2-5 求通过 $x(0)=1$，$x(1)=2$，使下列性能泛函为极值的极值曲线 $x^*(t)$：

$$J=\int_{t_0}^{t_f}(1+\dot{x}^2)dt$$

解：由题可知，始端和终端均固定，

被积函数 $L=1+\dot{x}^2$，$\dfrac{\partial L}{\partial x}=0$，$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\dot{x}$，$\dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=2\ddot{x}$

代入欧拉方程 $\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\cdot\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$，可得 $2\ddot{x}=0$，即 $\ddot{x}=0$

故 $\dot{x}=c_1$ 其通解为：$x=c_1t+c_2$

代入边界条件 $x(0)=1$，$x(1)=2$，求出 $c_1=1$，$c_2=1$

极值曲线为 $x^*(t)=t+1$

2-6 已知状态的初值和终值为

$$x(1)=4,\quad x(t_f)=4$$

式中 t_f 自由且 t_f>1，试求使下列性能泛函达到极小值的极值轨线 $x^*(t)$：

$$J=\int_1^{t_f}[2x(t)+\frac{1}{2}\dot{x}^2(t)]dt$$

解：由题可知，$L=2x+\dfrac{1}{2}\dot{x}^2$，$\psi(t_f)=4$，$x(1)=4$，$x(t_f)=4$

欧拉方程：$\dfrac{\partial L}{\partial x}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}=0$

横截条件：$x(t_0)=x_0$，$x(t_f)=\psi(t_f)$，$\left(L+(\dot{\psi}-\dot{x}^T)\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_f}=0$

易得到 $\dfrac{d\dot{x}}{dt}=2$　　故 $\dot{x}=2t+c_1$

其通解为：$x(t)=t^2+c_1t+c_2$

根据横截条件可得：$\begin{cases}x(1)=1+c_1+c_2=4\\ x(t_f)=t_f^2+c_1t_f+c_2=4\\ \dot{x}(t_f)=2t_f+c_1=4\end{cases}$

解以上方程组得：$\begin{cases}t_f=5\\ c_1=-6\\ c_2=9\end{cases}$　　还有一组解 $\begin{cases}t_f=1\\ c_1=2\text{（舍去，不符合题意 } t_f>1\text{）}\\ c_2=1\end{cases}$

将 t_f，c_1，c_2 代入 J 可得 $J^* = \int_0^5 (2x + \frac{1}{2}\dot{x}^2) dt = 4\int_0^5 (t-3)^2 = \frac{140}{3}$.

极值轨线为 $x^*(t) = t^2 - 6t + 9$

2-7 设性能泛函为

$$J = \int_0^1 (1 + \dot{x}^2) dt$$

求在边界条件 $x(0) = 0$，$x(1)$ 自由情况下，使性能泛函取极值的极值轨线 $x^*(t)$。

解：由题可知，$L = 1 + \dot{x}^2$，$x(0) = 0$，$x(1)$ 自由

欧拉方程：$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$

横截条件：$\mathbf{x}(t_0) = x_0$，$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big|_{t_f} = 0$，$\left(L + \dot{x}^T \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)\Big|_{t_f} = 0$

易得到 $\dot{x}(t) = a$

其通解为：$x(t) = at + b$

代入边界条件 $\dot{x}(t_f) = a$，$x(0) = 0$，$t_f = 1$，求出 $a = 0$，$b = 0$

将 t_f，a，b 代入 J 可得 $J^* = \int_0^1 (1 + \dot{x}^2) dt = 1$

极值轨线为 $x^*(t) = 0$

2－8 设泛函

$$J = \int_{t0}^{tf} L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, t) dt$$

端点 $A(x_{10}, x_{20}, t_0)$ 固定，端点 $B(x_1(t_f), x_2(t_f), t)$ 可沿空间曲线

$$c_1(t_f) = \varphi(t_f), c_2(t_f) = \psi(t_f)$$

移动。试证：当泛函取极值时，横截条件为

$$\left[[L + (\dot{\varphi} - \dot{x}_1)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + (\dot{\psi} - \dot{x}_2)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right] \Big|_{tf} = 0$$

证：根据题意可知，此题属于起点固定，末端受约束情况，由 P_{25}

$$\left[L-(\dot{c}-\dot{x})^T\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right]\Big|_{tf}=0 \text{ 可得，} \qquad (1)$$

由 $\quad c=[\varphi,\psi]^T, \dot{x}=(\dot{x}_1,\dot{x}_2)^T$

$$(\dot{c}-\dot{x})^T=(\dot{\varphi}-\dot{x}_1,\dot{\psi}-\dot{x}_2), \qquad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1},\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2})^T$$

$$\therefore \quad (\dot{c}-\dot{x})^T\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}=(\dot{\varphi}-\dot{x}_1)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}+(\dot{\psi}-\dot{x}_2)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \qquad (2)$$

将（2）代入（1）式，得：

$$\left[L-(\dot{\varphi}-\dot{x}_1)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}+(\dot{\psi}-\dot{x}_2)\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right]\Big|_{tf}=0\text{,得证。}$$

2-13 设系统状态方程

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t)\text{，}\quad x_1(0)=2$$

$$\dot{x}_2(t)=u(t)\text{，}\quad x_2(0)=1$$

性能指标如下：

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}u^2(t)dt$$

要求达到 $x(t_f)=0$，试求

（1）$t_f=5$ 时的最优控制 $u^*(t)$。

（2）t_f 自由时的最优控制 $u^*(t)$。

解：由题可知

构造 H：$H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2 u$

正则方程：$\begin{cases}\dot{\lambda}_1(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=0\\ \dot{\lambda}_2(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1\end{cases}$

可求得 $\begin{cases}\lambda_1(t)=c_1\\ \lambda_2(t)=-c_1 t+c_2\end{cases}$

控制方程：$\dfrac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda_2=0$

由上式可得 $u(t)=-\lambda_2=c_1t-c_2$

由状态方程 $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$，$\dot{x}_2(t)=u(t)$ 可得 $\begin{cases} x_1(t)=\dfrac{1}{6}c_1t^3-\dfrac{1}{2}c_2t^2+c_3t+c_4 \\ x_2(t)=\dfrac{1}{2}c_1t^2-c_2t+c_3 \end{cases}$

（1）$t_f=5$ 时

由边界条件 $x_1(0)=2$，$x_2(0)=1$，$x_1(t_f)=0$，$x_2(t_f)=0$ 可得

$$\begin{cases} c_3=1 \\ c_4=2 \\ \dfrac{1}{6}c_1*5^3-\dfrac{1}{2}c_2*5^2+c_3*5+c_4=0 \\ \dfrac{1}{2}c_1*5^2-c_2*5+c_3=0 \end{cases} \text{得} \begin{cases} c_1=\dfrac{54}{125} \\ c_2=\dfrac{32}{25} \\ c_3=1 \\ c_4=2 \end{cases}$$

故 $\begin{cases} x_1(t)=\dfrac{9}{125}t^3-\dfrac{16}{25}t^2+t+2 \\ x_2(t)=\dfrac{27}{125}t^2-\dfrac{32}{25}t+1 \end{cases}$ 有 $\dot{x}_2(t)=\dfrac{54}{125}t-\dfrac{32}{25}$

有最优控制 $u^*(t)=\dfrac{54}{125}t-\dfrac{32}{25}$

（2）若 t_f 自由

由哈密顿函数在最优轨线末端应满足的条件

$$H(t_f)=\frac{1}{2}u^2(t_f)+\lambda_1(t_f)x_2(t_f)+\lambda_2(t_f)u(t_f)=-\frac{\partial\varphi}{\partial t_f}=0 \text{ 得 } u(t_f)=0$$

即 $\lambda_2(t_f)=0$，从而 $c_2=c_1t_f$，代入 $\begin{cases} \dfrac{1}{6}c_1{t_f}^3-\dfrac{1}{2}c_2{t_f}^2+t_f+2=0 \\ \dfrac{1}{2}c_1{t_f}^2-c_2t_f+1=0 \end{cases}$ 可得 $t_f=-6$

因为时间总为正值，所以此题无解。

3-2 设二阶系统的状态方程 $\begin{array}{l} \dot{x}_1(t)=x_2(t), \\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)+u(t), \end{array}$ 边界条件 $\begin{array}{l} x_1(0)=1, x_2(0)=1 \\ x_1(2)=0, x_2(2)=0 \end{array}$ 试求下列性

能指标的极小值：$J=\frac{1}{2}\int_0^2 [x_1(t)+u(t)]^2 dt$

解：由题可知

构造 H：$H=L+\lambda f=\frac{1}{2}(x_1+u)^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2(x_1+u)$

由协态方程和极值条件：$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-[(x_1+u)+\lambda_2] \\ \dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1 \\ \frac{\partial H}{\partial u}=x_1+u+\lambda_2=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\lambda_1=c_1 \\ \lambda_2=c_1 t+c_2\end{cases}$ 代入状态方程

得：$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t), \\ \dot{x}_2(t)=c_1(t)+c_2\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1=c_1t^3-\frac{1}{2}c_2t^2+c_3t+c_4 \\ x_2=\frac{1}{2}c_1t^2-c_2t+c_3\end{cases}$，代入初始条件解得：$\begin{cases}c_1=3 \\ c_2=3.5 \\ c_3=1 \\ c_4=1\end{cases}$

故 $\begin{cases}x^*_1(t)=\frac{1}{2}t^3-\frac{7}{4}t^2+t+1 \\ x^*_2(t)=\frac{3}{2}t^2-\frac{7}{2}t+1\end{cases}$，

此时 $J^*=\frac{1}{2}\int_0^2 [x_1(t)+u(t)]^2 dt=\int_0^2 (3t-3.5)^2 dt=0.3077$

3-4 给定一阶系统方程

$$\dot{x}(t)=-x(t)+u(t),\quad x(0)=1$$

控制约束为 $|u(t)|\le 1$，试求使下列性能指标：

$$J=\int_0^1 [x(t)-\frac{1}{2}u(t)]dt$$

为极小值的最优控制 $u^*(t)$ 及相应的最优轨线 $x^*(t)$。

解：由题可知

构造 H：$H=(x-\frac{u}{2})+\lambda(-x+u)=(1-\lambda)x+(\lambda-\frac{1}{2})u$

哈密顿函数达到极小值就相当于使性能指标极小，因此要求 $(\lambda-\frac{1}{2})u$ 极小。且取其约束条件的边界值，即 $|u(t)|=1$ 时，使哈密顿函数 H 达到最小值。所以，最优控制应取

$$u^*(t)=\begin{cases}-1, & \lambda>\dfrac{1}{2}\\ 1, & \lambda<\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

由协态方程 $\dot{\lambda}(t)=-\dfrac{\partial H}{\partial x}=\lambda-1$ 可得 $\lambda(t)=1-ce^t$

由横截条件 $\lambda(1)=0$ 求得 $c=e^{-1}$，于是有

$$\lambda(t)=1-e^{t-1}$$

显然，当 $\lambda(t_s)=0.5$ 时，$u^*(t)$ 产生切换，其中 t_s 为切换时间。不难求得 $t_s=\ln\dfrac{e}{2}$，故最优控制为

$$u^*(t)=\begin{cases}-1, & 0\le t<\ln\dfrac{e}{2}\\ 1, & \ln\dfrac{e}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

将 $u^*(t)$ 代入状态方程，得

$$\dot{x}(t)=\begin{cases}-x-1, & 0\le t<\ln\dfrac{e}{2}\\ -x+1, & \ln\dfrac{e}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

解得 $x(t)=\begin{cases}c_1e^{-t}-1, & 0\le t<\ln\dfrac{e}{2}\\ c_2e^{-t}+1, & \ln\dfrac{e}{2}\le t\le 1\end{cases}$

代入初始条件 $x(0)=1$，可得 $c_1=2$，因而

$$x(t)=2e^{-t}-1，\ 0\le t<\ln\frac{e}{2}$$

在上式中，令 $t=\ln\dfrac{e}{2}$，可求出 $\ln\dfrac{e}{2}\le t\le 1$ 时 $x(t)$ 的初始条件

$$x(\ln\frac{e}{2})=2e^{-\ln\frac{e}{2}}-1=\frac{4}{e}-1$$

从而求得 $c_2=2-e$。因而

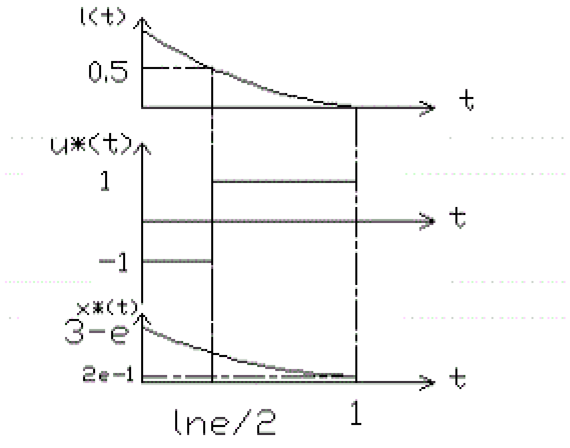
$$x(t)=(2-e)e^{-t}+1，\ \ln\frac{e}{2}\le t\le 1$$

于是，最优轨线为$x(t)=\begin{cases}2e^{-t}-1, & 0\le t<\ln\dfrac{e}{2}\\ (2-e)e^{-t}+1, & \ln\dfrac{e}{2}\le t\le 1\end{cases}$

将求得的$u^*(t)$和$x^*(t)$代入式 J，得最优性能指标

$$J^*=\int_0^1[x(t)-\frac{1}{2}u(t)]dt=\int_0^{\ln\frac{e}{2}}(2e^{-t}-\frac{1}{2})dt+\int_{\ln\frac{e}{2}}^1[\frac{1}{2}+(2-e)e^{-t}]dt=\frac{3}{2}-\frac{2}{e}-\ln\frac{e}{2}\approx 0.45$$

最优解曲线如下：



最 优 解 曲 线

3-5　控制系统$\begin{cases}\dot{x}_1=u_1,\ x_1(0)=0, x_1(1)=1\\ \dot{x}_2=x_1+u_2,\ x_2(0), x_2(1)=1\end{cases}$，试求最优控制$u_1^*(t), u_2^*(t)$以及最优轨线$x_1^*(t)$和$x_2^*(t)$,使性能指标$J=\int_0^1\left(x_1(t)+u_1^2(t)+u_2^2(t)\right)dt$为极小值。

解：哈密尔顿函数为$H=x_1+u_1^2+u_2^2+\lambda_1u_1+\lambda_2(x_1+u_2)$

由协态方程：$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=-(1+\lambda_2)\\ \dot{\lambda}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}\lambda_1=-(1+c_1)t+c_2\\ \lambda_2=c_1\end{cases}$，

由极值条件：$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial u_1}=2u_1+\lambda_1=0\\ \dfrac{\partial H}{\partial u_2}=2u_2+\lambda_2=0\end{cases}$，　　解得$\begin{cases}u_1(t)=\dfrac{1}{2}\left[(1+c_1)t-c_2\right]\\ u_2(t)=-\dfrac{1}{2}c_1\end{cases}$，由状态方程有

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=\frac{1}{2}(1+c_1)t-c_2\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)-\frac{1}{2}c_1\end{cases}，解得 \begin{cases}x_1(t)=\frac{1}{4}(1+c_1)t^2-\frac{1}{2}c_2t+c_3\\ x_2(t)=\frac{1}{12}(1+c_1)t^3-\frac{1}{4}c_2t^2+(c_3-\frac{1}{2}c_1)t+c_4\end{cases},$$

代入初始值解得：$\begin{cases}c_1=-1\\c_2=-2\\c_3=0\\c_4=0\end{cases}$，故$\begin{cases}u_1^*(t)=1\\u_2^*(t)=\frac{1}{2}\end{cases}$　$\begin{cases}x_1^*(t)=t\\x_2^*(t)=\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t\end{cases}$

此时$J^*=\int_0^1\left(t+1^2+(\frac{1}{2})^2\right)dt=\frac{7}{4}$

…………………………………………………………………………………………………

3－6　已知二阶系统方程　$\begin{matrix}\dot{x}_1(t)=x_2(t) & x_1(0)=0 & x_1(t_f)=2\\ \dot{x}_2(t)=u(t), & x_2(0)=0, & x_2(t_f)=2,\end{matrix}$式中$|u(t)|\le 1, t_f$ 自由。

试求使性能指标$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}[x_1^2(t)+x_2^2(t)+u^2(t)]dt$为极小的最优控制$u^*(t)$，最优轨线$x^*(t)$以及最优指标$J^*$。

解：本例为线性定常系统，积分型性能指标，t_f 自由，末端固定的最优化问题。

构造哈密顿函数为：$H=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2+\frac{1}{2}u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2u$

由极小值条件应取：$u^*(t)=\begin{cases}-1,当\lambda_2(t)>1\\-\lambda_2(t),当|\lambda_2(t)|\le 1\\+1,当|\lambda_2(t)|<-1\end{cases}$,由哈密顿函数沿最优轨线的变化律：$H^*(t)=H^*(t_f^*)=0$，可得：

$\frac{1}{2}x^{*2}_1(0)+\frac{1}{2}x^{*2}_2(0)+\frac{1}{2}u^{*2}(0)+\lambda_1^*(0)x^*_2(0)+\lambda^*_2(0)u^*(0)=0$，

即：$\frac{1}{2}u^{*2}(0)+\lambda^*_2(0)u^*(0)=0$，可知：$u^*(0)=0$，（其中$u^*(0)=-2\lambda^*_2(0)$矛盾），

由协态方程有：$\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-x_1\\ \dot{\lambda}_2=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-x_2-\lambda_1\end{cases}$，由初始条件$\lambda_2(0)=0$解得：

$\lambda_2(t) = -\sqrt{Ae^{\frac{1}{2}}\sin \frac{\sqrt{3}}{2}t}$，由所给状态方程及初始条件解得：

3-7 已知二阶系统方程

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) + \frac{1}{4}，\quad x_1(0) = -\frac{1}{4}$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)，\quad x_2(0) = -\frac{1}{4}$$

式中控制约束为

$$|u(t)| \le \frac{1}{2}$$

试确定最优控制$u^*(t)$。将系统在t_f时刻由$x(0)$转移到空间原点，并使性能指标

$$J = \int_0^{t_f} u^2(t)dt$$

取最小值，其中t_f自由。

解：由题可知

构造哈密顿函数：$H = u^2 + \lambda_1(x_2 + \frac{1}{4}) + \lambda_2 u = (u + \frac{1}{2}\lambda_2)^2 - \frac{1}{4}\lambda_2^2 + \lambda_1(x_2 + \frac{1}{4})$

按照最小值原理，最优控制应取

$$u^*(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \lambda_2 > 1 \\ -\frac{1}{2}\lambda_2, & |\lambda_2| \le 1 \\ \frac{1}{2}, & \lambda_2 < -1 \end{cases}$$

由哈密顿函数沿最优轨线的变化规律$H^*(t) = H^*(t_f^*) = 0$可得

$$u^{*2}(0) + \lambda_1(0)[x_2^*(0) + \frac{1}{4}] + \lambda_2(0)u^*(0) = 0$$

以及 $u^{*2}(t_f^*) + \lambda_1(t_f^*)[x_2^*(t_f^*) + \frac{1}{4}] + \lambda_2(t_f^*)u^*(t_f^*) = 0$

因为$x_2(0) = -\frac{1}{4}$，可以求出$u^*(0) = 0$

由协态方程 $\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t)$$

解得 $\lambda_1(t)=c_1$，$\lambda_2(t)=-c_1t+c_2$

当 $u^*(t)=-\frac{1}{2}\lambda_2(t)=\frac{1}{2}c_1t-\frac{1}{2}c_2$ 时(试取)

$$x_1(t)=\frac{1}{12}c_1t^3-\frac{1}{4}c_2t^2+c_3t+c_4+\frac{1}{4}t$$

$$x_2(t)=\frac{1}{4}c_1t^2-\frac{1}{2}c_2t+c_3$$

代入初始条件 $x_1(0)=-\frac{1}{4}$，$x_2(0)=-\frac{1}{4}$，可得 $c_3=c_4=-\frac{1}{4}$

代入末端条件 $x(t_f)=0$，可得 $\begin{cases}x_1(t)=\frac{1}{12}c_1t_f^3-\frac{1}{4}c_2t_f^2-\frac{1}{4}\\ x_2(t)=\frac{1}{4}c_1t_f^2-\frac{1}{2}c_2t_f-\frac{1}{4}\end{cases}$

又 $H(t_f)=u^2(t_f)+\lambda_1(t_f)[x_2(t_f)+\frac{1}{4}]+\lambda_2(t_f)u(t_f)=0$，联立解得 $\begin{cases}c_1=\frac{1}{9}\\ c_2=0\\ t_f=3\end{cases}$

于是有 $\lambda_2(t)=-\frac{1}{9}t$ $\quad\begin{cases}\lambda_2=1, & t<0\\ \lambda_2=-1, & t=9\end{cases}$

在 $0\le t\le 3$ 时，正好满足 $|\lambda_2|\le 1$ 要求

故最优控制为 $u^*(t)=-\frac{1}{2}\lambda_2(t)=\frac{1}{18}t$，$(0\le t\le 3)$

相应的最优性能指标为 $J^*=\int_0^3 u^{*2}(t)dt=\int_0^3(\frac{1}{18}t)^2dt=\frac{1}{36}$

最优轨线为 $\begin{cases}x_1^*(t)=\frac{1}{108}t^3-\frac{1}{4}\\ x_2^*(t)=\frac{1}{36}t^2-\frac{1}{4}\end{cases}$

3-17 已知系统方程 $\begin{matrix}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\end{matrix}$，$\begin{matrix}x_1(0)=1\\ x_2(0)=0\end{matrix}$，性能指标 $J=\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt$，末端 $x_1(1)=x_2(1)=0$。试用连续极小值原理求最优控制 $u^*(t)$ 与最优轨迹 $x^*(t)$。

解：构造哈密顿函数：$H=L+\lambda^T f=\frac{1}{2}u^2+\lambda_1x_2+\lambda_2u$，由协态方程：

$\dot{\lambda}_1(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0$
$\dot{\lambda}_2(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\lambda_1$ ，解得：$\begin{cases} \lambda_1 = c_1 \\ \lambda_2 = -c_1 t + c_2 \end{cases}$ ，由极值条件：$\dfrac{\partial H}{\partial u} = u + \lambda_2 = 0$，　　解得

$u(t) = -\lambda_2(t) = c_1 t - c_2$，代入状态方程有：$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = c_1 t - c_2 \end{cases}$ ，解得

$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{1}{6}c_1 t^3 - \dfrac{1}{2}c_2 t^2 + c_3 t + c_4 \\ x_2(t) = \dfrac{1}{2}c_1 t^2 - c_2 t + c_3 \end{cases}$ ，代入初始值解得：$\begin{cases} c_1 = 12 \\ c_2 = 6 \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 1 \end{cases}$ ，故最优轨线为：

$\begin{cases} x^*{}_1(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \\ x^*{}_2(t) = 6t^2 - 6t \end{cases}$ ，又 $\dot{x}^*{}_2(t) = 12t - 6$，所以最优控制律为：$u^*(t) = 12t - 6$ ，

此时 $J^* = \dfrac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt = \dfrac{1}{2}\int_0^1 (12t-6)^2 dt = 6$

3-28 已知系统的状态方程 $\begin{matrix} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{matrix}$ ，控制约束为|u（t）|≤1。试求最优控制 u*（t），使系统由任意初态最快地转移到 $x_1(t_f) = 2$，$x_2(t_f) = 1$ 的末态。写出开关曲线方程，并绘出开关曲线的图形。

解：本例为二次积分模型的最小时间控制问题。容易判定系统可控，因而必为 Bang-Bang 控制。构造哈密顿函数: $H = 1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u$

由 协态方程得：$\begin{matrix} \dot{\lambda}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{\lambda}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1 \end{matrix}$ 解得：$\begin{matrix} \lambda_1(t) = c_1 \\ \lambda_2(t) = -c_1 t + c_2 \end{matrix}$。

$u^*(t) = -\mathrm{sgn}\{\lambda_2(t)\} = \begin{cases} -1 & ,\lambda_2(t) > 0 \\ 1 & ,\lambda_2(t) < 0 \end{cases}$ ，知最优控制 u(t)最多切换一次，具有四种可能：

【+1】,【-1】,【+1，-1】,【-1，+1】。

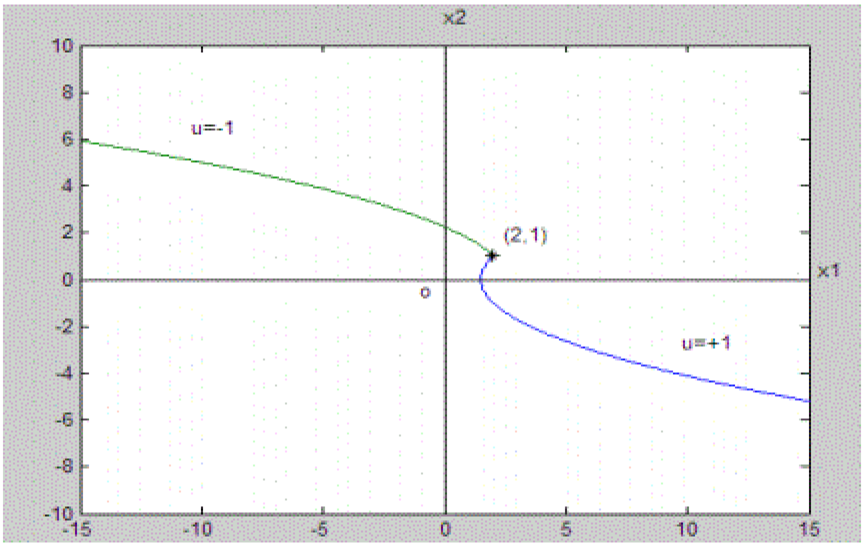
① 若 $u^*(t) = 1$ 时，代入状态方程 $\begin{matrix} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 1 \end{matrix}$ 考虑到初始状态 (x_{10}, x_{20})，解得：

$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}t^2 + x_{20}t + x_{10} \\ x_2 = t + x_{20} \end{cases}$ ，消 t 得：$x_1 = \dfrac{1}{2}x_2{}^2 + x_{10} - \dfrac{1}{2}x_{20}{}^2$，

② 同理，若$u^*(t)=-1$时，解得：$x_1=-\frac{1}{2}x_2^{\ 2}+x_{10}+\frac{1}{2}x_{20}^{\ 2}$，由末态配置到$\begin{matrix}x_1(t_f)=2\\x_2(t_f)=1\end{matrix}$，

取开关曲线为过（2,1）的那条曲线，即开关曲线方程为：

$$\gamma:\begin{cases}x_1=\frac{1}{2}x_2^{\ 2}+\frac{3}{2},(x_2<1),\gamma_+\\x_2=-\frac{1}{2}x_2^{\ 2}+\frac{5}{2},(x_2>1),\gamma_-\end{cases}$$ 开关曲线图如下：



开关曲线γ

3-31 设二阶系统：$\begin{matrix}\dot{x}_1(t)=x_2(t), & x_1(0)=1\\\dot{x}_2(t)=-x_1(t)+u(t), & x_2(0)=1\end{matrix}$，控制约束|u（t）|≤1。试求使系统由已知初态最快地转移到坐标原点的时间最优控制 u*（t）和开关曲线。

（注：本题书上的$\dot{x}_2(t)=-x_2(t)+u(t)$是错的，因为按书上的$\dot{x}_2(t)$得不到相平面轨迹方程）

解：本例为二次积分模型的最小时间控制问题。容易判定系统可控，因而必为 Bang-Bang 控制。构造哈密顿函数:$H=1+\lambda_1x_2+\lambda_2(-x_1+u)$，

知最优控制：$u^*(t)=-\mathrm{sgn}\{\lambda_2(t)\}=\begin{cases}-1 & ,\lambda_2(t)>0\\1 & ,\lambda_2(t)<0\end{cases}$，知最优控制 u(t)最多切换一次，具有四种可能：【+1】,【-1】,【+1，-1】,【-1，+1】。

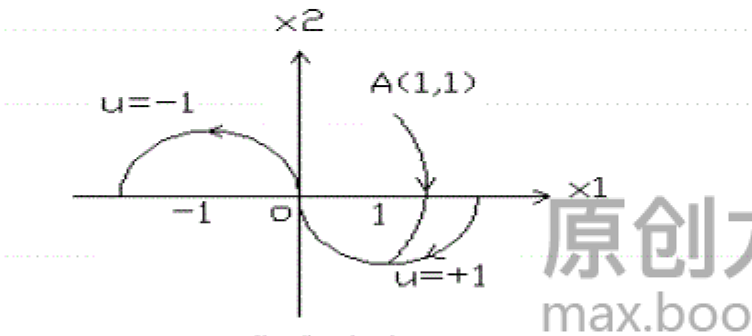
① 若$u^*(t)=1$时，代入状态方程$\begin{matrix}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\\dot{x}_2(t)=-x_1(t)+1\end{matrix}$考虑到初始状态$\begin{matrix}x_1(0)=1\\x_2(0)=1\end{matrix}$，解得：

$\begin{cases}x_1(t)=\sin t+1\\x_2(t)=\cos t\end{cases}$，消 t 得：$(x_1-1)^2+x_2^{\ 2}=1$，

② 同理，若$u^*(t)=-1$时，解得：$\begin{cases} x_1(t)=2\cos t+\sin t-1 \\ x_2(t)=-2\sin t+\cos t \end{cases}$，消t得：

$(x_1+1)^2+x_2^2=1$，即开关曲线方程为：

$$\gamma:\begin{cases} \gamma_+=(x_1,x_2)\,|\,(x_1-1)^2+x_2^2=1,(x_2<0), \\ \gamma_-=(x_1,x_2)\,|\,(x_1+1)^2+x_2^2=1,(x_2>0), \end{cases}$$ 开关曲线图如下：



开 关 曲 线 图

本题初始点 A(1，1),最优控制曲线如上图，最优控制律为 u={-1，+1}。

3-33 已知受控系统$\begin{matrix} \dot{x}_1(t)=x_2 \\ \dot{x}_2(t)=u \end{matrix}$，目标集为$S=\left\{(x_1,x_2)\,|\,x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=1\right\}$，试求由目标集外的任意初态$(\xi_1,\xi_2)$转移到目标集的时间最优控制律$u^*(t)$。

解：哈密尔顿函数为$H=1+\lambda_1x_2+\lambda_2u$，协态方程$\begin{cases} \dot{\lambda}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=0 \\ \dot{\lambda}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}=-\lambda_1 \end{cases}$，边界条件：

$$\begin{cases} x_1(0)=\xi_1 \\ x_2(0)=\xi_2 \end{cases},\quad \begin{matrix} \lambda_1(t_f)=\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1(t_f)}\gamma=2x_1(t_f)\gamma \\ \lambda_2(t_f)=\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2(t_f)}\gamma=2x_2(t_f)\gamma \end{matrix}$$

目标集约束：$\Psi\left[x(t_f)\right]=x_1^{\ 2}(t_f)+x_2^{\ 2}(t_f)-1=0$，

由极小值条件知，最优控制律：$u^*(t)=-\mathrm{sgn}[\lambda_2(t)]$

① 若$u^*(t)=+1$时，代入状态方程$\begin{matrix} \dot{x}_1(t)=x_2(t) \\ \dot{x}_2(t)=1 \end{matrix}$，解得：$\begin{cases} x_1(t)=\dfrac{1}{2}t^2+\xi_2t+\xi_1 \\ x_2(t)=t+\xi_2 \end{cases}$，

消 t 得相轨迹方程：$(x_1=\frac{1}{2}x_2{}^2+(\xi_1-\frac{1}{2}\xi_2{}^2)$；

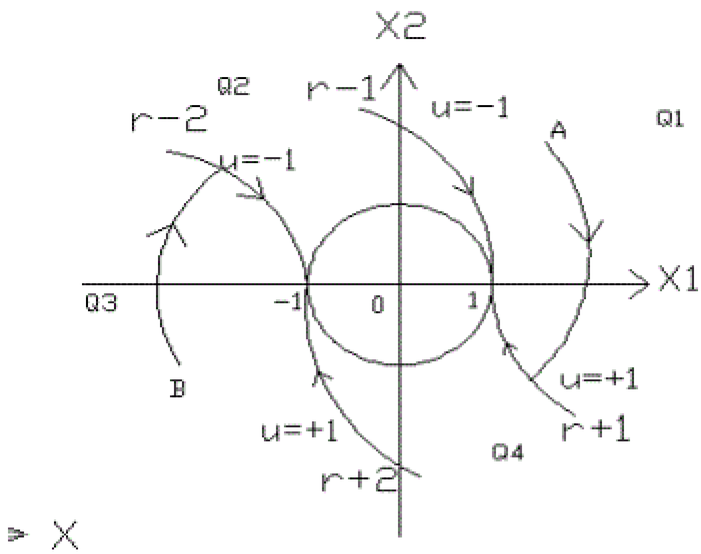
② 同理，若$u^*(t)=-1$时，解得：$\begin{cases}x_1(t)=-\frac{1}{2}t^2+\xi_2t+\xi_1\\ x_2(t)=-t+\xi_2\end{cases}$，

消 t 得相轨迹方程：$(x_1=-\frac{1}{2}x_2{}^2+(\xi_1+\frac{1}{2}\xi_2{}^2)$；

由相轨迹方程与目标集相切且满足末态要求的相轨迹曲线：

$\begin{cases}\gamma_{+1}:\ \{(x_1,x_2)|x_1=\frac{1}{2}x_2{}^2+1\ (x_2<0)\}\\ \gamma_{-1}:\ \{(x_1,x_2)|x_1=-\frac{1}{2}x_2{}^2+1\ (x_2\geq 0)\}\end{cases}$，$\begin{cases}\gamma_{+2}:\ \{(x_1,x_2)|x_1=\frac{1}{2}x_2{}^2\text{ -1 }(x_2<0)\}\\ \gamma_{-2}:\ \{(x_1,x_2)|x_1=-\frac{1}{2}x_2{}^2\text{ -1 }(x_2\geq 0)\}\end{cases}$，所以

系统的开关曲线$\gamma=\gamma_{+1}\cup\gamma_{-1}\cup\gamma_{+2}\cup\gamma_{-2}$开关曲线图如下所示：



开 关 曲 线 图

相轨迹如上图所示：

i、当初态(ξ_1,ξ_2)在Q_2区域或$\gamma_{+1}\cup\gamma_{+2}$上时，知最优控制为$u^*(t)$=-1, 终于上半圆；

ii、当初态(ξ_1,ξ_2)在Q_4区域或$\gamma_{-1}\cup\gamma_{-2}$上时，知最优控制为$u^*(t)$=-1, 终于下半圆；

iii、当初态(ξ_1,ξ_2)在Q_1区域中，知最优控制为$u^*(t)$={-1,+1}；

iv、当初态(ξ_1,ξ_2)在Q_4区域中，知最优控制为$u^*(t)$={+1,-1}；

3-42 已知系统方程

$\begin{matrix}\dot{x}_1(t)=u(t), & x_1(0)=2, & x_1(8)=0\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t), & x_2(0)=2, & x_2(8)=0\end{matrix}$，控制约束| u（t）|≤1。试求以切换时间表示的时间-

燃料最优控制 u*（t），使性能指标 $J=\int_0^8(1+|u(t)|)dt$ 取极小值，并求最优控制 J*。

解：哈密顿函数为：$H=1+|u(t)|+\lambda_1 u+\lambda_2 x_1$

由 $\begin{cases}\dot{\lambda}_1=-\dfrac{\partial H}{\partial x_1}=-\lambda_2\\ \dot{\lambda}_2=-\dfrac{\partial H}{\partial x_2}=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}\lambda_1=-c_1t+c_2\\ \lambda_2=c_1\end{cases}$

由极小值条件知：$u^*(t)=\begin{cases}0\\ -\mathrm{sgn}\{\lambda_1(t)\end{cases}$，$\begin{cases}|当\lambda_1(t)|<1\\ 当|\lambda_1(t)|>1\end{cases}$ 因为初态 $(\xi_1,\xi_2)=(2,2)$ 知

时间—燃料最优控制为：$u^*(t)=\{-1,0,+1\}$，设 $u^*(t)$ 的切换时间为 t_a 和 t_b，则有

①当 $0<t<t_a$ 时，有 u=-1，初态 $(\xi_1,\xi_2)=(2,2)$，由状态方程 $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=-1,\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t),\end{cases}$ 得：

$$\begin{cases}x_1(t)=-t+2\\ x_2(t)=-\dfrac{1}{2}t^2+2t+2\end{cases}$$

②当 $t_a<t<t_b$ 时，u=0，初态为：$\begin{cases}x_1(t_a)=-t_a+2\\ x_2(t_a)=-\dfrac{1}{2}t_a^2+2t_a+2\end{cases}$，由状态方程

$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=0,\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t),\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x_1(t)=-t_a+2\\ x_2(t)=-(t_a+2)(t-t_a)+(-\dfrac{1}{2}t_a^2+2t_a+2)\end{cases}$。

③ 当 $t_b<t<8$ 时，u=+1，初态为：$\begin{cases}x_1(t_b)=-t_a+2\\ x_2(t_b)=-(t_a+2)(t_b-t_a)+(-\dfrac{1}{2}t_a^2+2t_a+2)\end{cases}$，由状态方程 $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=1,\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t),\end{cases}$ 解得：

$$\begin{cases}x_1(t)=(t-t_b)+(-t_a+2)\\ x_2(t)=\dfrac{1}{2}(t-t_b)^2+(-t_a+2)(t-t_a)+(-\dfrac{1}{2}t_a^2+2t_a+2)\end{cases}$$

。末态值 $t=t_f=8,$

$\begin{cases}x_1(8)=0,\\ x_2(8)=0,\end{cases}$ 求得，$\begin{cases}t_a=2.764\\ t_b=7.236\end{cases}$，于是时间—燃料最优控制为：

$$u^*(t)=\begin{cases}-1 & 当0\le t<2.764\\ 0\ , & 当2.764\le t<7.236\ ,\\ +1 & 当7.236\le t\le 8\end{cases}$$

从而有 $J^*(t)=\int_0^8(1+|u|)dt=\int_0^8 dt+\int_0^8|u|dt=11.528$。

4-4 设二阶离散系统

$$\begin{aligned}x_1(k+1)&=2x_1(k)+u(k), & x_1(0)=1\\ x_2(k+1)&=x_1(k)+x_2(k), & x_2(0)=0\end{aligned}$$ 试求使性能指标：

$J=\sum_{k=0}^{1}[2x_2^2(k+1)+2u^2(k)]$ 为极小的最优控制 $u^*(k)$ 和最优轨线 $x^*(k)$。

解：本题为二级最优决策问题，其中 $x(k)$、$u(k)$ 不受约束。

① 令 N=2，k=1 时：

$J^*{}_1[x(1)]=\min\limits_{u(1)}\{[2x_2^2(2)+2u^2(1)]\}+J_0^*[x(2)]$，

$J_0^*[x(2)]$=0，所以 $J^*{}_1[x(1)]=\min\limits_{u(1)}\{2[x_1(1)+x_2(1)]^2+2u^2(1)]\}$

由于 $u(k)$ 不受约束：$\dfrac{\partial\{\bullet\}}{\partial u(1)}=4u(1)=0$，求得：$u^*(1)=0$。

将结果代入 $J^*{}_1[x(1)]$ 得：$J^*{}_1[x(1)]=2[x_1(1)+x_2(1)]^2$。

② 令 N=1，k=0 时：

$J^*{}_2[x(0)]=\min\limits_{u(0)}\{[2x_2^2(1)+2u^2(0)]\}+J_1^*[x(1)]$，$J_0^*[x(2)]$=0，所以

$J^*{}_1[x(1)]=\min\limits_{u(1)}\{2[x_1(1)+x_2(1)]^2+2u^2(1)]\}=$

$\min\limits_{u(0)}\{2[x_1(0)+x_2(0)]^2+2u^2(0)]+2[3x_1(0)+x_2(0)+u(0)]^2\}$

$\dfrac{\partial\{\bullet\}}{\partial u(0)}=4u(0)+4[3x_1(0)+x_2(0)+u(0)]=0$，代入初始值 $\begin{matrix}x_1(0)=1\\ x_2(0)=0\end{matrix}$，

求得：$u^*(0)=-\dfrac{3}{2}$，$J^*{}_2[x(0)]=11$，$\begin{cases}x_1^*(1)=\dfrac{1}{2}\ ,\\ x_2^*(1)=1\end{cases}$

$u^*(1)=0$，$J^*{}_1[x(1)]=\dfrac{9}{2}$，$\begin{cases}x_1^*(2)=1\\ x_2^*(2)=\dfrac{3}{2}\ ,\end{cases}$

于是本题的最优控制，最优轨线及最优代价分别为：

$u^* = \{-\frac{3}{2}, 0\}$，，$x_1^* = \{1, \frac{1}{2}, 1\}$，$x_2^* = \{1, 1, \frac{3}{2}\}$，$J^* = J^*_2[x(0)] = 11$

4-13 已知二阶系统 $\begin{matrix} \dot{x}_1(t) = u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{matrix}$，$\begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{matrix}$，性能指标：$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[2x^2{}_2(t) + \frac{1}{2}u^2(t)]dt$

试用连续动态规划求最优控制 $u^*(t)$ 和最优轨线 $x^*(t)$。

解：解：（1）由题意可得：

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$r = \frac{1}{4}$

令 $DD^T = Q$，得 $D^T = [0, 1]$，显然{A，b}可控，{A，D}可观，故 $u^*(t)$ 存在且唯一。

令 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$，代入黎卡提方程：$PA + A^TP - Pbr^{-1}b^TP + Q = 0$，

代入 A, b，Q，r 可得：$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} > 0$，

于是最优控制：$u^*(t) = -r^{-1}b^TPx(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t)$，

最优控制指标：$J^*[x(t)] = \frac{1}{2}x^T(t)Px(t) = \frac{1}{2}x_1{}^2 + x_1x_2 + x_2{}^2$，

将 $u^*(t)$ 代入状态方程，得闭环系统方程：$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) - 2x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \end{cases}$

代入初始值 $\begin{matrix} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{matrix}$ 解得：$\begin{cases} x_1^*(t) = -2e^{-t}\sin t \\ x_2(t) = e^{-t}(\sin t + \cos t) \end{cases}$

将 $x_1^*(t)$、$x_2(t)$ 代入状态反馈的最优控制，求得：$u^*(t) = -2e^{-t}(\cos t - \sin t)$。

4-14 已知系统方程：$\begin{matrix} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_2(t) - x^2{}_1(t) + u(t) \end{matrix}$，性能指标：

$J = \int_0^{t_f}[x^2{}_1(t) + u^2(t)]dt$，试确定该系统的哈密顿-雅可比方程。

解：令哈密顿函数为：$H(x, u, \frac{\partial J^*}{\partial x}, t) = x_1^2 + u^2 + \begin{bmatrix} \frac{\partial J^*}{\partial x_1} & \frac{\partial J^*}{\partial x_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - x^2{}_1 + u \end{bmatrix}$

由于 $u(t)$ 不受约束，则 $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Rightarrow u^* = -\frac{1}{2}\frac{\partial J^*}{\partial x_2}$，

由最优解的充分条件知：$-\dfrac{\partial J^*}{\partial t}=\min\limits_{u\in\Omega}H$，

代入$u^*(t)$，得：$-\dfrac{\partial J^*}{\partial t}=(1-\dfrac{\partial J^*}{\partial x_2})x_1^2+(\dfrac{\partial J^*}{\partial x_1}-\dfrac{\partial J^*}{\partial x_2})x_2-\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial J^*}{\partial x_2})^2$。

因为系统是时不变的，并且性能指标的被积函数不是时间的显函数，故$\dfrac{\partial J^*}{\partial t}=0$，

则有$(1-\dfrac{\partial J^*}{\partial x_2})x_1^2+(\dfrac{\partial J^*}{\partial x_1}-\dfrac{\partial J^*}{\partial x_2})x_2-\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial J^*}{\partial x_2})^2=0$。

在性能指标$J=\int_0^{t_f}[x^2{}_1(t)+u^2(t)]dt$中，令$t_f=0$，得边界条件：$J^*[x(0)]=0$。

所以本题的哈密顿—雅可比方程为：$\begin{cases}(1-\dfrac{\partial J^*}{\partial x_2})x_1^2+(\dfrac{\partial J^*}{\partial x_1}-\dfrac{\partial J^*}{\partial x_2})x_2-\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial J^*}{\partial x_2})^2=0\\ J^*[x(0)]=0\end{cases}$

5-8 给下列二阶系统：$\begin{matrix}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u\end{matrix}$，试确定最优控制$u^*(t)$，使下列性能指标极小：

$$J=\frac{1}{2}[x_1{}^2(3)+2x_2{}^2(3)]+\frac{1}{2}\int_0^3[2x^2{}_1(t)+4x_2{}^2(t)+2x_1(t)x_2(t)+\frac{1}{2}u^2(t)]dt$$

解：该题为有限时间状态调节器问题。由题意得：

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},F=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix},Q=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix},R=\frac{1}{2}$$

令$P=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}\\p_{12}&p_{22}\end{bmatrix}$，代入黎卡提方程：$-\dot{P}=PA+A^TP-Pbr^{-1}b^TP+Q$，

代入A, b，Q，r，边界条件：,$P(3)=F,\dot{P}=0$,即：

$$\begin{bmatrix}0&p_{11}\\p_{11}&2p_{12}\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}p^2{}_{12}&p_{12}p_{22}\\p_{12}p_{22}&p^2{}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}=0$$ 解得：$P=\begin{pmatrix}2\sqrt{3}-1&1\\1&\sqrt{3}\end{pmatrix}>0$，

于是最优控制：$u^*(t)=-R^{-1}B^TPx(t)=-2x_1(t)-2\sqrt{3}x_2(t)$，

最优性能指标:$J^*[x(t)]=\dfrac{1}{2}x^T(t)Px(t)=(\sqrt{3}-\dfrac{1}{2})x_1{}^2+x_1x_2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x_2{}^2$。

5-10 已知系统的状态方程：$\begin{matrix}\dot{x}_1(t)=-x_1(t)+u\\ \dot{x}_2(t)=x_1(t)\end{matrix}$，性能指标极小：

$J=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}[x^2{}_2(t)+u^2(t)]dt$ 试确定最优控制 $u*(t)$。

解：该题为无限时间状态调节器问题。由题意得：

$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, R=1$，令 $DD^T=Q$，得 $D^T=[0,1]$，

$rank[B,AB]=rank\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=2$，$rank\begin{bmatrix}D\\ DA\end{bmatrix}^T=rank\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=2$，故{A，b}可控，

{A，D}可观，故 $u^*(t)$ 存在且唯一。

令 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$，代入黎卡提方程：$PA+A^TP-Pbr^{-1}b^TP+Q=0$，

代入 A, B，Q，R 解得：$P=\begin{pmatrix}\sqrt{3}-1 & 1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}>0$,

于是最优控制：$u*(t)=-R^{-1}B^TPx(t)=(1-\sqrt{3})x_1(t)-x_2(t)$，

最优性能指标: $J^*[x(t)]=\frac{1}{2}x^T(t)Px(t)=(\sqrt{3}-1)x_1{}^2+2x_1x_2+\sqrt{3}x_2{}^2$。

5-20　　已知 $V(x)=x^T(t)\overline{P}x(t)$ 为具有 $\dot{V}(x)/V(x)\le -2\alpha$ 性质的李亚普诺夫函数。其中 $\alpha>0$，$\overline{P}$ 满足式 $\overline{P}(A+\alpha I)+(A^T+\alpha I)\overline{P}-\overline{P}BR^{-1}B^T\overline{P}+Q=0$。试用李亚普诺夫稳定性定理证明最优闭环系统是渐近稳定的。

证明：取二次型函数：$V(x)=x^T(t)\overline{P}x(t)$，对于 $\forall x\neq 0$, 由于 $\overline{P}$>0 必有 $V(x)>0$。所以 $V(x)=x^T(t)\overline{P}x(t)$ 李亚普诺夫函数。

$\dot{V}(x)=\dot{x}^T(t)\overline{P}x(t)+x^T(t)\overline{P}\dot{x}(t)$，将 $\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ u*(t)=-R^{-1}B^T\overline{P}x(t)\end{cases}$ 代入 $\dot{V}(x)$，整理得：

$\dot{V}(x)=\dot{x}^T(t)[A^{T-}\overline{P}BR^{-1}B^T+\overline{P}(A-B\dot{R}^{-1}B^T\overline{P})]x(t)=-x^T(t)[Q+\overline{P}BR^{-1}B\overline{P}]x(t)$，

又由 $\dot{V}(x)/V(x)\le -2\alpha$，知 $\dot{V}(x)+2\alpha V(x)\le 0$，代入 $V(x)$ 整理得：

$x^T(t)[Q+\overline{P}BR^{-1}B\overline{P}-2\alpha]x(t)>0$，即：$Q+\overline{P}BR^{-1}B\overline{P}>2\alpha>0$。所以知 $\dot{V}(x)<0$，为负定。

又显然 $\lim\limits_{\|x\|\to\infty}V(x)=\lim\limits_{\|x\|\to\infty}x^T(t)\overline{P}x(t)=\infty$。

根据李亚普诺夫稳定性定理，最优闭环系统大范围渐近稳定。

6-2 设有二次积分模型：$\begin{array}{l}\dot{x}_1(t)=x_2(t)\\ \dot{x}_2(t)=u(t)\\ y(t)=x_1(t)\end{array}$，$\begin{array}{l}x_1(0)=0\\ x_2(0)=1\end{array}$，性能指标：

$J=\int_0^{\infty}[y^2(t)+4u^2(t)]dt$，

试求使性能指标极小的最优控制$u^*(t)$，并求最优性能指标J^*。

解:由题意可知：

$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，$c=(1\ \ 0)$，Q=1，

$Q_1=C^TQC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$D^T=[1\ \ 0]$，R=4。

因为 rank[B AB]=rank$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$=2，rank$\begin{bmatrix}C\\ CA\end{bmatrix}$=rank$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$=2

rank$\begin{bmatrix}D^T\\ D^TA\end{bmatrix}$=rank$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$=2,

所以，{A,B}可控，{A,C}可观，{A,D}可观，故可以构造渐近稳定的最优输出调节器。

,设$P=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{pmatrix}$，解黎卡提代数方程：$PA+A^TP-PBR^{-1}B^TP+C^TQC=0$得：

得$P=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$>0，

此时：$u^*(t)=-R^{-1}B^TPx(t)=-\frac{1}{2}x_1(t)-x_2(t)$，

最优性能指标：$J^*=\frac{1}{2}x^T(0)Px(0)=2$。

6-3 已知系统的动态方程：$\begin{array}{l}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=[1\ \ 0]x_1(t)\end{array}$，性能指标：

$J=\int_0^{\infty}[100y^2(t)+u^2(t)]dt$，

试求使性能指标极小并使闭环系统渐近稳定的最优控制$u^*(t)$。

解:由题意可知：

$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，$c=(1\ \ 0)$，Q=100，

$Q_1 = C^T Q C = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ，$D^T = [10\ \ 0]$，R=1。

因为 rank[B AB]=rank$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$=2，rank$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix}$=rank$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$=2

rank$\begin{bmatrix} D^T \\ D^T A \end{bmatrix}$=rank$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$=2,

所以，{A,B}可控，{A,C}可观，{A,D}可观，故可以构造渐近稳定的最优输出调节器。

,设 $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$，解黎卡提代数方程：$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T QC = 0$ 得：

$\begin{cases} -2p_{12} - p^2{}_{12} + 100 = 0 \\ p_{11} - 3p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} = 0 \\ 2(p_{12} - 3p_{22}) - p^2{}_{22} = 0 \end{cases}$，解得 $P = \begin{pmatrix} 12 + 30\sqrt{3} & 9 \\ 9 & 3(\sqrt{3} - 1) \end{pmatrix} > 0$，

此时：$u^*(t) = -R^{-1}B^T Px(t) = -9x_1(t) - 3(\sqrt{3} - 1)x_2(t)$，将 $u^*(t)$ 代入状态方程

$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$ 得：$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -3\sqrt{3} \end{pmatrix} x(t)$，

解得闭环系统特征值为：$\lambda_1 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + j\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$\lambda_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - j\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

所以闭环系统是渐近稳定的。

……………………………………………………………………………………………

6-10　　　设用控制系统可以自动地保持潜艇的深度，潜艇从艇尾水平角 $\theta(t)$ 到实际深度 $y(t)$ 的传递函数，可以近似为：$G(s) = \dfrac{10(s+2)^2}{(s+10)(s^2+0.1)}$，试设计控制律 $\hat{\theta}(t)$，使性能指标

$J = \int_0^\infty [y(t) - \hat{y}_l]^2 + \theta^2(t)]dt$ 最小。其中希望深度 $\hat{y}_l$=100。假定，实际深度可用压力传感器测量，并可用于反馈。

解：

……………………………………………………………………………………………

8-2　　　　设二阶系统方程：$\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t) \end{array}$，控制约束 $|u(t)| \le 1$。性能指标

$J = \dfrac{1}{2}\int_0^{t_f} x_1^2(t)dt$ 式中 t_f 自由。试验证系统能否出现奇异弧。

解: 本例为线性定常系统，积分型性能指标、t_f 自由的最优控制问题。

构造哈密顿函数：$H=\frac{1}{2}{x_1}^2+\lambda_1 x_2+\lambda_2(-x_1+u)$，

根据极小值原理可知，相应于正常弧段的最优控制为如下邦-邦控制：

$u^*(t)=-\text{sgn}\{\lambda_2(t)\}$

邦-邦弧段满足下列正则方程：$\begin{array}{l}\dot{x}_1(t)=x_2(t), \quad \dot{x}_2(t)=-x_1(t)-\text{sgn}\{\lambda_2(t)\} \\ \dot{\lambda}_1(t)=-x_1+\lambda_2, \ \dot{\lambda}_2(t)=-\lambda_1\end{array}$

函数 H 线性依赖于 u，所以可能存在奇异弧。

在奇异弧上必有：$\begin{cases}\dfrac{\partial H}{\partial u}=\lambda_2(t)=0 \\ \dfrac{d}{dt}(\dfrac{\partial H}{\partial u})=\dot{\lambda}_2(t)=-\lambda_1(t)=0 \\ \dfrac{d^2}{dt^2}(\dfrac{\partial H}{\partial u})=-\dot{\lambda}_1(t)=x_1(t)-\lambda_2(t)=0\end{cases}$

解方程组知：得异最优解：$\begin{cases}\lambda_1(t)=0 \\ \lambda_2(t)=0 \\ x_1(t)=0 \\ x_2(t)=0 \\ u(t)=0\end{cases}$，即系统有奇异解。

8-6 已知系统方程 $\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1 \\ -1\end{bmatrix}u(t)$，

控制约束 $|u(t)|\le 1$。性能指标 $J=\int_0^{t_f}x_1^2(t)dt$ 试用奇异调节器方法求奇异最优控制 $u^*(t)$.

解：首先对原系统状态方程进行线性变换。令 $\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x(t)-\begin{bmatrix}1 \\ -1\end{bmatrix}u_1(t) \\ \dot{u}_1(t)=u(t)\end{cases}$

得修正奇异调节器系统状态方程：$\dot{x}_1(t)=A_1(t)x_1(t)+B_1(t)u_2(t)$，式中

$$\begin{cases}H(t)=Q(t)B(t)=\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} \\ R(t)=B^T(t)Q(t)B(t)=1 \\ B_1(t)=A(t)B(t)-\dot{B}(t)=\begin{bmatrix}-1 \\ 0\end{bmatrix} \\ A_1(t)=\dot{A}(t)-B_1(t)R^{-1}(t)H^T(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \\ u_2(t)=u_1(t)+R^{-1}(t)H^T(t)x_1(t)=u_1(t)+\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x_1(t)\end{cases}$$

即：$\dot{x}_1(t)=\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}u_1(t)$

设 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$，解黎卡提代数方程：

$P[A-B_1R^{-1}H^T]+[A^T-B_1R^{-1}H^T]^TP-PB_1R^{-1}B_1^TP+Q-HR^{-1}H^T=0$；

解得：$P=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}>0$,

此时 $u^*_1(t)=-K_1(t)A(t)x_1(t)$，式中 $K_1(t)=[B^TQB]^{-1}B^T[A^TP+Q]=\begin{bmatrix}-1 & -2\end{bmatrix}$,

即 $u^*_1(t)=-K_1(t)x_1(t)=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x_1(t)$，

则原奇异调节器的最优控制 $u^*(t)=-K_1(t)A(t)x(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x(t)=x_2(t)$

9-3 设随机系统状态方程为：

$$\dot{x}(t)=F(t)x(t)+G(t)u(t)+w(t)$$

其状态转移矩阵为 $\phi(t,\tau)$，且满足下列方程：

$$\frac{d}{d\tau}\phi^T(t,\tau)=-F^T(\tau)\phi(T,\tau),\phi(\tau,\tau)=I$$

试证明：x(t)的均值和方差阵分别为：

$$E\{x(t)\}=\phi(t,t_0)E\{x(t_0)\}+\int_{t_0}^{t_f}\phi(t,\tau)G(\tau)E\{w(\tau)\}d\tau$$

$$P_X(t)=\phi(t,t_0)P_0\phi^T(t,t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\phi(t,\tau)G(\tau)Q_0(\tau)G^T(\tau)\phi^T(t,\tau)d\tau$$

证明：x(t)的均值满足以下矩阵微分方程：

$$\frac{d}{dt}[E[x(t)]]=F(t)Ex(t)+G(t)E[w(t)]$$

其解为：

$$E\{x(t)\}=\phi(t,t_0)E\{x(t_0)\}+\int_{t_0}^{t_f}\phi(t,\tau)G(\tau)E\{w(\tau)\}d\tau$$

证得一式。

$P_X(t)=Var[x(t_0)]$

$=E[(x_0-E[x(t_0)])(x_0-E[x(t_0)])^T]$

应满足

$\dot{P}_x(t)=F(t)P_x(t)+P_x(t)F^T(t)+G(t)Q_0(t)G^T(t)$

$P_X(t,t+\tau)=P_x(t)\phi^T(t+\tau,t)$

又

$$\frac{d}{d\tau}\phi^T(t,\tau)=-F^T(\tau)\phi(T,\tau),\phi(\tau,\tau)=I$$

可得

$$P_X(t)=\phi(t,t_0)P_0\phi^T(t,t_0)+\int_{t_0}^{t_f}\phi(t,\tau)G(\tau)Q_0(\tau)G^T(\tau)\phi^T(t,\tau)d\tau$$

证毕。

9-5 设随机系统方程为 $\begin{cases}\dot{x}(t)=u(t)+w(t)\\ z(t)=x(t)+v(t)\end{cases}$，式中 $w(t)$ 与 $v(t)$ 为互不相关的零均值高斯白噪声，其方差为 q^2 和 r^2。试求最优控制 $u^*(t)$，使下列性能指标极小：

$$J=\frac{1}{2}E\left\{x^2(t_f)+\int_0^{t_f}\rho u^2(t)dt\right\}$$

式中 $\rho>0$。

解：依据定理 9-7（线性连续随机系统分离定理），可知

F＝1，G＝1，H＝1，Q＝0，R＝ρ

$$u^*(t)=-K(t)\hat{x}(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

（1）式中状态反馈增益矩阵 $K(t)=R^{-1}(t)G^T(t)P(t)=\frac{1}{\rho}P(t) \cdots\cdots\cdots\cdots$ （2）

而 $P(t)$ 满足下列 Riccati 矩阵微分方程及其边界条件：

$$\begin{aligned}&-\dot{P}(t)=2P(t)-\frac{1}{\rho}P^2(t)\\ &P(t_f)=P_T\end{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

解出（3）式微分方程： $P(t)=\frac{2\rho}{1-e^{2(t-t_f)}}+P_T \cdots\cdots\cdots\cdots$ （4）

将（4）式代入（2）式得到：$K(t)=\frac{1}{\rho}P(t)=\frac{2}{1-e^{2(t-t_f)}}+\frac{1}{\rho}P_T \cdots\cdots\cdots\cdots$ （5）

$\hat{x}(t)$ 由以下 Kalman 滤波方程给出：

$$\begin{aligned}&\dot{\hat{x}}(t)=\hat{x}(t)+u(t)+K_1(t)\left[z(t)-\hat{x}(t)\right]\\ &\hat{x}(t_0)=m_0\end{aligned} \cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

（6）式中 Kalman 增益矩阵 $K_1(t)=\frac{1}{r^2}P_1(t) \cdots\cdots\cdots$ （7）

而 $P_1(t)$ 满足以下 Riccati 矩阵微分方程及初始条件：

$$\dot{P}_1(t) = 2P_1(t) - \frac{1}{r^2}P_1^2(t) + q^2 \qquad \cdots\cdots\cdots \text{(8)}$$
$$P_1(t_0) = P_0$$

解出（8）式微分方程： $P_1(t) = \dfrac{a(1+\theta a)}{1-\theta a} + P_0$，其中$\theta$ $-\dfrac{2}{r^2}(t_f - t_0)$, $a = r\sqrt{r^2+q^2}$
…… （9）

将（9）式代入（7）式得到：$K_1(t) = \dfrac{1}{r^2}P_1(t) = \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{a(1+\theta a)}{1-\theta a} + P_0\right]$ ……… （10）

其中θ $-\dfrac{2}{r^2}(t_f - t_0)$, $a = r\sqrt{r^2+q^2}$

现在，只要由（10）式代入（6）式即可解出： $\hat{x}(t) =$ ……… （11）

将（5）式和（11）代入（1）式，即可算出最优控制

$$u^*(t) = -K(t)\hat{x}(t) = \cdots\cdots$$

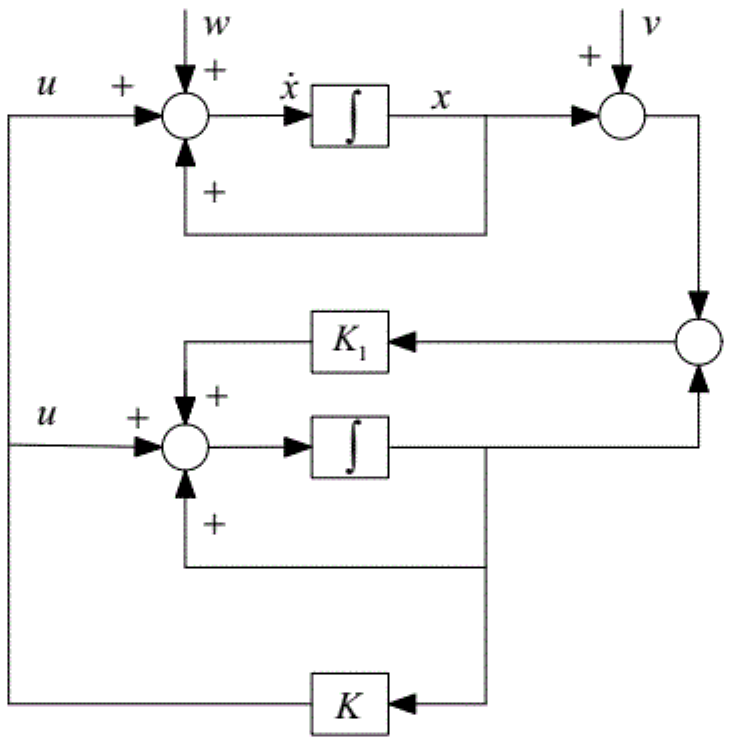


图 9.5 随机输出反馈调节器结构图

9-6 设离散系统状态方程和量测方程为：$\begin{cases} x(k+1) = 2x(k) + u(k) \\ z(k) = x(k) + v(k) \end{cases}$，式中$v(k)$是零均值高斯白噪声序列，其方差为 5。已知$v(k)$与随机初始状态$x(0)$不相关，且

$E\{x(0)\} = 0, P(0\,|\,0\_) = E\{\widetilde{x^2}(0)\} = 50,$ 性能指标为：$J = \dfrac{1}{2}E\left\{x^2(4) + \sum_{k=0}^{3}u^2(k)\right\}$，

试求最优控制序列$u^*(k)$，k=0,1,2,3。

解：本题为 4 级决策过程。由题意$\Phi\{k+1,k\}=2, B\{k\}=1$，$H\{k\}=1,$

则由估计误差协方差方程（9-206）：

$$P\{k+1|k\}=\Phi(k+1,k)P(k|k-1)\Phi^T(k+1,k)+Q_0(k)=$$

$$\Phi(k+1,k)P(k|k-1)H^T(k)\bullet[H(k)P(k|k-1)H^T(k)+R_0(k)]^{-1}H(k)P(k|k-1)\Phi^T(k+1,k)$$

可得：$P(k+1|k)=P(k|k-1)+5$，

由卡尔曼增益阵方程（9-205），得：

$$K^{'}(k)=P(k|k-1)P(k|k-1)^{-1}=1$$

根据题意，$F=1,Q(k)=0,R(k)=1$，由黎卡提方程（9-202）得：

$P(k)=P(k+1)-4P^2(k+1)[1+4P(k+1)]^{-1}$，由状态反馈增益阵表达式（9-201），得：

$$K(k)=2[1+4P(k+1)]^{-1}P(k+1)$$

计算结果表

k	P(k|k-1)	K'(k)	P(k)	K(k)
4	70		1	
3	65	1	0.200	0.400
2	60	1	0.111	0.222
1	55	1	0.077	0.154
0	50	1	0.0428	0.107

因为$\hat{x}(0|0)=x(0)=0$，所以各级最优控制为：

$$\begin{cases} u^*(0)=-0.107\hat{x}(0|0\_)=0 \\ u^*(1)=-0.154\hat{x}(1|0\_) \\ u^*(2)=-0.222\hat{x}(2|1\_) \\ u^*(3)=-0.400\hat{x}(3|2\_) \end{cases}$$