万有引力定律的发现

万有引力定律的发现是伟大科学家牛顿的重要贡献之一，牛顿在研究力学的过程中发明了微积分，又成功地在开普勒三定律的基础上运用微积分推出了万有引力定律．这一创造性的成就可以看作是历史上最著名的数学建模案例之一．

问题背景

- 背景：十五世纪中叶，哥白尼提出了震惊世界的日心说，这是科学上的一大革命。
- 当然由于历史和科学水平的限制，他的学说免不了也包含了一些缺陷（地球围绕太阳作圆周运动）。
- 此后，丹麦天文学家第谷·布拉赫进行了二十年的观测并记录下十分丰富而又准确的资料。

问题背景

- 第谷·布拉赫的学生开普勒（**Kepler**）对这些资料进行了九年时间的分析计算后发现，老师的观察结果与哥白尼学说在运行周期上**有8度的误差**，这使他对哥白尼的圆形轨道假设产生了怀疑，他以观察结果为依据，提出了天文学上至今仍然十分著名的三条假设——**Kepler**三定律。

重要假设

Kepler三定律

（**1**）行星轨道是一个椭圆，太阳位于此椭圆的一个焦点上；

（**2**）行星在单位时间内扫过的面积A不变；

（**3**）行星运行周期的平方正比于椭圆长轴的三次方，比例系数不随行星而改变。

重要假设的数学表示

- 假设：

（1）行星轨道方程：椭圆极坐标方程

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

$$p=\frac{b^2}{a},\quad b^2=a^2(1-e^2)$$

其中***a***长半轴，***b***短半轴，***e***离心率；

（如果只会直角坐标方程表示那就麻烦了！）

重要假设的数学表示

（2） $A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$

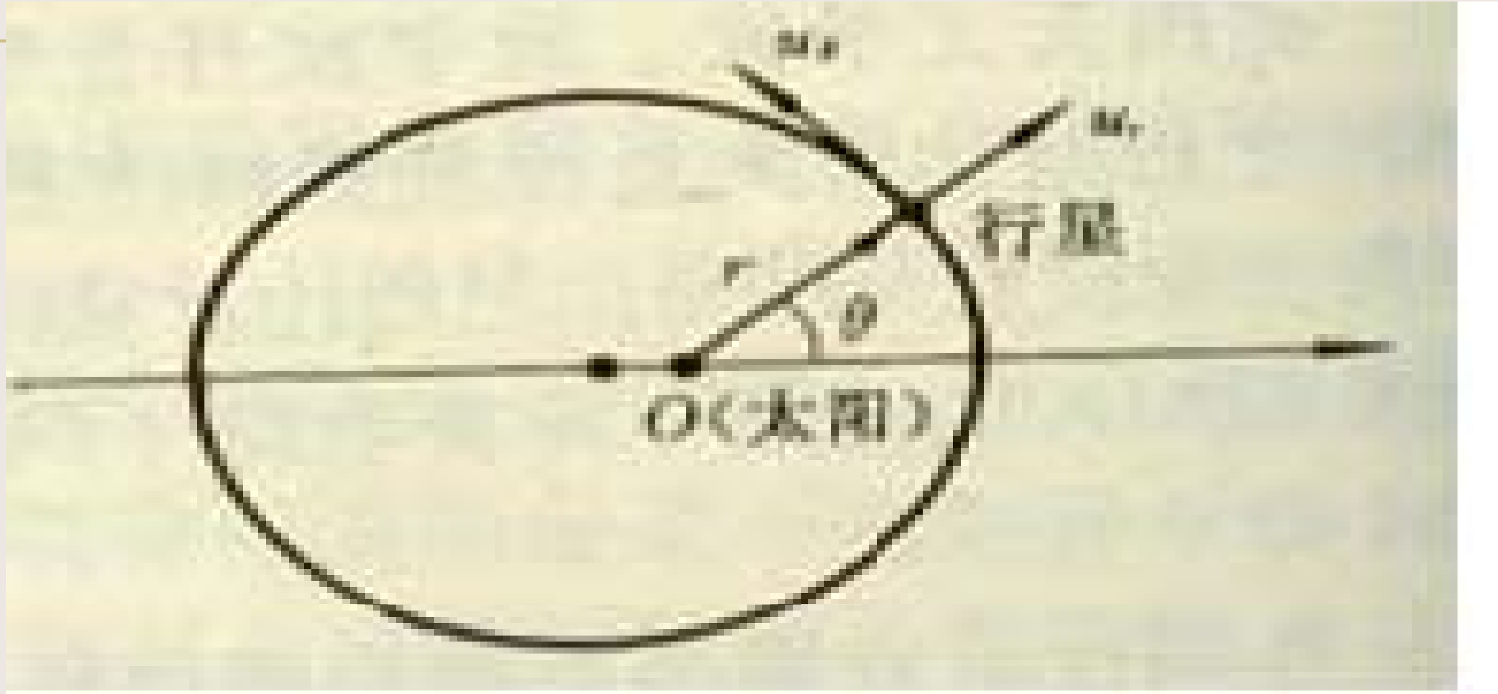
（3） $T^2 = ka^3$

k为比例系数，***T***为周期

（4）牛顿第二定律：

$$\vec{f} \propto \ddot{\vec{r}}$$

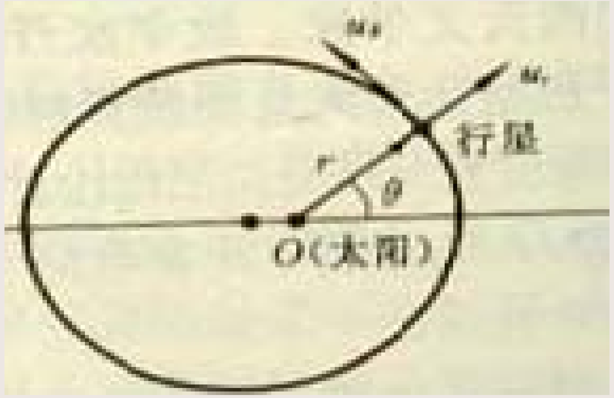
模型的建立和推导



$$\text{基向量}\begin{cases}\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\end{cases}$$

模型的建立和推导

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$$



$$\vec{r} = r\vec{u}_r\ ,$$

$$\begin{cases} \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r \end{cases}$$

模型的建立和推导

$$\begin{cases} \vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases} \qquad \vec{r} = r\vec{u}_r\,, \qquad \begin{cases} \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r \end{cases}$$

行星速度 $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

行星加速度 $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{u}_\theta$

模型的建立和推导

下面化简两个分量的系数

$$A = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{2A}{r^2} \\ \ddot{\theta} = \dfrac{-4A}{r^3} \dot{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r \times \frac{-4A}{r^3} \dot{r} + 2\dot{r} \times \frac{2A}{r^2} = 0$$

可见在$\vec{u}_\theta$方向的分量为零！

模型的建立和推导

$$A=\frac{1}{2}r^2\dot{\theta},\quad r=\frac{p}{1+e\cos\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{r}=\frac{-p}{(1+e\cos\theta)^2}\cdot(-e\sin\theta)\dot{\theta}$$

$$=\left(\frac{p}{1+e\cos\theta}\right)^2\dot{\theta}\frac{e}{p}\sin\theta=r^2\dot{\theta}\frac{e}{p}\sin\theta=\frac{2Ae}{p}\sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{r}=\frac{2Ae}{p}\cos\theta\dot{\theta}=\frac{2A}{p}\times\frac{2A}{r^2}e\cos\theta=(2A)^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^2p}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=(2A)^2\left(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r^2p}\right)-r\left(\frac{2A}{r^2}\right)^2=-\frac{(2A)^2}{p}\cdot\frac{1}{r^2}$$

模型的建立和推导

$$T^2 = ka^3, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad TA = \pi ab$$

$$\Rightarrow T^2A^2 = \pi^2 a^2 b^2 \Rightarrow ka^3A^2 = \pi^2 a^2 b^2$$

$$\Rightarrow kA^2 = \pi^2 \frac{b^2}{a} \Rightarrow kA^2 = \pi^2 p$$

$$\Rightarrow -\frac{(2A)^2}{p} = -\frac{4\pi^2}{k}$$

结果和分析

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\pi^2}{k} \cdot \frac{1}{r^2}(-\vec{u}_r)$$

结论：作用于任一行星上的力，方向在太阳与行星的连线上，指向太阳（怎么看出来的？），其大小与两者之间的距离平方成反比，比例系数通过实验给出。