第三节 全 微 分

3.1 全微分的概念

3.2 函数可微的条件

*3.3 全微分在数值计算中的应用

3.1 全微分的概念

设二元函数$z=f(x, y)$在点(x, y)的某邻域内有定义, 自变量x和y分别取得改变量$\triangle x$和$\triangle y$时, 称

$$f(x+\triangle x, y+\triangle y)-f(x, y)$$

为函数在点(x, y)处对应于自变量增量$\triangle x$, $\triangle y$的全增量, 记为$\triangle z$, 即

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

称 $f(x+\triangle x, y)-f(x, y)$为函数在点$(x, y)$对自变量 x 的偏增量, 记为$\triangle_x z$, 即

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

称 $f(x, y+\triangle y)-f(x, y)$为函数在点$(x, y)$对自变量$y$的偏增量, 记为$\triangle_y z$, 即

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

在一元函数$y=f(x)$中，如果函数在x_0点可导，则函数的增量

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

即增量可以表示成△x的线性函数与△x的高阶无穷小量的和. 对于二元函数$z=f(x, y)$，若在点(x, y)处$f_x(x, y)$与$f_y(x, y)$都存在，则有

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + o(\Delta x);$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y)\Delta y + o(\Delta y).$$

那么我们希望全增量△z也能够表示成△x和△y的线性函数——全微分问题.

Δz的线性主部

定义: 若函数 $z = f(x, y)$ 在 (x, y) 的某一邻域内的**全增量** $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$ 可表示成

$$\Delta z = \boxed{A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y} + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于 $\Delta x, \Delta y$，仅与 x, y 有关，则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) **可微**，$A\Delta x + B\Delta y$ 称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的**全微分**，记作

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = A\Delta x + B\Delta y$$

若函数在区域 D 内每一点都可微，则称此函数**在 D 内可微**.

3.2　函数可微的条件

1

定理(必要条件1)

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(x,\ y)$ 可微 $\longrightarrow$ 函数在该点连续

由微分定义：　$\Delta z=A(x,y)\Delta x+B(x,y)\Delta y+o(\rho)$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=\lim_{\rho\to 0}\left[(A\Delta x+B\Delta y)+o(\rho)\right]=0$$

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

得 $$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f(x+\Delta x,y+\Delta y)=f(x,y)$$

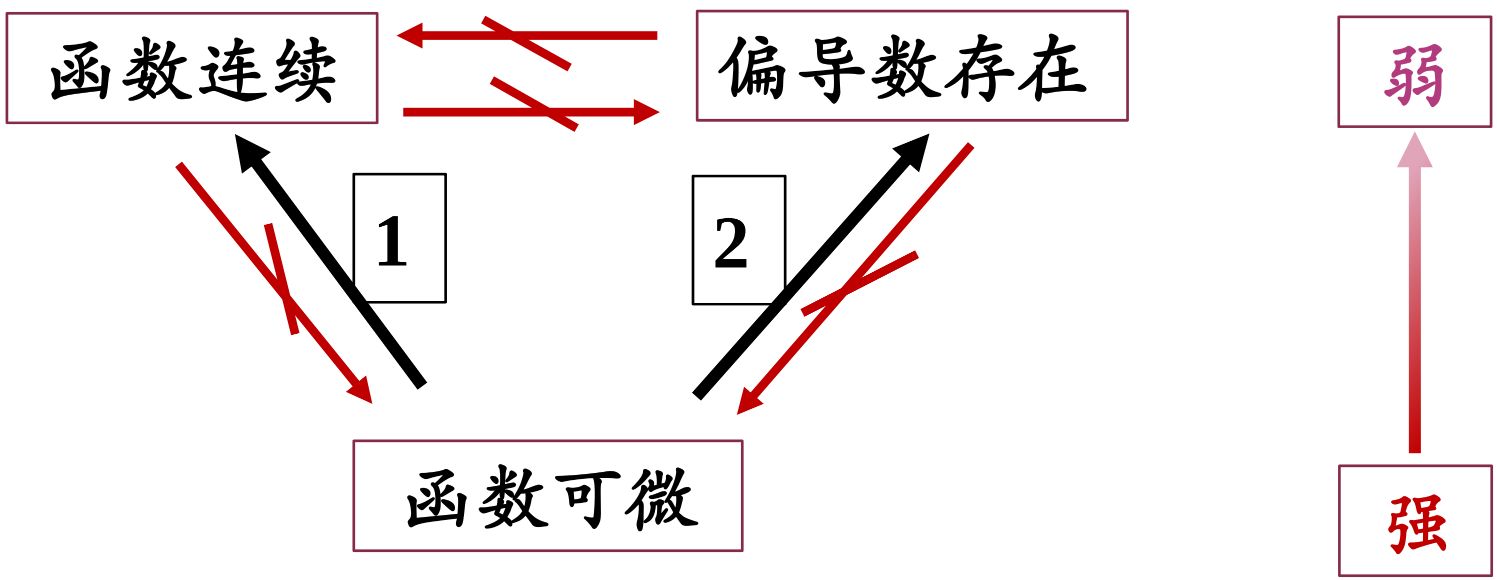
定理(必要条件2) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y) **可微**，

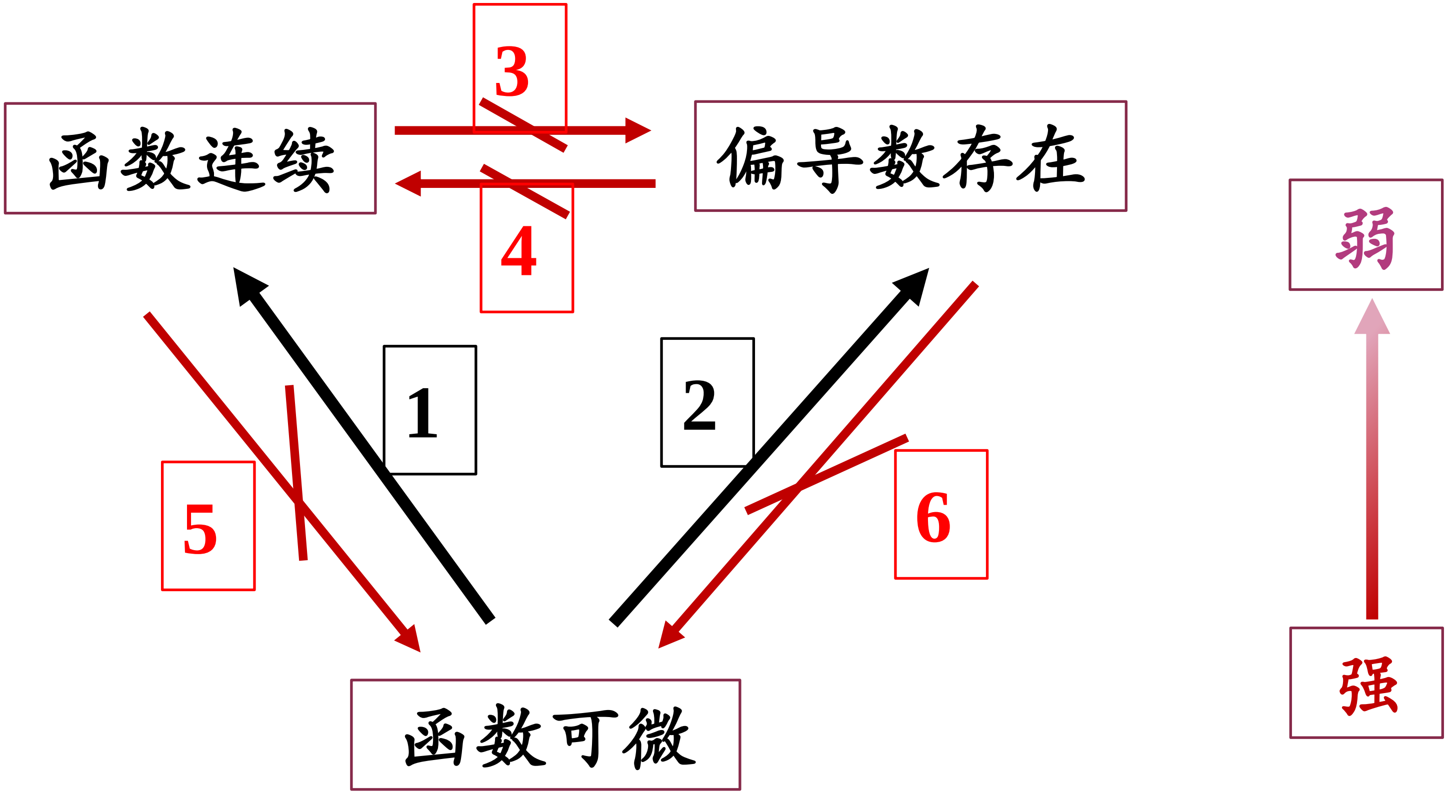
则函数在该点的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必存在,且有

$$\mathrm{d}z=\mathrm{d}f=A\Delta x+B\Delta y$$

$$\mathrm{d}\,z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

$\boxed{2}$





3 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 (0, 0)点

用偏导数定义证明

4 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 (0, 0)点

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ **在 (0, 0)点连续，但偏导数不存在.**

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}-0}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

函数连续　　　　偏导数存在　　　　5 6

5　　函数可微　　6

反例： 函数
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 (0,0) 处连续，偏导数存在，但不可微.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 (0,0) 连续:

解 记 $z=f(x,y)$，则

$$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-0=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

由 $0\leqslant|\Delta x\cdot\Delta y|\leqslant(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$ 得

$$0\leqslant|\Delta z|\leqslant\frac{\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

由 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=0$ 得

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0.$$

因此，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 (0,0) 偏导数存在:

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 (0,0) 不可微.

$$\boxed{\text{可微}\Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\rho}=0}$$

$$\begin{cases}\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)\\ \rho=\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

按偏导数定义算得

$$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0.$$

由原点(0,0)处沿直线 $y=x$ 有 $\Delta y=\Delta x$，及上面 Δz 的表达式有

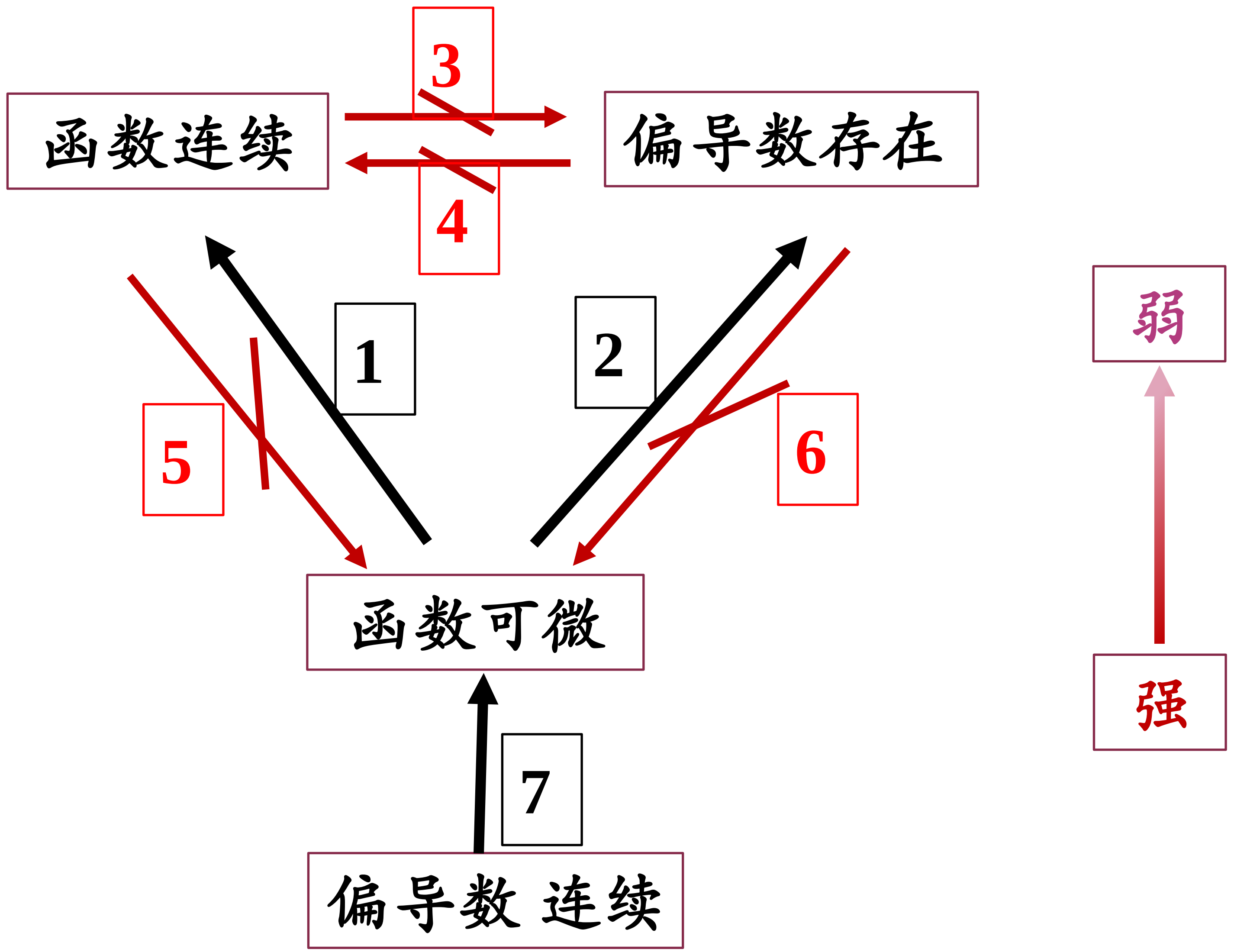
$$\lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\Delta z-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}-(0+0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\neq 0.$$

因此,函数在点 (0,0) 不可微.

3.2 函数可微的条件



7

定理 (充分条件) 若函数 $z = f(x,y)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x,y)$ 连续, 则函数在该点可微分.

证: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)] \text{ ①}$$

$$+ [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)] \text{ ②}$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$$\boxed{(0 < \theta_1, \theta_2 < 1)}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) \\ \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y = f_y(x,y) \end{cases}$$

7

定理 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 $P(x,y)$ 连续，则函数在该点**可微分**.

证： $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ $\boxed{(0<\theta_1,\theta_2<1)}$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$$= [f_x(x,y)+\alpha_1]\Delta x + [f_y(x,y)+\alpha_2]\Delta y$$

$$= f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y)+\alpha_1 \\ f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_y(x,y)+\alpha_2 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_2 = 0$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_1 = 0,\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_2 = 0$$

$$\Delta z = \cdots$$

$$= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

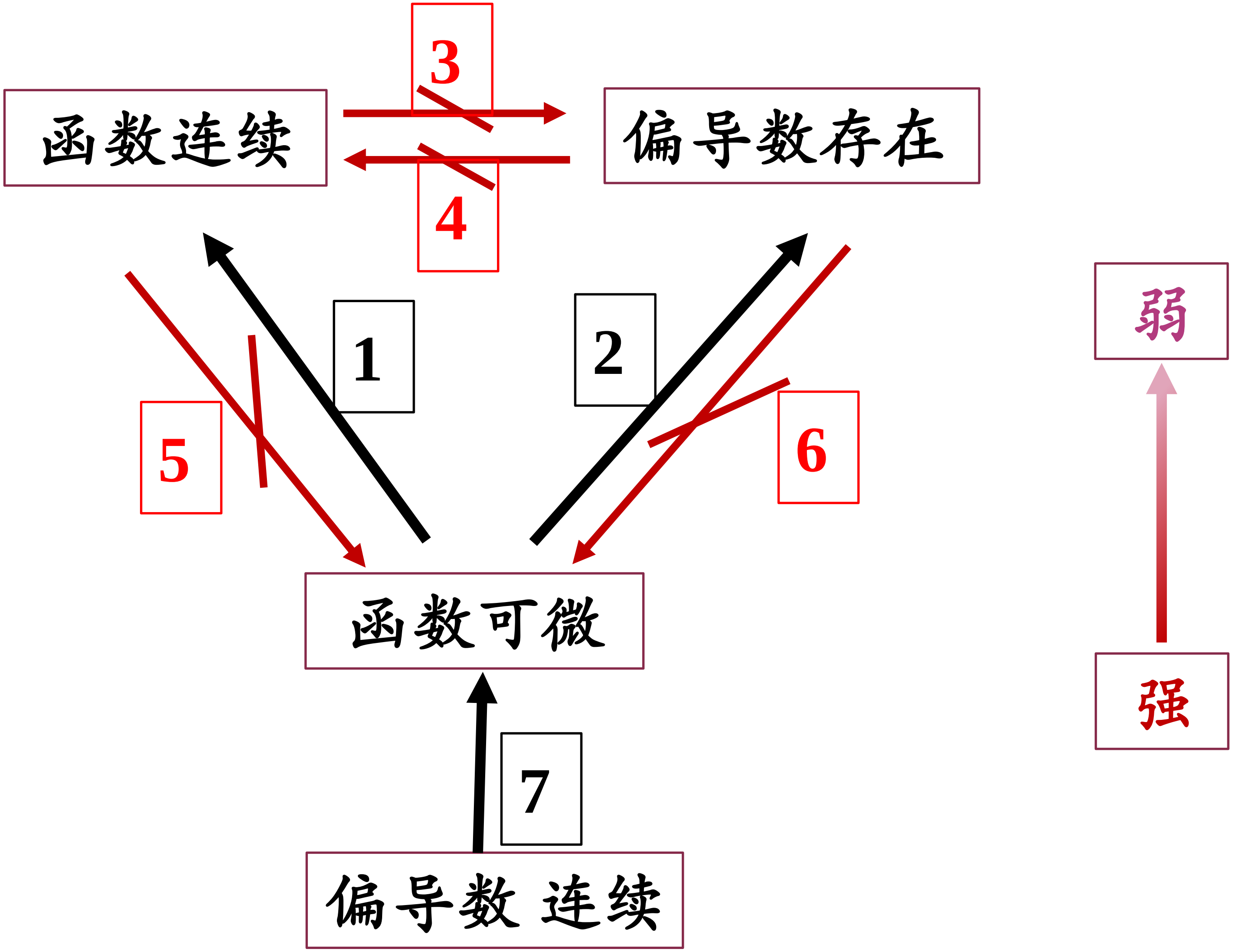
$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_1 \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} + \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha_2 \cdot \frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0$$

$$\therefore \Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o(\rho)$$

所以函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微.

函数可微的条件



$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

分别令 $z=x$ 和 $z=y$,
则 $dz=\Delta x$, $dz=\Delta y$

$$dz = \boxed{\frac{\partial z}{\partial x}dx} + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

叠加原理

推广：类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 的全微分为

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示, 于是

$$du = \boxed{\frac{\partial u}{\partial x}dx} + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

例1. 计算函数 $z = e^{xy}$ 在点 (2,1) 处的全微分.

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)} = e^2, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)} = 2e^2$$

$$\therefore \quad \left.\mathrm{d}\,z\right|_{(2,1)} = e^2\,\mathrm{d}\,x + 2e^2\,\mathrm{d}\,y = e^2(\mathrm{d}\,x + 2\mathrm{d}\,y)$$

例2. 计算函数 $u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$ 的全微分.

解:

$$\mathrm{d}u = 1\cdot\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + z\,e^{yz}\right)\mathrm{d}y + y\,e^{yz}\,\mathrm{d}z$$

例3 求 $u=\sin(x+y^2-\mathrm{e}^z)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 与全微分.

*3.3 全微分在数值计算中的应用

1. 近似计算

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}\,z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}\,z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算; 误差分析)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

内容小结

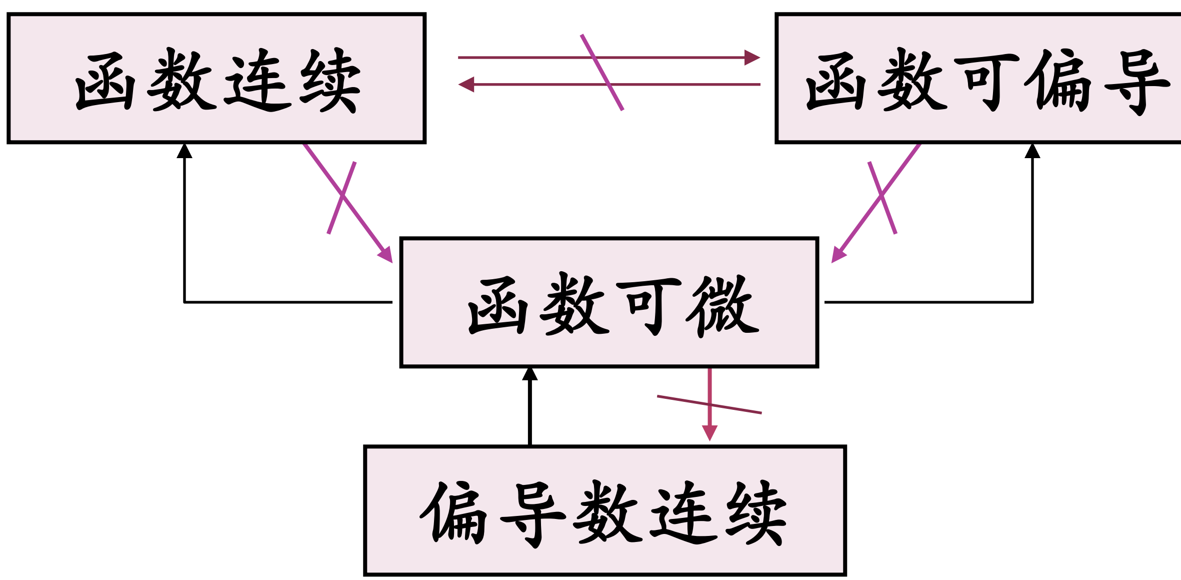
1. 微分定义: $(\, z = f(x,y) \,)$

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系:



3. 微分应用

- **近似计算**

$$\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

$$\approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

思考与练习

1. 选择题

函数 $z=f(x,y)$在 (x_0,y_0) 可微的充分条件是(D)

(A) $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续；

(B) $f_x'(x,y),\ f_y'(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域内存在；

(C) $\Delta z-f_x'(x,y)\Delta x-f_y'(x,y)\Delta y$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时是无穷小量；

(D) $\dfrac{\Delta z-f_x'(x,y)\Delta x-f_y'(x,y)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

当 $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时是无穷小量.

2. 设 $f(x,y,z)=\dfrac{x\cos y+y\cos z+z\cos x}{1+\cos x+\cos y+\cos z}$，求 $\mathrm{d}f\big|_{(0,0,0)}$.

注意: x, y, z 具有轮换对称性

解: $\because\ f(x,0,0)=\dfrac{x}{3+\cos x}$

$$\therefore\ f_x(0,0,0)=\left(\frac{x}{3+\cos x}\right)'\Bigg|_{x=0}=\frac{1}{4}$$

利用轮换对称性，可得

$$f_y(0,0,0)=f_z(0,0,0)=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ \mathrm{d}f\big|_{(0,0,0)}=f_y(0,0,0)\,\mathrm{d}x+f_y(0,0,0)\,\mathrm{d}y+f_z(0,0,0)\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$$

*附加题

证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在点 (0,0) 连续且偏导数存在,但偏导数在点 (0,0) 不连续,而 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微 .

证: 1) 因 $\left| xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq |\, xy \,|$

所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y)=0 = f(0,0)$

故函数在点 (0, 0) 连续 ;

***附加题**

证明函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

在点 (0,0) 连续且偏导数存在,但偏导数在点 (0,0) 不连续, 而 $f(x,y)$ 在点 (0,0) 可微 .

2) $f_x(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$

$f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0$

同理 $f_y(0,0)=0.$

3) 当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f_x(x,y) = y \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2 y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

当点$P(x,y)$沿射线$y=|x|$趋于$(0,0)$时,

$$\lim_{(x,|x|)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(|x| \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|} - \frac{|x|^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3} \cdot \cos\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\right)$$

极限不存在，$\therefore f_x(x,y)$在点(0,0)不连续；

同理，$f_y(x,y)$在点(0,0)也不连续.

4) 下面证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ **可微：**

令 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$， **则**

$$\left|\frac{\Delta f-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right|$$

$$=\left|\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\rho}\sin\frac{1}{\rho}\right|\le|\Delta x|\xrightarrow{\rho\to 0}0$$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$点可微 .

说明：此题表明, 偏导数连续只是可微的充分条件.