6.2

对坐标的曲线积分

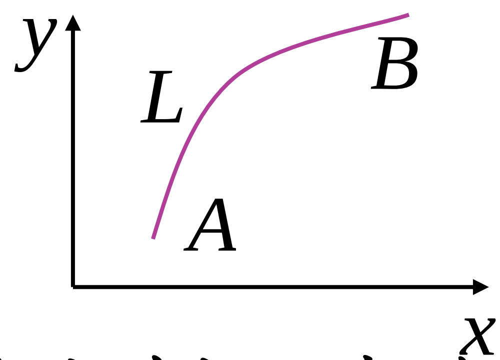
一、对坐标的曲线积分的概念与性质

二、对坐标的曲线积分的计算法

三、两类曲线积分之间的联系

一、 对坐标的曲线积分的概念与性质

1. 引例: 变力沿曲线所作的功.

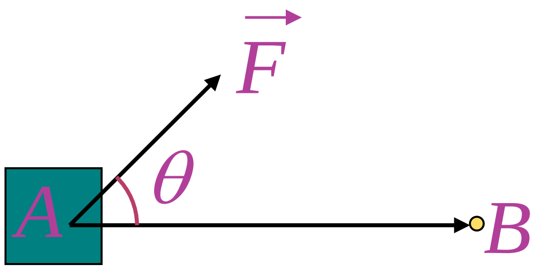


设一质点受如下变力作用

$$\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

在 *xoy* 平面内从点 *A* 沿光滑曲线弧 *L* 移动到点 *B*,求移动过程中变力所作的功 *W*.

变力沿直线所作的功



$$W=\vec{F}\cdot\overrightarrow{AB}$$

解决办法:

“分割”

“近似”

“求和”

“取极限”

1) “分割” .

把*L*分成 *n* 个小弧段, $\vec{F}$ 沿 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 所做的功为 ΔW_k,

则 $$W = \sum_{k=1}^{n} \Delta W_k$$

2) “近似”

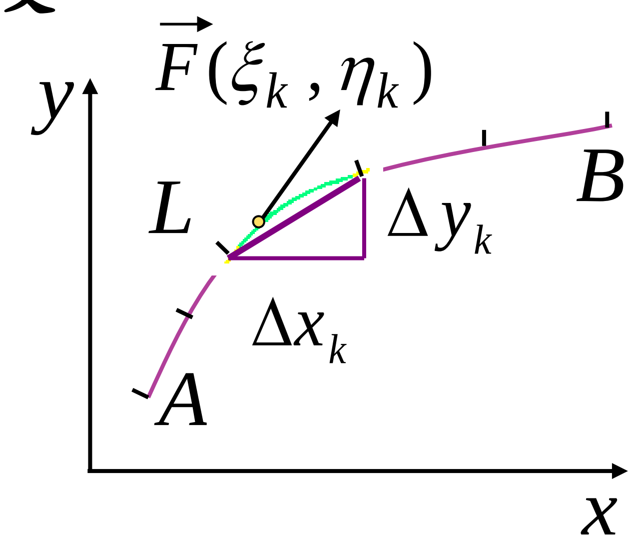
有向小弧段 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 可以用有向线段

$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = (\Delta x_k , \Delta y_k)$ 近似代替,

在 $\overset{\frown}{M_{k-1}M_k}$ 上任取一点 (ξ_k , η_k),

则有 $\Delta W_k \approx \vec{F}(\xi_k , \eta_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k}$

$$= P(\xi_k , \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k , \eta_k)\Delta y_k$$



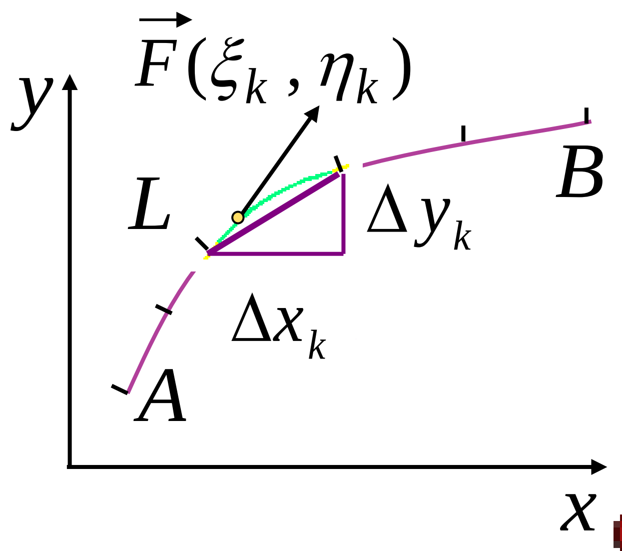
3) **“求和”**

$$W \approx \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

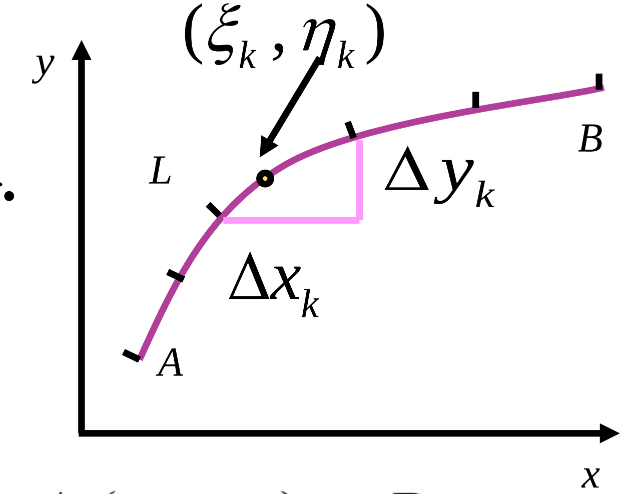
4) **“取极限”**

$$W = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left[P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k \right]$$

(其中 λ 为 n 个小弧段的最大长度)



2. 定义. 设 L 为xoy 平面内从 A 到B 的有向曲线弧, $P(x,y),Q(x,y)$ 在L 上有界.



在 L 上沿从 A 到B 的方向任意插入n-1 个分点 $A=A_0(x_0,y_0),A_1(x_1,y_1),\cdots,$

$A_{k-1}(x_{k-1},y_{k-1}),A_k(x_k,y_k),\cdots,A_{n-1}(x_{n-1},y_{n-1}),A_n(x_n,y_n)=B$

把L分成n小段有向曲线 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k},k=1,2,\cdots,n$, 在 $\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$ 上任取一点 (ξ_k,η_k), 令 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1},\Delta y_k=y_k-y_{k-1},k=1,2,\cdots,n$

作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k$, $\lambda=\max\{\Delta s_1,\Delta s_2,\cdots,\Delta s_n\}$, 若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k \overset{\text{记作}}{=\!=} \int_L P(x,y)\mathrm{d}x$$

存在, 则称此极限为函数 $P(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标x的曲线积分, 或第二类曲线积分.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k \xlongequal{\text{记作}} \int_L P(x,y)\mathrm{d}x$$

其中，**$P(x, y)$** 称为被积函数，**L** 称为积分路径 或 积分曲线，

dx称为坐标元素，**$P(x,y)$dx**称为被积表达式.

同样可利用 $Q(x,y)$，定义对坐标 y 的曲线积分.

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\ ,$$

以上两个积分通常是同时出现的，简记为

$$\boxed{\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y}$$

$$\boxed{\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y}$$

若记

常为力或流速等向量场

$$\vec{A}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

有向弧微元

$$\overrightarrow{\mathrm{d}s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$$

则**对坐标**的曲线积分可写作

$$\int_L \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

变力沿曲线L做功

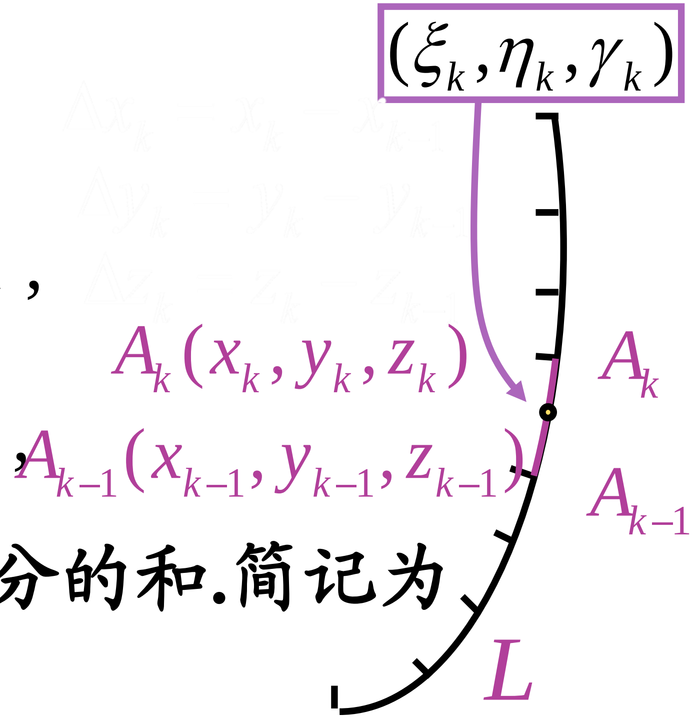
$$W=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_L \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$$

类似定义三元函数在空间有向曲线 L上对坐标的曲线积分

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k,\gamma_k)\Delta x_k$$

$$\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k,\gamma_k)\Delta y_k\,,$$

$$\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} R(\xi_k,\eta_k,\gamma_k)\Delta z_k\,,$$



所求量往往为对坐标 **x,y,z**的曲线积分的和.简记为

$$\int_L P\mathrm{d}x + \int_L Q\mathrm{d}y + \int_L R\mathrm{d}z = \int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

力 $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$

沿空间曲线L做功

$$W = \int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

3. 性质

(1) 线性性质

$$\int_L [P_1(x,y) \pm P_2(x,y)]\mathrm{d}x$$

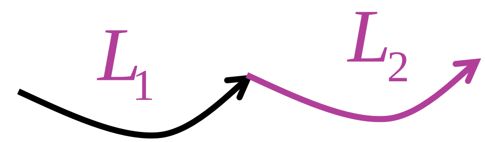
$$= \int_L P_1(x,y)\mathrm{d}x \pm \int_L P_2(x,y)\mathrm{d}x$$

$$\int_L kP(x,y)\mathrm{d}x = k\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$$

(*k*为常数)

(2) 可加性

$$\int_{L_1+L_2} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$



$$=\int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(3) 方向性

用 L^- 表示 L 的反向弧，则

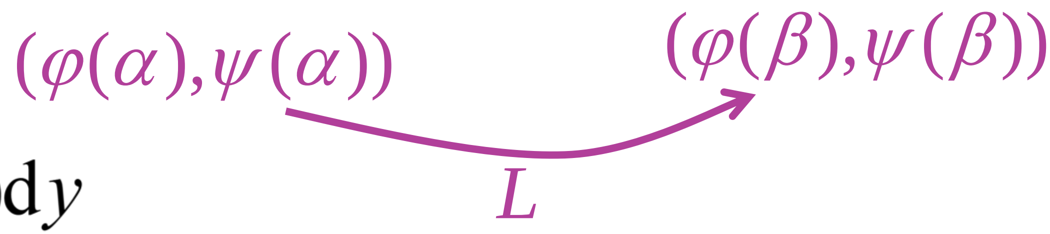
$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=-\int_{L} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

注:

- **对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向！**

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理: 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:\alpha \to \beta$, 则曲线积分存在, 且有



$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

参数方程求法

$$= \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

特别是, 如果 L 的方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=\psi(x), \; x:a \to b, \end{cases}$ 则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

以谁为参数，谁的导数就是1，即可以省略

显式函数求法

$$= \int_a^b \{P[x,\psi(x)] + Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

对空间光滑曲线弧 Γ: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \quad t:\alpha\to\beta, \\ z=\omega(t) \end{cases}$ 类似有

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

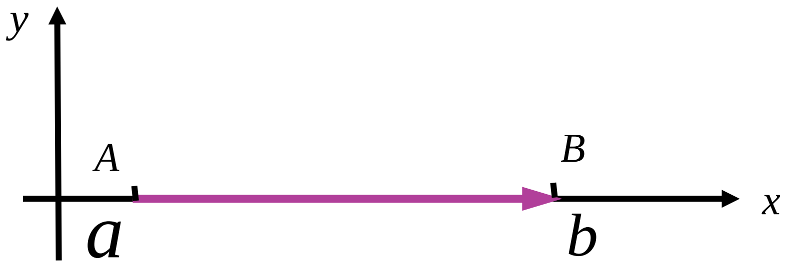
$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\omega'(t)\}\,dt$$

计算方法: 把曲线的方程和坐标元素dx, dy或 dz代入被积表达式，从起点参数值到终点参数值积分.

若 L 为 x 坐标轴上从 A 到 B 的线段，令 $f(x)=P(x,0)$ 则



平行谁，d且只它

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b P(x,0)dx = \int_a^b f(x)dx$$

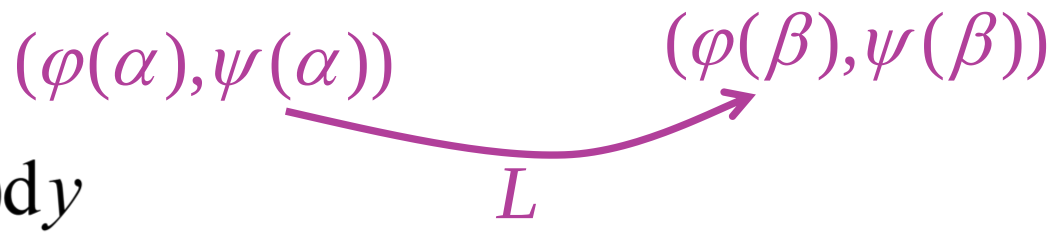
若 L 为 x 坐标轴上从 B 到 A 的线段，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_b^a P(x,0)dx = \int_b^a f(x)dx$$

$f(x)$ 在[a,b]上的定积分是曲线积分的特殊情况，因此，定积分是有方向的，交换积分限位置就是改变了方向.

二、对坐标的曲线积分的计算法

定理: 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:\alpha \to \beta$, 则曲线积分存在, 且有



$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

参数方程求法

$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

特别是, 如果 L 的方程为 $\begin{cases} x=x \\ y=\psi(x), \end{cases}$ $x:a\to b$, 则

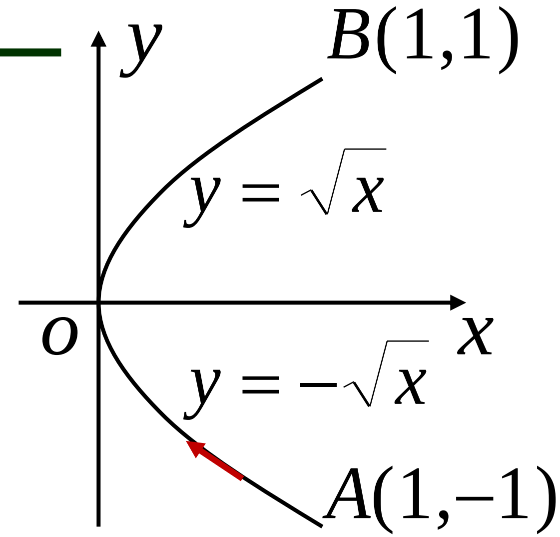
$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

以谁为参数，谁的导数就是1，即可以省略

显式函数求法

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

例1. 计算$\int_L xy\,\mathrm{d}x$, 其中L为沿抛物线 $y^2=x$ 从点 $A(1,-1)$到$B(1,1)$的一段.



解法1 取 x 为参数, 则 $L:\overset{\frown}{AO}+\overset{\frown}{OB}$

$$\overset{\frown}{AO}:\ y=-\sqrt{x},\ \ x:1\to 0$$

$$\overset{\frown}{OB}:\ y=\sqrt{x},\quad x:0\to 1$$

$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x=\int_{\overset{\frown}{AO}} xy\,\mathrm{d}x+\int_{\overset{\frown}{OB}} xy\,\mathrm{d}x$$

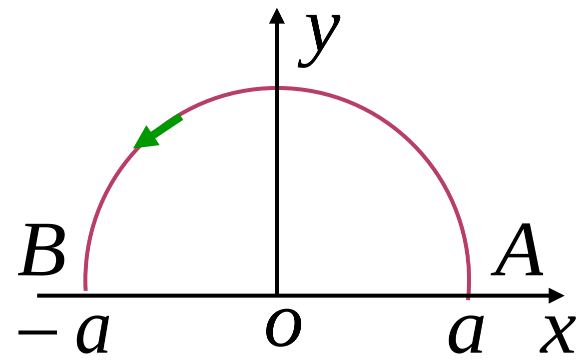
$$=\int_1^0 x(-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^{3/2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{5}$$

解法2 取 y 为参数, 则 $L:x=y^2,\ \ y:-1\to 1$

$$\therefore \int_L xy\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 y^2y\,(y^2)'\,\mathrm{d}y=2\int_{-1}^1 y^4\,\mathrm{d}y=\frac{4}{5}$$

例2. 计算 $\int_L y^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为

(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周，方向为逆时针方向；



解：

$$L: \begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases} \qquad t: 0 \to \pi$$

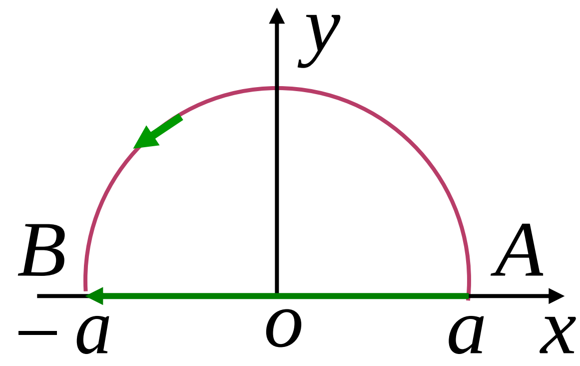
则

$$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} a^2 \sin^2 t \cdot (-a\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -a^3 \int_0^{\pi} \sin^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$= -2a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t\,\mathrm{d}t = -2a^3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = -\frac{4}{3}a^3$$

例2. 计算 $\int_L y^2\,\mathrm{d}x$，其中 L 为



(1) 半径为 a 圆心在原点的上半圆周, 方向为逆时针方向;

(2) 从点 $A(a,0)$ 沿 x 轴到点 $B(-a,0)$.

解:

$$L:\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases} \qquad x: a \to -a,$$

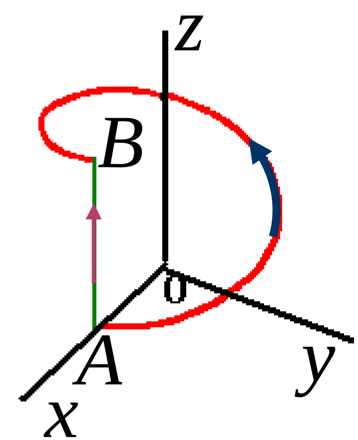
则 $$\int_L y^2\,\mathrm{d}x = \int_a^{-a} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

例4. 设在力场 $\vec{F}=(y,-x,z)$ 作用下, 质点由 $A(R,0,0)$ 沿Γ移动到 $B(R,0,2\pi k)$, 其中Γ为

(1) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$;

(2) $\overline{AB}$.

试求力场对质点所作的功.



解: (1) $W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^{2\pi}[R\sin t\,(-R\sin t)-(R\cos t)\,R\cos t+kt\,k\,]\mathrm{d}\,t$$

$$=\int_0^{2\pi}(-R^2+k^2t)\,\mathrm{d}\,t$$

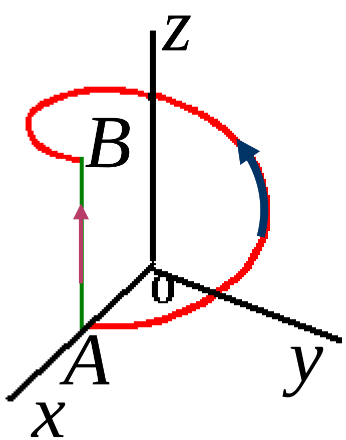
$$=2\pi(\pi k^2-R^2)$$

例4. 设在力场 $\vec{F}=(y,-x,z)$ 作用下，质点由 $A(R,0,0)$ 沿Γ移动到 $B(R,0,2\pi k)$，其中Γ为

(1) $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ z=kt$；

(2) $\overline{AB}$.

试求力场对质点所作的功.



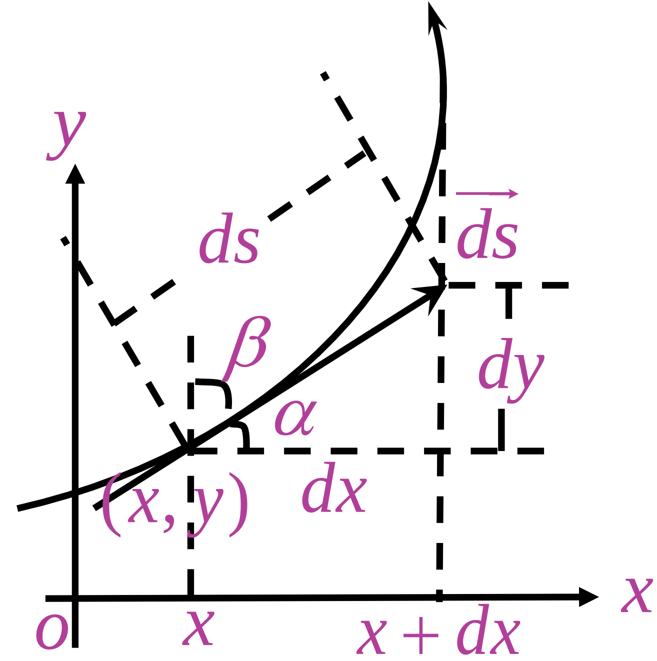
解：**(2) *AB*:** $\begin{cases} x=R \\ y=0 \\ z=z \end{cases}\quad z:0\to 2\pi k$

$$W=\int_\Gamma \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_{\overline{AB}} y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi k} z\,\mathrm{d}z$$

$$=2\pi^2k^2$$

三、两类曲线积分之间的联系

设有向光滑弧 L 在(x,y)点的与L同向切向量的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta$ 则两类曲线积分有如下联系



$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_L\{P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

$$\overrightarrow{ds}=(dx,dy)$$

$$\boxed{dx=\cos\alpha\, ds,\ dy=\cos\beta\, ds}$$

设空间有向光滑弧Γ 在(x,y,z)点的与L同向切向量的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 则

$$\boxed{\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_L\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)\mathrm{d}s}$$

内容小结

1. 定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}[\, P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\,]$$

2. 性质

(1) L **可分成** k **条有向光滑曲线弧** $L_i\ (i=1,\cdots,k)$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{k}\int_{L_i} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(2) L^- **表示** L **的反向弧**

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

对坐标的曲线积分必须注意积分弧段的方向!

3. 计算

- 对有向光滑弧 $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases},\quad t:\alpha\to\beta$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

- 对有向光滑弧 $L: y=\psi(x),\quad x:a\to b$

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

- 对空间有向光滑弧Γ : $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t), \quad t:\alpha\to\beta \\ z=\omega(t) \end{cases}$

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)$$
$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$
$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

4. 两类曲线积分的联系

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_L\{P\cos\alpha+Q\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$
$$=\int_\Gamma\{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\}\mathrm{d}s$$