2016 级《高等数学(A)I》

一、选择题与填空题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
C	B	B	e^5	-1	n^2	C	$x+e^x+c$	6	$\frac{\pi}{6}$

1．已知数列$\{x_n\}=[1+(-1)^n]^n$，则【答案填入上表】.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq \infty$，但是数列无界　　(D) 数列发散但有界

2. 关于函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e}{x(x-1)}$ 的间断点，判断正确的是【答案填入上表】.

(A) $x=0$ 是可去间断点， $x=1$ 是无穷间断点

(B) $x=0$ 是无穷间断点， $x=1$ 是可去间断点

(C) $x=0$ 是跳跃间断点， $x=1$ 是无穷间断点

(D) $x=0$ 是无穷间断点， $x=1$ 是跳跃间断点

3．当 $x\to 0$ 时，比 x^2 更高阶的无穷小量为【答案填入上表】.

(A) x^2+x^3　(B) $\sin x-\tan x$　(C) $1-\cos x$　(D) $e^{x^2}-1$

4．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n-3}\right)^{n+4}=$【答案填入上表】.

5． $y=x^2+ax+b$ 与 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，则 $a=$【答案填入上表】.

6. 设 $T=\cos(n\theta)$， $\theta=\arccos x$，则 $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}=$【答案填入上表】.

7. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的某个邻域内连续，且 $f(a)$ 为极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时有【答案填入上表】.

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\geq 0$　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\leq 0$

(C) $\dfrac{[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2}\leq 0$　　(D) $\dfrac{[f(x)-f(a)]}{(x-a)^2})\geq 0$

8. 已知 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$【答案填入上表】.

9. 星形线 $x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$ 的全长为【答案填入上表】.

10. 广义积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=$**【答案填入上表】**.

二、**计算下列各题**

1. 计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin x-x\mathrm{d}x}{x^2\tan x(e^x-1)}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x(\sin x-x)\mathrm{d}x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{12x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x}{24x}=-\frac{1}{24}$

2. 设$\begin{cases}x=\sin(t^2)\\ y=t\sin(t^2)-\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\sin u\mathrm{d}u\end{cases}$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x=2t\cos t^2\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}y=(\sin t^2+2t^2\cos t^2-\frac{1}{2t}\sin t^2\cdot 2t)\,\mathrm{d}t=2t^2\cos t^2\mathrm{d}t\end{cases}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2t^2\cos t^2\mathrm{d}t}{2t\cos t^2\mathrm{d}t}=t$$

3. 计算不定积分$\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x$.

解：$\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x+\sin x}\mathrm{d}(x+\sin x)\quad=\ln|x+\sin x|+c$

4. 计算不定积分$\int x^2e^{-x}\mathrm{d}x$.

解：

原式$=-x^2e^{-x}+\int 2xe^{-x}\mathrm{d}x=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}+\int e^{-x}\mathrm{d}x=-x^2e^{-x}-2xe^{-x}-e^{-x}+c$

5. 计算定积分$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\arctan x)\sqrt{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

解：原式$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\arctan x)\sqrt{2}|\cos x|\mathrm{d}x$.

$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\arctan x\cos x\mathrm{d}x=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x+0=2\sqrt{2}$

6. 计算定积分$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$.

解：$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\mathrm{d}x=2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\mathrm{d}\sqrt{x}$

$$=2\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}\arcsin\sqrt{x}=(\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}=\frac{\pi^2}{12}$$

或令$t=\sqrt{x}$，

原式$=\int_{0.5}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{\arcsin t}{t\sqrt{1-t^2}}2t\mathrm{d}t=\int_{0.5}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}2\arcsin t\ \mathrm{d}\arcsin t\ =(\arcsin\sqrt{x})^2\Big|_{0.5}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\pi^2}{12}$

7. 求曲线$f(x)=x-\left(x-1\right)^{\frac{1}{3}}$的凹凸区间和拐点.

解：定义域为 R，$f'(x)=1-\frac{1}{3}\left(x-1\right)^{\frac{-2}{3}}$, $f''(x)=\frac{2}{9}\left(x-1\right)^{\frac{-5}{3}}, (x\neq 1)$，无二阶导数等于零的点；

易见$x\in(-\infty,1)$时, $f''(x)<0$，曲线为凸；$x\in(1,+\infty)$时, $f''(x)>0$曲线为凹；拐点为$(1,1)$

8. 已知函数$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$，求$f^{(n)}(x)$.

解：$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right]$，又$\left[\frac{1}{x+a}\right]^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$，故

$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{4}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-3)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right]=\frac{(-1)^n n!}{4}\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

三、完成下列各题

1.通过研究一组学生的学习行为，总结得到公式：$f(t)=-0.1t^2+2.8t+50,$ 其中$f(t)$是对学生接受能力的一种度量，t是提出一个新概念后经过的时间(单位：分钟). 试求：(1) t在何范围内，学生的接受能力随t增加而提高? (2) 对于最难的概念，教师应在提出后经过多长时间讲解？ (3) 若有一个新概念需要学生具有 70 的接受能力，那么它是否适合对这组学生讲授呢？为什么？

解： (1)由 $f(t)=-0.1t^2+2.8t+50$ 可知 $f'(t)=-0.2t+2.8$，可求得驻点 $t=14$

且当 $0<t<14$ 时 $f'(t)>0$， $t>14$ 时 $f'(t)<0$，

因此当 $0<t<14$ 时，学生的接受能力随 t 增加而提高；

(2)对于最难的概念，教师应在学生接受能力最强的时候提出，即当 $f(t)$ 达到最大值时，由(1)可知 $t=14$ 时达到最大，故而教师应在概念提出后经过 14 分钟时间时讲解；

(3) 因为 $t=14$ 时学生的接受能力达到最大，最大值为 69.4<70。对于需要 70 的接受能力的新概念不适合对这组学生讲授。

2. 已知 $y=x^2, x=a, y=0, (a>0)$ 所围成的平面图形为 D.试求： (1) D 绕 x 轴旋转一周，所得旋转体的体积； (2) D 绕 y 轴旋转一周，所得旋转体的体积；

(3) 若上述两个旋转体的体积相等， a 取何值？

解： (1) D 绕 x 轴旋转一周，所得旋转体的体积 $V_1=\int_0^a \pi x^4 \mathrm{d}x=\frac{\pi}{5}a^5$

(2) D 绕 y 轴旋转一周，所得旋转体的体积 $V_2=\pi a^4-\int_0^{a^2}\pi y \mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}a^4$

(3) 由 $V_1=V_2$ 可得 $\frac{\pi}{5}a^5=\frac{\pi}{2}a^4$，所以有 $a=\frac{5}{2}$

3.拉格朗日中值定理是微分中值定理的核心，其在微积分理论系统中占有重要地位.(1) 叙述拉格朗日中值定理内容(写清条件和结论)；

(2) 证明拉格朗日中值定理.

解：(1) 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 在开区间 (a, b) 内可导, 那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使得等式 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$ 成立.

(2) 证明：令 $\varphi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ （或 $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$）

容易验证函数 $\varphi(x)$ 适合罗尔定理的条件：

在闭区间 $[a, b]$ 上连续，在开区间 (a, b) 内可导，$\varphi(a)=\varphi(b)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$ （或 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$）

且$\varphi'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$；根据罗尔定理，可知在开区间$(a,b)$内至少有一点$\xi$，使

$$\varphi'(\xi)=0\text{，即 } f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

由此得$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$，定理证毕.

注：如果结论写为$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，“自然”的函数构造是

$\varphi(x)=(f(b)-f(a))x-f(x)(b-a)$