \bar{k}_n \end{bmatrix} u$$

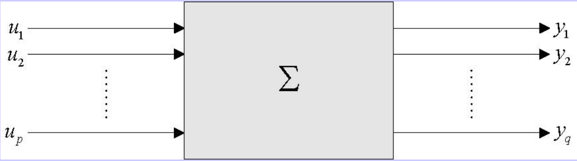
2. 由$\bar{k}_i$定义可知：$\bar{g}(s) = \dfrac{\bar{k}_1}{s-\lambda_1} + \dfrac{\bar{k}_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \dfrac{\bar{k}_n}{s-\lambda_n}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad y &= \mathscr{L}^{-1}\left[(\bar{g}(s) + b_n)\, U(s)\right] \\ &= \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\bar{k}_1 U(s)}{s-\lambda_1}\right]}_{x_1} + \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\bar{k}_2 U(s)}{s-\lambda_2}\right]}_{x_2} + \cdots + \underbrace{\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{\bar{k}_n U(s)}{s-\lambda_n}\right]}_{x_n} + b_n u \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} x + b_n u \end{aligned}$$

II. 由方块图描述导出状态空间描述

由方块图描述导出状态空间描述

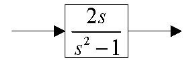
基于传递函数的方块图是SISO-LTI系统的一类应用广泛的描述

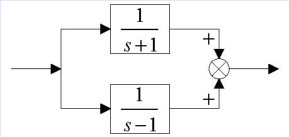


规范化方块图

- 称一个方块图为规范化方块图，当且仅当

  其各组成环节均为一阶惯性环节$k_i/(s+s_i)$和比例放大环节k_{0j}



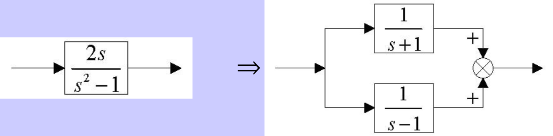


左：非规范化方块图；右：规范化方块图

由方块图描述导出状态空间描述

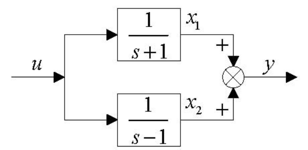
由方块图描述导出状态空间描述的方法和步骤

1) 化给定的方块图为规范化方块图

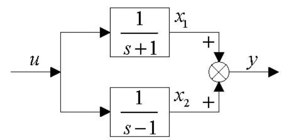


2) 对规范化方块图指定状态变量组

➥ 基本原则是当且仅当一阶惯性环节输出有资格取为状态变量



由方块图描述导出状态空间描述



3) 列写变量间关系方程

$$x_1 = \frac{1}{s+1}u, \quad x_2 = \frac{1}{s-1}u, \quad y = x_1 + x_2$$

4) 导出变换域状态变量方程和输出变量方程

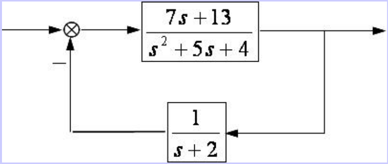
$$sx_1 = -x_1 + u, \quad sx_2 = x_2 + u, \quad y = x_1 + x_2$$

5) 导出状态空间描述

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

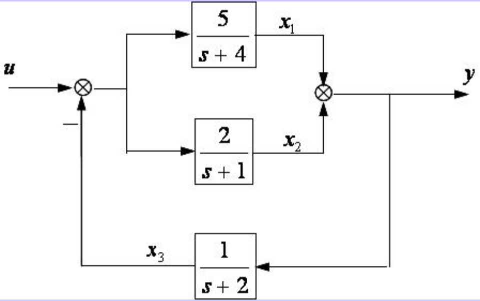
由方块图描述导出状态空间描述：例1

例1：设系统方块图如下，试列写其状态空间描述



易知 $$\frac{7s+13}{s^2+5s+4}=\frac{2}{s+1}+\frac{5}{s+4}$$

➥则上图等效为如下规范化图，并同时可指定状态变量组为$[x_1\ x_2\ x_3]^T$



由方块图描述导出状态空间描述：例1

指定状态变量组后，列写变量间的关系方程

$$\dot{x}_1 = -4x_1 + 5(u - x_3)$$
$$\dot{x}_2 = -x_2 + 2(u - x_3)$$
$$\dot{x}_3 = -2x_3 + y$$
$$y = x_1 + x_2$$

➥写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -5 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

由方块图描述导出状态空间描述：例2

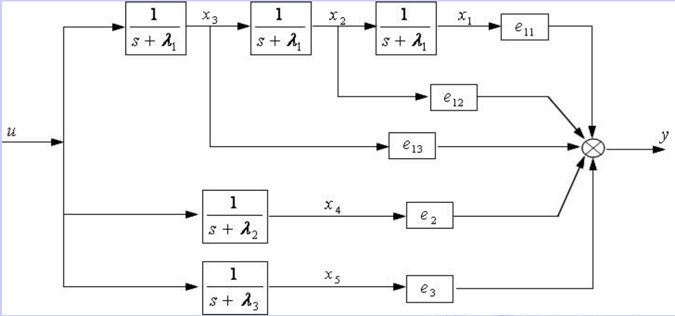
例2：设单输入单输出系统的传递函数为

$$g(s)=\frac{B(s)}{(s+\lambda_1)^3(s+\lambda_2)(s+\lambda_3)}$$

$$=\frac{e_{11}}{(s+\lambda_1)^3}+\frac{e_{12}}{(s+\lambda_1)^2}+\frac{e_{13}}{s+\lambda_1}+\frac{e_2}{s+\lambda_2}+\frac{e_3}{s+\lambda_3}$$

试列写其状态空间表达式

➥解1：可画出系统结构图如下



由方块图描述导出状态空间描述：例2

写出变量之间的关系为

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\lambda_1 x_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\lambda_1 x_2 + x_3 \\
\dot{x}_3 &= -\lambda_1 x_3 + u \\
\dot{x}_4 &= -\lambda_2 x_4 + u \\
\dot{x}_5 &= -\lambda_3 x_5 + u \\
y &= e_{11} x_1 + e_{12} x_2 + e_{13} x_3 + e_2 x_4 + e_3 x_5
\end{aligned}
$$

➡写成矩阵形式为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u
$$

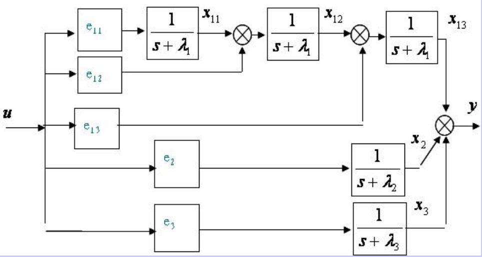
$$
y = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}
$$

由方块图描述导出状态空间描述：例2

第1章

第1.3节 补充知识

➥解2：也可画出系统结构图如下



➥可写出系统的动态方程为

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_{11} \\ \dot{x}_{12} \\ \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

注：由方块图描述导出状态空间描述，结果不唯一！但阶次不变

III. 线性定常系统的特征结构

线性时不变系统的特征结构

- 由特征值和特征向量所表征

参考书目：

- 北京大学数学系几何与代数教研室小组, 高等代数. 北京: 高等教育出版社, 1988
- 陈祖明等, 矩阵论引论. 北京: 北京航空航天大学出版社, 1998
- 史荣昌, 魏丰, 矩阵分析. 北京: 北京理工大学出版社, 2005.
- R. A. Horn and C. R. Johnson, Matrix Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.

特征多项式

对连续时间LTI系统$\dot{x} = Ax + Bu$，定义

$$特征矩阵 \triangleq (sI - A)$$

$$预解矩阵 \triangleq (sI - A)^{-1}$$

$$特征多项式 \triangleq \det(sI - A)$$

(1) 对A的特征多项式，表

$$\alpha(s) \triangleq \det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

其中，系数α_0，α_1，$\cdots$，α_{n-1}均为实常数

(2) A的特征方程式为：$\alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$

(3) 凯莱-哈密尔顿(Caley-Hamilton)定理：

$$\alpha(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

➥对$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$A^i (i \geq n)$可表为$\{I, A, \cdots, A^{n-1}\}$的线性组合形式

特征多项式

(4) 最小多项式

由系统的预解矩阵及特征矩阵的逆，可以导出

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\mathrm{adj}(sI - A)}{\alpha(s)} \overset{\text{消元}}{=} \frac{P(s)}{\phi(s)}$$

$\phi(s)$与$P(s)$的各个元多项式之间互质

- 则定义$\phi(s)$为系统矩阵A的最小多项式
- 最小多项式$\phi(s)$也满足凯莱-哈密尔顿定理，即$\phi(A) = 0$

(5) 系统矩阵的循环性

- 如果系统矩阵A的特征多项式$\alpha(s)$和最小多项式$\phi(s)$之间只存在常数类型的公因子k，即

$$\alpha(s) = k\phi(s)$$

则称系统矩阵A是循环的

特征多项式的计算

考察特征多项式：$\alpha(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$，则有

- 基于迹计算的特征多项式迭代算法：

$$
\begin{aligned}
&R_{n-1} = I \\
&\alpha_{n-1} = -\frac{trR_{n-1}A}{1} \\
&R_{n-2} = R_{n-1}A + \alpha_{n-1}I \\
&\alpha_{n-2} = -\frac{trR_{n-2}A}{2} \\
&R_{n-3} = R_{n-2}A + \alpha_{n-2}I \\
&\alpha_{n-3} = -\frac{trR_{n-3}A}{3} \\
&\quad\vdots \\
&R_0 = R_1A + \alpha_1 I \\
&\alpha_0 = -\frac{trR_0A}{n}
\end{aligned}
$$

特征值

考察连续时间LTI系统，若其状态方程为$\dot{x} = Ax + Bu$，则

$$\text{系统特征值} \triangleq \text{特征方程“}\det(sI - A) = 0\text{”的根}$$

特征值的属性

(1) 特征值的代数属性

系统特征值就是使特征矩阵$(sI - A)$降秩的所有s值

(2) 特征值集

对n维线性时不变系统，有且仅有n个特征值，特征值的全体构成系统的特征值集，即$\Lambda = \{\lambda \in \ell \mid \det(\lambda I - A) = 0\} = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$

(3) 特征值的形态

特征值的形态要么为实数，要么为共轭复数（复数特征值必以共轭复数对形式出现）

(4) 特征值类型

系统特征值可区分为“单特征值（特征方程的单根）”和“重特征值（特征方程的重根）”两种类型

(5) 特征值的代数重数

特征值集Λ中特征值λ_i的代数重数σ_i定义为

$$\lambda_i\text{的代数重数}\sigma_i =:\ \text{满足}\begin{cases}\det(sI - A) = (s-\lambda_i)^{\sigma_i}\beta_i(s) \\ \beta_i(\lambda_i) \neq 0\end{cases}\ \text{的正整数}\sigma_i$$

直观上，代数重数σ_i代表特征值集Λ中值为λ_i的特征值个数

(6) 特征值的几何重数

特征值集Λ中特征值λ_i的几何重数α_i定义为

$$\lambda_i\text{的代数重数}\alpha_i =:\ n - \operatorname{rank}(\lambda_i I - A)$$

由$\operatorname{rank}(\lambda_i I - A) = n - \alpha_i$，可知$\alpha_i$为$\lambda_i I - A$的右零空间维数

(7) 特征值重数和类型的关系

- 若$\lambda_i \in \Lambda$为单特征值，则其代数重数和几何重数之间必有：$\sigma_i = \alpha_i = 1$
- 若$\lambda_i \in \Lambda$为重特征值，则其代数重数和几何重数之间必有：$1 \leq \alpha_i \leq \sigma_i$

特征向量

考察n维线性LTI系统$\dot{x} = Ax + Bu$，若λ_i为A的特征值，则

- A的属于λ_i的**右特征向量** $\triangleq$ 满足"$\lambda_i v_i = Av_i$"的$n \times 1$非零向量v_i
- A的属于λ_i的**左特征向量** $\triangleq$ 满足"$\bar{v}_i^{\mathrm{T}} \lambda_i = \bar{v}_i^{\mathrm{T}} A$"的$1 \times n$非零向量$\bar{v}_i^{\mathrm{T}}$

➥ **一般地，"右特征向量"简称为"特征向量"**

特征向量的属性

i) 特征向量的几何特性

- $(\lambda_i I - A)v_i = 0 \quad \Rightarrow$ **右特征向量v_i = "λ_i的特征矩阵$(\lambda_i I - A)$右零空间"中的列向量**
- $\bar{v}_i^{\mathrm{T}}(\lambda_i I - A) = 0 \quad \Rightarrow$ **左特征向量$\bar{v}_i^{\mathrm{T}}$ = "λ_i的特征矩阵$(\lambda_i I - A)$左零空间"中的行向量**

ii) 特征向量的不唯一性

IV. 状态方程的约当规范形

- 约当规范形定义为“直接以特征值表征系统矩阵的一种状态方程规范形”
- 任意线性时不变系统的状态方程都可以通过线性非奇异变换化为约当规范形

特征值为两两互异的情形

考察n维LTI系统$\dot{x}=Ax+Bu$，表A的n个相异特征值为$\{\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n\}$，再任取$A$的$n$个$n\times 1$特征向量为$\{v_1,\ \cdots,\ v_n\}$，则有

结论 基于n个特征向量构造变换阵$P=[v_1,\ \cdots,\ v_n]$，则状态方程$\dot{x}=Ax+Bu$可通过线性非奇异变换$\bar{x}=P^{-1}x$化为约当规范形

$$\dot{\bar{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}}_{\bar{A}=P^{-1}AP\text{——对角规范形}}\bar{x}+\bar{B}u,\quad \bar{B}=P^{-1}B$$

证明 注意如下事实，易得该证明

$$A[v_1,v_2,\cdots,v_n]=[v_1,v_2,\cdots,v_n]\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

特征值为两两互异的情形

注释

- 对角规范性，其系统矩阵是以特征值为元素的一个对角矩阵
- 对角规范形的系统方程实际上是n个独立的状态变量方程，系统状态变量间耦合已被完全解除
- 设A由能控规范形形式给出，其n个特征值$\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$两两相异，并定义范德蒙(Vandermonde)矩阵P

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{array}\right] \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

  - P为矩阵A的特征向量矩阵
  - P可逆
  - P能使得$P^{-1}AP = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$

特征值为两两互异的情形

- 当出现复数特征值时，可以当作互异情况考虑，但$P, \bar{A}, \bar{B}$必包含共轭复数元

➥ 在系统分析与综合中，需作实数化处理（见参考书）

例: 试将下列状态方程化为约当规范形：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

解 由$|\lambda I - A| = 0$求出A的特征值：

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 6 & \lambda + 11 & -6 \\ 6 & 11 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2, \ \lambda_3 = -3$$

特征值为两两互异的情形

- 对于$\lambda_1 = -1$的特征向量，由$\lambda_1 v_1 = Av_1$可得

$$-\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & -11 & 6 \\ -6 & -11 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad v_{21} = 0,\ v_{11} = v_{31}$$

$\Rightarrow$ 这里选取 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 特征向量不唯一

- 同理，可以选取$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$，$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$

➥ 则变换阵P为：$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$

➥ 状态方程化为约当规范形：$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \dot{\bar{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} u$

特征值包含重值的情形

考察n维LTI系统$\dot{x} = Ax + Bu$，若A的n个特征值包含重值情形，则其约当规范形只可能有准对角形式，即

结论 设系统的特征值为：

$$\lambda_1(\sigma_1\text{重}, \alpha_1\text{重}),\ \lambda_2(\sigma_2\text{重}, \alpha_2\text{重}),\ \cdots,\ \lambda_l(\sigma_l\text{重}, \alpha_l\text{重})$$
$$\lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall i \neq j, \qquad \sigma_1 + \cdots + \sigma_l = n$$

- 基于相应于各特征值的广义特征向量组所组成的变换阵Q，状态方程$\dot{x} = Ax + Bu$可通过线性非奇异变换$\hat{x} = Q^{-1}x$化为约当规范形

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_l \end{bmatrix}}_{\hat{A}=Q^{-1}AQ\text{——准对角线形式}} \hat{x} + \hat{B}u, \quad \hat{B} = Q^{-1}B$$

其中

- J_i为相应于特征值λ_i的约当块：

$$\underset{(\sigma_i \times \sigma_i)}{J_i} = \begin{bmatrix} J_{i1} & & & \\ & J_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i\alpha_i} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, l$$

$$\underset{(r_{ik} \times r_{ik})}{J_{ik}} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \cdots, \alpha_i, \quad \sum_{k=1}^{\alpha_i} r_{ik} = \sigma_i$$

- $Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_l \end{bmatrix}$，$q_i$为对应特征值$\lambda_i$的广义特征向量组
- $q_i = \begin{bmatrix} q_{i1} & q_{i2} & \cdots & q_{i\alpha_i} \end{bmatrix}$，$q_{ik}$为对应特征值$\lambda_i$的广义特征向量链

注释

(1) 重特征值情形的约当规范形是一个“嵌套式”的对角块阵

- 外层：块对角矩阵

$$\hat{A} = Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, \cdots, J_l\}$$

其中，约当块J_i的维数为特征值λ_i的代数重数

- 中层：约当块

$$J_i = \mathrm{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \cdots, J_{i\alpha_i}\}$$

其中，约当小块J_{ik}的维数为λ_i广义特征向量链的长度

- 内层：约当小块

$$J_{ik} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

特征值包含重值的情形

(2) 约当规范形$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$，$\hat{A} = \mathrm{diag}\{J_1, J_2, \cdots, J_l\}$为系统状态可实现可能的最简耦合

即 状态$\hat{x}$可分解为$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_l)$个独立状态变量组，其中

$$\dot{\hat{x}}_{ik} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} \hat{x}_{ik} + \hat{B}_{ik}u \leftrightarrow \text{对应约当小块}J_{ik}\text{的状态方程}$$

➥ 易知，每个状态变量至多只和下一序号的状态变量发生耦合

- 当系统矩阵A所有的特征值λ_i的$\sigma_i = \alpha_i$时，约当规范形为对角线矩阵。此时，A为正规矩阵

特征值包含重值的情形

例： 对一个LTI系统的如下状态方程，导出其约当规范形

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u$$

解：

1) 由特征方程

$$\det(sI - A) = \cdots = (s-2)^5 s = 0$$

➥ 可定出特征值为$\lambda_1 = 2$(重特征值，$\sigma_1 = 5$)，$\lambda_2 = 0(\sigma_2 = 1)$

2) 定出$\lambda_1 = 2$的几何重数，为$\alpha_1 = 2$

特征值包含重值的情形

3) 利用广义特征向量算法，定出$\lambda_1=2$的一个广义特征向量组为

$$q_1=\left[\underbrace{q_{11}^{(1)},q_{11}^{(2)},q_{11}^{(3)}}_{q_{11}},\underbrace{q_{12}^{(1)},q_{12}^{(2)}}_{q_{12}}\right]$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \underbrace{0}_{q_{11}^{(1)}} & \underbrace{0}_{q_{11}^{(2)}} & \underbrace{0}_{q_{11}^{(3)}} & \underbrace{0}_{q_{12}^{(1)}} & \underbrace{1}_{q_{12}^{(2)}} \end{bmatrix}$$

4) 求解$(\lambda_2 I-A)q_2=0$，可定出一个特征向量为

$$q_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

状态方程的约当规范形：例子

5) 计算变换阵及变换后系数矩阵

$$Q=[q_1,q_2]=\left[\begin{array}{cc}\underbrace{\begin{matrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{q_1} & \underbrace{\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\1\\-1\end{matrix}}_{q_2}\end{array}\right]$$

6) 定出对角规范形状态方程为

$$\dot{\hat{x}}=Q^{-1}AQ\hat{x}+Q^{-1}Bu$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\hat{x}+\begin{bmatrix}0 & 1/4\\ 1 & -1/2\\ 2 & 0\\ -1/4 & 0\\ 1/2 & 1\\ -1/2 & 1\end{bmatrix}u$$

致谢

- 参考书:

  郑大钟. 线性系统理论. 北京: 清华大学出版社, 2005