# 第5章　能控性, 能观性与传递函数

程龙，薛文超

中国科学院自动化研究所
中国科学院数学与系统科学研究院

1. 5.1 线性定常系统的规范分解
   - 5.1.1 不完全能控不完全能观系统的结构分解
   - 5.1.2 不完全能控不完全能观系统的传递函数

1. 5.1 线性定常系统的规范分解
   - 5.1.1 不完全能控不完全能观系统的结构分解
   - 5.1.2 不完全能控不完全能观系统的传递函数

- 在第2章讨论过$(A, B)$不完全能控时的结构分解, 可以通过引进非奇异线性变换, 分别将$(A, B)$分离为
  - 能控部分
  - 不能控部分
- 在第4章我们讨论过$(A, C)$不完全能观时的结构分解, 可以通过引进非奇异线性变换, 分别将$(A, C)$分离为
  - 能观部分
  - 不能观部分

# 5.1 线性定常系统的规范分解

- 在第2章讨论过$(A,B)$不完全能控时的结构分解, 可以通过引进非奇异线性变换, 分别将$(A,B)$分离为
  - 能控部分
  - 不能控部分
- 在第4章我们讨论过$(A,C)$不完全能观时的结构分解, 可以通过引进非奇异线性变换, 分别将$(A,C)$分离为
  - 能观部分
  - 不能观部分

? 若$(A,B,C)$同时为不完全能控不完全能观的, 是否可通过引进非奇异线性变换, 分别将$(A,B,C)$分离为

  - 能控部分（或能观部分）
    - 能控能观部分（或能观能控部分）
    - 能控不能观部分（或能观不能控部分）
  - 不能控部分（或不能观部分）
    - 不能控能观部分（或不能观能控部分）
    - 不能控不能观部分（或不能观不能控部分）

1 5.1 线性定常系统的规范分解

- 5.1.1 不完全能控不完全能观系统的结构分解
- 5.1.2 不完全能控不完全能观系统的传递函数

- 考虑线性定常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$x$为$n$维状态向量，$u$为$p$维输入向量，$y$为$q$维输出向量，$A, B, C$分别为$n \times n, n \times p, q \times n,$阶实常阵

- 若$(A, B, C)$同时为不完全能控不完全能观的，有如下Kalman规范分解定理

## 定理

**定理5.1**(Kalman 规范分解定理) 对不完全能控不完全能观系统(1), 通过非奇异线性变换可实现系统结构的规范分解, 其规范分解的表达式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

并且

(1) $\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$能控, (2) $\left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\right)$能观,

(3) $(A_{22}, B_2, C_2)$能控能观.

证明: 取

- $T_1$为$n\times n_1$ 矩阵, 其列构成子空间$X_C\cap X_{NO}$ 的基底
- $T_2$ 为$n\times n_2$ 矩阵, 其列构成子空间$X_C - X_C\cap X_{NO}$ 的基底
- $T_3$ 为$n\times n_3$ 矩阵, 其列构成子空间$X_{NO} - X_C\cap X_{NO}$ 的基底

➥ 则由$T_1, T_2, T_3$的定义, 容易看出

- $T_1, T_2, T_3$的各列线性无关且$n_1+n_2+n_3\leq n$.
- $spanT_1\subseteq X_C,\ spanT_2\subseteq X_C,\ span[T_1\ T_2]=X_C$
- $spanT_1\subseteq X_{NO},\ spanT_3\subseteq X_{NO},\ span[T_1\ T_3]=X_{NO}$

证明: 取

- $T_1$为$n\times n_1$ 矩阵, 其列构成子空间$X_C\cap X_{NO}$ 的基底
- $T_2$ 为$n\times n_2$ 矩阵, 其列构成子空间$X_C-X_C\cap X_{NO}$ 的基底
- $T_3$ 为$n\times n_3$ 矩阵, 其列构成子空间$X_{NO}-X_C\cap X_{NO}$ 的基底

➥ 则由$T_1,T_2,T_3$的定义, 容易看出

- $T_1,T_2,T_3$的各列线性无关且$n_1+n_2+n_3\leq n.$
- $spanT_1\subseteq X_C, spanT_2\subseteq X_C, span[T_1\ T_2]=X_C$
- $spanT_1\subseteq X_{NO}, spanT_3\subseteq X_{NO}, span[T_1\ T_3]=X_{NO}$

- 记$n_4=n-(n_1+n_2+n_3)$, 取
  - $T_4$ 为$n\times n_4$, 使$[T_1\ T_2\ T_3\ T_4]$ 为非奇异矩阵的任意矩阵

- 记

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} F_1^T \\ F_2^T \\ F_3^T \\ F_4^T \end{bmatrix}, \tag{4}$$

其中，$F_1, F_2, F_3, F_4$分别为$n \times n_1, n \times n_2, n \times n_3, n \times n_4$矩阵

➥ 则，由$T^{-1}T = I$ 推得

$$F_1^T T_2 = 0,\ F_1^T T_3 = 0,\ F_1^T T_4 = 0, \tag{5.1.5a}$$

$$F_2^T T_1 = 0,\ F_2^T T_3 = 0,\ F_2^T T_4 = 0, \tag{5.1.5b}$$

$$F_3^T T_1 = 0,\ F_3^T T_2 = 0,\ F_3^T T_4 = 0, \tag{5.1.5c}$$

$$F_4^T T_1 = 0,\ F_4^T T_2 = 0,\ F_4^T T_3 = 0. \tag{5.1.5d}$$

- 由(5.1.5$b$), (5.1.5$d$), 可知

$$F_2^T[T_1\ T_3] = 0, \quad F_4^T[T_1\ T_3] = 0$$

- 又$span[T_1\ T_3] = X_{NO}$,

- 由(5.1.5$b$), (5.1.5$d$), 可知

$$F_2^T[T_1\ T_3] = 0, \quad F_4^T[T_1\ T_3] = 0$$

- 又$span[T_1\ T_3] = X_{NO}$, 所以$F_2, F_4$的各列与$X_{NO}$的基底正交, 故

$$F_2\text{的各列} \in X_O,\ F_4\text{的各列} \in X_O. \tag{5}$$

- 由(5.1.5$b$),(5.1.5$d$), 可知

$$F_2^T[T_1\ T_3]=0,\quad F_4^T[T_1\ T_3]=0$$

- 又$span[T_1\ T_3]=X_{NO}$, 所以$F_2,F_4$的各列与$X_{NO}$的基底正交, 故

$$F_2\text{的各列}\in X_O,\ F_4\text{的各列}\in X_O. \tag{5}$$

- 同理, 由(5.1.5$c$),(5.1.5$d$), $span[T_1\ T_2]=X_C$, 可得$F_3,F_4$的各列与$X_C$的基底正交, 故

$$F_3\text{的各列}\in X_{NC},\ F_4\text{的各列}\in X_{NC}. \tag{6}$$

- 由(5.1.5$b$), (5.1.5$d$), 可知

$$F_2^T[T_1\ T_3] = 0, \quad F_4^T[T_1\ T_3] = 0$$

- 又$span[T_1\ T_3] = X_{NO}$, 所以$F_2, F_4$的各列与$X_{NO}$的基底正交, 故

$$F_2\text{的各列} \in X_O,\ F_4\text{的各列} \in X_O. \tag{5}$$

- 同理, 由(5.1.5$c$), (5.1.5$d$), $span[T_1\ T_2] = X_C$, 可得$F_3, F_4$的各列与$X_C$的基底正交, 故

$$F_3\text{的各列} \in X_{NC},\ F_4\text{的各列} \in X_{NC}. \tag{6}$$

- 基于上述关系, 对系统(1)作非奇异线性变换$x = T\hat{x}$, 则可得代数等价系统为

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, \quad y = \hat{C}\hat{x}$$

其中, $\hat{A} = T^{-1}AT, \hat{B} = T^{-1}B, \hat{C} = CT$

考察$\hat{A} = T^{-1}AT$

考察$\hat{A} = T^{-1}AT$

- 由$X_C, X_{NO}$是$A$的不变子空间, 即可知
  - $AT_1, AT_3$各列仍属于$X_{NO}$
  - $AT_1, AT_2$各列仍属于$X_C$

➥ 结合(5)式可得$F_2^TAT_1 = 0,\ F_2^TAT_3 = 0,\ F_4^TAT_1 = 0,\ F_4^TAT_3 = 0$

➥ 结合(6)式可得$F_3^TAT_1 = 0,\ F_3^TAT_2 = 0,\ F_4^TAT_1 = 0,\ F_4^TAT_2 = 0$

- 基此, 可推得

$$\hat{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} F_1^TAT_1 & F_1^TAT_2 & F_1^TAT_3 & F_1^TAT_4 \\ F_2^TAT_1 & F_2^TAT_2 & F_2^TAT_3 & F_2^TAT_4 \\ F_3^TAT_1 & F_3^TAT_2 & F_3^TAT_3 & F_3^TAT_4 \\ F_4^TAT_1 & F_4^TAT_2 & F_4^TAT_3 & F_4^TAT_4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \tag{7}$$

考察$\hat{B} = T^{-1}B$

考察$\hat{B} = T^{-1}B$

- 考虑$B$的各列$\in X_C = span[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B]$, 则由(6)可知

$$F_3^T B = 0, \quad F_4^T B = 0$$

➥ 基此, 可推得:

$$\hat{B} = T^{-1}B = \begin{bmatrix} F_1^T B \\ F_2^T B \\ F_3^T B \\ F_4^T B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

考察$\hat{C} = CT$

考察$\hat{C} = CT$

- 最后，考虑$C^T$的各列$\in X_O = span[C^T \ (CA)^T \ \cdots \ (CA^{n-1})^T]$，则利用$span[T_1 \ T_3] = X_{NO}$可知

$$CT_1 = 0, \quad CT_3 = 0$$

➥ 基此，可推得

$$\begin{aligned}\hat{C} &= CT \\ &= \begin{bmatrix} CT_1 & CT_2 & CT_3 & CT_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{9}$$

考察$\hat{C} = CT$

- 最后，考虑$C^T$的各列$\in X_O = span[C^T \ (CA)^T \ \cdots \ (CA^{n-1})^T]$，则利用$span[T_1 \ T_3] = X_{NO}$可知

$$CT_1 = 0, \quad CT_3 = 0$$

➥ 基此，可推得

$$\begin{aligned} \hat{C} &= CT \\ &= \begin{bmatrix} CT_1 & CT_2 & CT_3 & CT_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

- 再令$\hat{x} = \begin{bmatrix} x_1^T & x_2^T & x_3^T & x_4^T \end{bmatrix}^T$，$x_1, x_2, x_3, x_4$ 分别为$n_1, n_2, n_3, n_4$维分状态，联合(7) ~ (9) 即有系统(1)在非奇异线性变换$x = T\hat{x}$下，结构形式为(2)

下面先证明$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$能控.

下面先证明$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$能控.

- 由$span[T_1\ T_2] = X_C$, 可知$dim X_C = n_1 + n_2$, 从而

$$n_1 + n_2 = rank[B\ AB\ \cdots\ A^{n-1}B] = rank[\hat{B}\ \hat{A}\hat{B}\ \cdots\ \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$$

$$= rank\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

- 考虑矩阵$A_{ij}$和$B_i$的维数, 从而可知

$$n_1 + n_2 = rank\left[\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right],$$

$$= rank\left[\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \cdots \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}^{n_1+n_2-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right] \quad (11)$$

- 由能控性秩判据, 从而可得$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$能控

再证$\left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\right)$能观.

再证$\left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\right)$能观.

- 由$span[T_1\ T_3] = X_{NO}$, 并考虑$T_1$与$T_3$的维数, 可知

$$\dim(X_{NO}) = n_1 + n_3$$

从而,

$$\dim(X_O) = n - (n_1 + n_3) = n_2 + n_4$$

- 即, 可得

$$rank \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = rank \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}\hat{A} \\ \vdots \\ \hat{C}\hat{A}^{n-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$= n_2 + n_4.$$

- 考察$\hat{C}, \hat{C}\hat{A}, \cdots, \hat{C}\hat{A}^{n-1}$
- $\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$
- $\hat{C}\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C_2A_{22} & 0 & C_2A_{24} + C_4A_{44} \end{bmatrix}$, 且

$$\begin{bmatrix} C_2A_{22} & C_2A_{24} + C_4A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}$$

- $\hat{C}\hat{A}^2 = \hat{C}\hat{A} \cdot \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C_2A_{22}^2 & 0 & C_2A_{22}A_{24} + (C_2A_{24} + C_4A_{44})A_{44} \end{bmatrix}$, 且

$$\begin{bmatrix} C_2A_{22}^2 & C_2A_{22}A_{24} + (C_2A_{24} + C_4A_{44})A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}^2$$

# 5.1.1 不完全能控不完全能观系统的结构分解

- 考察$\hat{C}, \hat{C}\hat{A}, \cdots, \hat{C}\hat{A}^{n-1}$
- $\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}$
- $\hat{C}\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C_2A_{22} & 0 & C_2A_{24} + C_4A_{44} \end{bmatrix}$, 且

$$\begin{bmatrix} C_2A_{22} & C_2A_{24} + C_4A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}$$

- $\hat{C}\hat{A}^2 = \hat{C}\hat{A} \cdot \hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & C_2A_{22}^2 & 0 & C_2A_{22}A_{24} + (C_2A_{24} + C_4A_{44})A_{44} \end{bmatrix}$, 且

$$\begin{bmatrix} C_2A_{22}^2 & C_2A_{22}A_{24} + (C_2A_{24} + C_4A_{44})A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}^2$$

➥ 由上, 根据归纳法, 若令$\hat{C}\hat{A}^{n-2} = \begin{bmatrix} 0 & G_1 & 0 & G_2 \end{bmatrix}$, 且

$$\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}^{n-2}$$

- 则，有 $\hat{C}\hat{A}^{n-1} = \hat{C}\hat{A}^{n-2}\cdot\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & G_1A_{22} & 0 & G_1A_{24}+G_2A_{44} \end{bmatrix}$，且

$$\begin{bmatrix} G_1A_{22} & G_1A_{24}+G_2A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}^{n-1}$$

- 从而，由归纳法可知

$$\hat{C}\hat{A}^k = \begin{bmatrix} 0 & G_{k_1} & 0 & G_{k_2} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} G_{k_1} & G_{k_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}^k \qquad (13)$$

对所有 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 成立

- 根据前述关系式(12), (13)可推得

$$n_2+n_4=rank\begin{bmatrix} C_2 & C_4 \\ G_{11} & G_{12} \\ \vdots & \vdots \\ G_{n-1,1} & G_{n-1,2} \end{bmatrix}=rank\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$=rank\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}^{n_2+n_4-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

- 故由能观性秩判据，可知$\left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\right)$能观

最后证明$(A_{22}, B_2, C_2)$能控能观.

最后证明$(A_{22},\ B_2,\ C_2)$能控能观.

- 根据$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$能控, 由PBH判据可知

$$rank\begin{bmatrix} sI_{n_1}-A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI_{n_2}-A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_1+n_2,\ \forall s\in\mathbb{C},$$

得$rank\begin{bmatrix} sI_{n_2}-A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_2,\ \forall s\in\mathbb{C}$, 故$[A_{22},\ B_2]$能控

- 根据$\left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\right)$能观, 由PBH判据可知

$$rank\begin{bmatrix} sI_{n_2}-A_{22} & -A_{24} \\ 0 & sI_{n_4}-A_{44} \\ C_2 & C_4 \end{bmatrix} = n_2+n_4,\ \forall s\in\mathbb{C},$$

得$rank\begin{bmatrix} sI_{n_2}-A_{22} \\ C_2 \end{bmatrix} = n_2,\ \forall s\in\mathbb{C}$, 从而$[A_{22},\ C_2]$能观

第5章

5.1 线性定常系统的规范分解

5.1.1 不完全能控不完全能观系统的结构分解

5.1.2 不完全能控不完全能观系统的传递函数


最后证明$(A_{22}, B_2, C_2)$能控能观.

- 根据$\left(\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\right)$能控, 由PBH判据可知

$$rank\begin{bmatrix} sI_{n_1} - A_{11} & -A_{12} & B_1 \\ 0 & sI_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_1 + n_2, \ \forall s \in \mathbb{C},$$

得$rank\begin{bmatrix} sI_{n_2} - A_{22} & B_2 \end{bmatrix} = n_2, \ \forall s \in \mathbb{C}$, 故$[A_{22}, B_2]$能控

- 根据$\left(\begin{bmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} C_2 & C_4 \end{bmatrix}\right)$能观, 由PBH判据可知

$$rank\begin{bmatrix} sI_{n_2} - A_{22} & -A_{24} \\ 0 & sI_{n_4} - A_{44} \\ C_2 & C_4 \end{bmatrix} = n_2 + n_4, \ \forall s \in \mathbb{C},$$

得$rank\begin{bmatrix} sI_{n_2} - A_{22} \\ C_2 \end{bmatrix} = n_2, \ \forall s \in \mathbb{C}$, 从而$[A_{22}, C_2]$能观

- 综合上面的结论, 即有$(A_{22}, B_2, C_2)$能控能观. 定理得证 ■

注: 系统(1)的规范分解(2)称为Kalman分解. 根据(2)可知,

- $x_1$为$n_1$维能控不能观分状态
- $x_2$为$n_2$维能控能观分状态
- $x_3$为$n_3$维不能控不能观分状态
- $x_4$为$n_4$维不能控能观分状态

且, $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$

1. 5.1 线性定常系统的规范分解
   - 5.1.1 不完全能控不完全能观系统的结构分解
   - 5.1.2 不完全能控不完全能观系统的传递函数

- 由系统结构的规范分解(2)知, 系统(1)的传递函数应与系统(2)的传递函数相同（代数等价）, 即

$$C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & C_2 & 0 & C_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} sI-A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ 0 & sI-A_{22} & 0 & -A_{24} \\ 0 & 0 & sI-A_{33} & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & sI-A_{44} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

第5章

5.1 线性定常系统的规范分解

5.1.1 不完全能控不完全能观系统的结构分解

5.1.2 不完全能控不完全能观系统的传递函数

- 由系统结构的规范分解(2)知, 系统(1)的传递函数应与系统(2)的传递函数相同（代数等价）, 即

$$C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2 & 0 & C_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14}\\ 0 & sI-A_{22} & 0 & -A_{24}\\ 0 & 0 & sI-A_{33} & -A_{34}\\ 0 & 0 & 0 & sI-A_{44}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2 & 0 & C_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -A_{12}\\ 0 & sI-A_{22}\end{bmatrix}^{-1} & * \\ 0 & \begin{bmatrix}sI-A_{33} & -A_{34}\\ 0 & sI-A_{44}\end{bmatrix}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

# 5.1.2 不完全能控不完全能观系统的传递函数

- 由系统结构的规范分解(2)知, 系统(1)的传递函数应与系统(2)的传递函数相同（代数等价）, 即

$$C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2 & 0 & C_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14}\\ 0 & sI-A_{22} & 0 & -A_{24}\\ 0 & 0 & sI-A_{33} & -A_{34}\\ 0 & 0 & 0 & sI-A_{44}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2 & 0 & C_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -A_{12}\\ 0 & sI-A_{22}\end{bmatrix}^{-1} & * \\ 0 & \begin{bmatrix}sI-A_{33} & -A_{34}\\ 0 & sI-A_{44}\end{bmatrix}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -A_{12}\\ 0 & sI-A_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

# 5.1.2 不完全能控不完全能观系统的传递函数



- 由系统结构的规范分解(2)知, 系统(1)的传递函数应与系统(2)的传递函数相同（代数等价）, 即

$$C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2 & 0 & C_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -A_{12} & -A_{13} & -A_{14}\\ 0 & sI-A_{22} & 0 & -A_{24}\\ 0 & 0 & sI-A_{33} & -A_{34}\\ 0 & 0 & 0 & sI-A_{44}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2 & 0 & C_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -A_{12}\\ 0 & sI-A_{22}\end{bmatrix}^{-1} & *\\ 0 & \begin{bmatrix}sI-A_{33} & -A_{34}\\ 0 & sI-A_{44}\end{bmatrix}^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A_{11} & -A_{12}\\ 0 & sI-A_{22}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & C_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(sI-A_{11})^{-1} & *\\ 0 & (sI-A_{22})^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}$$

$=C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2$ —系统$(A_{22}, B_2, C_2)$的传递函数矩阵

- 由于$C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2$为系统(1)能控能观部分的传递函数，于是有如下结论

**定理**

**定理5.2** 不完全能控，不完全能观系统(1)的传递函数即是其能控能观部分的传递函数，

$$\begin{aligned} G_{(A,B,C)}(s) &= C(sI-A)^{-1}B \\ &= C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2 \\ &= G_{(A_{22},B_2,C_2)}(s) \end{aligned} \tag{15}$$

# 5.1.2 不完全能控不完全能观系统的传递函数



- 由于$C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2$为系统(1)能控能观部分的传递函数，于是有如下结论

**定理**

**定理5.2** 不完全能控，不完全能观系统(1)的传递函数即是其能控能观部分的传递函数，

$$\begin{aligned} G_{(A,B,C)}(s) &= C(sI-A)^{-1}B \\ &= C_2(sI-A_{22})^{-1}B_2 \\ &= G_{(A_{22},B_2,C_2)}(s) \end{aligned} \tag{15}$$

注：定理5.2说明，系统的输入输出描述即传递函数，只是对系统结构的一种不完全的描述

- 只有对完全能观能控的系统，传递函数才足以表征系统的结构，描述才是完全的

# 致谢



- 教材:

  程兆林, 马树萍. 线性系统理论. 北京: 科学出版社, pp. 106–111