第四章 多元函数微分学

在高等数学上册中我们讨论的函数只有一个自变量，这种函数称为一元函数. 但在很多实际问题中往往牵涉到多方面的因素，反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形. 这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题.

本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分学及其应用. 讨论中我们以二元函数为主，因为从一元函数到二元函数会产生一些新的问题，而从二元函数到三元及以上的函数则可以类推. 在学习中，应注意一元函数与多元函数之间的联系与区别.

本章教学内容与计划

本章内容大致需要20学时

1. 多元函数的基本概念 （2学时）
2. 偏导数（2学时）
3. 全微分（2学时）
4. 多元复合函数的求导法（2学时）
5. 隐函数的求导法（2学时）
6. 习题课 （2学时）
7. 微分法在几何上的应用（2学时）
8. 方向导数与梯度（2学时）
9. 多元函数的极值（2学时）
10. 习题课 （2学时）

第1讲　多元函数的基本概念

目的: (1) 了解平面点集的有关概念;

(2) 理解多元函数的概念;

(3) 了解二元函数的极限、连续的概念,以及有界闭区域上连续多元函数的性质.

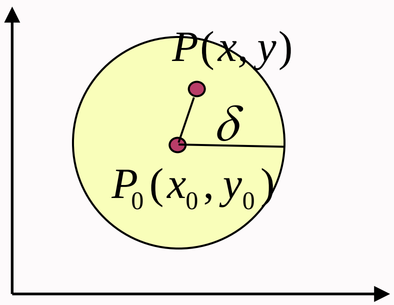
重点: 二元函数的极限、连续性.

难点: 确定极限不存在.

例如,在平面上, (二维)

设$P_0(x_0, y_0)$是xoy平面上的一个点, $\delta > 0$，与点$P_0(x_0, y_0)$距离小于δ的点$P(x, y)$的全体称为点P_0的δ邻域, 记为$U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta) = \{(x, y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta\}$$ (圆邻域)



在空间中, (球邻域)

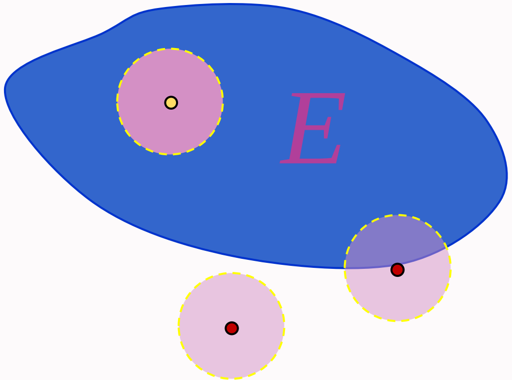
$$U(P_0,\delta) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta\}$$

说明：若不需要强调邻域半径δ,也可写成 $U(P_0)$.

点 P_0 的去心邻域记为 $\overset{\circ}{U}(P_0) = \{P \mid 0 < |PP_0| < \delta\}$

2） 区域

(1) 内点、外点、边界点



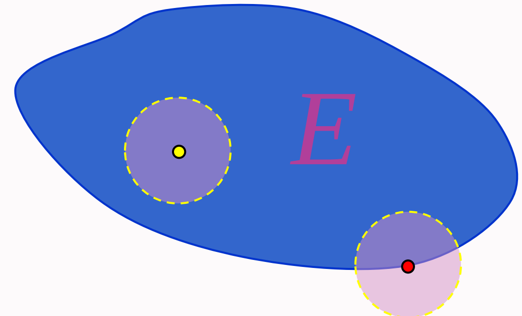
设有平面点集 E 及一点 P :

- 内点： 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\subset E$,
  则称 P 为 E 的内点;

- 外点： 若存在点 P 的某邻域 $U(P)\cap E=\varnothing$,
  则称 P 为 E 的外点 ;

- 边界点： 若对点 P 的任一邻域 $U(P)$ 既含 E 中的点也含不在 E 中的点，则称 P 为 E 的边界点 .

(2) 聚点



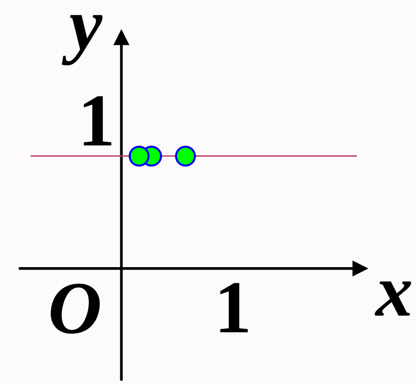
对任意给定的δ，若点P 的去心邻域 $\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有E 中的点，则称 P 是 E 的聚点.

聚点可以属于 E，也可以不属于 E (因为聚点可以为 E 的边界点)

$0.9,\ 0.99,\ 0.999\ldots \to 1$

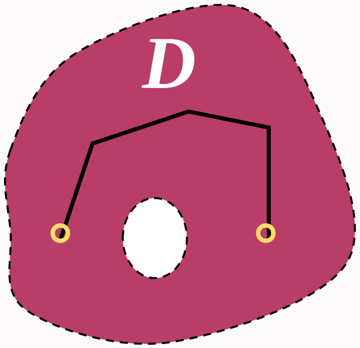
$1,\ -1,\ 1,\ -1\ldots \to 1,\ -1$

$(\frac{1}{2},1),\ (\frac{1}{2^2},1),\ (\frac{1}{2^3},1)\ldots \to (0,1)$



(3) 开区域及闭区域

- 若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集；
- E 的边界点的全体称为 E 的边界，记作 ∂E；
- 开集连同它的边界称 E 为闭集；



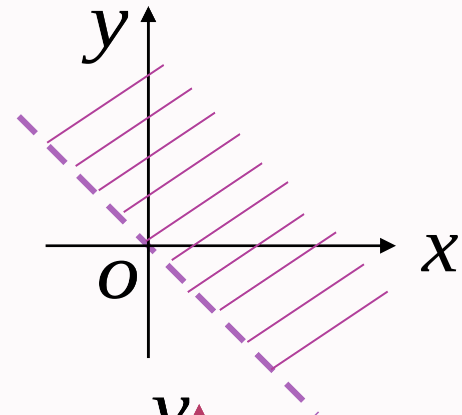
- 若点集 D 中任意两点都可以用一条完全属于 D 的折线相连，则称 D 是连通的；
- 连通的开集称为开区域，简称区域；
- 开区域连同它的边界一起称为闭区域.

例如，在平面上

$$\{(x,y)\mid x+y>0\}$$

$$\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$$

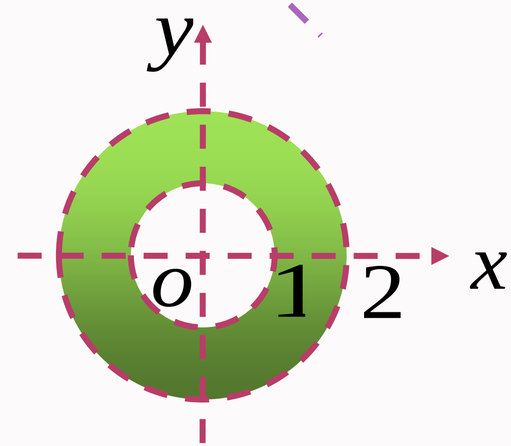
开区域

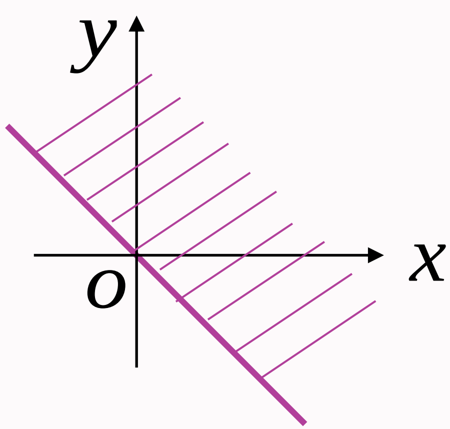


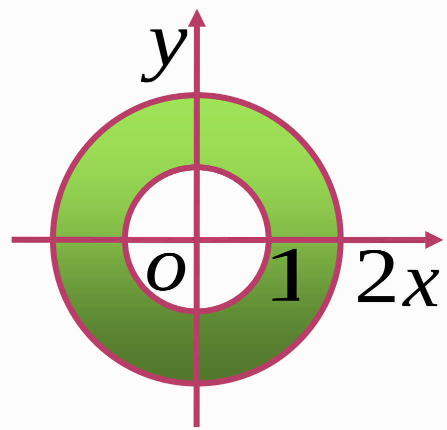
$$\{(x,y)\mid x+y\geq 0\}$$

$$\{(x,y)\mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$$

闭区域







(4) 有界点集 无界点集

设有点集E, 如果存在正数M, 使对于一切点P与某一定点A的距离$|AP|$不超过M, 即$|AP| \le M$对一切$P \in E$成立, 则称E为**有界点集**, 否则称为**无界点集**.

例 $\{(x,y) \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ 有界闭区域.

$\{(x,y) \mid x + y > 0\}$ 无界开区域.

2 多元函数的定义

定义1. 设非空点集 $D \subset \mathrm{R}^n$, 映射 $f: D \mapsto \mathrm{R}$ 称为定义在 D 上的 **n 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

点集 D 称为函数的**定义域**；数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的**值域**.

特别地，当 $n = 2$ 时, 有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathrm{R}^2$$

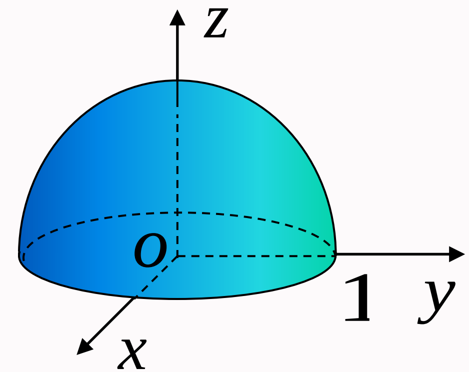
当 $n = 3$ 时, 有三元函数

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in D \subset \mathrm{R}^3$$

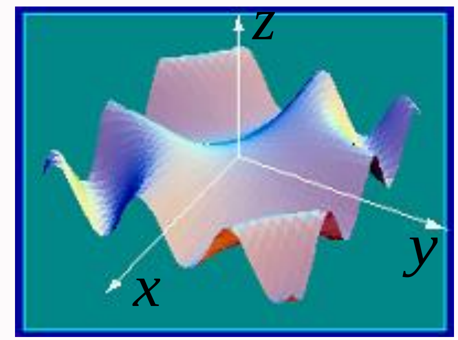
例如，二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

定义域为圆域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.



又如，$z=\sin(xy),(x,y)\in\mathrm{R}^2$



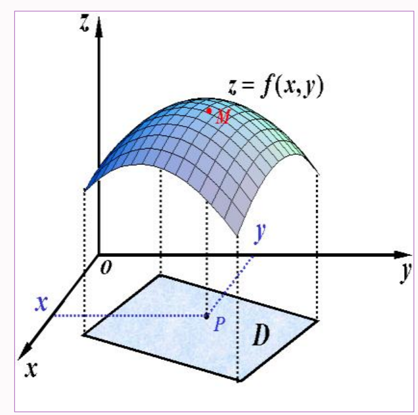
说明: 二元函数 $\boldsymbol{z=f(x,y),(x,y)\in D}$

的图形一般为空间曲面 Σ.

三元函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$

定义域为单位闭球

$$\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$$



图形为 R^4 空间中的超曲面.

1.2 多元函数的极限与连续

一元函数极限　设函数$f(x)$在点x_0的某去心邻域内，有定义.若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称常数A 为函数$y=f(x)$ 当 $x \to x_0$时的极限,

记作　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$　或　$f(x) \to A$ (当 $x \to x_0$)

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \rightleftarrows \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

定义2 设函数$z=f(x,y)$的定义域为D，$P_0(x_0,y_0)$是其聚点，A为常数. 如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点$P(x,y)\in D$，都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$成立，则称A为函数当$P\to P_0$时的**二重极限**，记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A\ \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \ or \lim_{P\to P_0} f(P)=A\right).$$

注 (i) 注意定义中$P\to P_0$的方式是任意的，即P从四面八方以任意方式在D内趋于P_0.

(ii) 二元函数的极限与一元函数的极限具有类似的性质(唯一性、局部保号性、保序性、夹逼定理、四则运算法则).

例1. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

例1. 讨论函数 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在点 (0, 0) 的极限.

解: 设 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 (0, 0) , 则有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\,kx}{x^2+(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}+k^2\cancel{x^2}}=\frac{k}{1+k^2}$$

k 值不同极限不同！

故 $f(x,y)$ 在 (0,0) 点极限不存在 .

注:若当点 $P(x,y)$ 以不同方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数趋于不同值或有的极限不存在，则可以断定函数极限不存在 .

例2.求下列极限

$$(1)\ \lim_{\substack{x\to 0^+\\ y\to 0^+}} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

例2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0^+ \\ y\to 0^+}} \dfrac{x^2 - xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ 约分

$$= \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y\to 0^+}} \frac{x(x-y)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y\to 0^+}} \frac{x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y\to 0^+}} x\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right) = 0$$

例2.求下列极限

$$(2)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$$

例2.求下列极限

$$(2)\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$$

变量代换，分子(分母)有理化

$$\underline{\underline{令 xy=t}}\quad \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t+1}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{t+1}-1\right)}{t}\cdot\frac{\left(\sqrt{t+1}+1\right)}{\left(\sqrt{t+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

例2.求下列极限

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(1+x^2y^2\right)}{x^2+y^2}$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right)$

例2.求下列极限

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(1+x^2y^2\right)}{x^2+y^2}$ 等价无穷小代换

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} \cdot xy = 0$$

思考！

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right) \underline{\underline{令 x^2+y^2=t}} \lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0$$

一元函数洛必达法则

例2.求下列极限

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$

例2. 求下列极限

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}(1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot y}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\left[(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right]^{y}=e^{2}$$

1.3 多元函数的连续

一元函数的连续

设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在$x_0$连续.

多元函数连续 设 n 元函数 $f(P)$ 定义在 D 上，聚点 $P_0\in D$，如果存在 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

则称 n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 连续，否则称为不连续，此时P_0称为间断点.

如果函数在 D 上各点处都连续，则称此函数在 D 上连续.

例 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$

在点(0 , 0) 极限不存在，故 (0, 0)为其间断点.

例 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上间断.

结论：一切多元初等函数在定义区域内连续.

闭区间上一元连续函数性质： 设 $f(x) \in C[a,b]$

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上达到最大值与最小值;

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界;

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取最大与最小值之间的任何值;

闭域上多元连续函数性质:

定理: 若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(最大值最小值定理)

(1) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m;

(有界性定理)

(2) $\exists K > 0$, 使 $|f(P)| \le K$, $P \in D$;

(介值定理)

(3) 对任意 $\mu \in [m, M]$, $\exists Q \in D$, 使 $f(Q) = \mu$;

例3. 讨论函数连续性

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

例3.讨论函数连续性

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

解: 在$(x,y)\neq(0,0)$处, $f(x,y)$为初等函数,故连续.

又 $\because \left|\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right|\leq\dfrac{1}{2}$

$\boxed{x^2+y^2\geq 2|xy|}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}\cdot 2y=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续.

内容小结

1. 区域

- 邻域：$U(P_0,\delta),\ \overset{\circ}{U}(P_0,\delta)$
- 区域 —— 连通的开集

2. 多元函数概念

n 元函数 $u = f(P) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$P \in D \subset \mathbf{R}^n$$

常用 $\left\{\begin{array}{l}\text{二元函数 (图形一般为空间曲面)} \\ \text{三元函数}\end{array}\right.$

3. 多元函数的极限

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{当}\ 0<|PP_0|<\delta\ \text{时},$$
$$\text{有}\ |f(P)-A|<\varepsilon$$

4. 多元函数的连续性

1) 函数 $f(P)$ 在 P_0 连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$

2) 闭域上的多元连续函数的性质:

最值定理； 有界定理； 介值定理

3) 一切多元初等函数在定义区域内连续

重点例题:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0 , 0)处极限不存在，故 (0, 0)为其间断点.

附加题

1. 证明 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在全平面连续.

证: 在 $(x,y)\neq(0,0)$ 处，$f(x,y)$ 为初等函数，故连续.

又 $$0\leq\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{x^2+y^2\geq 2|xy|}$$

由夹逼准则得

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故函数在全平面连续.