2016 级《线性代数与几何(A)》

一、选择和填空题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	$-$	**16**	$\sqrt{2}$	**C**	**C**	**C**	**C**	$n!$	**6**	z

1. 在四阶行列式中，$a_{12}a_{31}a_{43}a_{24}$所在项的符号是“$+$”还是“$-$”?【*填入上表*】

2. 设 A 为三阶方阵，已知$|A|=-2$，则$\left||A|A\right|=$【*填入上表*】.

3. 以 $A(1,2,3),B(2,3,4),C(2,3,6)$ 为顶点的三角形的面积为【*填入上表*】.

4. 设 n 阶矩阵 A，B 均可逆，则$\left|-2\begin{pmatrix} A^T & O \\ O & B^{-1} \end{pmatrix}\right|=$【*填入上表*】.

A. $-2|A||B|^{-1}$　　B. $-2|A^T||B|$

C. $(-2)^{2n}|A||B|^{-1}$　　D. $(-2)^n|A||B|^{-1}$

5. 若 A 为 n 阶可逆矩阵，则伴随矩阵$(-A)^*=$【*填入上表*】.

A. A^*　　B. $-A^*$　　C. $(-1)^{n-1}A^*$　　D. $(-1)^n A^*$

6. 设$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 均为非零向量，且$\alpha^T\beta=0$，又记$A=\beta\alpha^T$，则秩$R(A^2)=$【*填入上表*】.

A. $n-1$　　B. n　　C. 0　　D. 1

7. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+k^2x_3^2+2x_1x_2$为正定二次型，则 k 的取值范围是【*填入上表*】.

A. $k<1$　　B. $k\le 1$　　C. $k>1$　　D. $k\ge 1$

8. 设 n 阶矩阵 A 有特征值$0,1,\cdots,n-1$，且与 B 相似，则行列式$|B+E|=$【*填入上表*】.

9. 设三阶矩阵 A 的一个特征值为 2，对应的特征向量$\alpha=(1,1,1)^T$，则 A 的 9

个元素之和为【*填入上表*】.

10. 曲面 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 是曲线绕哪个坐标轴旋转而成的？【*填入上表*】

二、完成下列各题（共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

1. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\0&-1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-3&2&-7\\2&-2&4\end{pmatrix}$，求行列式 $|AB|$.

解：$|AB|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-3&2&-7\\-2&2&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-2&0&-6\\-1&0&-3\end{vmatrix}=0$.

注：也可 $\because R(AB)\le\min\{R(A),R(B)\}=2<3(AB$ 的阶数），$\therefore |AB|=0$

2. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b+a&c+2a&d+3a\\a&b+2a&c+3a&d+4a\\a&b+3a&c+4a&d+5a\end{vmatrix}$.

解：原式 $=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b+a&c+2a&d+3a\\0&a&a&a\\0&a&a&a\end{vmatrix}=0$.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&2\\-1&1&-1\\2&-1&5\end{pmatrix}$，求解 $AX=E-X$.

解：$(A+E)X=E\Rightarrow X=(A+E)^{-1}E=(A+E)^{-1}$.

$$(A+E\ \ E)=\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0&0\\-1&2&-1&0&1&0\\2&-1&6&0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&1&2&-2&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&2&1&0&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&-3&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&0&7&2&-2\\0&1&0&4&2&-1\\0&0&1&-3&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&11&4&-3\\0&1&0&4&2&-1\\0&0&1&-3&-1&1\end{pmatrix},$$ （注：所用变换为行变换）

$$\therefore X=(A+E)^{-1}=\begin{pmatrix}11 & 4 & -3\\ 4 & 2 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

4. 设 4 维向量组：$\alpha_1=(1,-1,1,2)^T,\alpha_2=(2,-3,1,-1)^T,\alpha_3=(1,-1,2,-3)^T$，

$\alpha_4=(1,-2,-1,2)^T$. 求其一个极大无关组

解：$\because A=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3\ \ \alpha_4)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ -1 & -3 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -3 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & -2\\ 0 & -5 & -5 & 0\end{pmatrix}$

$$\xrightarrow[r_4-5r_2]{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -5 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+5r_3}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=B$$

$\therefore R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=R(B)=3$， $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为其一个极大无关组.

5. 设 L_1：$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+2}{-1}$， L_2：$\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-5}{-2}$，

求过点(1,1,1)且与这两条直线垂直的直线方程.

解：直线 L_1，L_2 的方向向量分别为 $\vec{s}_1=(2,4,-1),\vec{s}_2=(1,3,-2)$，

所求直线的方向向量可取为 $\vec{s}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=(-5,3,2)$，

故所求直线方程为：$\dfrac{x-1}{-5}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{2}$

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，且 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$， $\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，

$\beta_3=2\alpha_1+3\alpha_2+\alpha_3$，证明 β_1，β_2，β_3 线性无关.

解：法 1　设　$\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\lambda_3\beta_3=0$，　即

$$(\lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3)\alpha_1+(2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3)\alpha_2+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\alpha_3=0,$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，得

$$\begin{cases} \lambda_1-\lambda_2+2\lambda_3=0 \\ 2\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0, \\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases} \mathrm{Q}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0, \therefore \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

故 β_1，β_2，β_3 线性无关.

法 2 $$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \ \alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Q}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0,\ \therefore \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\text{可逆.}$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，得 $R(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，故 β_1，β_2，β_3 线性无关.

三、完成下列各题（共 2 题，每题 15 分，共 30 分）

1. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1-2x_2-x_3=-1 \\ x_1+(\lambda-1)x_2+\lambda x_3=2 \\ 5x_1+(\lambda-9)x_2-4x_3=-2 \end{cases}$，

问当 λ 取何值时：(1)有唯一解？ (2)无解？ (3)有无穷多解？并求通解.

解：1.

$$B=(A\ b)=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-1 & \lambda & 2 \\ 5 & \lambda-9 & -4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda+1 & \lambda+1 & 3 \\ 0 & \lambda+1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & \cdots \\ 0 & \lambda+1 & \lambda \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

(1) 当 $\lambda\neq -1,0$ 时方程组有唯一解；

(2) 当 $\lambda=-1$ 时，

$$B\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \Rightarrow R(B)\neq R(A)\text{，无解；}$$

(3) 当 $\lambda=0$ 时， $B \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad + x_3 = 5 \\ \quad x_2 + x_3 = 3 \end{cases},$$

选 x_3 为自由未知量，通解 $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (k \in R)$

2. 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 6, 3, 3, 对应特征值 6 的特征向量 $p_1 = (2,1,2)^T$. (1)求正交矩阵 P 及对角阵 B 使 $P^T AP = B$；(2)求 A.

解: 设特征值 3 的特征向量为$(a,b,c)^T$，由实对称阵不同特征值的特征向量正交有

$$2a+b+2c=0$$

取正交的基础解系（特征向量） $p_2 = (2,-2,-1)^T$， $p_3 = (1,2,-2)^T$，则取

$$P = \frac{1}{3}(p_1 \quad p_2 \quad p_3), \quad B = \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

P 为正交阵 且 $P^T AP = B$；

$$A = PBP^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 2 & 10 & 2 \\ 4 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$