物理现象建模

数学和物理是密不可分的两个学科，历史上是物理学家的人同时还是数学家，如阿基米德、牛顿、笛卡尔、柯西、高斯。数学在物理中有着广泛的应用，物理问题也给数学提出了很有价值的研究方向。下面就力学、电学、光学、热学中的几个问题进行建模.

弹簧振动规律探讨

- 设有一个弹簧，它的上端固定，下端挂一个质量为m的物体. 如果使物体具有一个初始速度，那么物体便离开平衡位置，并在平衡位置附近作上下振动，物体的位置 x 随时间 t 的变化规律$x=x(t)$
- 如果不考虑阻力和外加力（无阻尼自由振动方程），根据力学知识可得

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$$

弹簧振动规律探讨

- 如果考虑受到阻尼介质的阻力，假定大小与运动速度成正比，可得自由振动方程

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx-\mu\frac{dx}{dt}\Rightarrow\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0$$

- 如果还考虑受到铅直干扰力 $F=H\sin pt$ 的作用，可得强迫振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=h\sin pt$$

弹簧振动规律探讨

- 下面我们对上述方程进行求解并分析其物理意义

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0,\quad x(0)=x_0,\quad x'(0)=v_0$$

$$\Rightarrow x=x_0\cos kt+\frac{v_0}{k}\sin kt=A\sin(kt+\varphi)$$

- 可见无阻尼自由振动就是**简谐振动！**
- 参数***k***称为**固有频率** $k=\sqrt{\frac{c}{m}}$

弹簧振动规律探讨

有阻尼的自由振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2n\frac{dx}{dt}+k^2x=0,\quad x(0)=x_0,\quad x'(0)=v_0$$

（1）小阻尼情形：***n*<*k*** 方程解为

$$x=Ae^{-nt}\sin(\omega t+\varphi)$$

可见振幅随时间***t***的增大而减小，趋于零．因此物体随时间***t***的增大而趋于平衡位置！

弹簧振动规律探讨

（2）大阻尼情形：***n*>*k*** 方程解为

$$x = C_1 e^{-(n-\sqrt{n^2-k^2})t} + C_2 e^{-(n+\sqrt{n^2-k^2})t}$$

（3）临界阻尼情形：***n*=*k*** 方程解为

$$x = e^{-nt}(C_1 + C_2 t)$$

可见物体最多越过平衡位置一次，因此物体不再有振动现象，物体随时间*t*的增大而趋于平衡位置！

弹簧振动规律探讨

无阻尼强迫振动方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=h\sin pt$$

（1）如果 **$p\neq k$** 方程解为

$$x=A\sin(kt+\varphi)+\frac{h}{k^2-p^2}\sin pt$$

第一项表示自由振动，

第二项表示的振动叫强迫振动.

弹簧振动规律探讨

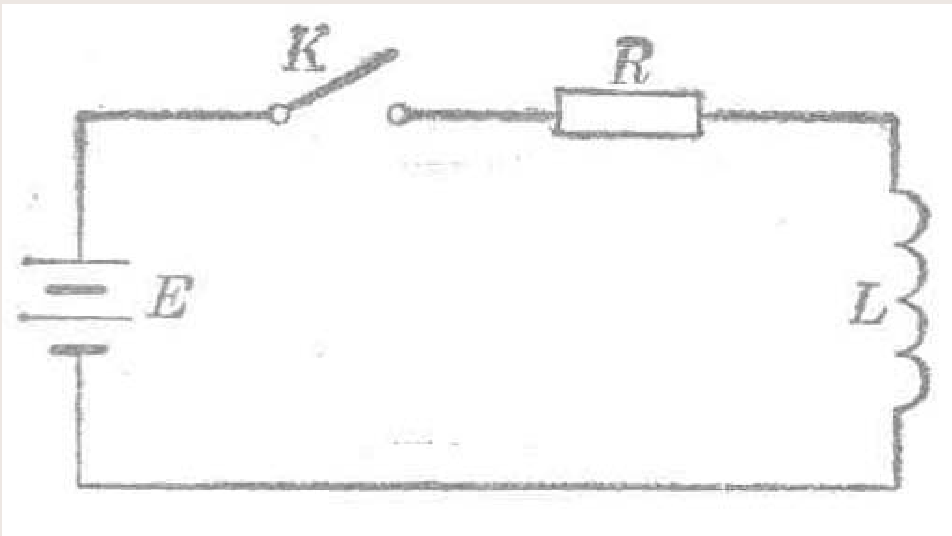
（2）如果 ***p=k*** 方程解为

$$x = A\sin(kt+\varphi) - \frac{h}{2k} t\cos kt$$

第二项强迫振动的振幅随时间***t***的增大而无限增大，出现所谓的共振现象！

R-L电路

- 如图的R-L电路，它包含电感L，电阻R和电源E（均设为常数）. 设t=0时，电路中没有电流. 建立：当开关K合上后，电流I应该满足的微分方程.



R-L电路

- 基尔霍夫(**Kirchhoff**)第二定律：在闭合回路中，所有支路上的电压的代数和等于零。
- 分析：经过电阻**R**的电压降为**RI**，经过电感**L**的电压降是**LdI/dt**，由上述定律得，

$$\begin{cases} L\dfrac{dI}{dt}+RI=E \\ I(0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dI}{dt}+\dfrac{R}{L}I=\dfrac{E}{L} \\ I(0)=0 \end{cases}$$

R-L电路

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L} I = \dfrac{E}{L} \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{E}{L} \Rightarrow I(t) = e^{-\int \frac{R}{L} dt} \left(\int \frac{E}{L} e^{\int \frac{R}{L} dt} dt + C \right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L} I = \dfrac{E}{L} \\ I(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

R-L电路

假设电源电动势为 $E = E_m \sin \omega t$

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} + \dfrac{R}{L} I = \dfrac{E_m}{L} \sin \omega t \\ I(0) = 0 \end{cases}$$

$$I(t) = e^{-\int_0^t \frac{R}{L} dt} \int_0^t \left(\frac{E_m}{L} \sin \omega t e^{\int_0^t \frac{R}{L} dt} \right) dt$$

R-L电路

$$\int \sin\omega t e^{\beta t} \mathrm{d}t = \frac{1}{\beta}\int \sin\omega t \mathrm{d}e^{\beta t}$$

$$= \frac{1}{\beta}(\sin\omega t e^{\beta t} - \int \omega \cos\omega t e^{\beta t} \mathrm{d}t)$$

$$= \frac{1}{\beta}(\sin\omega t e^{\beta t} - \frac{\omega}{\beta}\int \cos\omega t \mathrm{d}e^{\beta t})$$

$$= \frac{1}{\beta}\sin\omega t e^{\beta t} - \frac{\omega}{\beta^2}\cos\omega t e^{\beta t} - \frac{\omega^2}{\beta^2}\int \sin\omega t e^{\beta t} \mathrm{d}t$$

R-L电路

假设电源电动势为 $E = E_m \sin \omega t$ ，则方程解为

$$I(t) = \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{R^2 + \omega^2 L^2}(R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)$$

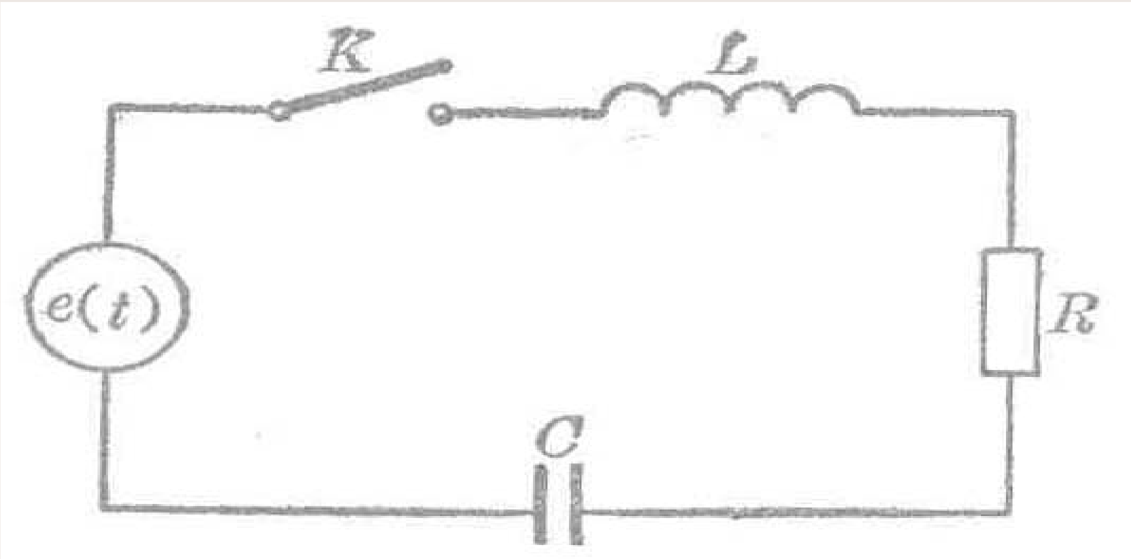
$$= \frac{\omega L E_m}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

第一项叫暂态电流，随t的增大逐渐衰减趋于零

第二项叫稳态电流，是个正弦函数.

R-L-C电路

- 如图的R-L-C电路，它包含电感L，电阻R和电容C(均为常数). 电源e(t)是时间t的已知函数. 建立：当开关K合上后，电流I应该满足的微分方程.



R-L-C电路

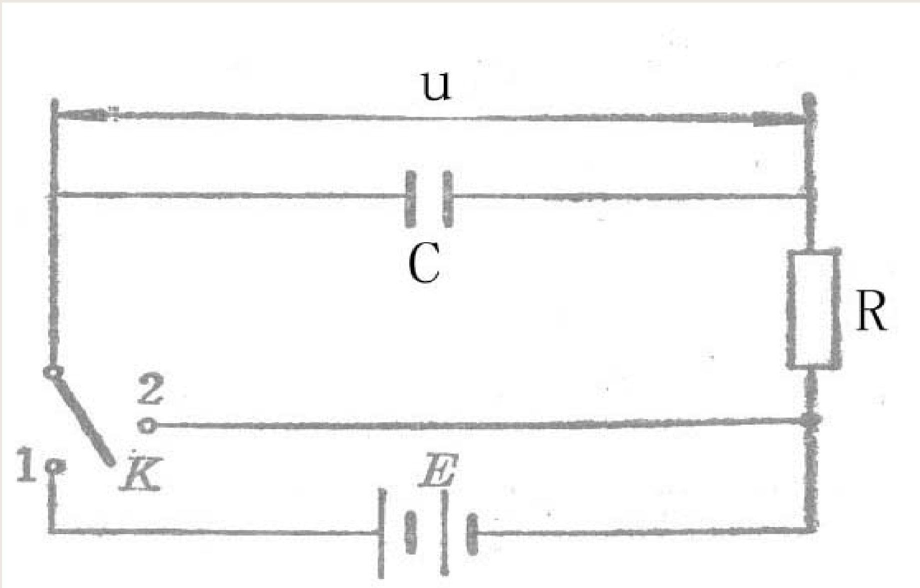
- 分析：经过电阻**R**的电压降为**RI**，经过电感**L**的电压降是**LdI/dt**，经过电容**C**的电压降是***Q/C***，由基尔霍夫第二定律得，

$$L\frac{dI}{dt}+RI+\frac{Q}{C}=e(t)$$

$$I=\frac{dQ}{dt}\quad\Rightarrow\quad\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{I}{LC}=\frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt}$$

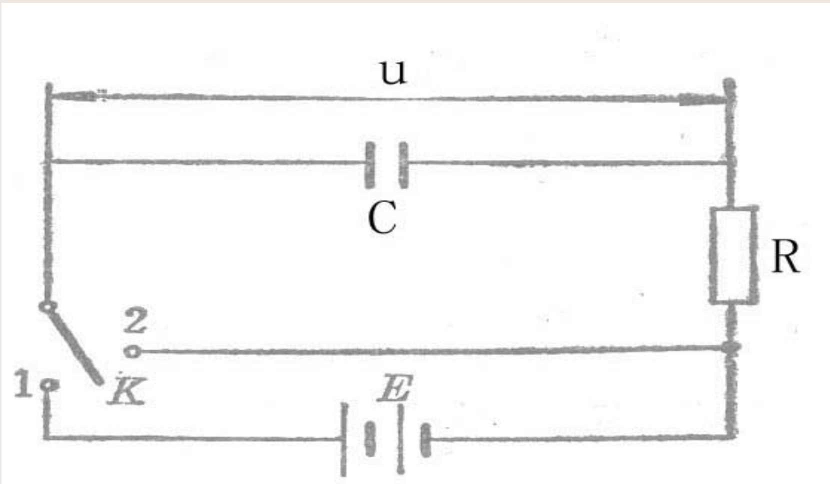
电容器的充电和放电

- 如图所示的**R-C**电路，请找出充、放电过程中，电容**C**两端的电压**u**随时间**t**的变化规律。



电容器的充电和放电

开始时电容C上没有电荷，电容两端的电压为零. 我们把开关K合上"1"后，电池E就对电容C充电，电容C两端的电压u逐渐升高. 经过相当时间后，电容充电完毕，我们再把开关合上"2"，这时电容就开始了放电过程.



电容器的充电和放电

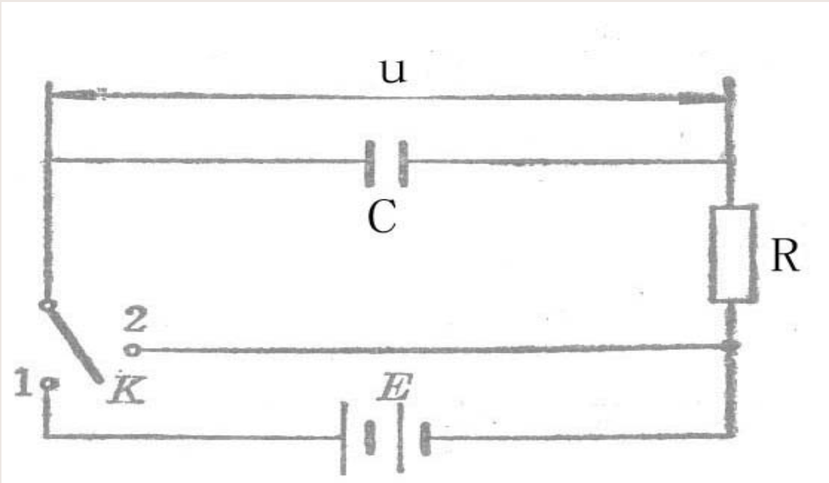
充电过程时，有 $u + RI = E$

电容上的电量**Q=C*u*** 逐渐增多，且 $I = \dfrac{dQ}{dt}$

$$\Rightarrow RC\frac{du}{dt} + u = E$$

$$\Downarrow$$

$$u = E(1 - e^{\frac{-1}{RC}t})$$

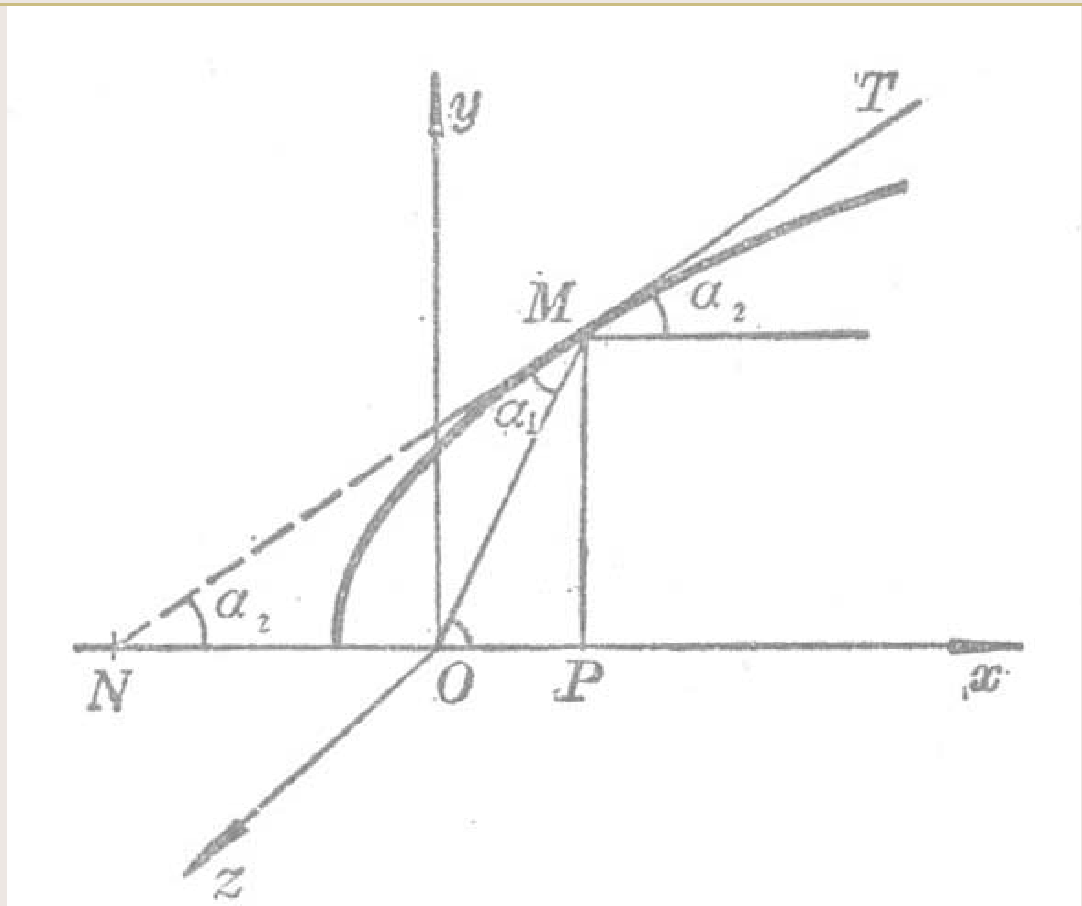


$$t = 3RC \Rightarrow u = 0.95E$$

探照灯反射镜面的形状

- 在制造探照灯的反射镜面时，总是要求将点光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性，请问反射镜面的几何形状？
- 建立平面直角坐标系xoy，取光源所在处为坐标原点，而x轴平行于光的反射方向. 设该镜面(曲面)由xoy坐标面上的曲线$y=f(x)$绕x轴旋转而成. 如图

探照灯反射镜面的形状



光的反射定律：入射角=反射角

探照灯反射镜面的形状

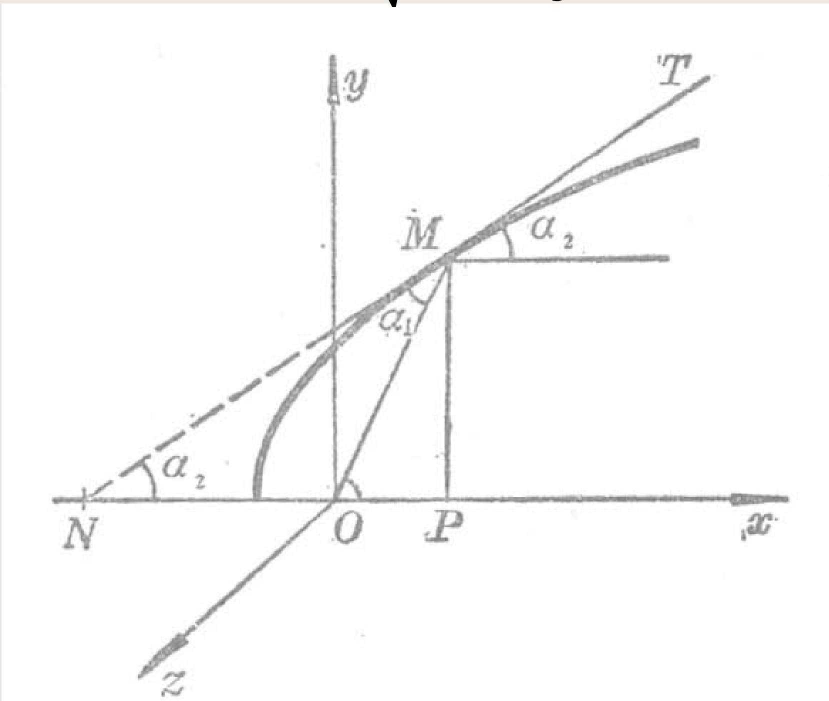
根据光的反射定律：入射角=反射角，可得

$$\frac{dy}{dx}=\tan\alpha_2=\frac{MP}{NP}\quad\Rightarrow\quad\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow y^2=c(c+2x)$$

$$\Rightarrow y^2+z^2=c(c+2x)$$

旋转抛物面



物体冷却过程

- 将某物体放置于空气中，在时刻t=0时，测得它的温度为u_0=150^{0}C， 10分钟后测得温度为u_1=100^{0}C，求物体的温度u和时间t的关系，假定空气的温度始终保持在u_a=24^{0}C，
- 热力学的一些基本规律：热量总是从温度高的物体向温度低的物体传导的；一个物体的温度变化速度与温度差成比例。

物体冷却过程

- 设物体在时刻t的温度为**u=u(t)**，则温度的变化速度可表示为**du/dt**，由刚才的物理知识得该问题的微分方程模型（***k***为比例常数）：

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -k(u-u_a) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du}{u-u_a} = -\int_0^t k dt \Rightarrow \ln\frac{u-u_0}{u_0-u_a} = -kt$$

物体冷却过程

- 求解并分析 $u(t)=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt}$
- 将已知数据代入求得本题的**u(t)**

$$u_a=24, u_0=150, u(10)=100$$

$$\Rightarrow u(t)=24+126e^{-0.050555t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(20)\approx 69.84°C \\ u(120)\approx 24.28°C \\ u(180)\approx 24.01°C \end{cases}$$