初等模型

- 代表名额的分配（席位分配）
- 双层玻璃的功效

代表名额的分配

某学校有三个系，学生共200名(其中甲系100名，乙系60名，丙系40名). 若某代表会议需要设置20名代表席位，按比例分配，三个系分别为10，6，4席.

问题：现因学生转系，三个系人数变为103，63，34. 问20名代表席位如何分配给三个系？

代表名额的分配

问题：现因学生转系，三个系人数变为103，63，34. 问20名代表席位如何分配给三个系？

系别	学生人数	比例（%）	20席的分配	
			比例	结果
甲	103	51.5	10.3	10
乙	63	31.5	6.3	6
丙	34	17.0	3.4	4
总和	200	100.0	20.0	20

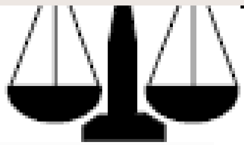
代表名额的分配

问题：若增加为21席，又如何分配？

系别	学生人数	比例（%）	20席的分配		21席的分配	
			比例	结果	比例	结果
甲	103	51.5	10.3	10	10.815	11
乙	63	31.5	6.3	6	6.615	7
丙	34	17.0	3.4	4	3.570	3
总和	200	100.0	20.0	20	21.000	21

代表名额的分配

建立衡量公平分配的数量指标



	人数	席位
A方	p_1	n_1
B方	p_2	n_2

当 $p_1/n_1 = p_2/n_2$ 时，分配公平

若 $p_1/n_1 > p_2/n_2$ 对A不公平

$p_1/n_1 - p_2/n_2$ ~ 对A的绝对不公平度

$p_1=150$，$n_1=10$，$p_1/n_1=15$

$p_2=100$，$n_2=10$，$p_2/n_2=10$

$p_1/n_1 - p_2/n_2=5$

$p_1=1050$，$n_1=10$，$p_1/n_1=105$

$p_2=1000$，$n_2=10$，$p_2/n_2=100$

$p_1/n_1 - p_2/n_2=5$

虽二者的绝对不公平度相同

但后者对A的不公平已大大降低！

代表名额的分配

将绝对度量改为相对度量

若 $p_1/n_1 > p_2/n_2$，定义

$$\frac{p_1/n_1 - p_2/n_2}{p_2/n_2} = r_A(n_1, n_2)$$

~对A的相对不公平度

类似地定义 $r_B(n_1,n_2)$

公平的分配方案应使 $\mathbf{r_A}$，$\mathbf{r_B}$ 尽量小

$$r_A(n_1,n_2) = \frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{n_2}{n_1} - 1, \quad r_B(n_1,n_2) = \frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{n_1}{n_2} - 1$$

代表名额的分配

将一次性的席位分配转化为动态的席位分配，即设A, B已分别有n_1，n_2席，若增加1席，问应分给A，还是B？请给出简易操作方法！

不妨设初始对A不公平，即 $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$

代表名额的分配

应讨论以下几种情况：初始 $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2}$

(1) 若 $\frac{p_1}{n_1+1} > \frac{p_2}{n_2}$ ，则这席位应该给**A**

(2) 若 $\frac{p_1}{n_1+1} < \frac{p_2}{n_2}$ 应计算 $r_B(n_1+1, n_2)$

(3) 若 $\frac{p_1}{n_1} > \frac{p_2}{n_2+1}$ 应计算 $r_A(n_1, n_2+1)$

若 $r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1)$ **,** 则这席位应该给**A,** 反之，给**B**

代表名额的分配

$$r_B(n_1+1,n_2)=\frac{p_2}{p_1}\cdot\frac{n_1+1}{n_2}-1$$

$$r_A(n_1,n_2+1)=\frac{p_1}{p_2}\cdot\frac{n_2+1}{n_1}-1$$

$$r_B(n_1+1,n_2)<r_A(n_1,n_2+1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)}<\frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)}$$

$$Q_i=\frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}$$

$$i=1,2$$

代表名额的分配

若 $r_B(n_1+1,n_2)<r_A(n_1,n_2+1)$ ，则这席位应该给A，反之，给B

$$Q_i=\frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}\quad i=1,2$$ 该席位给Q值较大的一方

这个准则很容易推广到m方分配席位问题！

$$Q_i=\frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}\quad i=1,2,\cdots,m$$

该席位给Q值最大的一方——Q值法

代表名额的分配

三系用Q值方法重新分配 21个席位

按人数比例的整数部分已将19席分配完毕

甲系：$p_1=103$, $n_1=10$
乙系：$p_2=63$, $n_2=6$
丙系：$p_3=34$, $n_3=3$

用**Q**值方法分配
第**20**席和第**21**席

第20席

$$Q_1=\frac{103^2}{10\times 11}=96.4,\quad Q_2=\frac{63^2}{6\times 7}=94.5,\quad Q_3=\frac{34^2}{3\times 4}=96.3$$

Q_1最大，第20席给甲系

第21席 $Q_1=\frac{103^2}{11\times 12}=80.4$，$Q_2$，$Q_3$ 同上

Q_3最大，第21席给丙系

Q值方法分配结果

甲系11席，乙系6席，丙系4席

公平吗?

代表名额的分配

进一步的讨论

Q值方法比“比例加惯例”方法更公平吗？

席位分配的理想化准则

已知: m方人数分别为 $p_1, p_2, \ldots p_m$, 记总人数为 $P= p_1+p_2+\ldots+p_m$，待分配的总席位为N。

设理想情况下m方分配的席位分别为$n_1,n_2,\ldots n_m$（自然应有$n_1+n_2+\ldots+n_m=N$），

记$q_i=Np_i/P$，$i=1,2,\ldots m$，若q_i 均为整数，显然应 $n_i=q_i$

当 q_i 不全为整数时，研究 n_i 应满足的准则

代表名额的分配

记 $[q_i]_- = \text{floor}(q_i) \sim$ 向 $\le q_i$方向取整;

$[q_i]_+ = \text{ceil}(q_i) \sim$ 向 $\ge q_i$方向取整.

$q_i=Np_i/P$不全为整数时， $\mathbf{n_i}$ 应满足的准则

1） $[q_i]_- \le n_i \le [q_i]_+$ $(i=1,2, \ldots m)$, 即n_i 必取$[q_i]_-$, $[q_i]_+$之一

n_i 应是 N和 $p_1, \ldots p_m$ 的函数，记 $n_i = n_i (N, p_1, \ldots p_m)$

2） $n_i (N, p_1, \ldots p_m) \le n_i (N+1, p_1, \ldots p_m)$ $(i=1,2, \ldots m)$

即当总席位增加时 n_i不应减少

"比例加惯例" 方法满足 1），但不满足 2）

Q值方法满足2），但不满足1） （令人遗憾！）

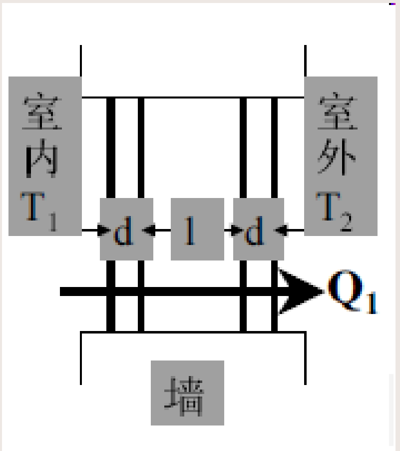
双层玻璃窗的功效

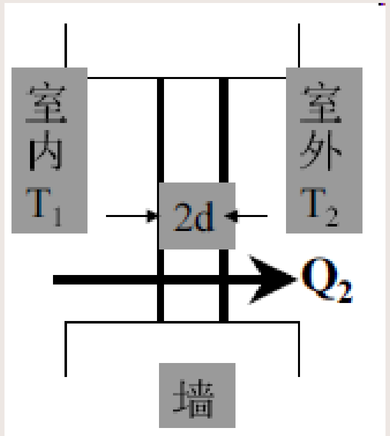
背景：在寒冷的北方，我们发现房屋的玻璃窗都是双层的，据称这样可以有效的抵御严寒，真的吗？换句话说双层玻璃窗比单层玻璃窗保温效果好。

双层玻璃窗的功效

问题描述：双层玻璃窗与它有相同多材料的单层玻璃窗相比，能够减少多少热量损失？

合理假设：热量传播只有传导，没有对流；T_1,T_2不变，热传导过程处于稳态；材料均匀，热传导系数为常数.





双层玻璃窗的功效

依据的原理——热传导定律：单位时间单位面积传导的热量Q的计算公式

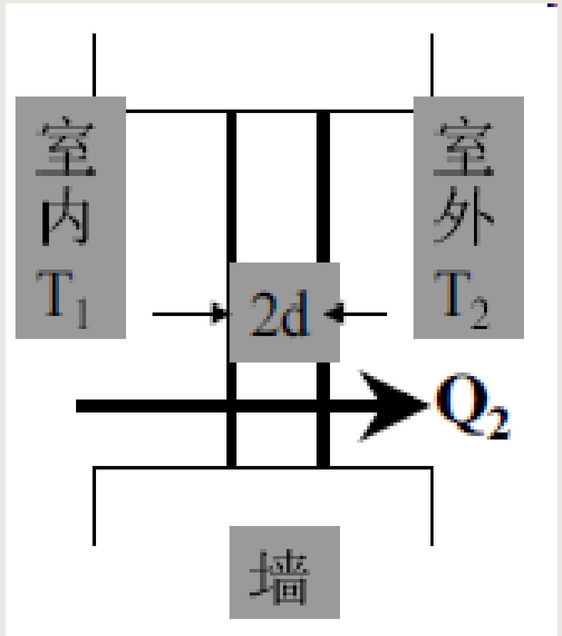
$$Q = k\frac{\Delta T}{d}$$

△T~温差，d~材料厚度，k-热传导系数

双层玻璃窗的功效

模型的建立和求解

$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d}$$

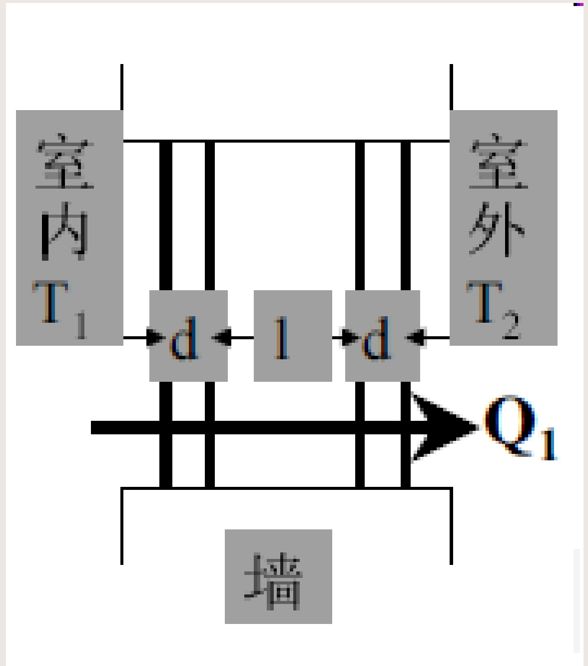


d —玻璃的厚度

k_1 —玻璃的热传导系数

双层玻璃窗的功效

注意到双层玻璃介质的变化，所以有如下的式子.



$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_a}{d} = k_2 \frac{T_a - T_b}{l} = k_1 \frac{T_b - T_2}{d}$$

l —两个玻璃的间距

k_2 —空气的热传导系数

双层玻璃窗的功效

$$\begin{cases} T_1 - T_a = \dfrac{d}{k_1} Q_1 \\ T_a - T_b = \dfrac{l}{k_2} Q_1 \\ T_b - T_2 = \dfrac{d}{k_1} Q_1 \end{cases}$$

$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d}$$

$$T_1 - T_2 = \left(\frac{2d}{k_1} + \frac{l}{k_2}\right) Q_1$$

$$= \left(2 + \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{l}{d}\right) \frac{d}{k_1} Q_1$$

双层玻璃窗的功效

$$Q_1 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{d(2+s)}, \quad s = h\frac{k_1}{k_2}, h = \frac{l}{d}$$

$$Q_2 = k_1 \frac{T_1 - T_2}{2d}$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{2}{s+2} < 1 \Rightarrow Q_1 < Q_2$$

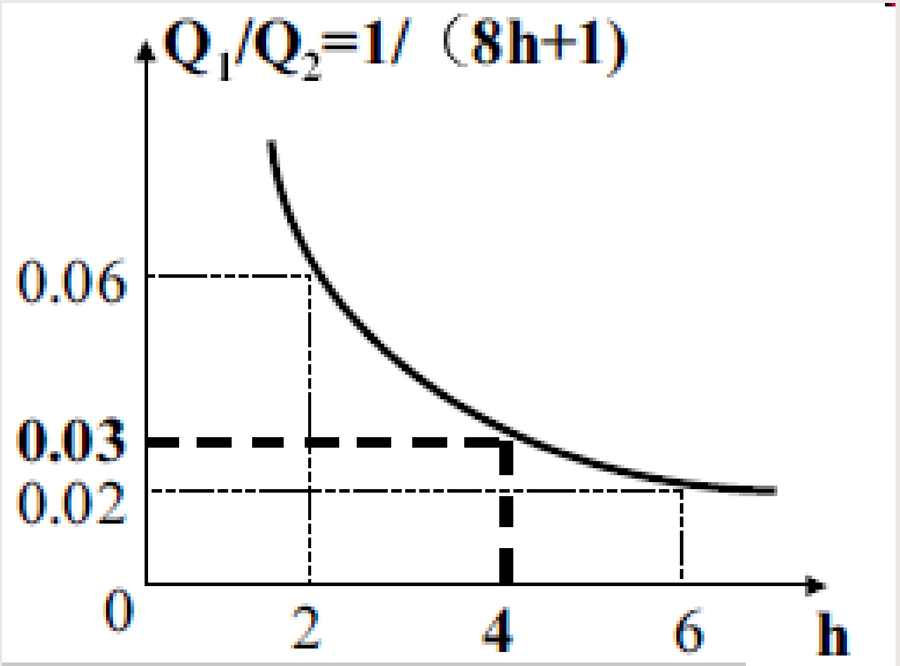
双层玻璃窗的功效

代入数据计算

$$k_1 = 4\times10^{-3} \sim 8\times10^{-3}, \quad k_2 = 2.5\times10^{-4}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = 16$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{8h+1}$$

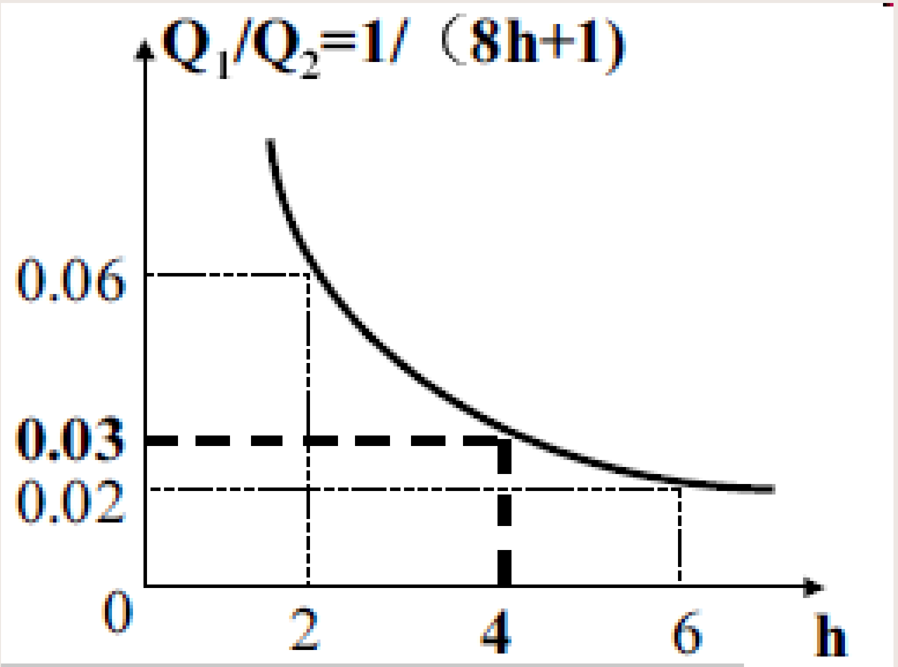


双层玻璃窗的功效

结果分析

$$h = \frac{l}{d} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{Q_2} \approx 3\%$$



延伸思考