

传染病模型

数学在各个学科的广泛应用是当前时代的一个显著特点，将数学应用于与人们生命密切相关的领域极大地提高了人们的认知和决策能力。传染病模型也是著名的数学建模案例之一。

问题背景

背景：传染病是威胁人类健康和生命的一类疾病，如何有效地预防和控制传染病对人类的侵害，是一项相当重要的课题，其中有效预测某个时刻得病人数也是相当重要的指标。

模型一

- 符号假设： t 时刻病人数为 $i(t)$
- **模型一**： 设单位时间内一个病人能传染的人数（传染率）为 k_0

$$i(t + \Delta t) - i(t) \approx k_0 i(t) \Delta t \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{di}{dt} = k_0 i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

- **求解并分析** $i(t) = i_0 e^{k_0 t}$

$$(1) i_0 = 0 \Rightarrow \dots \quad (2) t \rightarrow \infty \Rightarrow \dots$$

模型一

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = k_0 i \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = i_0 e^{k_0 t}$$

$$\frac{di}{dt} = k_0 i \Rightarrow \frac{di}{i} = k_0 dt \Rightarrow \int \frac{di}{i} = \int k_0 dt$$

$$\Rightarrow \ln |i| = k_0 t + C_1, \Rightarrow i(t) = C e^{k_0 t}$$

哪里出错了？

模型二

模型二：设人群分为两类：

已感染者（**Infective**） $i(t)$

易感染者（**Susceptible**） $s(t)$

所考察地区的总人数为 n ， $i(t) + s(t) = n$ ，易见传染率应该和 $s(t)$ 成单增关系，为方便，设为正比例关系，比例系数用 λ 表示（称为传染系数或曰接触率），则方程变为

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda s(t)i(t) \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda(n-i)i \\ i(0) = i_0 \end{cases}$$

模型二

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda(n-i)i \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{n}{1 + \left(\frac{n}{i_0} - 1\right)e^{-\lambda nt}}$$

模型二

$$\frac{di}{dt} = \lambda(n-i)i \Rightarrow \frac{di}{(n-i)i} = \lambda dt$$

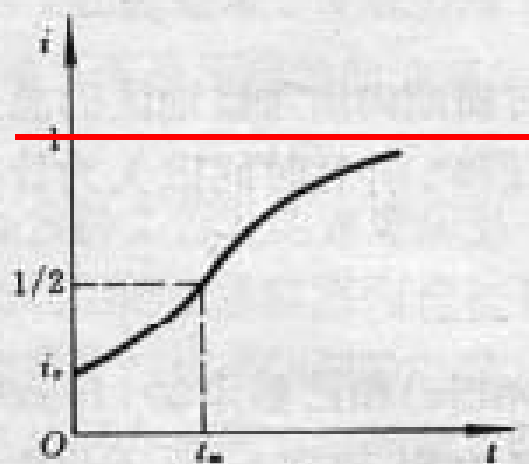
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{n-i} + \frac{1}{i} \right) di = n\lambda dt$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{i}{n-i} \right| = n\lambda t + C_1$$

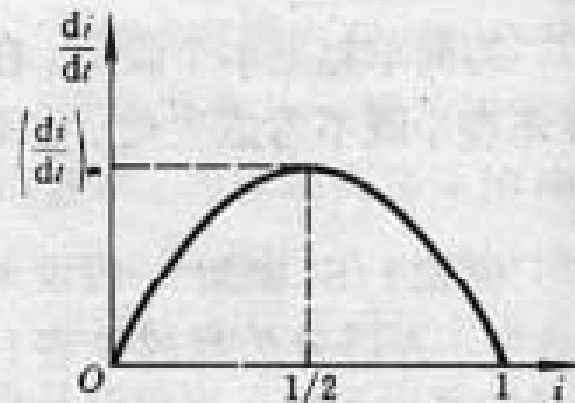
$$\Rightarrow \frac{n-i}{i} = Ce^{-n\lambda t} \Rightarrow i(t) = \frac{n}{1 + Ce^{-n\lambda t}}$$

模型二

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} = \lambda(n-i)i \\ i(0) = i_0 \end{cases} \Rightarrow i(t) = \frac{n}{1 + \left(\frac{n}{i_0} - 1\right)e^{-\lambda nt}}$$



1. $i \sim t$ 曲线



2. $\frac{di}{dt} \sim i$ 曲线

模型三

模型三：假设

- (1) 人群分为三类：已感染者 $i(t)$ ，易感染者 $s(t)$ ，免疫移出者（含死亡） $r(t)$ ，则

$$i(t) + s(t) + r(t) = n$$

- (2) 传染率和 $s(t)$ 成正比，比例系数用 λ 表示；
(3) 单位时间内病愈免疫的人数与当时的病人人数成正比，比例系数用 l 表示。

模型三

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{dt} = \lambda si - li \\ \frac{dr}{dt} = li \\ \frac{di}{dt} + \frac{ds}{dt} + \frac{dr}{dt} = 0 \\ i(0) = i_0 \\ r(0) = 0 \\ s(0) = s_0 = n - i_0 \end{array} \right.$$

模型三

$$\left. \begin{array}{l} \frac{di}{ds} = \frac{\rho}{s} - 1 \\ i|_{s=s_0} = n - s_0 \end{array} \right\} \Rightarrow i = \rho \ln \frac{s}{s_0} + (n - s), \quad \rho = \frac{l}{\lambda}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{ds}{dr} = -\frac{s}{\rho} \\ s|_{r=0} = s_0 \end{array} \right\} \Rightarrow s = s_0 e^{-r/\rho}$$

模型推广

- 应用推广
 - (1) 人口增长模型
 - (2) 新产品的销售
 - (3) 最佳捕鱼策略