第二节

二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

二、利用极坐标计算二重积分

二、利用极坐标计算二重积分

主要内容:

(1) 直角坐标和极坐标的转换.

(2) 极坐标下的二次积分的公式.

重点: 极坐标下二重积分的计算.

难点: 极坐标下二重积分的计算.

二、利用极坐标计算二重积分

1. 特征

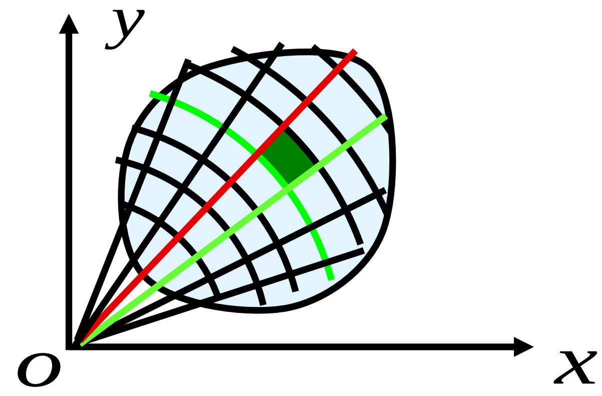
(1) 边界曲线含 $\left(x^2+y^2\right)$

(2) $f(x,y)$含 $\left(x^2+y^2\right)$

2. 变换

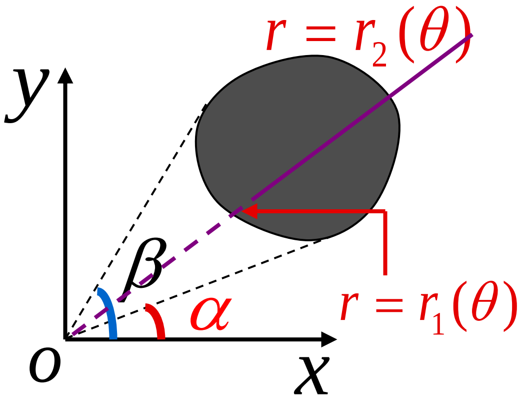
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

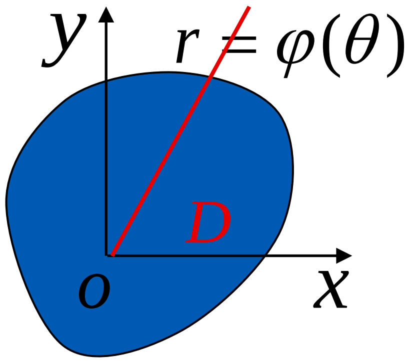
3. 区域D



3. 区域D

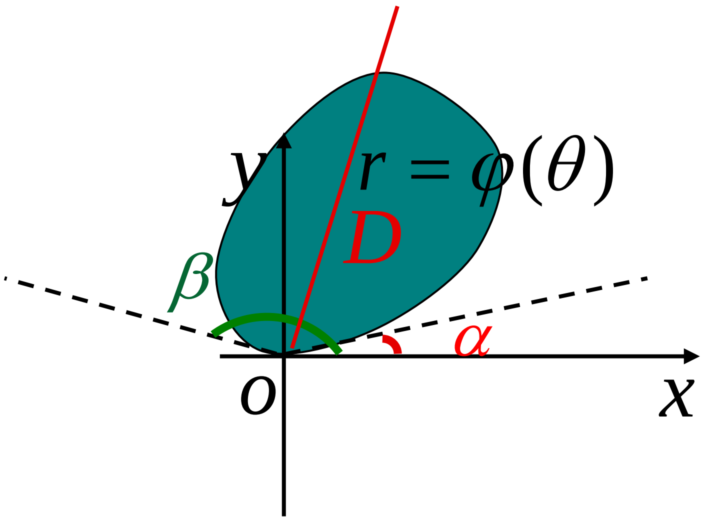
$$\begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \end{cases}$$





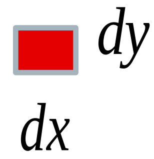
$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le \varphi(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha \le \theta \le \beta \\ 0 \le r \le \varphi(\theta) \end{cases}$$

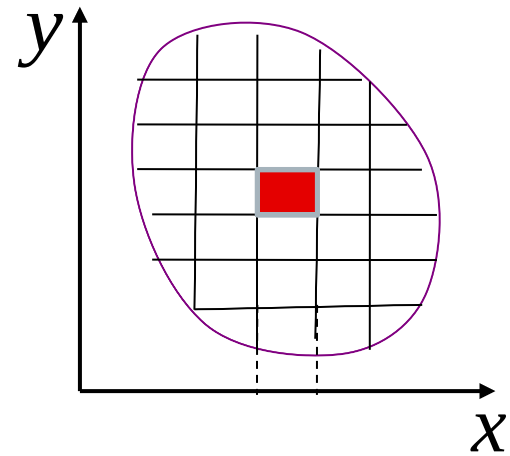


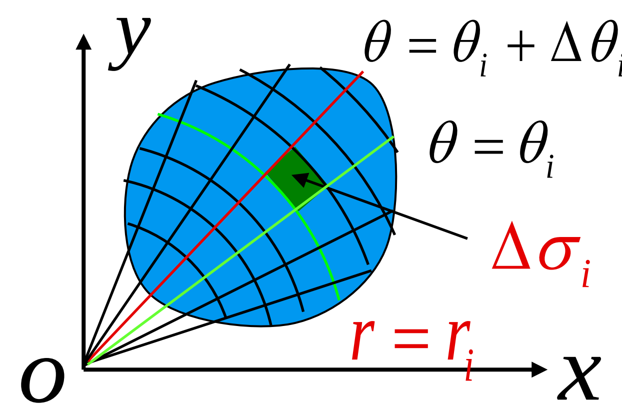
1. 面积微元

直角坐标系



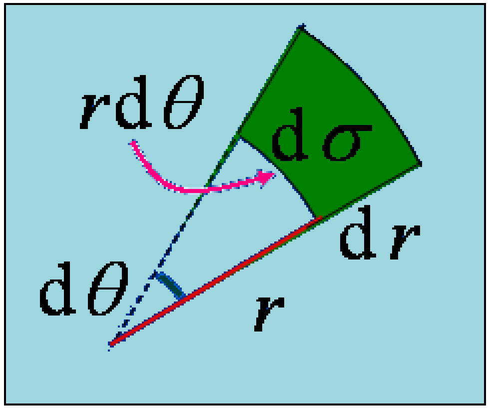
$$d\sigma = dx\,dy$$





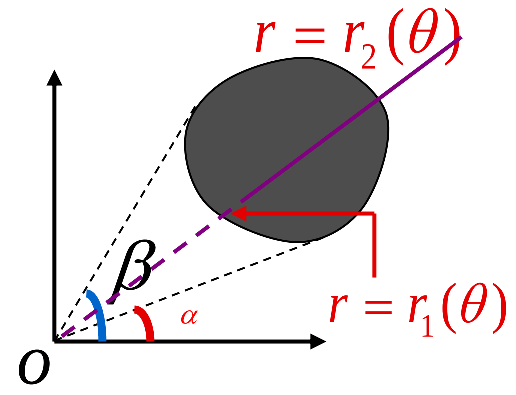
极坐标系

$$d\sigma = dr\,r\,d\theta = r\,dr\,d\theta$$



2. 极坐标下二重积分的计算

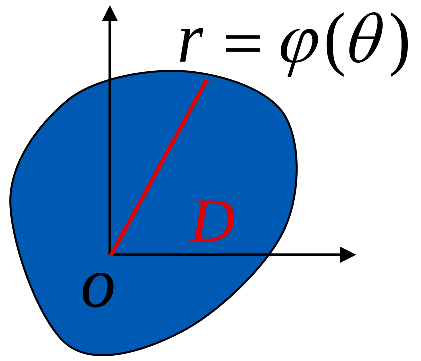
化为“先r后θ”的二次积分公式



$$D:\begin{cases} r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \\ \alpha \le \theta \le \beta \end{cases},\quad \text{则}$$

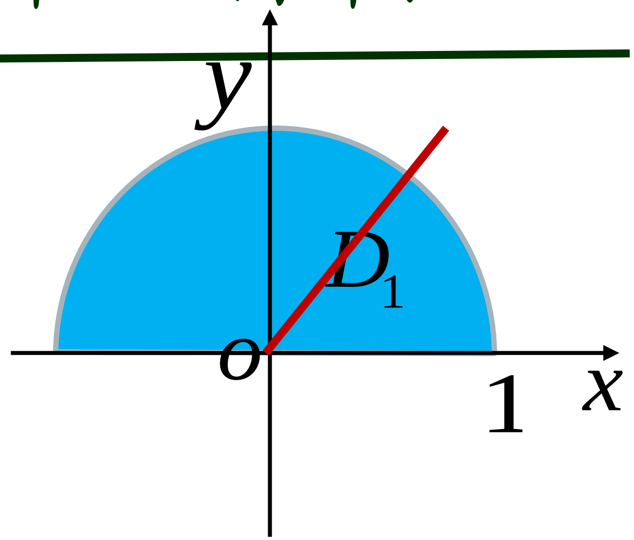
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r$$



特别 $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r$

例1. 计算 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$如图所示



解:

1. $D:\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

2. 由于：D关于y轴（x）对称，且f关于x是偶函数

$$I = 2\iint_{D_1} \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

3.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$I = 2\iint_{D_1} \sqrt{1-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\; r dr d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\; r dr$$

例1. 计算 $\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 如图所示

解:

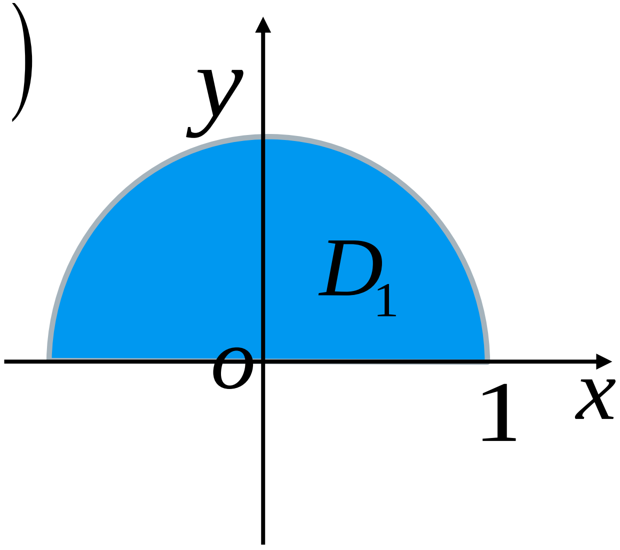
$$I = 2\iint_{D_1} \sqrt{1-(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}\; rdrd\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\; rdr$$

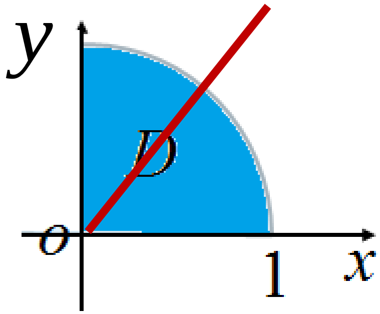
$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\; d\left(1-r^2\right)$$

$$= \frac{-\pi}{2}\,\frac{2}{3}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{3}$$



例2. 计算 $\iint_D \sin x^2 \cos y^2 \,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$如图所示



解:

1. $D:\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

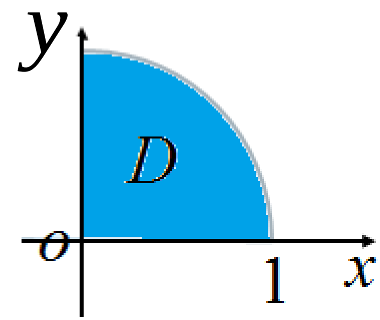
2. D关于$y=x$对称

$$I = \iint_D \sin x^2 \cos y^2 \,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \sin y^2 \cos x^2 \,\mathrm{d}\sigma$$

$$2I = \iint_D \left(\sin x^2 \cos y^2 + \sin y^2 \cos x^2\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_D \sin\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}\sigma$$

例2. 计算 $\iint_D \sin x^2 \sin y^2 \,\mathrm{d}\sigma$，其中$D$如图所示



解:

1. $D:\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

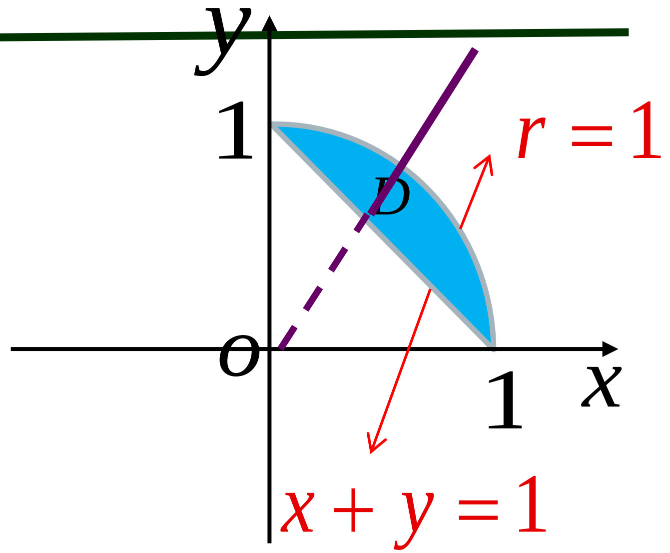
2. $2I = \iint_D \sin\left(x^2 + y^2\right)\mathrm{d}\sigma$

3. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sin r^2 \; r dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \sin r^2 \; dr^2 = -\frac{\pi}{4}(\cos 1 - 1)$$

例3. 计算 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$如图所示



解:

1. $D:\begin{cases} \dfrac{1}{\cos\theta+\sin\theta} \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} \frac{1}{r}\, r dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} dr$$

例3. 计算 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$如图所示

解:

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} dr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}d\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\theta+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

例3. 计算 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$如图所示

解:

$$I=\frac{\pi}{2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\theta+\frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}$$

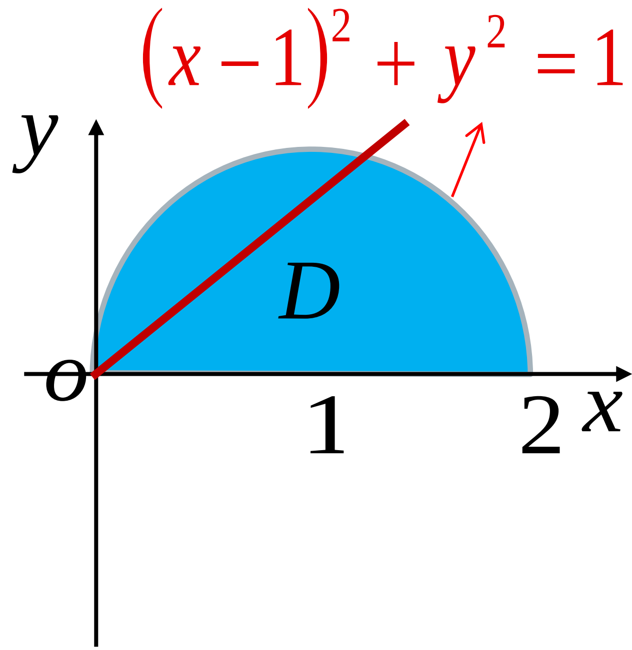
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\csc(\theta+\frac{\pi}{4})d(\theta+\frac{\pi}{4})$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\int\tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C\\&\int\cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C\\&\int\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\sec x+\tan x|+C\\&\int\csc x\,\mathrm{d}x=\ln|\csc x-\cot x|+C\end{aligned}}$$

例4. 计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$如图所示

解:

1. $D:\begin{cases}0\le r\le 2\cos\theta\\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$



2. $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r\,rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\Big|_0^{2\cos\theta}\right]d\theta=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}8\cos^3\theta\,d\theta$$

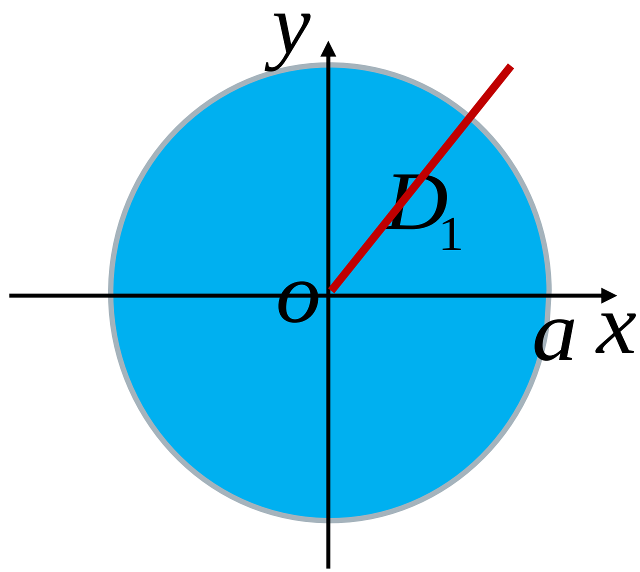
$$=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta=\frac{8}{3}I_3=\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{9}$$

例5. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，D： $x^2+y^2\le a^2$

解:

1. $D:\begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$



$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-r^2}rdr$$

$$=-\frac{1}{2}2\pi\int_0^a e^{-r^2}d\left(-r^2\right)$$

$$=-\pi\ e^{-r^2}\Big|_0^a\quad=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

注1:

$$\int e^{-x^2}dx$$

无法用直角坐标系求出

注2: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$

证明: $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2$$

$$\downarrow$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr$$

$$= -\frac{1}{2} 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} d\left(-r^2\right)$$

$$= -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{+\infty} = \pi \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

例6. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D: 0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$

由对称性可知

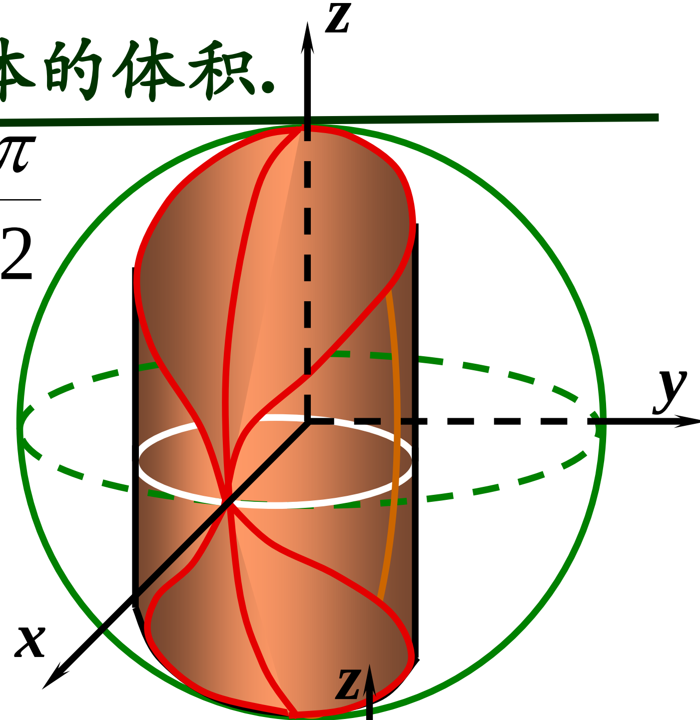
$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

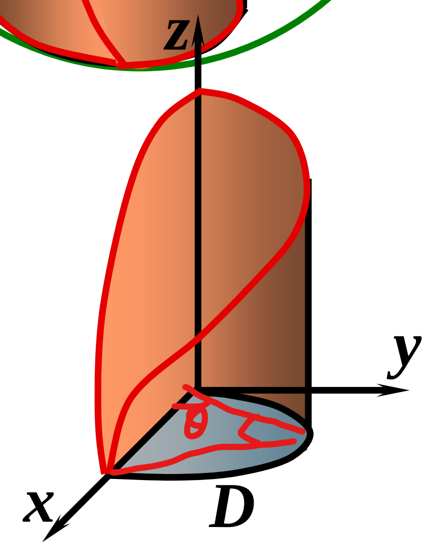
$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

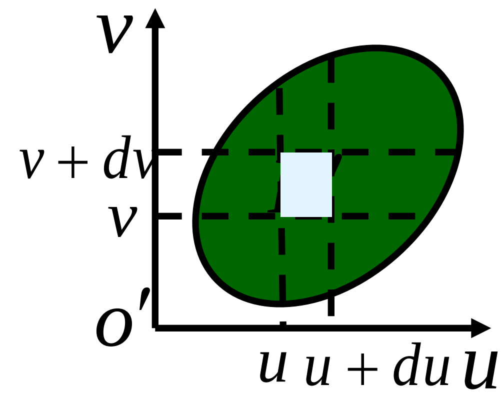
$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$





*二重积分换元法（选讲）



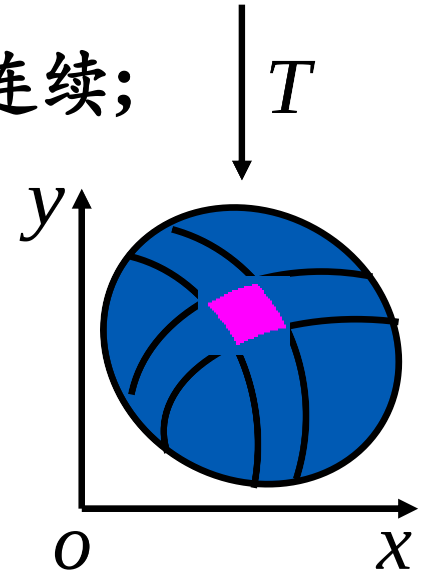
定理: 设 $f(x,y)$ 在闭区域D上连续, 变换:

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$

满足 (1) $x(u,v)$, $y(u,v)$ 在 D' 上一阶偏导数连续;

(2) 在 D' 上雅可比行列式

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0;$$



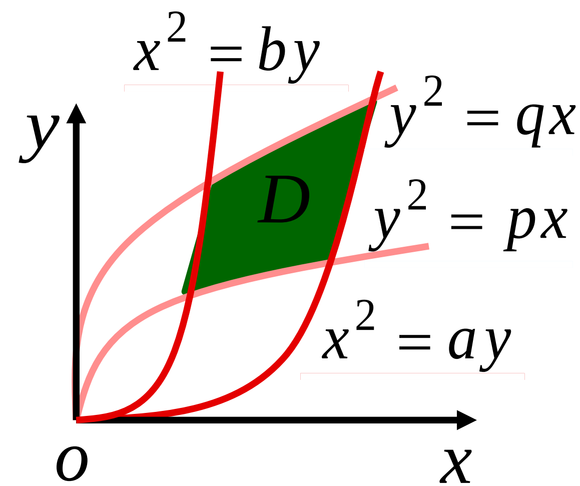
(3) 变换 $T: D' \to D$ 是一一对应的，

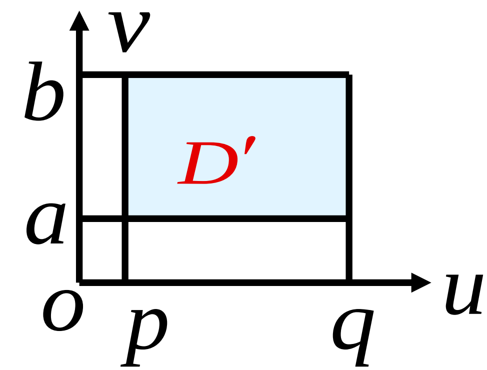
则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

例7. 计算由 $y^2=px, y^2=qx, x^2=ay, x^2=by$ $(0<p<q, 0<a<b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S.

解: 令 $u=\dfrac{y^2}{x}, v=\dfrac{x^2}{y}$, 则

$$D': \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$



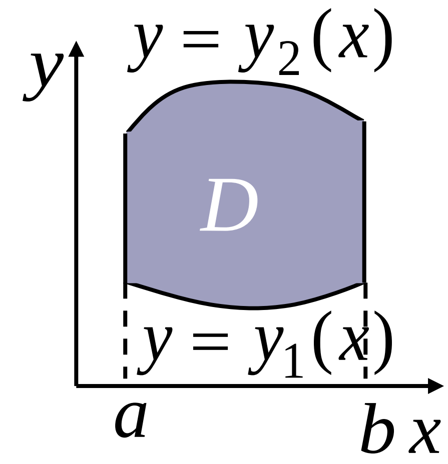


$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore S=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D'}|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u\int_a^b \mathrm{d}v=\frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

内容小结



(1) 二重积分化为累次积分的方法

直角坐标系情形：

- 若积分区域为

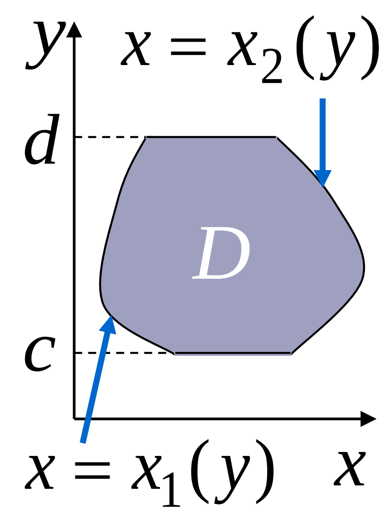
$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

- 若积分区域为

$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}$$

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



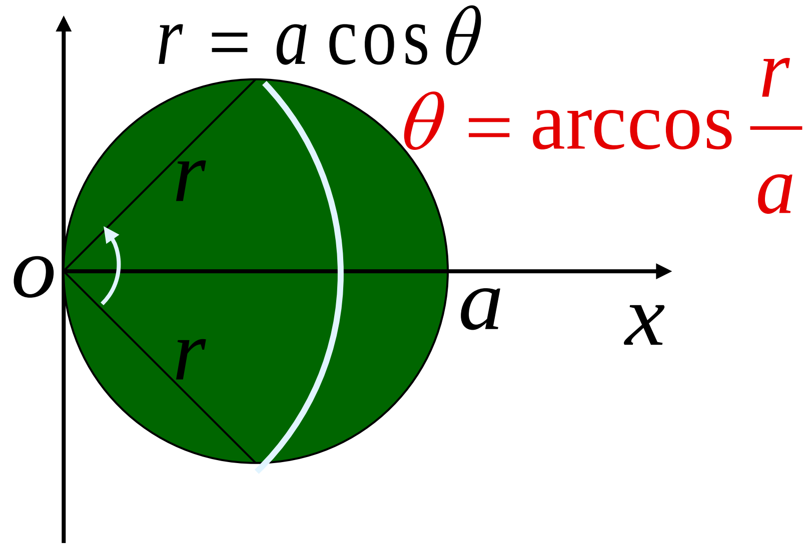
(3) 计算步骤及注意事项

- 画出积分域
- 选择坐标系
  - 域边界应尽量多为坐标线
  - 被积函数关于坐标变量易分离
- 确定积分序
  - 积分域分块要少
  - 累次积好算为妙
- 写出积分限
  - 图示法
  - 不等式
- 计算要简便
  - 充分利用对称性
  - 应用换元公式

练习

1. 交换积分顺序 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)\mathrm{d}r \quad (a>0)$

提示: 积分域如图



$$I=\int_0^a \mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}} f(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$$