第一章 质点运动学

运动的描述、位矢、位移、速度、加速度

1．1 下列说法中，正确的是

（A） 一物体若速率恒定，则速度一定没有变化；

（B） 一物体若速度不变，但仍可有变化的速率；

（C） 一物体若具有恒定的加速度，则其速度不可能为零；

（D） 一物体若具有沿 x 轴正方向的加速度，其速度有可能沿 x 轴的负方向.

答：D

分析：（1）答案 A、B 描述速度与速率的关系，速度为矢量，其大小为速率；

因此速度的大小即速率虽然恒定，但速度方向有可能是变化的，例如匀速圆周运动，所以 A 是错的；

反过来说，速度不变，意味着速度的大小和方向都不发生变化，所以 B 也是错的；

（2）答案 C 和 D 描述的是加速度与速度的关系，加速度是速度对时间的一阶导数，速度为零，加速度不一定为零，例如做单摆运动的小球摆到最高点时其速度为零，但加速度为恒定值，故答案 C 是错的；

答案 D 是正确的，因物体速度沿 x 轴负方向，但如果是减速的，其加速度方向为 x 轴正方向.

1．2 某质点的运动方程为 $x=3t-5t^3+6$（SI）则该质点做

（A） 匀加速直线运动，加速度为正值；

（B） 匀加速直线运动，加速度为负值；

（C） 变加速直线运动，加速度为正值；

（D） 变加速直线运动，加速度为负值.

答：D

分析：$x=3t-5t^3+6$，速度 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=3-15t^2$；加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-30t$；

所以，加速度随时间变化，为负值，答案为 D.

1．3 运动质点在某瞬时位于位矢 $\vec{r}=(x,y)$ 端点处，其速度大小为

（A）$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$；（B）$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$；（C）$\dfrac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$；（D）$\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$.

答：D

分析：$\vec{r}=(x,y)$，速度定义：$\vec{v}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$；

其大小为 $v=|\vec{v}|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}\right|=\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$ 。

1．4 某物体的 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2t$，$k$=恒量，$t$=0 时，$v=v_0$，则任意时刻速度 v 与时间 t 的关系为

（A）$v=\dfrac{1}{2}kt^2+v_0$；（B）$v=-\dfrac{1}{2}kt^2+v_0$；

（C）$\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{v_0}+\dfrac{1}{2}kt^2$；（D）$\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{v_0}+2kt^2$.

答：C

分析：对 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv^2t$ 两边乘 $\dfrac{\mathrm{d}t}{v^2}$ 积分：

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\int_0^t t\mathrm{d}t\Rightarrow\frac{1}{v_0}-\frac{1}{v}=-\frac{1}{2}kt^2$$

$$\Rightarrow\frac{1}{v}=\frac{1}{v_0}+\frac{1}{2}kt^2$$

1．5 某质点运动方程 $\vec{r}=R\cos\omega t\vec{i}+R\sin\omega t\vec{j}$ （R、ω为常数）(SI)，则质点的

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=$____________；$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=$____________；$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=$____________.

解：（1）速度的定义：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=-R\omega\sin\omega t\vec{i}+R\omega\cos\omega t\vec{j}$ （SI）

（2）加速度的定义：$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-R\omega^2\cos\omega t\vec{i}-R\omega^2\sin\omega t\vec{j}$ （SI）

（3）速率的一阶导数：

速率：$v=\left|\vec{v}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\left|-R\omega\sin\omega t\vec{i}+R\omega\cos\omega t\vec{j}\right|=R\omega$，

导数：$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}(\omega R)}{\mathrm{d}t}=0$

1．6 两辆车 A 和 B，在笔直的公路上同向行驶，它们从同一起始线上同时出发，并且由出发点开始计时，行驶的距离 x 与行驶时间 t 的函数关系式为：$x_A=4t+t^2$，$x_B=2t^2+2t^3$（SI 单位）则：

（1）它们刚离开出发点时，行驶在前面的一辆车是________；

（2）出发后，两辆车行驶距离相同的时刻是_____________；

（3）出发后，B 车相对 A 车速度为零的时刻是_____________；

答：（1）A （2）$t=1.19\,\mathrm{s}$ （3）$t=0.67\,\mathrm{s}$

分析：两车速度：$v_A=\dfrac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t}=4+2t$；$v_B=\dfrac{\mathrm{d}x_B}{\mathrm{d}t}=4t+6t^2$；

（1）比较起始速度：因 $t=0$ 时，$v_A=4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$；$v_B=0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，所以刚离开出发点时，$A$ 车在前；

（2）行驶距离相同满足的条件为 $x_A=x_B$，解得 $t=1.19\,\mathrm{s}$；

(3) 相对速度为零的条件为 $v_A=v_B$，解得 $t=0.67\,\mathrm{s}$.

1．7 一质点沿 x 轴运动，其加速度为 $a=4t$ (SI)，已知 $t=0$ 时，质点位于 x_0=10 m 处，初速度 $v_0=0$．试求其位置和时间的关系式.

答：$x=2t^3/3+10$

分析：由加速度定义：$a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=4t \Rightarrow \mathrm{d}v=4t\mathrm{d}t$

积分 $\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t 4t\mathrm{d}t \Rightarrow v=2t^2$

由速度定义：$v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=2t^2 \Rightarrow \int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t 2t^2\,\mathrm{d}t \Rightarrow x=2t^3/3+10$ (SI)

1．8 一质点初始时从原点开始以速度 v_0 沿 x 轴正向运动，设运动过程中质点受到的加速度 $a=-kx^2$，求质点运动的最大距离.

证明：利用导数关系 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，有

$$v\frac{dv}{dx}=-kx^2\Rightarrow vdv=-kx^2dx$$

积分得：$\int_{v_0}^{v}vdv=\int_0^x(-kx^2)dx\Rightarrow\frac{1}{2}v^2\Big|_{v_0}^{v}=-k\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^x$

$$v^2-{v_0}^2=-\frac{2}{3}kx^3\Rightarrow x^3=\frac{3}{2k}({v_0}^2-v^2)$$

显然，质点运动的最大位移 $x_{\max}$ 对应于 $v=0$，即 $x_{\max}=\sqrt[3]{\dfrac{3{v_0}^2}{2k}}$.

曲线运动、相对运动

1．9 对于沿曲线运动的物体，以下几种说法中哪一种是正确的：

（A）切向加速度必不为零；

（B）法向加速度必不为零；

（C）由于速度沿切线方向，法向分速度必为零，因此法向加速度必为零；

（D）若物体作匀速率运动，其总加速度必为零.

答：B

分析：曲线运动中，速度沿曲线的切线方向，加速度在自然坐标系中可分解为法向加速度 $a_n\vec{n}$ 和切向加速度 $a_t\vec{\tau}$，如下式所示

$$\vec{a}=a_n\vec{n}+a_t\vec{\tau}=\frac{v^2}{\rho}\vec{n}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

如果切向加速度为零，则加速度只有法向分量：$\vec{a}=a_n\vec{n}=\dfrac{v^2}{\rho}\vec{n}$，方向与运动速度垂直，只改变速度方向，物体做匀速圆周运动，是一种特殊的曲线运动，因此A答案说法不正确；

如果法向加速度为零，则加速度只有切向分量：$\vec{a}=a_t\vec{\tau}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$，方向与运动速度在同一直线上，只改变速度大小，物体做直线运动而不是曲线运动，因此B答案说法正确；

速度沿切向方向，并不意味着法向加速度必为零，因为加速度由物体所受的合外力所决定，其方向也由合外力的方向决定，所以 C 答案说法不正确；

如果物体做匀速率运动，则 $a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 0$，但不能确定 a_n 等于零，总加速度为零，所以答案 D 不正确.

1．10 一物体从某一确定的高度以初速度 $\vec{v}_0$ 水平抛出，已知它落地时的速率为 v_t，则它的运动时间是

（A）$\dfrac{v_t - v_0}{g}$；（B）$\dfrac{v_t - v_0}{2g}$ ；（C）$\dfrac{\sqrt{v_t^2 - v_0^2}}{g}$；（D）$\dfrac{v_t^2 - v_0^2}{2g}$.

答：C

分析：由于物体下落过程中仅受重力作用，速度水平分量保持 $\vec{v}_0$ 不变，竖直方向速度分量不断增大．落地时速度可一般的表示为：$\vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{v}_\perp$，垂直分量的大小为：$v_\perp = \sqrt{v_t^2 - v_0^2}$；根据匀加速直线运动的速度公式：$v_\perp = gt$，可以求得时间为：$t = \dfrac{\sqrt{v_t^2 - v_0^2}}{g}$.

1．11 质点作半径为 R 的变速圆周运动时的加速度大小为(v 表示任一时刻质点的速率)

(A) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$； (B) $\dfrac{v^2}{R}$； (C) $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{v^2}{R}$； (D) $\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{v^4}{R^2}\right)\right]^{1/2}$.

答：D

分析：圆周运动中，加速度在自然坐标系中可分解为法向加速度 $a_n\vec{n}$ 和切向加速度 $a_t\vec{\tau}$，如下式所示

$$\vec{a} = a_n\vec{n} + a_t\vec{\tau} = \frac{v^2}{R}\vec{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}$$

其大小为 $a = \left[a_n^2 + a_\tau^2\right]^{1/2} = \left[\left(\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{v^4}{R^2}\right)\right]^{1/2}$，因此答案 D 正确.

1．12 物体做斜抛运动，初速度 $\vec{v}_0$ 与水平方向夹角 θ，则物体运动至最高点时，该点的曲率半径 ρ =________________________.

答： $\rho = \dfrac{(v_0 \cos\theta)^2}{g}$

分析：物体在最高点时仅有水平速度，大小为 $v = v_0 \cos\theta$，此时重力对物体产生的加速度 $\vec{g}$ 垂直向下且与速度方向垂直，

根据法向加速度公式 $a_n = \dfrac{v^2}{\rho} = g$， 所以 $\rho = \dfrac{(v_0 \cos\theta)^2}{g}$

1．13 质点做半径 R=0．1m 的圆周运动，其运动方程 $\theta = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{t^2}{2}$，则质点在任一时刻的 a_n = __________________； a_t = ____________________.

答： $a_n = 0.1t^2$； $a_t = 0.1\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

分析：根据用加速度分量与角量之间的关系 $a_n = \omega^2 R$ 和 $a_t = R\beta$，先求角速度和角加速度，

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = t，\quad \beta = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 1，$$

所以 $a_n = \omega^2 R = 0.1t^2$， $a_t = R\beta = 0.1\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

1．14 质点以 π $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的匀速率作半径为 5m 的圆周运动，则该质点在 5s 内

（1）位移的大小是______________；（2）经过的路程是_______________.

答：（1）$10m$ ；（2）5π m

分析：位移的定义是物体位置的改变，即末态位置矢量和初态位置之差，根据题意 5s 内质点运动的路程为 5π m，而圆周长为 10πm，即运动了半个周长所以：

（1）质点 5s 内的位移大小为直径的长度 $10m$；

（2）质点 5s 内的路程为 5π m .

1．15 某质点做半径为 R 的圆周运动，其速率 v=A+Bt，A、B 是常量，t 为时间，t=0

时质点在 P 点，当它运行一周回到 P 点时，求该质点向心加速度及切向加速度的大小.

解：令运行一周所需时间为t， $\because v=\dfrac{ds}{dt}$

$$2\pi R=\int_0^t (A+Bt)\mathrm{d}t\text{，}\quad 2\pi R=At+\frac{1}{2}Bt^2\text{，}$$

解出 $t=\dfrac{1}{B}(\sqrt{A^2+4\pi BR}-A)$

$$a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=B$$

$$a_n=\frac{v^2}{R}=\frac{1}{R}(A+Bt)^2=\frac{1}{R}(A+(\sqrt{A^2+4\pi RB}-A)^2$$

$$a_n=\frac{1}{R}(A^2+4\pi RB)$$

1．16 一质点从静止出发沿半径 R=3m 的圆周运动，$a_t=3\mathrm{m\cdot s^{-2}}$．求：

（1）经过多长时间它的加速度$\vec{a}$恰与它运动轨道半径呈 45° 角；

（2）在上述时间内质点路程和角位移各为多少？

解：（1）当$\vec{a}$与 R 为 45° 角时，这时 $a_n=a_t=3\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

因为 $a_t=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$， 所以 $\int_0^v \mathrm{d}v=\int_0^t a_t\mathrm{d}t$， 从而 $v=3t$，

$t=v/3$， 又 $a_n=\dfrac{v^2}{R}=3\mathrm{m\cdot s^{-2}}$， 所以 $v^2=3R$

故 $t=\dfrac{\sqrt{3R}}{3}=1s$

（2）$\because v=\dfrac{ds}{dt}$，而 $v=3t$

$$\therefore \int_0^s ds=\int_0^t vdt=\int_0^t 3tdt$$

所以 $s=\dfrac{3}{2}t^2=1.5\mathrm{m}$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta s}{R} = \frac{1}{3} \times 1.5 = 0.5\text{rad}$$

第二章 质点动力学

牛顿定律

2．1 在升降机的天花板上栓一轻绳，其下端系一重物．当升降机以加速度a上升时，绳中张力恰好是绳所能承受最大张力的一半．则升降机以多大加速度上升时绳子刚好被拉断（物体相对于升降机静止）．

（A）2a ；（B）2（a+g）；（C）2a+g ；（D）a+g．

答： C

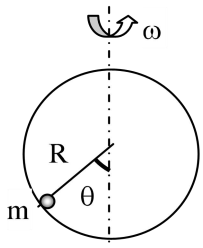
分析：重物受拉力和重力作用，在同一作用线上，取向上为正，当升降机以加速度a上升时，列牛顿第二定律方程：

$$\frac{1}{2}T_{\max} - G = ma$$

设则升降机以d上升时绳子刚好被拉断，则有：

$$T_{\max} - G = ma' \Rightarrow a' = g + 2a$$

2．2 一小珠可在半径为R的光滑圆环上滑动．圆环绕竖直轴以角速度ω匀速转动时，小珠偏离竖直轴静止．则小珠所在处环半径与竖直轴的夹角应是

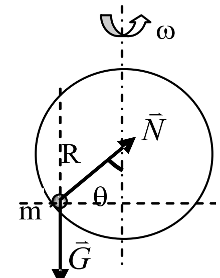


第 2．2 题图

（A）$\theta = \pi/2$；（B）$\theta = \arccos(\frac{g}{R\omega^2})$；

（C）$\theta = arctg\,(\frac{g}{R\omega^2})$；（D）无法判定．

答： B



第 2．2 题图

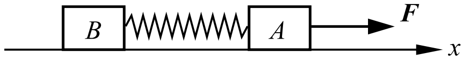
分析：小球受力$\vec{N}$和$\vec{T}$，如图所示．由圆环绕竖直轴以角速度ω匀速转动时，小珠偏离竖直轴相对圆环静止，相对地面做水平面内半径为$R\sin\theta$的圆周运动，列牛顿定律的分量式：

$$G - N\cos\theta = 0$$

$$N\sin\theta = m\omega^2 r = m\omega^2 R\sin\theta$$

联立解得：$\theta = \arccos(\frac{g}{R\omega^2})$.

2．3 如图所示，质量分别为 m_1 和 m_2 的两滑块 A 和 B，通过一弹簧水平连接后置于水平桌面上，滑块与桌面间的滑动摩擦系数均为 μ，系统在水平拉力 F 作用下匀速运动，如突然撤销拉力，在撤销瞬间，二者的加速度 a_A 和 a_B 分别为



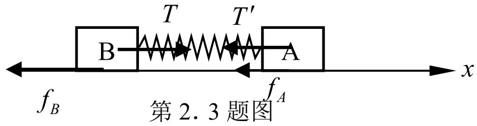
第 2．3 题图

（A） $a_A = 0$， $a_B = 0$；　　（B） $a_A > 0$， $a_B < 0$；

（C） $a_A < 0$， $a_B > 0$；　　（D） $a_A < 0$， $a_B = 0$.

答：D

分析：突然撤销拉力瞬间，两物体受力如图所示．物体 A 此时弹簧拉力和摩擦力均向左，加速度 $a_A < 0$；弹簧伸长不变，物体 B 所受拉力不变，仍保持原匀速运动状态，故　$a_B = 0$.



第 2．3 题图

2．4 一物体质量为 m，沿 x 轴运动．其速率大小 $v = kx$；则物体受到的作用力 F=_______；　当物体从 x_1 运动至 x_2 位置时所需时间 Δt =__________________.

答：　mk^2x；　　$\frac{1}{k}\ln\frac{x_2}{x_1}$.

分析：（1）由牛顿定律， $F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = mkv = mk^2x$

$$（2）\quad v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{kx} = \mathrm{d}t \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}x}{kx} = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{k}\ln\frac{x_2}{x_1} .$$

2．5 一条公路的某处有一水平弯道，弯道半径为 50m，若一辆汽车车轮与地面的静摩擦系数为 0．6，则此车在弯道处行驶的最大安全速率为__________ $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

（g=9．8 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$）

答：　$17.15\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

分析：汽车过水平弯道时，摩擦力提供向心力．

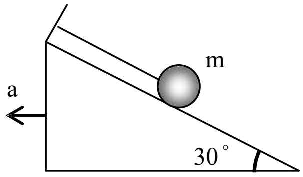
要使其安全行驶，不能出现侧滑，最大安全速率可由最大静摩擦力决定：

$$f=\mu_{静}mg=m\frac{v^2}{R}\Rightarrow v=\sqrt{\mu_{静}gR}=\sqrt{0.6\times 9.8\times 50}\approx 17.15\mathrm{m\cdot s^{-1}}.$$

2．6 质量为 m 的小球挂在倾角 $\theta=30^\circ$ 的光滑斜面上，问

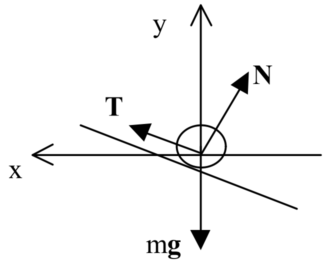
（1）当斜面以加速度 $a=\frac{1}{3}g$ 沿图示方向运动时，求绳中张力及小球对斜面的压力；

（2）当 a 至少多大时，小球给予斜面的压力为零．



第 2．6 题图

解：（1）取小球为研究对象，受力分析如图，以地面为参照，



则：在 x 方向　$T\cos 30^\circ - N\sin 30^\circ = ma$　①

在 y 方向　$T\sin 30^\circ + N\cos 30^\circ = mg$　②

将 $a=\frac{1}{3}g$ 代入解方程，得

$$T=mg(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}),$$

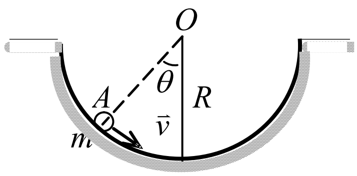
$$N=\frac{T\cos 30^\circ - ma}{m}=mg(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{6})$$

（2）欲使小球给予斜面的压力为零，则①和②式为

$$T\cos 30^\circ = ma \qquad T\sin 30^\circ = mg$$

则 $a=g\cot 30^\circ=\sqrt{3}g$.

2．7 如图所示，质量为 m 的钢球 A 沿着中心在 O、半径为 R 的光滑半圆形槽下滑．当 A 滑到图示的位置时，其速率为 v，钢球中心与 O 的连线 OA 和竖直方向成 θ 角，求这时钢球对槽的压力和钢球的切向加速度．



第 2.7 题图

解：球 A 只受法向力 $\vec{N}$ 和重力 $m\vec{g}$，根据牛顿第二定律

法向：　$N-mg\cos\theta=mv^2/R$　①

切向： $mg\sin\theta = ma_t$ ②

由①式可得 $N = m(g\cos\theta + v^2/R)$

根据牛顿第三定律，球对槽的压力大小同上，方向沿半径向外.

由②式得 $a_t = g\sin\theta$.

动力学—冲量　动量及动量定理

2．8 炮弹水平飞行中突然炸裂成两块，其中一块做自由下落运动，则另一块着地点

（A）比原来更远；　　　　（B）比原来更近；

（C）和原来一样；　　　　（D）条件不足不能判定

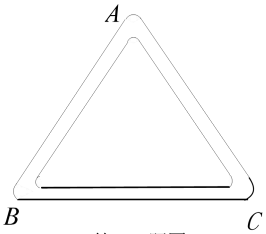
答：A

分析：由于爆炸内力远大于外力（重力和空气阻力），炸裂前后可近似认为动量守恒．水平方向动量守恒式为：$mv = m'v'$，由 $m' < m \Rightarrow v' > v$，即另一块水平飞行速度增大，比原来炮弹飞行更远．

2．9 质量为 m 的质点，以不变速率 v 沿图中正三角形 ABC 的水平光滑轨道运动．质点越过 A 角时，轨道作用于质点的冲量的大小为

(A) mv；　　　　(B) $\sqrt{2}mv$；

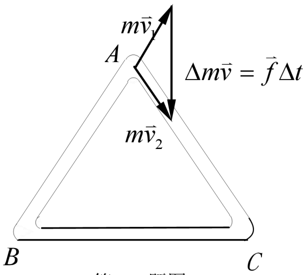
(C) $\sqrt{3}mv$；　　　　(D) $2mv$．



第 2.9 题图

答：C

分析：如图质点越过 A 角时动量变化和所受冲量，根据动量定理有：



第 2.9 题图

$$I = \left|\vec{f}\Delta t\right| = \left|m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1\right|$$
$$= 2mv\cos 30^\circ = \sqrt{3}mv$$

2．10 一质点的质量 m=2kg，其动量 $P = 4x^{1/2}$，x 是距坐标原点的距离．则质点受到的作用力 F=______________，a=________________．

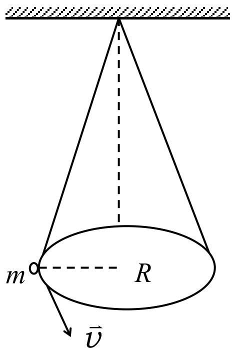
答：$4\mathrm{N}$；$2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$．

分析：（1）由牛顿第二定律，　$F = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 2x^{-1/2}\cdot\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$

由动量的定义　$v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{P}{m} = 2x^{1/2}$，　所以　$F = 2x^{-1/2}\cdot 2x^{1/2} = 4\mathrm{N}$．

（2）由加速度定义　$a = \dfrac{F}{m} = \dfrac{4}{2} = 2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$．

2．11 一圆锥摆，摆球质量为 m，绳长 l，与竖直方向夹角 θ．摆球在水平面内做匀速率圆周运动，则在摆球运行一周过程中绳的张力给予摆球冲量的大小_____、方向______；重力给予摆球冲量的大小________、方向________．



第 2.11 题图

答：$2\pi m\sqrt{Lg\cos\theta}$， 方向竖直向上； $2\pi m\sqrt{Lg\cos\theta}$，方向竖直向下．

分析：根据动量定理，小球在绳的张力与重力作用下运动一周，动量的改变量为零：$(\vec{G}+\vec{T})\cdot\Delta t=0$，即绳的张力与重力在运动一周过程中给予球的冲量大小相等、方向相反，

圆锥摆的运行一周的时间为 $\Delta t=2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$， 所以：

$$I_{mg}=mgT=2\pi mg\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}=2\pi m\sqrt{Lg\cos\theta}$$，方向竖直向下．

$I_T=I_{mg}$，方向竖直向上．

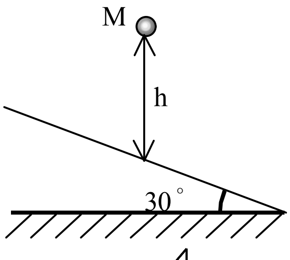
2．12 质量 m=1kg 的物体受到的作用力 F=6t+3 (SI)，物体由静止开始沿直线运动，在 0~20 秒的时间内，物体受到冲量的大小 I=______________；物体的末速度 v=______________．

答： $1260\mathrm{N\cdot s}$；$1260\mathrm{m\cdot s^{-1}}$．

分析：（1）冲量定义：$I=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}t=\int_0^{20}(6t+3)\mathrm{d}t=1260(\mathrm{N\cdot s})$．

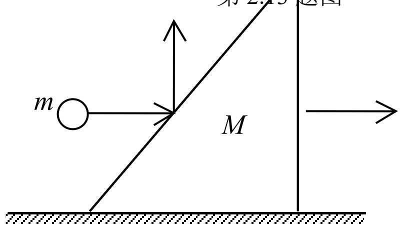
（2）由动量定理 $I=\Delta(mv)$， 所以 $v=\dfrac{I}{m}=1260(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$．

2．13 如图所示，质量为 M 的滑块正沿着光滑水平地面向右滑动．一质量为 m 的小球水平向右飞行，以速度 $\vec{v}_1$（对地）与滑块斜面相碰，碰后竖直向上弹起，速率为 v_2（对地）．若碰撞时间为 Δt，试计算此过程中滑块对地的平均作用力和滑块速度增量的大小．



第 2.13 题图

解：(1) 小球 m 在与 M 碰撞过程中给 M 的竖直



第 2.13 题图

方向冲力在数值上应等于 M 对小球的竖直冲力．而此冲力应等于小球在竖直方向的动量变化率，即：

$$\overline{f}=\frac{mv_2}{\Delta t}$$

由牛顿第三定律，小球以此力作用于 M，其方向向下．

对 M，由牛顿第二定律，在竖直方向上

$$\overline{N}-Mg-\overline{f}=0\,,\qquad \overline{N}=Mg+\overline{f}$$

又由牛顿第三定律，M 给地面的平均作用力也为

$$\overline{F}=\overline{f}+Mg=\frac{mv_2}{\Delta t}+Mg$$

方向竖直向下．

(2) 同理，M 受到小球的水平方向冲力大小应为 $\overline{f}'=\dfrac{mv_1}{\Delta t}$,

方向与 m 原运动方向一致

根据牛顿第二定律，对 M 有 $\overline{f}'=M\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$,

利用上式的 $\overline{f}'$，即可得 $\Delta v=mv_1/M$

2．14 质量为 M＝1．5 kg 的物体，用一根长为 l＝1．25 m 的细绳悬挂在天花板上．今有一质量为 m＝10 g 的子弹以 v_0＝500 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的水平速度射穿物体，刚穿出物体时子弹的速度大小 v ＝30 m/s，设穿透时间极短．求：

(1) 子弹刚穿出时绳中张力的大小；

(2) 子弹在穿透过程中所受的冲量．

解：(1) 因穿透时间极短，故可认为物体未离开平衡位置．因此,作用于子弹、物体系统上的外力均在竖直方向，故系统在水平方向动量守恒．

令子弹穿出时物体的水平速度为 v'

有

$$mv_0=mv+Mv'$$

$$v'=m(v_0-v)/M=3.13\mathrm{m\cdot s}$$

$$T=Mg+Mv'^2/l=26.5\mathrm{N}$$

(2) $f\Delta t=mv-mv_0=-4.7\ \mathrm{N\cdot s}$ (设 $\vec{v}_0$ 方向为正方向)

负号表示冲量方向与 $\vec{v}_0$ 方向相反．

动力学—功与能

2．15 一质点沿圆周运动，有一力 $\vec{F}=F_0(x\vec{i}+y\vec{j})$ 作用于质点．该质点从坐标原点运动到（0，2R）的过程中，力 $\vec{F}$ 对质点做功

（A）F_0R^2；（B）$2F_0R^2$；（C）$3F_0R^2$；（D）F_0R．

答：B

分析：功的定义：

$$A=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}F_0(x\vec{i}+y\vec{j})\cdot(\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j})=\int_0^0F_0x\mathrm{d}x+\int_0^{2R}F_0y\mathrm{d}y=2F_0R^2$$

2．16 一质量为 m 的物体，位于轻弹簧上方 h 高处．该物体由静止开始落在弹簧上，弹簧倔强系数为 k，不计空气阻力，则该物体可获得的最大动能 E_k 为

（A）mgh；（B）$mgh-\dfrac{m^2g^2}{2k}$；

（C）$mgh-\dfrac{m^2g^2}{h}$；（D）$mgh+\dfrac{m^2g^2}{2k}$．

答： D

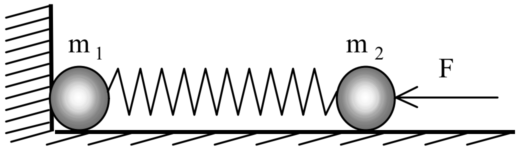
分析：物体下落，重力做正功，接触弹簧后由于弹簧被压缩，弹力做负功，但在弹力大于重力之前，合外力做正功，所以当弹力等于重力时，物体获得最大动能．

弹力等于重力时弹簧被压缩的长度为：$mg=kx\Rightarrow x=\dfrac{mg}{k}$；

功能原理，合外力做功等于动能增量：

$$E_{k\max}=mg(h+x)-\frac{1}{2}kx^2=mgh+\frac{m^2g^2}{k}-\frac{m^2g^2}{2k}=mgh+\frac{m^2g^2}{2k}.$$

2．17 质量分别是 m_1 和 m_2 的小球，用轻弹簧连接（见图）．m_1 靠在墙上，水平面光滑．用力 F 推压 m_2 使弹簧压缩，当力 F 突然撤去后，在弹簧恢复原长的过程中



第 2.17 题图

（A）m_1 和 m_2 与弹簧组成的系统动量守恒；

（B）m_1和m_2组成的系统机械能守恒、动量也守恒；

（C）m_1和m_2与弹簧组成的系统动量不守恒、机械能守恒；

（D）m_1和m_2组成的系统动量和机械能均不守恒.

答： C

分析：系统动量守恒的条件是：系统所受合外力为零；机械能守恒的条件是：系统只有保守内力做功.

用力F推压m_2使弹簧压缩，当力F突然撤去后，在弹簧恢复原长的过程中m_1和m_2与弹簧组成的系统受到墙给m_1的支持力作用，合外力不为零，动量不守恒；但只有保守内力弹簧弹力做功，所以机械能守恒.

2．18 一质点质量m=3kg，其运动方程$x=3t-4t^2+t^3$ （SI），则力在 0～4 秒的时间内对物体作的功A=___________；t=1 秒时力的功率P=___________.

答： 528J； $12\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

解：功的定义式$A=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$；

力：$F=m\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=m(6t-8)$，元位移：$\mathrm{d}x=(3t^2-8t+3)\mathrm{d}t$；速度：$v=3t^2-8t+3$

所以：（1） $A=\int_0^4 m(6t-8)(3t^2-8t+3)\mathrm{d}t=528\mathrm{J}$.

（2） $P=Fv=m(6t-8)(3t^2-8t+3)\Big|_{t=1}=12\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

2．19 一保守力$\vec{F}=(-Ax+Bx^2)\vec{i}$，$A$、$B$是常量．若取$x$=0为势能零点，则该系统的势能$E_p=$________________；质点在该力作用下从x=2m到x=3m的过程中$\Delta E_p=$___________________.

答： $\dfrac{A}{2}x^2-\dfrac{B}{3}x^3$； $\dfrac{5}{2}A-\dfrac{19}{3}B$.

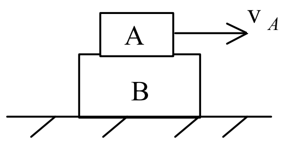
分析：势能等于物体从所求点到势能零点保守力所作的功，即：

$$E_p=\int_x^0(-Ax+Bx^2)\mathrm{d}x=\frac{A}{2}x^2-\frac{B}{3}x^3\ ,$$

势能增量：$\Delta E_p = E_p\big|_{x=3} - E_p\big|_{x=2} = \dfrac{5}{2}A - \dfrac{19}{3}B$.

答：$\dfrac{k}{2r}$；　$-\dfrac{k}{r}$；　$-\dfrac{k}{2r}$.

2．20 在光滑的水平桌面上有一静止的质量为 m_B 的物体，在 B 上（B 足够长）有一物体 A，质量 m_A．今有一小球从左边水平射向 A 并被 A 弹回，A 获得速度 v_A（相对水平桌面），若 AB 间摩擦系数为 μ，当 AB 以共同速度运动时，求 A 在 B 上滑行的距离．



第 2.20 题图

解：A+B 最后共同运动时，在此过程中动量守恒

$$m_A v_A = (m_A + m_B)V\text{，}\qquad V = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B}$$

能量损耗　$\Delta E = \dfrac{1}{2}m_A v_A^2 - \dfrac{1}{2}(m_A + m_B)V^2 = \dfrac{1}{2}m_A v_A^2\left(\dfrac{m_B}{m_A + m_B}\right)$

$\Delta E = m_A g\mu\Delta l$（一对内力做功），　　故 $\Delta l = \dfrac{m_B v_A^2}{2g\mu(m_A + m_B)}$

2．21 质量为 M 的木块静止在光滑的水平面上．质量为 m、速率为 v 的子弹沿水平方向打入木块并陷在其中，试计算相对于地面木块对子弹所作的功 W_1 及子弹对木块所作的功 W_2.

解：因水平面光滑，子弹沿水平方向打入木块过程水平动量守恒，即：

$$mv = (M + m)V$$

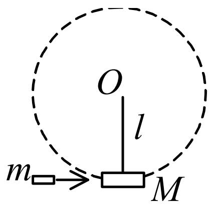
得陷在木块中的共同速度：$V = \dfrac{mv}{M + m}$；

根据动能定理，合外力所作的功等于物体动能的增量，木块对子弹做的功：

$$W_1 = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{mv}{M + m}\right)^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{mM(M + 2m)}{2(M + m)^2}v^2\text{；}$$

子弹对木块做的功：$W_2 = \dfrac{1}{2}MV^2 - 0 = \dfrac{Mm^2}{2(M + m)^2}\mathrm{v}^2$

2．22 一质量为 m 的子弹，水平射入悬挂着的静止砂袋中，如图所示．砂袋质量为 M，悬线长为 l．为使砂袋能在竖直平面内完成整个圆周运动，子弹至少应以多大的速度射入？



第 2.22 题图

解：动量守恒 $mv_0=(m+M)V$

越过最高点条件 $(m+M)g=(m+M)v^2/l$

机械能守恒 $\frac{1}{2}(m+M)V^2=(m+M)g2L+\frac{1}{2}(m+M)v^2$

解上三式，可得 $v_0=(m+M)\sqrt{5gl}/m$