1、请根据课本中 Z 变换的定义，证明如下结论。

(1) 若 $x(n)$的 Z 变换为 $X(z)$，则$(-1)^n x(n)$ 的 Z 变换为 $X(-z)$

(2) 若 $x(n)$的 Z 变换为 $X(z)$，$x(-n)$ 的 Z 变换为 $X(\frac{1}{z})$

(3) 若 $x(n)$的 Z 变换为 $X(z)$，课本 280 页公式 7.1.2

解.(1)由 Z 变换的定义可知：

$$\mathrm{X}(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

因此，可得 $(-1)^n x(n)$ 的 Z 变换为：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^n x(n) z^{-n}=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)(-\frac{1}{z})^n=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)(-z)^{-n}=X(-z)$$

即得证

(2).同理，可得 $x(-n)$ 的 Z 变换为 $\sum_{-\infty}^{+\infty} x(-n) z^{-n}$，我们令 $n'=-n$，故可得：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x(-n) z^{-n}=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n') z^{n'}=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n')(\frac{1}{z})^{-n'}=X(\frac{1}{z})$$

(3)对于 x(2n),我们可以对其进行 Z 变换如下：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x(2n) z^{-n}$$

我们令 n’=2n,故可得：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x(2n) z^{-n}=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n') z^{-\frac{n'}{2}}$$

通过奇数项相减得 0，偶数项相加这一原则，我们可将 $x(n')$ 进行如下表示：

$$x(n')=\frac{1}{2}[x(n')+(-1)^{n'} x(n')]$$

对于上式，有当 n’=1 时，x(n’)=0; 当 n’=2 时，$x(2)=\frac{1}{2}[x(2)+(-1)^2 x(2)]=x(2)$，当 n’取其他值时同理。

因此可得：

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n')z^{-\frac{n'}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}[x(n') + (-1)^{n'} x(n')]z^{-\frac{n'}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}[x(n')z^{-\frac{n'}{2}} + (-1)^{n'} x(n')z^{-\frac{n'}{2}}]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}[x(n')(z^{\frac{1}{2}})^{-n'} + x(n')(-z^{\frac{1}{2}})^{-n'}]$$

$$= \frac{1}{2}[X(z^{\frac{1}{2}}) + X(-z^{\frac{1}{2}})]$$

故而课本 280 页公式 7.1.2 得证。