

初等模型

——贷款、税收等问题

一、住房贷款

- 小李夫妇欲购一套价值**100**万元的房子，俩人现有积蓄**40**万元。需向银行贷款**60**万元，准备**25**年还清，假定银行贷款利率为年利率**6%**，问每月需还多少钱？

算数求解

- 25年就是300个月
- $60\text{万元}/300\text{月}=0.2\text{万元/月}=2000\text{元/月}$
- 忘记给人家利息了！
- 怎么计算利息？

$60\text{万元} \times 6\% \times 25 = 90\text{万元}$ ——对吗？

假设和符号说明

合理的假设：

- (1) 每月还款数一定（等额等息）
- (2) 一月还一次，每月月底还钱

符号假设：

设总贷款额为 M 元

n 个月还清

月利率 r

每月还款额为定值 x

模型的建立与求解

- 第1月底还完钱后还欠的钱 a_1
- 第2月底还完钱后还欠的钱 a_2
- 第3月底还完钱后还欠的钱 a_3
-
- 第 n 月底还完钱后还欠的钱 a_n
- 一个显然的等式是 $a_n=0$

模型的建立与求解

- 第1月底还完钱后还欠的钱

$$a_1 = M(1+r) - x$$

- 第2月底还完钱后还欠的钱

$$a_2 = a_1 (1+r) - x$$

-

- 第 n 月底还完钱后还欠的钱

$$a_n = a_{n-1} (1+r) - x$$

模型的建立与求解

$$x = Mr \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

将 $M=60$ 万元, $n=25 \times 12=300$ 月

$r=0.001$ 代入得 $x=2316$ 元

$r=0.005$ 代入得 $x=3866$ 元

$r=0.01$ 代入得 $x=6319$ 元

$r=0.02$ 代入得 $x=12032$ 元

$r=0.03$ 代入得 $x=18003$ 元

模型的建立与求解

初始贷款额 $M=60$ 万元

最后共计还款额:

$r=0.001$ 对应 $nx=69.5$ 万元

$r=0.005$ 对应 $nx=116$ 万元

$r=0.01$ 对应 $nx=190$ 万元

$r=0.02$ 对应 $nx=361$ 万元

$r=0.03$ 对应 $nx=540$ 万元

二、学费问题

某私立中学规定学生入学时应交费4万元，等三年后学生毕业时学校将把4万元如数归还。试问在此规定下，学生念三年书实际交了多少学费？

考虑到个别学生交费4万元有困难，可以在入学时交给学校一万元，但毕业时不再归还，问学校的这一做法对学生是否公平？对学校自己是否划算？（银行存款利息三年期月利率为9‰）

二、学费问题

- 假定这些钱收来后存入银行“吃”利息，不计税，到三年后，学校获得

(1) 交4万元返还的：

本利和为 $40000 \times (1 + 0.009 \times 36) = 52960$

学生交了 $52960 - 40000 = 12960$ 元

(2) 交1万元不退的：

1万元三年后本利和为

$10000 \times (1 + 0.009 \times 36) = 13240$ 元

二、学费问题

比较知学校用第二种方法合算，但学生不需要筹措一大笔（3万）资金；借钱不容易，贷款的话不仅需抵押，而且贷款利率是存款的2倍以上。

$$30000 \times (1 + 0.018 \times 36) - 30000 = 19440$$

三、小额贷款资助个体

- 某个个体户一月初向银行贷款**10**万元作为开商店资金，每月底获得的利润是该月初投入资金的**20%**，每月底需交房租和所得税为该月所得金额（含利润）的**10%**，每月生活费和其它开支**3000**元。余额作为资金全部投入再营业。如此继续下去，问到这一年年底，这位个体户有现款多少元？若银行贷款的年利率为**7.5%**，问这位个体户还清银行贷款后，纯收入有多少元？

三、小额贷款资助个体

- 分析：设第 n 个月底的余款为 a_n
- $a_1 = 10(1+20\%)(1-10\%) - 0.3$
 $= 10.5$ （万元）
- 得到一般模型
- $a_{n+1} = a_n(1+20\%)(1-10\%) - 0.3$
 $= 1.08 a_n - 0.3$ （万元）

三、小额贷款资助个体

- 模型求解
- $a_{n+1}=1.08 a_n-0.3$
- $a_n=6.75 \times 1.08^{n-1}+3.75$
- 将 $n=12$ 代入 $a_{12}=19.49$
- 欠银行 $10 \times (1+7.5\%)=10.75$
- 纯收入为 $19.49-10.75=8.74$ （万元）

四、怎样纳税合算

请给出我国（中国）个人收入调节税的函数表达式，并编一程序用于计算。

5000元及以下免征

不超过3000元为3%，

3000元—12000元为10%

12000元—25000元为20%，

25000元—35000元为25%

35000元—55000元为30%，

55000元—80000元为35%，

大于80000元为45%。

个人所得税税率表一

(综合所得适用)

级数	全年应纳税所得额	税率 (%)
1	不超过36000元的	3
2	超过36000元至144000元的部分	10
3	超过144000元至300000元的部分	20
4	超过300000元至420000元的部分	25
5	超过420000元至660000元的部分	30
6	超过660000元至960000元的部分	35
7	超过960000元的部分	45