第35讲　傅立叶级数

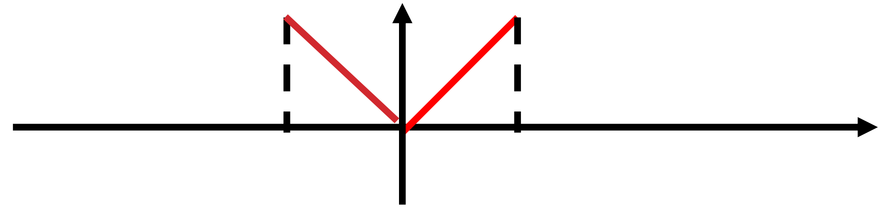
一、定义在$[-l, l]$上的函数 $f(x)$的傅氏级数展开法

二、周期为$2l$的奇函数和偶级数的傅立叶级数

三、仅在$[0, l]$有定义的函数展开为正弦或余弦级数

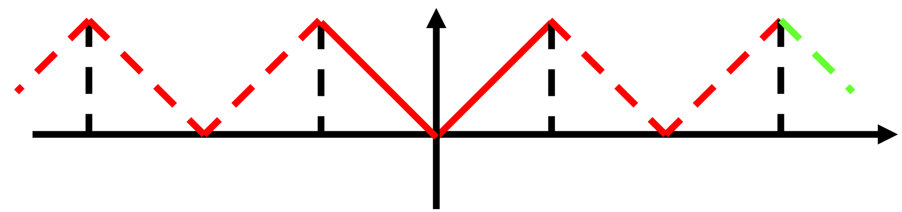
一、定义在[$-l$,l]上的函数 $f(x)$的傅氏级数展开法

$f(x)$, $x \in [-l, l]$



周期延拓

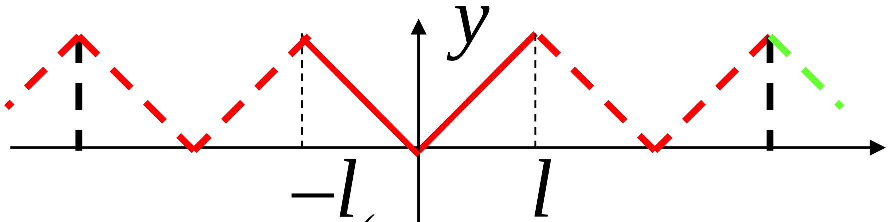
$F(x)$



傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上的傅里叶级数

$f(x), x\in[-l, l]$ 周期延拓为 $F(x)$ 傅里叶展开



$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

x为$F(x)$的连续点

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

$(n=0, 1, \cdots)$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

$(n=1, 2, \cdots)$

x为$F(x)$的间断点级数收敛于

$$\frac{F(x^+)+F(x^-)}{2}$$

$f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上的傅里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

x为$f(x)$的$(-l, l)$连续点

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

x为$f(x)$的$(-l, l)$间断点级数收敛于

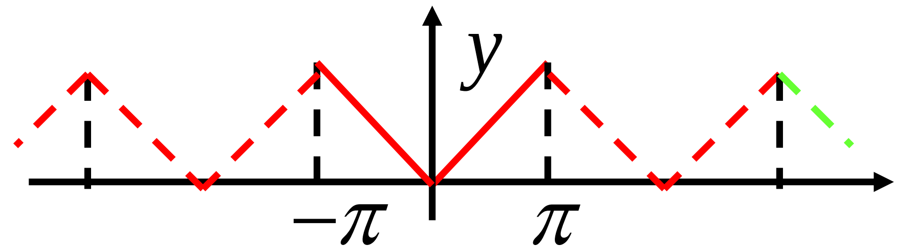
$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

$x=-l, l$级数收敛于

$$\frac{f(-l^+)+f(l^-)}{2}$$

例1. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x\,, & -\pi\le x<0\\ x\,, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数 .

解: 将 $f(x)$ 延拓成以 2π 为周期的函数 $F(x)$, 则



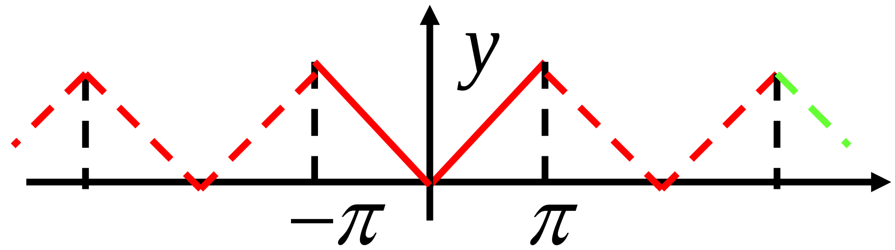
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi}\,\frac{\cos n\pi-1}{n^2}=\frac{2[(-1)^n-1]}{\pi n^2}$$

$$f(x)=\begin{cases}-x\,, & -\pi\le x<0\\ x\,, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$



$$a_0=\pi$$

$$a_n=\frac{2[(-1)^n-1]}{\pi n^2}=\begin{cases}-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}\,, & n=2k-1\\ 0\,, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$\boldsymbol{b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x}$$

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$$

$$(-\pi\le x\le\pi)$$

注: 利用此展式可求出特殊的级数的和.

当 $x=0$ 时, $f(0)=0$, 得

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$$

二、周期为2*l*的奇函数和偶级数的傅立叶级数

定理4．对周期为 $2l$ 的奇函数 $f(x)$，其傅里叶系数为

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

它的傅里叶级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x$ ——正弦级数

对周期为2*l*的偶函数 $f(x)$，其傅里叶系数为

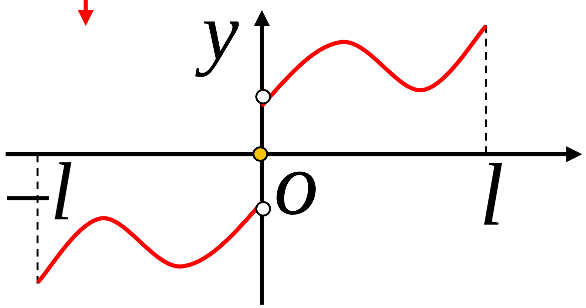
$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

它的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x$ ——余弦级数

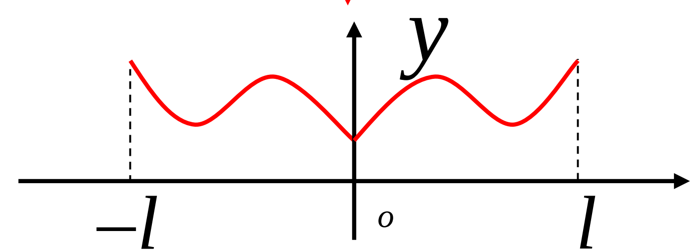
三、仅在[0, l]有定义的函数展开为正弦或余弦级数

奇延拓 $f(x),\ x\in[0,l]$ 偶延拓



周期延拓 $F(x)$

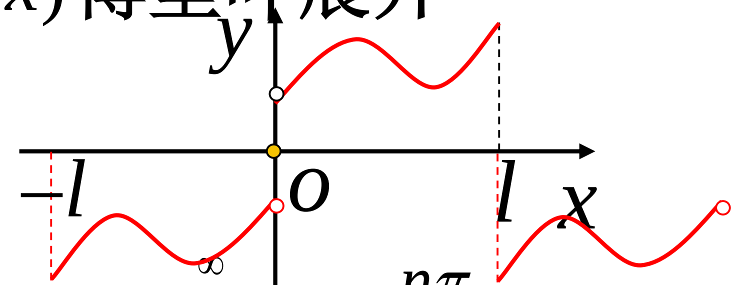
$f(x)$ 在 $[0\ ,\ l\ ]$ 上展成正弦级数



周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0\ ,\ l\ ]$上展成余弦级数

$f(x), x \in [0, l]$ 奇周期延拓为 $F(x)$ 傅里叶展开



$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

x为$F(x)$的连续点

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} F(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \,\mathrm{d}x = 0$$

$(n = 0, 1, \cdots)$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} F(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \,\mathrm{d}x$$

$(n = 0, 1, \cdots)$

x为$F(x)$的间断点级数收敛于

$$\frac{F(x^+) + F(x^-)}{2}$$

$f(x)$ 在 $[0, l]$ 上的傅里叶级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

x为$f(x)$的$(0, l)$连续点

$$a_n = 0$$

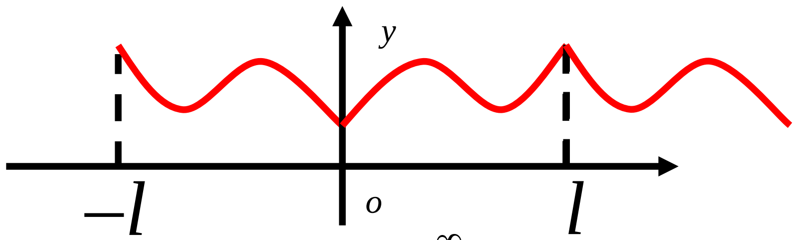
$$b_n = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \,\mathrm{d}x$$

x为$f(x)$的$(0, l)$间断点级数收敛于

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

$x=0, l$级数收敛于0

$f(x), x\in[0,l]$ 偶周期延拓为 傅里叶展开



$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

x为$F(x)$的连续点

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l F(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

$$(n=0,1,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}F(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=0$$

$$(n=0,1,\cdots)$$

x为$F(x)$的间断点级数收敛于

$$\frac{F(x^+)+F(x^-)}{2}$$

$f(x)$在$[0,l]$上的傅里叶级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi}{l}x$$

x为$f(x)$的$(0, l)$连续点

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

$$b_n=0$$

x为$f(x)$的$(0, l)$间断点级数收敛于

$$\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

$x=0$级数收敛于 $f(0^+)$

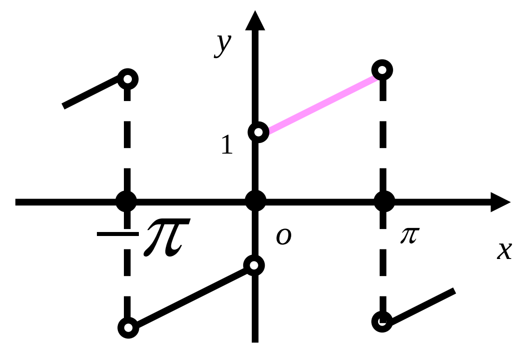
$x=l$级数收敛于 $f(l^-)$

例2. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le\pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数 .

解: 先求正弦级数. 将 $f(x)$ 作奇周期延拓

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

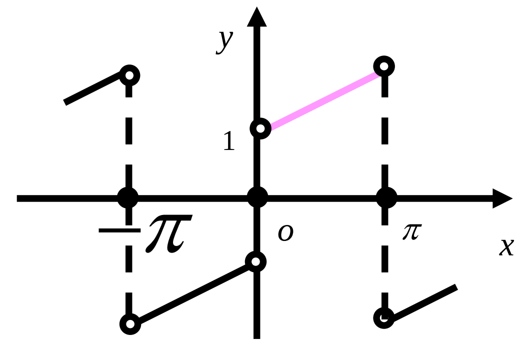


$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\ \quad & \end{cases}$$

$(k=1,2,\cdots)$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1 \\ \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi}{2k}, & n=2k \end{cases}$$



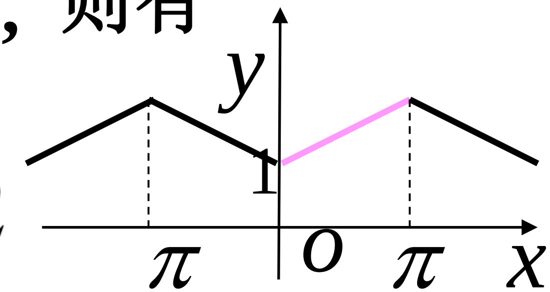
因此得

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x\right.$$

$$\left.+\frac{\pi+2}{3}\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\cdots\right]\quad(0<x<\pi)$$

在端点 $x = 0, \pi$，级数的和为0，与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同.

再求余弦级数. 将 $f(x)$ 作偶周期延拓，则有



$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi+2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}\,x = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$x+1 = \frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$(0 \le x \le \pi)$$

内容小结

1. 在[-l,l]有定义的函数的傅里叶级数

2. 周期为 2l 的奇、偶函数的傅里叶级数

- **奇(偶)函数 $\longrightarrow$ 正(余)弦级数**

3. 在 [0 , l] 上函数的傅里叶展开法

- **作奇(偶)周期延拓， 展开为正(余)弦级数**