第四节

对面积的曲面积分

一、对面积的曲面积分的概念与性质

二、对面积的曲面积分的计算法

一、对面积的曲面积分的概念与性质

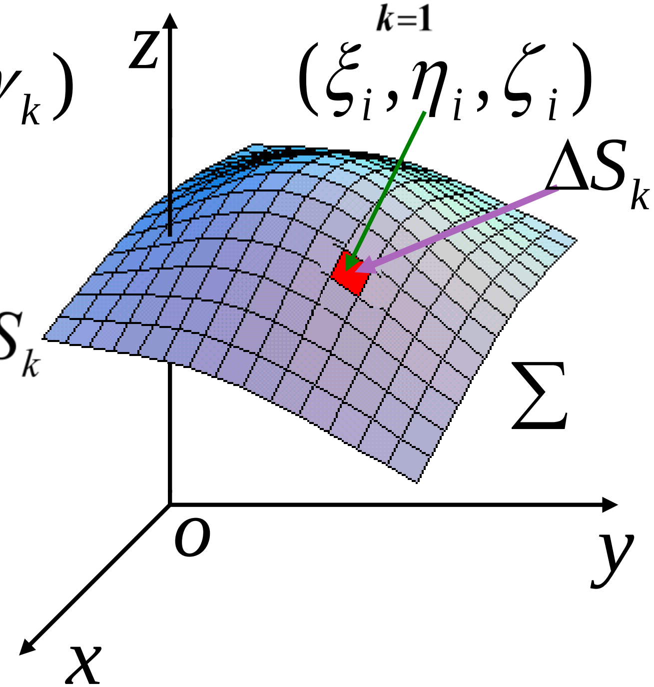
引例： 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$，求质量 M.

(1) 分割：把曲面任意分成 n 小块 $\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n$，$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k$

(2) 近似： 在 ΔS_k 上任取一点 $(\xi_k, \eta_k, \gamma_k)$

$$\Delta M_k \approx \rho(\xi_k, \eta_k, \gamma_k)\Delta S_k$$

(3) 求和：$M = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k, \eta_k, \gamma_k)\Delta S_k$



(4) 取极限：

$$\lambda = \max\{\Delta S_1, \Delta S_2, \cdots, \Delta S_n\}$$

$$M = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$$

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$

曲面面积为 $S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S$

对面积的曲面积分与对弧长的曲线积分性质类似.

- **积分的存在性.** 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 则对面积的曲面积分存在.

1) 线性性质. 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma}[k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\mathrm{d}S$$
$$= k_1\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S \pm k_2\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\mathrm{d}S$$

2) 对积分域的可加性. 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

3) 对称性

若Σ关于xoy面对称, Σ_1为xoy面上方的部分,

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S & f(x,y,-z) = f(x,y,z) \\ 0 & f(x,y,-z) = -f(x,y,z) \end{cases}$$

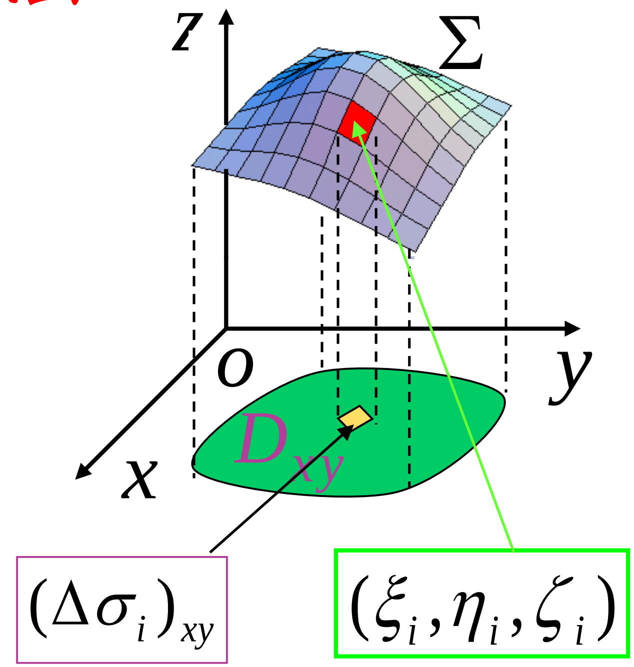
二、对面积的曲面积分的计算法

定理： 设有光滑曲面

$$\Sigma: z = z(x,y), (x,y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续，则曲面积分

$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ 存在，且有



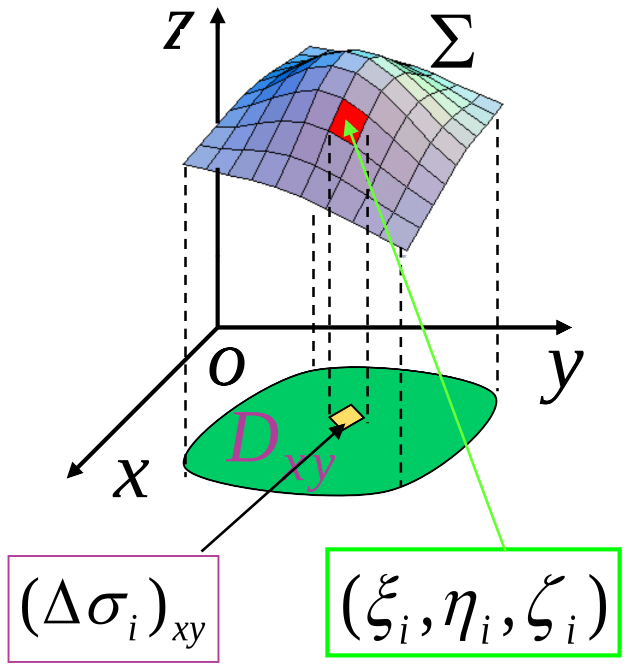
$$\iint_{\underline{\Sigma}} f(x,y,\underline{z})\,\underline{\mathrm{d}S}$$

$$= \iint_{\underline{D_{xy}}} f(x,y,\underline{z(x,y)})\underline{\sqrt{1+z_x^{\,2}(x,y)+z_y^{\,2}(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

对面积的曲面积分的计算方法：写出曲面方程，找到其在坐标面上的投影区域，求出面积元素，将曲面方程和面积元素代入被积表达式，在投影区域上做二重积分

定理: 设有光滑曲面

$$\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$



***f* (*x*, *y*, *z*)** 在 Σ 上连续, 则曲面积分

$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) \mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^{\;2}(x, y) + z_y^{\;2}(x, y)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明: 如果曲面方程为

$$x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$$

或 $$y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$$

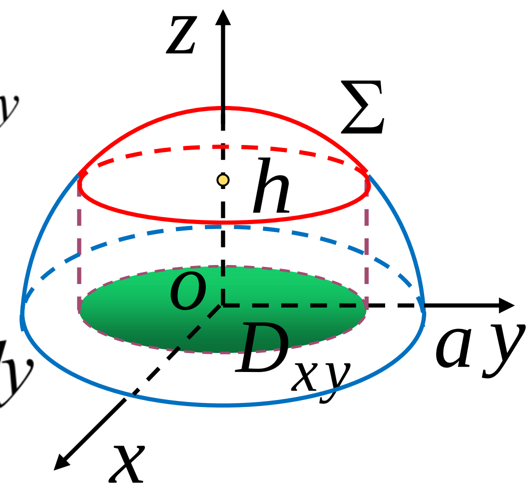
可有类似的公式.

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}$**, 其中Σ是球面** $x^2+y^2+z^2=a^2$ **被平面** $z=h\ (0<h<a)$ **截出的顶部.**

解: $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,\ (x,y)\in D_{xy}$

$$D_{xy}: x^2+y^2\le a^2-h^2$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$$



$$\therefore \iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}}\frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\,\mathrm{d}r}{a^2-r^2}$$

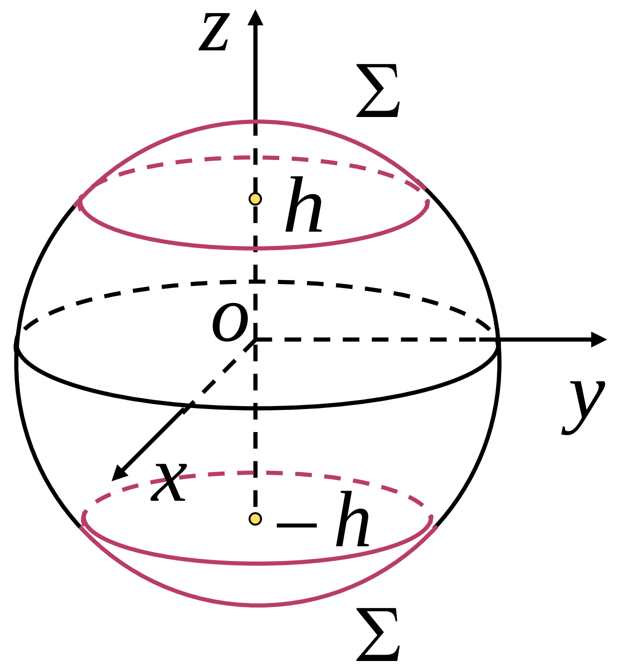
$$=2\pi a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

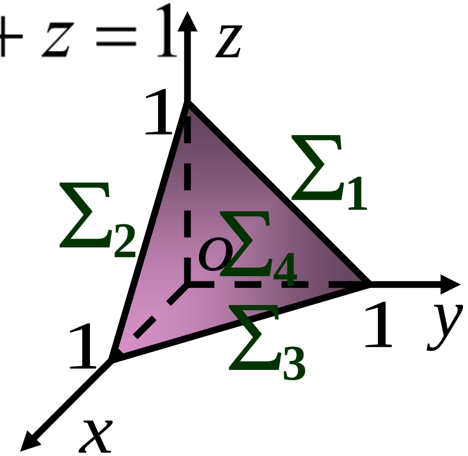
若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分,则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\qquad 0 \qquad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\ 4\pi a\ln\frac{a}{\mathrm{h}}\ )$$



例2. 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解：设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示Σ 在平面 $x=0, y=0, z=0,\ x+y+z=1$ 上的部分, 则

$$\text{原式} = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_3} xyz\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma_1} 0yz\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} x0z\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_3} xy0\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4 : z = 1 - x - y,\quad (x,y) \in D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}\big/120$$

替代法

例3. 计算 $I=\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z+3)\,\mathrm{d}S$,

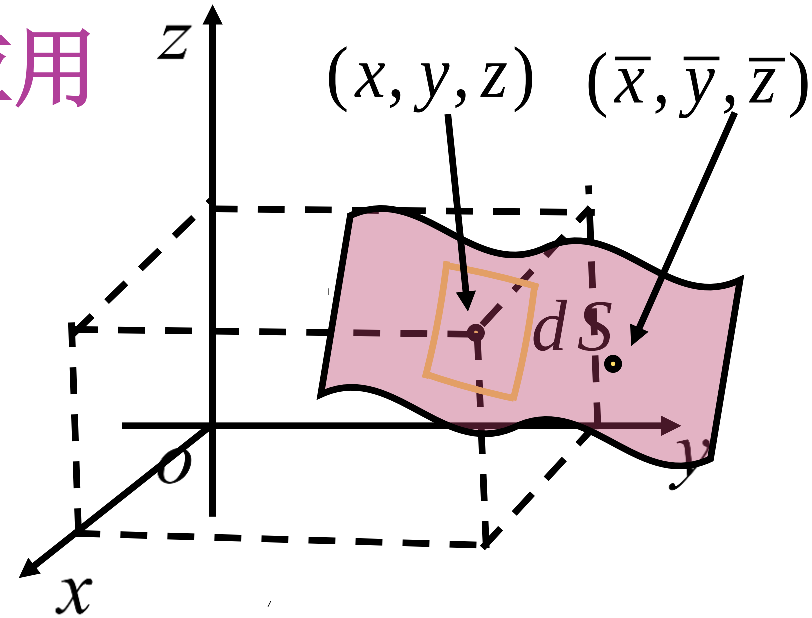
其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=2(x+y+z)$.

解: 因为被积函数定义在曲面上

球心为(1, 1, 1),半径为 $\sqrt{3}$

$$\therefore\quad I=\oiint_{\Sigma}3\,\mathrm{d}S=36\pi$$

三、对面积的曲面积分的应用



1. 曲面形构件的质量

$$m=\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

2. 曲面形构件的质心

$$dM_{yoz}=x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$M_{yoz}=\iint_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$\bar{x}\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$\bar{x}=\frac{\iint_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}$$

同理

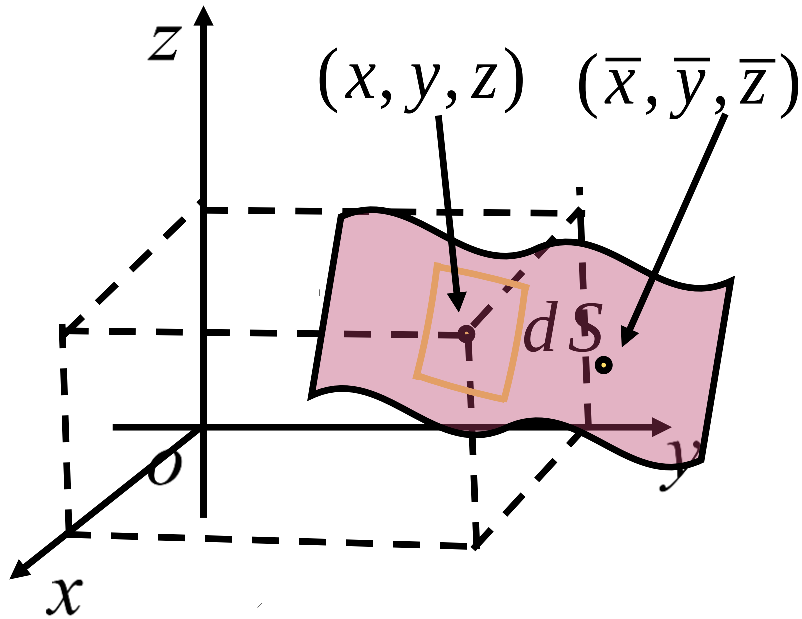
$$\bar{y}=\frac{\iint_{\Sigma}y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}$$

$$\bar{z}=\frac{\iint_{\Sigma}z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}$$

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_{\Sigma} y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}$$

$$\bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S}$$



均匀时称为形心

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S} \qquad \bar{y} = \frac{\iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S} \qquad \bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma} \mathrm{d}S}$$

3. 曲面形构件的转动惯量

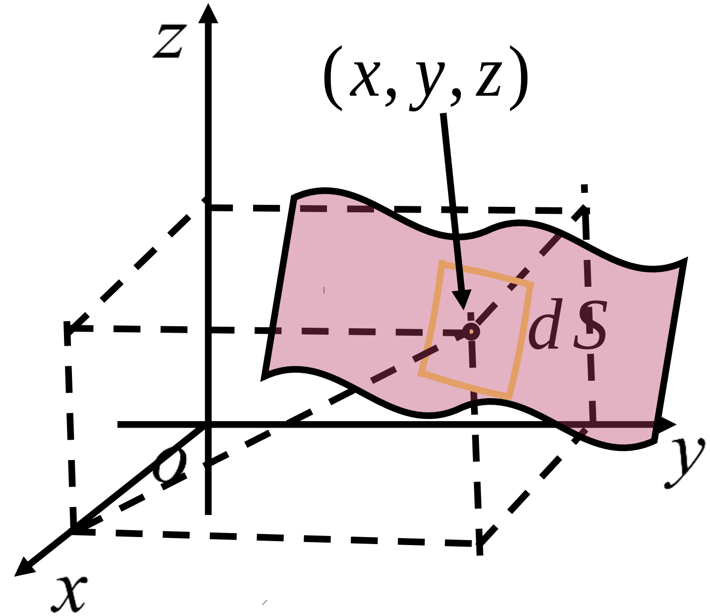
$$dI_x = (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$I_x = \iint_\Sigma (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$I_y = \iint_\Sigma (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$I_z = \iint_\Sigma (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$I_o = \iint_\Sigma (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$



内容小结

1. 定义: $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设$\Sigma: z = z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

- **注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、重心公式简化计算的技巧.**