石家庄铁道大学 2012-2013 学年第二学期

<u>2012</u> 级本科班期末考试试卷(A)

答案与评分标准

一、完成下列各题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. $f(x,1)=x^2+1$ ……………3 分 $\qquad f_x'(x,1)=2x$ ……………5 分

2. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_2'\cdot 2xy$， ……………………………………………………3 分

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{22}''\cdot 2xy\cdot 2xy+f_2'\cdot 2x=4x^2y^2f_{22}''+2xf_2'.$$ …………………5 分

3. $\vec{\tau}=\left.\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2x & 2y & 2z\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}\right|_{(1,-1,1)}=-4(1,0,-1)$ ………………………………3 分

$x-1-(z-1)=0\Rightarrow x-z=0$ …………………………………………5 分

4. $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 e^{-r^2}\cdot rdr\right]d\theta$ ……………………………3 分

$\displaystyle =-\pi\, e^{-r^2}\Big|_0^2=\pi(1-e^{-4})$ ………………………………5 分

5. $f(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int(1+\frac{1}{x})e^x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]$ ……………………………3 分

$\displaystyle =\frac{1}{x}\left[\int(1+\frac{1}{x})e^x\cdot xdx+C\right]=\frac{1}{x}\left[\int(x+1)e^xdx+C\right]$

$\displaystyle =\frac{1}{x}\left[xe^x+C\right]=e^x+\frac{C}{x}.$ ………………………………………5 分

法 2 $\quad (xf(x))'=(xe^x)'\Rightarrow xf(x)=xe^x+C\Rightarrow f(x)=e^x$ 或变易法.

二、计算下列各题（共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

1. (1) $\begin{cases}f_x'(x,y)=y\\ f_y'(x,y)=x\end{cases}$，唯一驻点 $(0,0)$. ………………………………2 分

$A=f_{xx}''(0,0)=0$，$B=f_{xy}''(0,0)=1$，$C=f_{yy}''(0,0)=0$.

$\Delta=AC-B^2=-1<0$.

$f(x,y)$ 不存在极值. ……………………………………………5 分

(2) $L=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=xy+\lambda(x^2+y^2-2)$ ……………………2 分

$$\begin{cases} L_x' = y+\lambda\cdot 2x = 0 \\ L_y' = x+\lambda\cdot 2y = 0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{-\lambda\cdot 2x}{-\lambda\cdot 2y} \\ x^2+y^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}, \begin{cases} y=\pm x \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$x=\pm1, y=\pm1$

$$\max_{x^2+y^2=2}(f(x,y)) = f(\pm1,\pm1)=1,$$

$$\min_{x^2+y^2=2}(f(x,y)) = f(\pm1,\mp1)=-1$$ ……………………………5 分

2. 法 1 $I=\int_L \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2} = \int_L \dfrac{-ydx+xdy}{4} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\int_L -ydx+xdy$ …5 分

$$=(\frac{1}{4}\iint_D[1-(-1)]d\sigma=)\frac{1}{2}A_D=\pi$$ …………………………10 分

法 2 $L:\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$, $t:0\to 2\pi$. ………………………………5 分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t d(2\cos t)+2\cos t d\sin t}{(2\cos t)^2+4(\sin t)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2}=\pi$$ ………10 分

3. 补 Σ_0: $z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$，取下侧，利用高斯公式得

原式 $=\iiint_\Omega (y+z+x)dV - \iint_{\Sigma_0}(z+1)xdxdy$ …………………………5 分

$$=0+\iiint_\Omega zdV+0-\iint_D(0+1)x(-dxdy)=\iiint_\Omega zdV+0$$

$$=\int_0^a\left[z\iint_{D_z}dxdy\right]dz=\int_0^a z\cdot\pi(\sqrt{a^2-z^2})^2dz=\frac{\pi}{4}a^4$$ ……………10 分

4. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$, $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}$ $(|x|<1)$ …………………5 分

$$f(x)=f(0)+\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\ (-1\le x<1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=xf(x)=-x\ln(1-x)\ (-1\le x<1)$$ …………………………8 分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1/2)^{n+1}}{n}=-\frac{1}{2}\ln(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\ln 2$$ …………………10 分

三、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 0　2. π　3. $4\pi R^4$　4. $(-1)^n(2n)!$　5. 3　6-10. DBABA