第三节　二重积分的应用

一、立体体积

二、曲面的面积

三、平面薄片的质心

四、平面薄片的转动惯量

五、平面薄片对质点的引力

1. 能用重积分解决的实际问题的**特点**

所求量是 $\left\{\begin{array}{l}\text{分布在有界闭域上的整体量} \\ \text{对区域具有可加性}\end{array}\right.$

2. 用重积分解决问题的**方法**

- 用微元分析法 (元素法)
- 从定积分定义出发 建立积分式

3. 解题**要点**

画出积分域、选择坐标系、确定积分序、

定出积分限、计算要简便

微元法

要求整体量U, 若U对于平面区域D具有可加性, 且U相对于小区域 $\Delta\sigma_i$ (用相同符号表示其面积)的部分量 ΔU_i 的主要部分可以用 $f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$ 近似表示，其中 $(x_i, y_i) \in \Delta\sigma_i$ ，则U可用二重积分表示为:

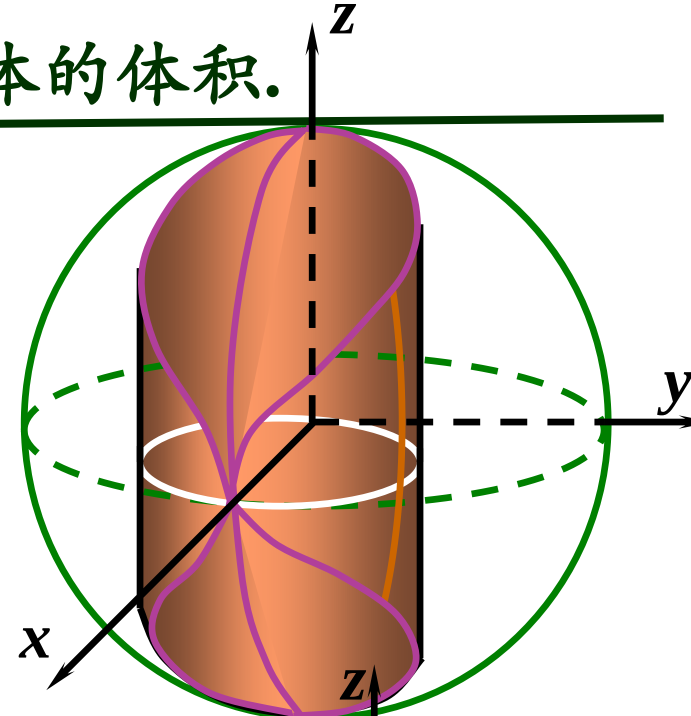
$$U = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$$

称 $\mathrm{d}U = f(x, y)\mathrm{d}\sigma$ 为所求量U的微元，或元素. 如面积微元$\mathrm{d}S$，体积微元$\mathrm{d}V$等.

1. 体积

根据二重积分的几何意义，$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$表示以$\boldsymbol{f(x,y)}$为顶面，以$\boldsymbol{f(x,y)}$在$\boldsymbol{xOy}$上的投影区域$D$为底面的曲顶柱体的体积的代数和. 因此, 利用二重积分可以计算空间曲面所围立体的体积.

例. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$所截得的(含在柱面内的)立体的体积.



解: 设 $D: 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

由对称性可知

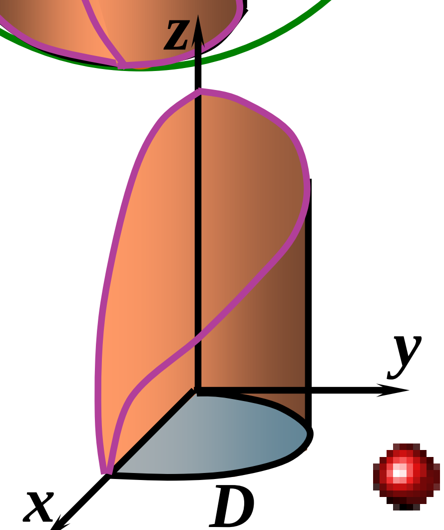
$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$



复习：曲面一点处的法向量

1) 隐式情况．空间光滑曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$

曲面 Σ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的法向量

$$\vec{n}=(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0))$$

2) 显式情况. 空间光滑曲面 $\Sigma: z=f(x,y)$

法向量 $\vec{n}=(-f_x,-f_y,1)$

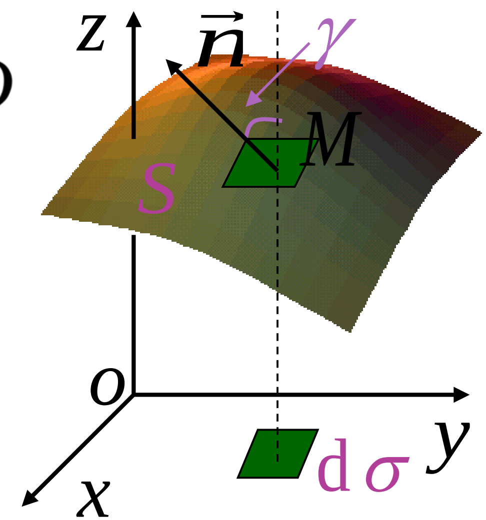
法线的方向余弦

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\quad \cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}$$

2. 曲面的面积

设光滑曲面 $S: z = f(x, y)\,, (x, y) \in D$

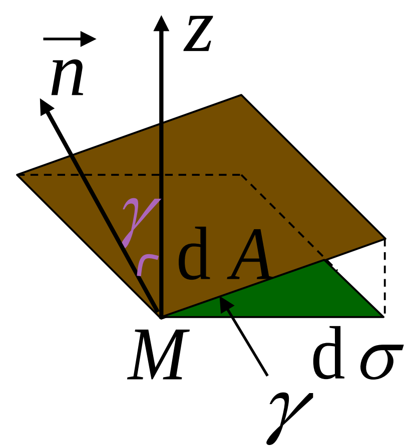


则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x, y, z)$ 处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累而成.

设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}}$$



$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}\;\mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)

$S: z = f(x,y)\,,\,(x,y)\in D$

故有曲面面积公式

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x,y) + f_y^{\,2}(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

即

$$\boxed{A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

若光滑曲面方程为 $x = g(y,z)\,,\,(y,z)\in D_{yz}$,则有

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

若光滑曲面方程为 $y = h(z,x)\,,\,(z,x)\in D_{zx}$,则有

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$A=\iint_{D}\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若光滑曲面方程为隐式 $F(x,y,z)=0$，且 $F_z\neq 0$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z},\qquad (x,y)\in D_{xy}$$

$$\therefore\quad A=\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{F_x^{\ 2}+F_y^{\ 2}+F_z^{\ 2}}}{|F_z|}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例1. 计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 A.

解: 曲面在 xoy 面上投影为 $D: x^2 + y^2 \le R^2$, 则

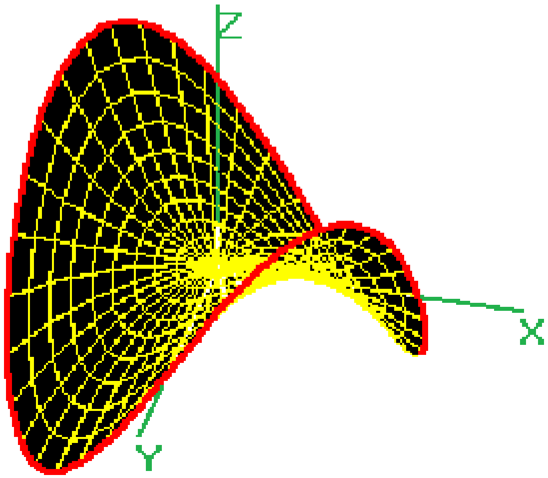
?

$$A = \iint_D \sqrt{1 + z_x{}^2 + z_y{}^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{1 + r^2}\, r\, \mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi\left[(1 + R^2)^{3/2} - 1)\right]$$



例2. 计算半径为 a 的球的表面积.

解： 球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$

上半球面方程 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$

$$z_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\qquad z_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

$$A=2\iint_D\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 计算半径为 R 的球的表面积.

解：球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$

$$A=2\iint_D\sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\cdot4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R\sqrt{\frac{R^2}{R^2-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=4\pi R^2$$

3. 平面薄片的质心

若物体为占有xoy面上区域D的平面薄片,其面密度为$\mu(x,y)$,则它的质心坐标为

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_y}{M}$$

$$\bar{y}=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=\frac{M_x}{M}$$

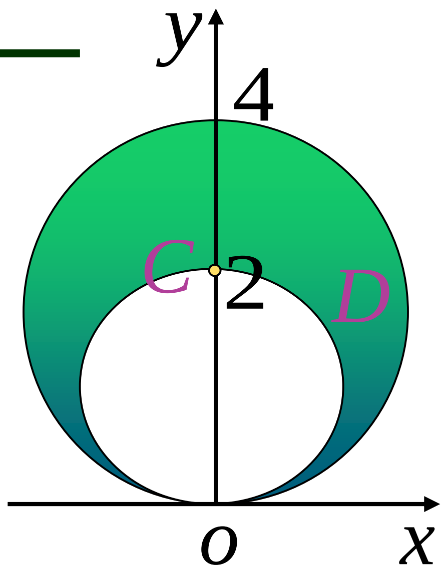
M_x — 薄片对 x 轴的静力矩

M_y — 薄片对 y 轴的静力矩

μ =常数时，得 D 的形心坐标: (设A 为 D 的面积)

$$\bar{x}=\frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A},\quad \bar{y}=\frac{\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}$$

例3. 求位于两圆 $r=2\sin\theta$ 和 $r=4\sin\theta$ 之间均匀薄片的质心.



解: $\bar{x}=\dfrac{1}{A}\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

利用对称性可知 $\bar{x}=0$

$$\bar{y}=\frac{1}{A}\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{3\pi}\iint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{7}{3}$$

4. 平面薄片的转动惯量

在力学上，将一个质点的质量m与它到转动轴l的距离r的平方之积称为质点对轴l的**转动惯量**，记为I_l，即 $I_l = mr^2$.

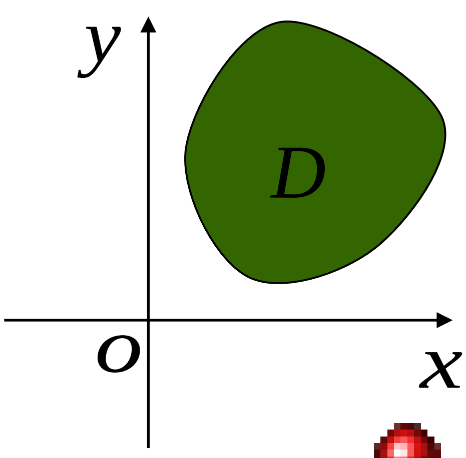
设xOy坐标面上一平面薄片占据闭区域D，其面密度$\mu(x,y)$ 在D上连续, D上任意一点(x,y)到轴l的距离$r=r(x,y)$,

则薄片关于轴l的转动惯量为 $I_l = \iint\limits_D r^2(x,y)\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

$$I_x = \iint_D y^2 \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_y = \iint_D x^2 \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

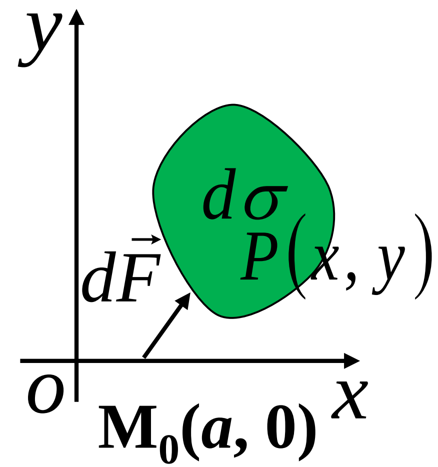
$$I_o = \iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



*5. 平面薄片对质点的引力

设物体占有平面区域Σ，其密度函数 $\rho(x,y)$连续，

质点$\mathbf{M_0}(a, 0)$，质量m，求Σ与$\mathbf{M_0}$间的引力.



1. $\forall d\sigma \subset D$

2. $d\sigma$与$\mathbf{M_0}$间的引力 $d\vec{F} = \left(dF_x, dF_y\right)$

$$\left|d\vec{F}\right| = G\frac{mM}{r^2} = Gm\frac{\rho(x,y)d\sigma}{d^2}$$

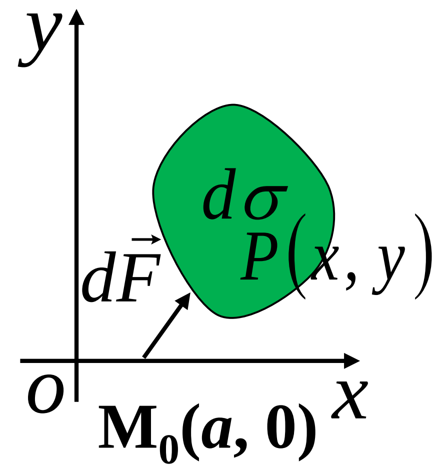
$$\because \begin{cases} dF_x = \left|d\vec{F}\right|\cos\alpha = Gm\dfrac{\rho(x,y)d\sigma}{d^2}\dfrac{x-a}{d} \\ dF_y = \left|d\vec{F}\right|\cos\beta = Gm\dfrac{\rho(x,y)d\sigma}{d^2}\dfrac{y}{d} \end{cases}$$

$$M_0P\left(x-a, y\right) \quad \because \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \dfrac{x-a}{d} \\ \cos\beta = \dfrac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \dfrac{y}{d} \end{cases}$$

5. 平面薄片对质点的引力

设物体占有平面区域Σ, 其密度函数 $\rho(x,y)$连续,

质点$\mathbf{M}_0(a, 0)$, 质量m, 求Σ与$\mathbf{M}_0$间的引力.



1. $\forall d\sigma \subset D$

2. $d\sigma$与$\mathbf{M}_0$间的引力 $d\vec{F}=\left(dF_x, dF_y\right)$

$$\because \begin{cases} dF_x = \left|d\vec{F}\right|\cos\alpha = Gm\dfrac{\rho(x,y)d\sigma}{d^2}\dfrac{x-a}{d} \\ dF_y = \left|d\vec{F}\right|\cos\beta = Gm\dfrac{\rho(x,y)d\sigma}{d^2}\dfrac{y}{d} \end{cases}$$

$$F_x = \iint_D G\frac{m\rho(x,y)}{d^2}\frac{x-a}{d}d\sigma$$

$$F_y = \iint_D G\frac{m\rho(x,y)}{d^2}\frac{y}{d}d\sigma$$

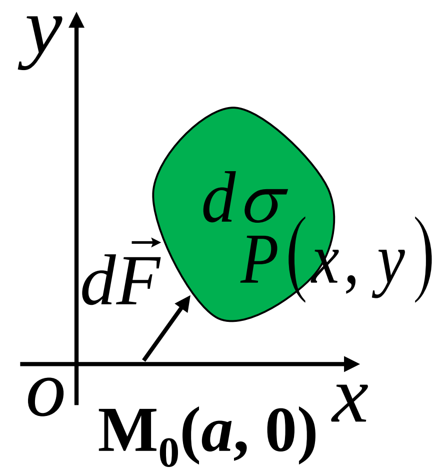
5. 平面薄片对质点的引力

设物体占有平面区域Σ, 其密度函数 $\rho(x,y)$连续,

质点$M_0(a, 0)$, 质量m, 求Σ与M_0间的引力.

$$F_x=\iint_D G\frac{m\rho(x,y)}{d^2}\frac{x-a}{d}d\sigma$$

$$F_y=\iint_D G\frac{m\rho(x,y)}{d^2}\frac{y}{d}d\sigma$$



注： 1. m=1，M_0在原点

$$F_x=\iint_D G\frac{\rho(x,y)\,x}{d^3}d\sigma$$

$$F_y=\iint_D G\frac{\rho(x,y)\,y}{d^3}d\sigma$$

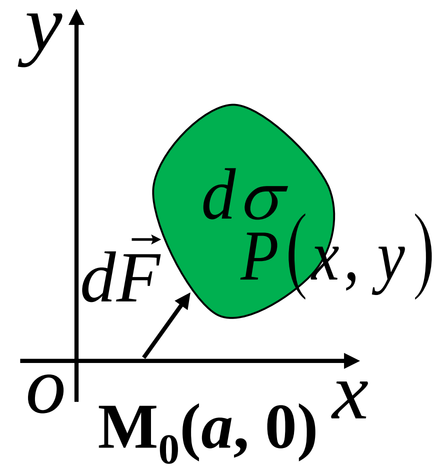
5.　平面薄片对质点的引力

设物体占有平面区域Σ，其密度函数 $\rho(x,y)$ 连续，

质点 $\mathbf{M_0(a, 0)}$，质量 m，求Σ与 $\mathbf{M_0}$ 间的引力.

$$F_x=\iint_D G\frac{m\rho(x,y)}{d^2}\frac{x-a}{d}d\sigma$$

$$F_y=\iint_D G\frac{m\rho(x,y)}{d^2}\frac{y}{d}d\sigma$$



注：　2. $\mathbf{M_0(x_0, y_0)}$

$$F_x=\iint_D G\frac{m\,\rho(x,y)}{d^2}\ \frac{x-x_0}{d}\ d\sigma$$

$$F_y=\iint_D G\frac{m\,\rho(x,y)}{d^2}\ \frac{y-y_0}{d}\ d\sigma$$