石家庄铁道学院 2012-2013 学年第 II 学期

2011 级本科概率统计期末考试试卷　参考答案及评分标准（A）

一.（30 分）

1．(10 分)解：两个串联元件能正常工作的概率为: p^2 -------------1 分

两个并联元件能正常工作的概率为: $1-(1-p)^2$ -------------2 分

（1）第一个系统为先串联后并联,故可靠性为: $1-(1-p^2)^2=2p^2-p^4$ -------------5 分

（2）第二个系统为先并联,次串联,再并联, 故系统可靠性为:

$$1-(1-p)(1-(p(1-(1-p)^2)))=-p^4-3p^3+2p^2+p$$ -------------10 分

(注:没有说明串并联方式,做对给满分)

2．(10 分) 解：（1）由归一性,有: $a=0.1$ -------------2 分

（2）

X	1	2	3
P	0.3	0.45	0.25

Y	0	1	2
P	0.55	0.25	0.2

----------6 分

因为 $P_{11}\neq P_{1\cdot}\cdot P_{\cdot 1}$，故不独立. ------------- 8 分

（3）

2X+3Y	2	4	5	6	7	10	12
P	0.1	0.3	0.2	0.15	0.05	0.1	0.1

----------10 分

3．（10 分）解：
$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, -2\le x\le 2\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$ -------------1 分

$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}$ -------------2 分

当 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$,所以 $f_Y(y)=0$ -------------4 分

当 $y>0$ 时，$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y}\}=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$

$$f_Y(y)=F_Y{}'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})]$$ -------------6 分

当 $0<y\le 4$ 时，$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}]=\frac{1}{4\sqrt{y}}$ -------------8 分

当 $y>4$ 时，$f_Y(y)=0$ -------------9 分

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{y}}, 0<y\le 4\\ 0, \quad 其它\end{cases}$$ -------------10 分

二．（20 分）

解：（1） $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\ dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}xe^{-x-y}\ dxdy=1$， --------------2 分

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf(x,y)\ dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}ye^{-x-y}\ dxdy=1$， --------------4 分

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-x-y}dy=e^{-x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ --------------6 分

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{+\infty}e^{-x-y}dx=e^{-y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$ --------------8 分

因为 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以独立. --------------10 分

（3） $F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+2Y\le z\}$ ----------------- 12 分

当 $z\le 0$ 时， $F_Z(z)=0$,所以 $f_Z(z)=0$ ----------------- 14 分

当 $z>0$ 时， $F_Z(z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}e^{-x-y}dy=1-e^{-z}-2e^{-\frac{z}{2}}$ ----------------- 16 分

所以 $f_Z(z)=F_Z'(z)=e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}$ ----------------- 18 分

$$f_Z(z)=\begin{cases}e^{-\frac{z}{2}}-e^{-z}, & z>0\\ 0, & z\le 0\end{cases}$$ ----------------- 20 分

个人说明：

若先求(2)得 X 与 Y 独立，立即可求得 X 与 Y

服从参数为 1 的指数分布的(1)的均值为 1/1=1.

三．(20 分)

1．（10 分）解： $P\{X=x\}=p^x(1-p)^{1-x},\ x=0,1,$ --------------2 分

故似然函数为: $L(p)=\prod_{i=1}^{n}p^{x_i}=p^{\sum_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}$, --------------4 分

对数似然函数: $\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(n-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)$ --------------6 分

令 $\frac{d}{dp}\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\Big/p-\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)/(1-p)=0,$ --------------8 分

解得 p 的最大似然估计值 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$

从而 p 的最大似然估计量 $\hat{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}.$ --------------10 分

2．(10 分)解：$H_0:\mu=70$　　$H_1\neq 70$　　---------------- 2 分

取检验统计量　　$t=\frac{\overline{X}-70}{s/\sqrt{n}}$　　---------------- 4 分

拒绝域　　$|t|=\frac{\left|\bar{X}-70\right|}{s/\sqrt{n}}>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301$　　----------------6 分

由样本观测值算得,　　$|t|=\frac{\left|\bar{x}-70\right|}{s/\sqrt{n}}=1.4<2.0301$　　-------------8 分

故接受原假设 H_0，即可以认为这次考试考生平均成绩为 70 分.　　-------------10 分

四.（每空 3 分）

1. C；

因为 A、 B 说的都是独立，与题设一致.

而概率大于零时，独立与不相容不可能同时发生，故 D 对.

2. C；

因 A 即不单增，也不满足归一性；

而 B 的 $F(-\infty)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi}(-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\neq 0$

又 D 也不满足归一性：$F(+\infty)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}+1=2\neq 1$

C 满足 $F(-\infty)=0, F(+\infty)=1$ 单调性，(右)连续, 可作为某个连续型随机变量的函数

3. B；

因 C 不一定，D 不一定；

题设下说明不相关，从而 B 成立；

4. D；

由随机变量 X,Y 有相同的分布律，并且 $P(XY=0)=1$ 填出联合分布律：

Y X	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0	1/4	0	1/4
0	1/4	0	1/4	1/2
1	0	1/4	0	1/4
$p_{\cdot j}$	1/4	1/2	1/4	

则 $P(X\neq Y)=$（1）.

5. A；

因 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\frac{\alpha}{2}}\right\}=1-\alpha$，置信区间$\left(\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

注：由几何关系一目了然.

6. 0.6； 因

$$0.3=P(A)-P(AB)=P(A)-1+P(\overline{AB})$$
$$P(\overline{AB})=0.3-P(A)+1=0.6.$$

7. 16； 因

$$D(Y)=D(X_1)+(-2)^2D(X_2)+3^2D(X_3)$$
$$=\frac{(6-0)^2}{12}+4\cdot 3+9\cdot\frac{1}{3^2}$$
$$=16.$$

8. 4； 因

$$A_1=\mu_1\Rightarrow\overline{X}=EX\Rightarrow\overline{X}=\frac{0+\theta}{2}\Rightarrow\hat{\theta}=2\overline{X}\text{——矩估计量}$$

矩估计值 $\hat{\theta}=2\overline{x}=2\cdot\dfrac{1}{5}(0+2+2+3+3)=4$

9. $t(n-1)$；因

$$\because X\sim N(0,\sigma^2),\ \frac{\overline{X}-0}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\quad\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$\therefore\frac{\sqrt{n}\,\overline{X}}{S}=\frac{\dfrac{\overline{X}-0}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}}\sim t(n-1)$$

10. $\Phi(0)$或0.5. 因由中心极限定理

$$\because\mu=E(X_i)=\lambda,\sigma^2=D(X_i)=\lambda,\ X_i\text{独立}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{\infty}X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\le 0\}=\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{\infty}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\le 0\}=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(0)=0.5$$