石家庄铁道大学 2015 级《高等数学(A)II》期末试卷参考答案

一、选择和填空题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

1-5. BBCDD,　6. 2π，　7. 4π，　8-10. AAA

二、完成下列各题（共 8 题，每题 5 分，共 40 分）

1.　解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}\cdot y+\dfrac{1}{2}xy^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}\cdot xy+e^{xy}+xy$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=2e+1.$

2.　解：记 $F(x,y,z)=e^z+xyz-1$，则 $F'_x=yz,\quad F'_z=e^z+xy$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=-\dfrac{yz}{e^z+xy}$

3. 解：$\int_0^1 dx\int_x^1 e^{y^2}dy=\int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}dx=\int_0^1 ye^{y^2}dy=\left.\dfrac{1}{2}e^{y^2}\right|_0^1=\dfrac{e-1}{2}$

4. 解：$\iint\limits_D x^2dxdy=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr=4\pi.$（轮换对称性）

或 $\iint\limits_D x^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cos^2\theta\cdot rdr=\int_0^{2\pi}\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr=4\pi.$

或 $\iint\limits_D x^2dxdy=\int_{-1}^1 x^2dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=4\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx=4\pi.$（直角坐标然后三角换元）

5. 解：$\iiint\limits_\Omega z^2dV=\int_0^1 z^2dz\iint\limits_{D_z}d\sigma=\int_0^1 z^2\cdot\pi\cdot 1^2dz=\dfrac{\pi}{3}.$　（先面后线）

或 $\iiint\limits_\Omega z^2dV=\iint\limits_{D_z}d\sigma_{xy}\int_0^1 z^2dz=\dfrac{1}{3}\iint\limits_{D_z}d\sigma_{xy}=\dfrac{1}{3}\cdot\pi\cdot 1^2=\dfrac{\pi}{3}.$（先线后面）

6. 解：$\iint\limits_\Sigma zdS=\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}dxdy=\pi a^3.$

7. 解：$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,(|x|<1);\quad \ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n}x^n,(|x|<1)$

$$f(x)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2k-1}x^{2k-1},(|x|<1)$$

8. 解：令 $u=\dfrac{y}{x}$，则 $dy=udx+xdu$，$\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$，原方程变为 $x\dfrac{du}{dx}=\tan u\Rightarrow \cot udu=\dfrac{dx}{x}$

解之得$\sin u = Cx$，原方程通解为$\sin\frac{y}{x} = Cx.$

三、完成下列各题（共 3 题，每题 10 分，共 30 分）

1. 解：由$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x = 0 \\ f'_y(x,y) = \ln y + 1 = 0 \end{cases}$得驻点$(0,e^{-1})$

又$A = f''_{xx}(0,e^{-1}) = 2, B = f''_{xy}(0,e^{-1}) = 0, C = f''_{yy}(0,e^{-1}) = e.$

$\Delta = B^2 - AC < 0,$且$A > 0$，故该点为极小值点，极小值为$f(0,e^{-1}) = -e^{-1}$

2. 解：法 1 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{z} dxdy = \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-dxdy) = -\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \frac{1}{r} \cdot rdr = -2\pi.$

法 2 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{z} dxdy = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{1}{z} dxdy - \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{1}{z} dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \frac{-1}{z^2} dV - \iint\limits_{\Sigma_1} dxdy$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{z} (\iint\limits_{D_z} dxdy) dz - \iint\limits_{D} dxdy = -\int_0^1 \frac{1}{z} \cdot \pi z^2 dz - \pi = -2\pi$$

3. 解：特征方程为 $r^2 - 4r + 3 = 0$，特征根为$r_1 = 1, r_2 = 3.$

对应齐次线性微分方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$

$f(x) = 2e^{2x}$，因为$\lambda = 2$不是特征根，故特解可令为$y^* = ae^{2x}$，

代入非齐次方程可得 $a = -2.$

故原方程通解为$y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}.$