第四节 三重积分的概念与计算

4.1 三重积分的概念

4.2 三重积分在直角坐标系中的计算

4.3 三重积分在柱坐标系中的计算

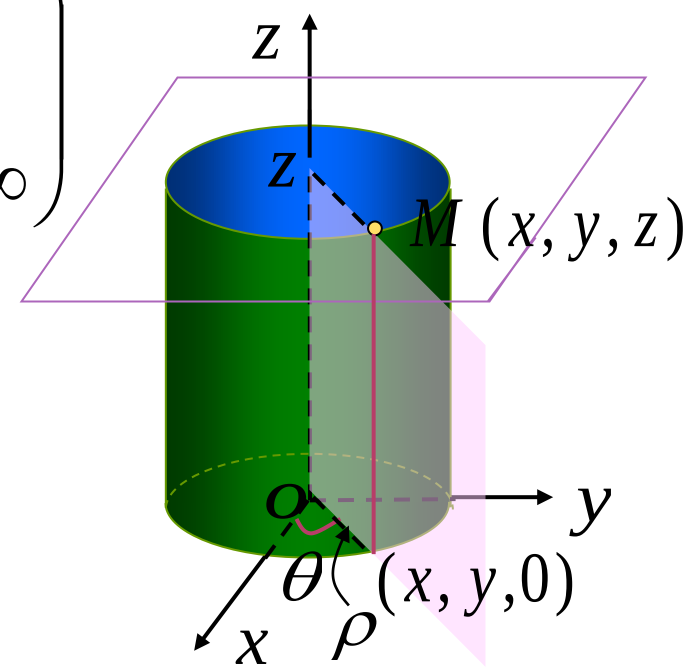
4.4 三重积分在球坐标系中的计算

4.3 利用柱坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$，将 x,y 用极坐标 ρ,θ 代替，则 (ρ,θ,z)

就称为点 M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



三类特殊的曲面方程

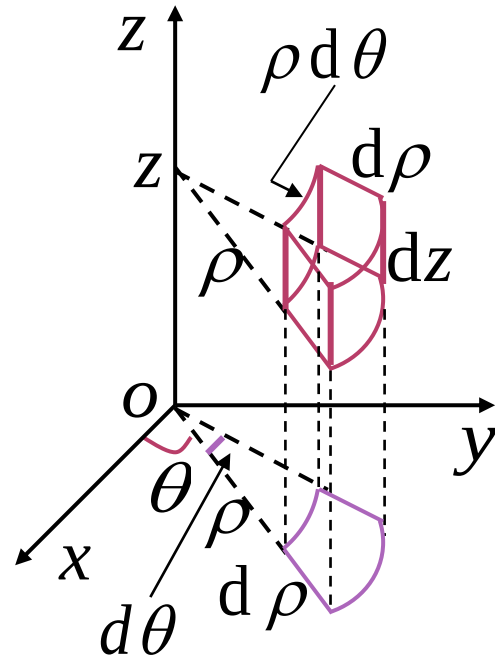
$\rho=$ 常数 a ⟶ **圆柱面**

$\theta=$ 常数 θ_0 ⟶ **半平面**

$z=$ 常数 z_0 ⟶ **平面**

如图所示，在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \boxed{\rho}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$ 背过即可



因此 $$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Omega F(\rho,\theta,z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

其中 $F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$

适用范围:

1) 积分域表面用柱面坐标表示时方程简单；

2) 被积函数用柱面坐标表示时变量互相分离.

总结 同时具备两种情形，比较适合用柱面坐标计算:

(i) Ω 在坐标面上的投影区域用极坐标表示比较简单.如

圆柱体: $x^2+y^2=R^2$,

圆锥体: $z^2=a^2(x^2+y^2)$,

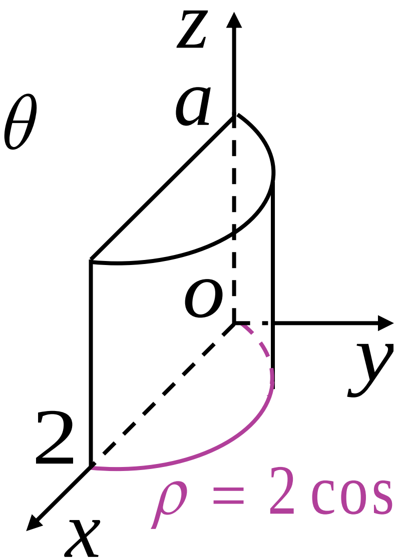
旋转抛物面: $z=a^2(x^2+y^2)$.

(ii) 被积函数具有以下特征:

$$f(x^2+y^2),\quad f(x^2+z^2),\quad f(y^2+z^2).$$

例5. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成半圆柱体.

解：在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}0\le z\le a\\ 0\le \rho\le 2\cos\theta\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$



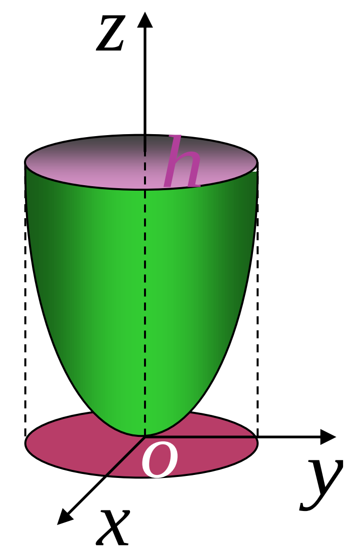
$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$

$$\text{原式}=\iiint_{\Omega} z\ \rho\ \rho\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^a z\mathrm{d}z\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{(2\cos\theta)^3}{3}\,\mathrm{d}\theta=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^2$$

例6. 计算三重积分$\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中Ω由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围成.



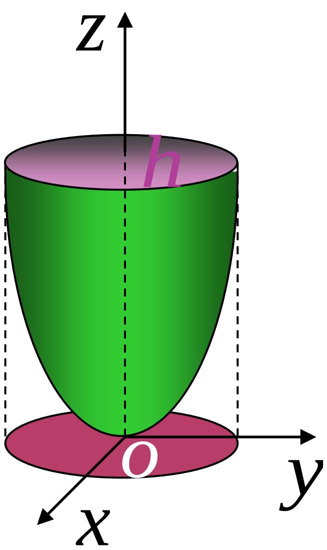
解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ \frac{\rho^2}{4}\le z\le h\end{cases}$

原式 $=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h-\frac{\rho^2}{4}\right)d\rho$$

例6. 计算三重积分 $\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中$\Omega$由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\,(h>0)$ 所围成.



解: 原式 $=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}(h-\frac{\rho^2}{4})\,d\rho$

$$=2\pi[h\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}d\rho-\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho^3}{1+\rho^2}d\rho]$$

$$=2\pi[\frac{1}{2}h\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{d\left(1+\rho^2\right)}{1+\rho^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho^2+1-1}{1+\rho^2}d\left(\rho^2\right)]$$

$$=\pi[h\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{d\left(1+\rho^2\right)}{1+\rho^2}-\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{h}}d\rho^2+\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{d\left(1+\rho^2\right)}{1+\rho^2}]$$

例6. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中$\Omega$由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围成.

解: 原式 $=\pi[h\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{d(1+\rho^2)}{1+\rho^2}-\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{h}}d\rho^2+\frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{d(1+\rho^2)}{1+\rho^2}]$

$$=\pi[h\ln(1+\rho^2)\Big|_0^{2\sqrt{h}}-\frac{1}{4}\left(2\sqrt{h}\right)^2+\frac{1}{4}\ln\left(1+\left(2\sqrt{h}\right)^2\right)]$$

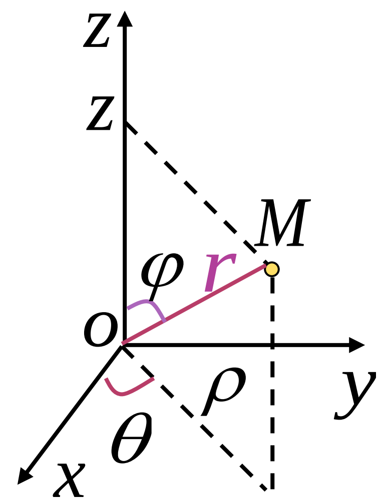
$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

4.4 利用球坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, 其柱坐标为 (ρ,θ,z), 令 $|\overrightarrow{OM}|=r$, $\angle ZOM=\varphi$, 则 (r,θ,φ) **就称为点*M* 的球坐标.**

直角坐标与球面坐标的关系

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{c} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{array}\right)$$

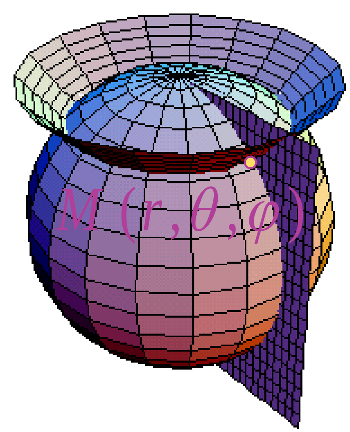


三类特殊的曲面方程

$r=$ 常数 a → **球面**

$\theta=$ 常数 θ_0 → **半平面**

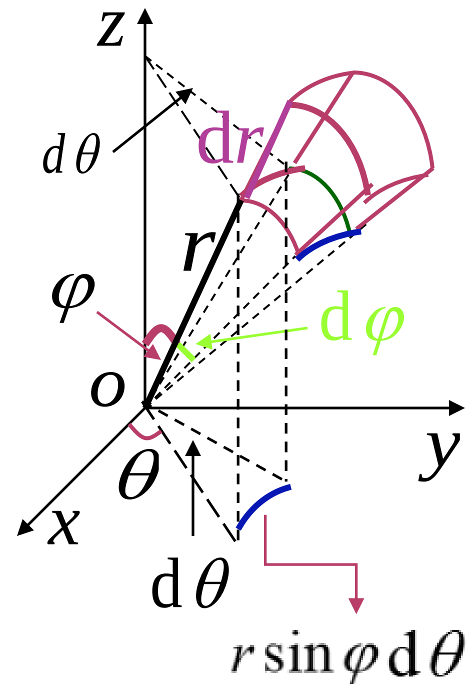
$\varphi=$ 常数 φ_0 → **锥面**



$$\rho = r\sin\varphi$$
$$z = r\cos\varphi$$

如图所示, 在球面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \boxed{r^2 \sin\varphi}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$



因此有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} F(r, \theta, \varphi)\, r^2 \sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

其中 $F(r, \theta, \varphi) = f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$

适用范围:

1) 积分域表面用球面坐标表示时方程简单;

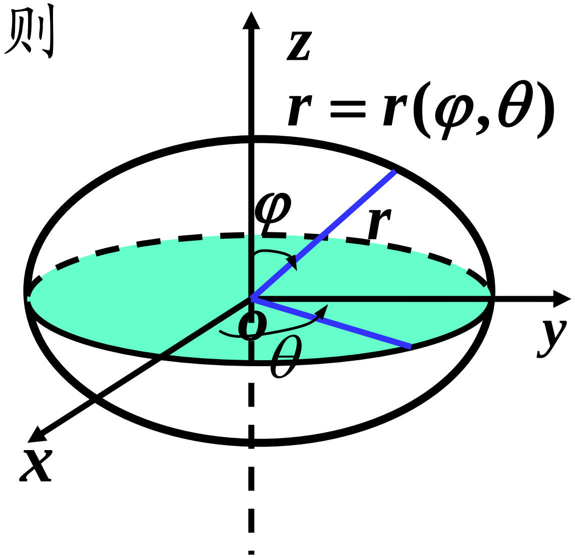
2) 被积函数用球面坐标表示时变量互相分离.

问题: 如何化球坐标下的三重积分为三次积分?

记 $F(r,\varphi,\theta)=f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$

(1) Ω 是一个包含原点在内的封闭曲面，则

$0\le\theta\le 2\pi$，$0\le\varphi\le\pi$，$0\le r\le r(\varphi,\theta)$.



$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V =$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi,\ \theta)}F(r,\varphi,\theta)r^2\mathrm{d}r.$$

特别, Ω 是一个以原点为中心，a 为半径的球面时

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}F(r,\varphi,\theta)r^2\mathrm{d}r.$$

当 $f(x,y,z)=1$ 时，球的体积

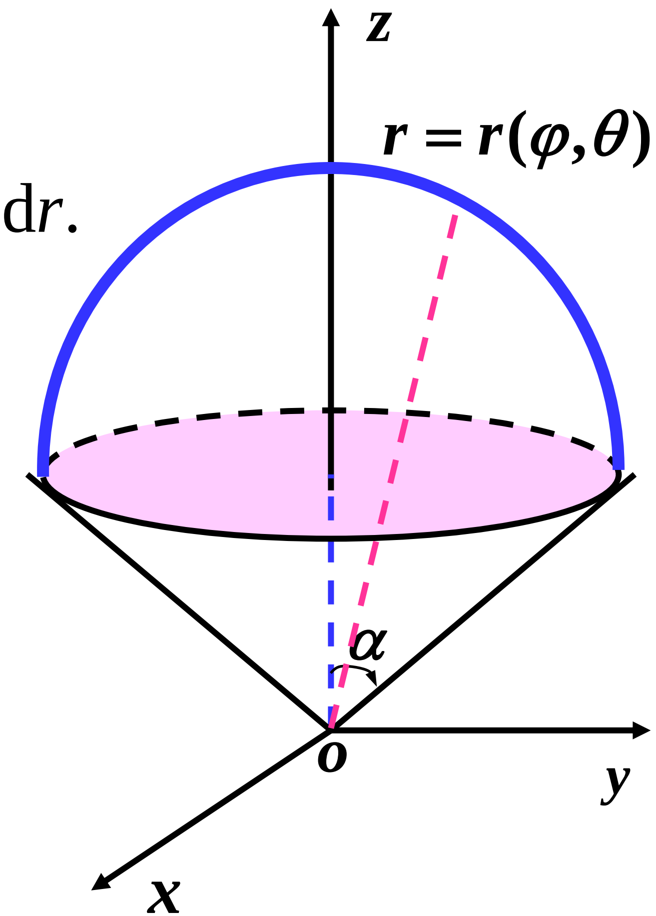
$$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^2\mathrm{d}r=\frac{4\pi a^3}{3}.$$

(2) Ω 是由锥面 $\varphi=\alpha$ 及曲面 $r=r(\varphi,\theta)$ 所围，则

$$0\le\theta\le 2\pi,\quad 0\le\varphi\le\alpha,\quad 0\le r\le r(\varphi,\theta)$$

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V =$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\alpha}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)}F(r,\varphi,\theta)r^2\mathrm{d}r.$$



下列情形适合用球面坐标计算

(i) 积分区域是球体、锥体或它们的一部分;

(ii) 被积函数具有形式

$$x^n y^m z^l f(x^2+y^2+z^2).$$

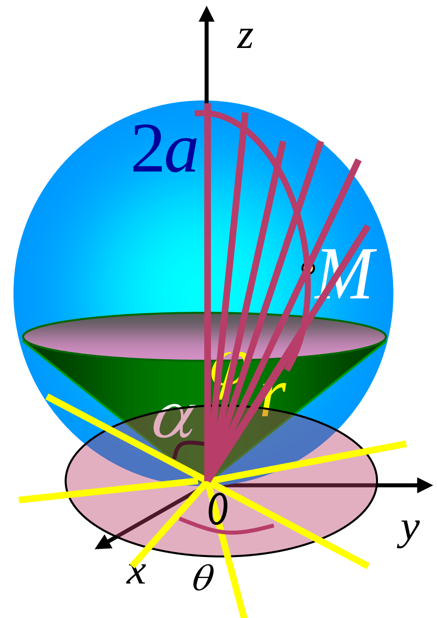
二、三重积分应用

1、立体体积

- 占有**空间有界域 Ω** 的立体的体积为

$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

例7. 求半径为*a* 的球面与半顶角为α 的内接锥面所围成的立体的体积.



解: 在球坐标系下空间立体所占区域为

$$\Omega: 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \alpha,\ 0 \le r \le 2a\cos\varphi$$

则立体体积为 $V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$\boxed{\mathrm{d}v = r^2 \sin\varphi\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}r}$$

$$V = \iiint_{\Omega} r^2 \sin\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r$$

$$\boxed{(r, \theta, \varphi)}$$

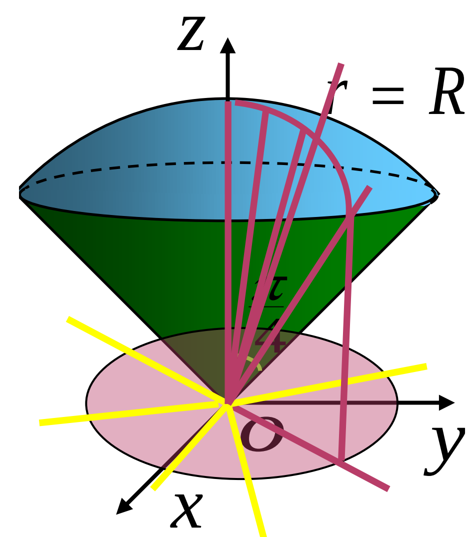
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\alpha} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\alpha} \cos^3\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \quad = \frac{4\pi a^3}{3}(1 - \cos^4\alpha)$$

例8. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dxdydz$，其中$\Omega$为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 所围立体.

解: 在球面坐标系下

$$\Omega:\begin{cases}0\le r\le R\\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}\qquad \begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$



$$\therefore\quad \iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2 r^2\,\mathrm{d}r$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}$$

$$=2\pi\left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)\right]\frac{R^5}{5}=\frac{1}{5}\pi R^5(2-\sqrt{2})$$

2、空间物体质量

引例: 设物体占据空间有界闭区域 Ω，密度函数为 $f(x,y,z)\in C(\Omega)$,

物体的 质量 $m=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v$

3、物体的质心

设物体占有空间域Ω，有连续密度函数 $\rho(x,y,z)$,

质心坐标公式 $$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)dv}$$

$$\bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} y\rho(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)dv}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} z\rho(x,y,z)dv}{\iiint_{\Omega}\rho(x,y,z)dv}$$

$\rho(x,y,z)=\rho$时得Ω 的形心坐标:

$$\bar{x}=\frac{\iiint_{\Omega} xdv}{V_{\Omega}}\qquad \bar{y}=\frac{\iiint_{\Omega} ydv}{V_{\Omega}}\qquad \bar{z}=\frac{\iiint_{\Omega} zdv}{V_{\Omega}}$$

4、关于坐标轴的转动惯量公式

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2)\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

$$I_z = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)\,\rho(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	积分区域多由坐标面围成；被积函数形式简洁，或变量可分离.
柱面坐标系	$\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	
球面坐标系	$r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$	