第三节 格林公式(一)

一、区域连通性的分类

二、格林公式

三、格林公式的简单应用

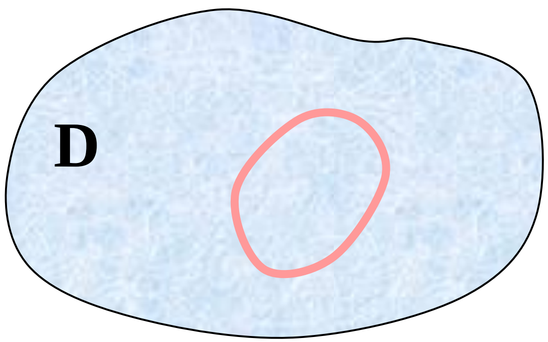
四、平面上曲线积分与路径无关条件

五、原函数

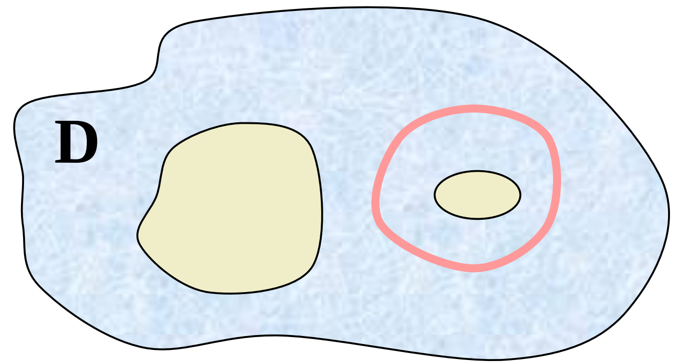
一、区域连通性的分类

1. 设D为平面区域, 如果D内任一闭曲线所围成的部分都属于D, 则称D为平面**单连通区域**, 否则称为**复连通区域(多连通区域、非单连通区域).**

无洞的区域



单连通区域



复连通区域

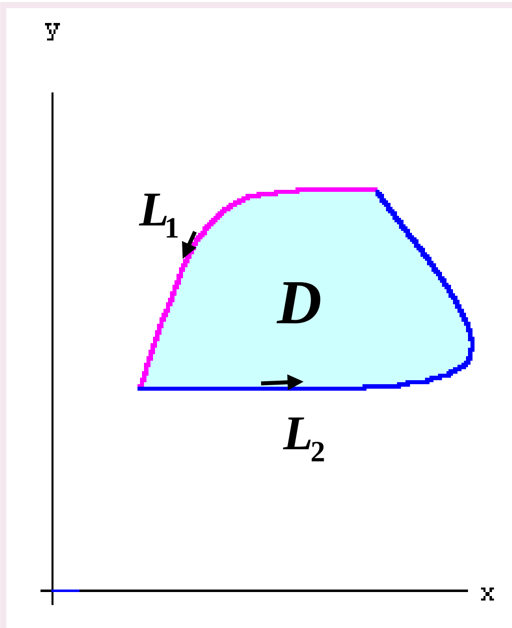
有洞的区域.

2. **简单曲线**: 没有交点的曲线.

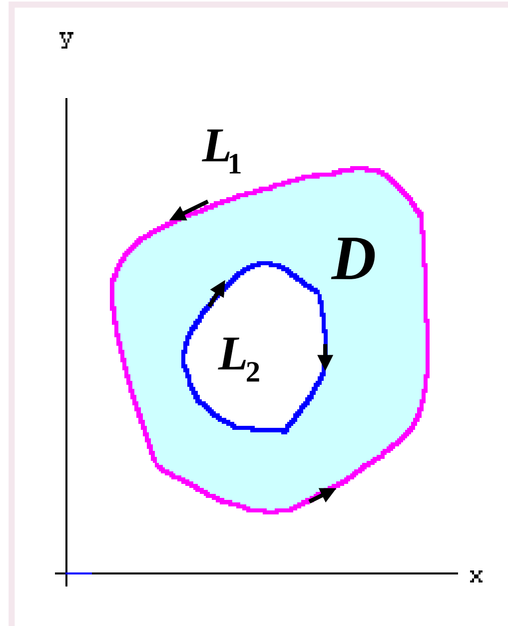
简单闭曲线: 只有起点和终点才重合的曲线.

3. 区域 D 边界L 的正向: 沿L的这个方向行走时,

D总在行走者的左边.



L由L_1与L_2连成



L由L_1与L_2组成

注：几何上看，平面单连通区域边界线的正向是逆时针方向；复连通区域边界线的正向是外边界线是逆时针方向，内边界线是顺时针方向.

二、 格林公式

定理1. 设区域 D 是由光滑或分段光滑的简单闭曲线 L 所围成，函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数， 则有

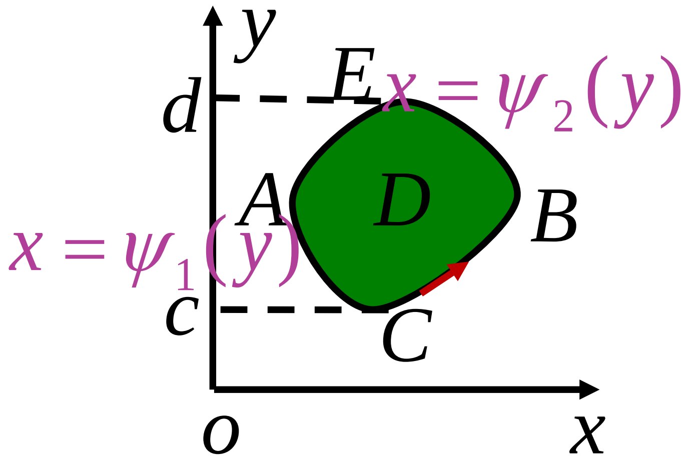
$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{（格林公式）}$$

其中， L 是 D 的正向边界曲线.

逆

证明: 1) 若 D 既是 X - 型 又是 Y - 型的单连通区域,

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



则 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x$$

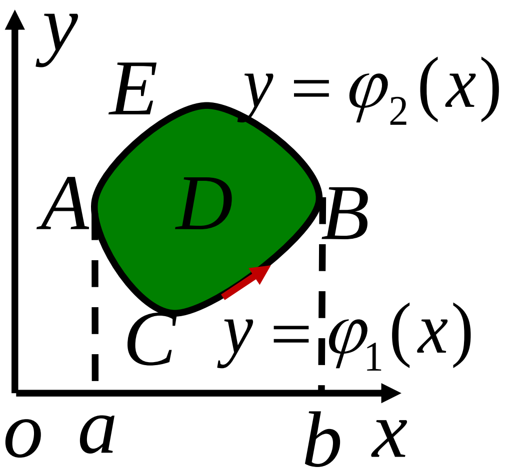
$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),\,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),\,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\oint_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\overset{\frown}{CBE}}Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),\,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),\,y)\,\mathrm{d}y$$

即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y\qquad ①$$

D又是 X-型区域，$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$



$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b P\big(x,\varphi_2(x)\big)dx-\int_a^b P\big(x,\varphi_1(x)\big)dx$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_{\overset{\frown}{BEA}} P(x,y)\,\mathrm{d}x+\int_{\overset{\frown}{ACB}} P(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_b^a P\big(x,\varphi_2(x)\big)dx+\int_a^b P\big(x,\varphi_1(x)\big)dx$$

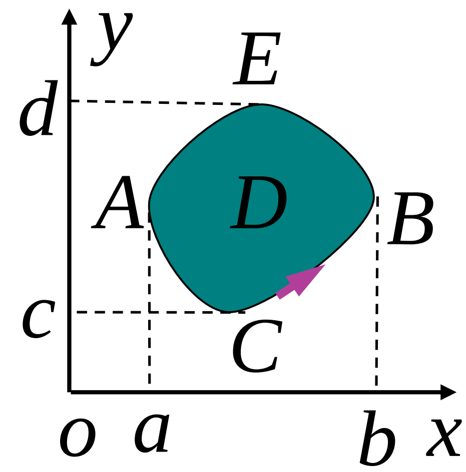
$$=-\int_a^b P\big(x,\varphi_2(x)\big)dx+\int_a^b P\big(x,\varphi_1(x)\big)dx$$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x \quad ②$$

1) 若D既是 X - 型 又是 Y - 型的单连通区域，且

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



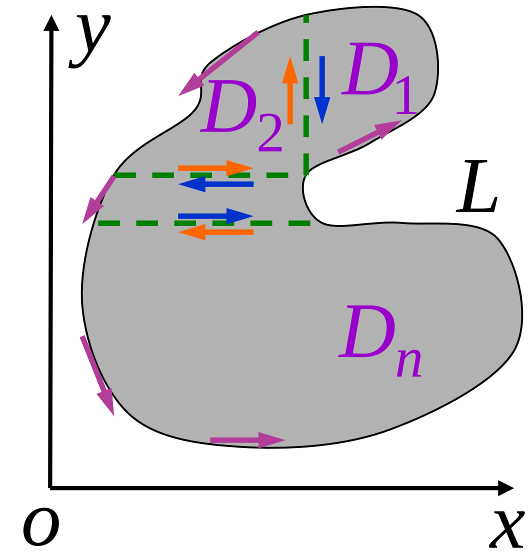
$$y=\varphi_1(x)=y=\varphi_2(x)$$

$$-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x \qquad ①$$

同理可证 $$\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad ②$$

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

2) 若*D*不满足以上条件, 则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域, 如图



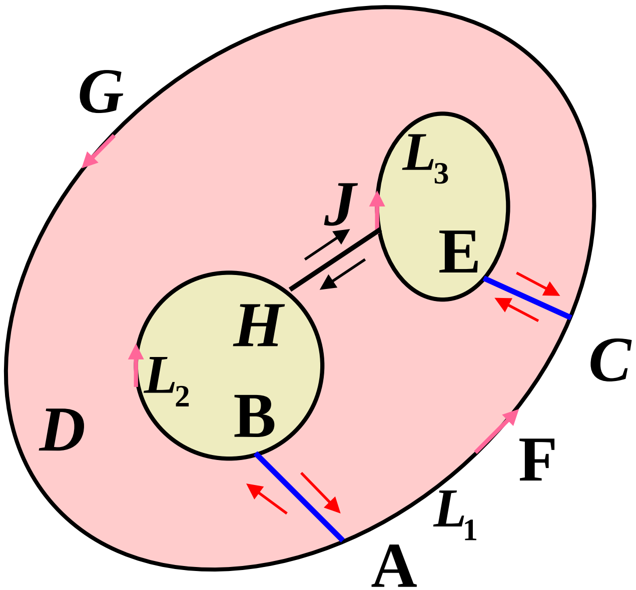
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \iint_{D_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{\partial D_k} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

(∂D_k表示D_k的正向边界)

$$= \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$



格林公式的实质：　沟通了沿闭曲线的曲线积分与二重积分之间的联系.

便于记忆形式:

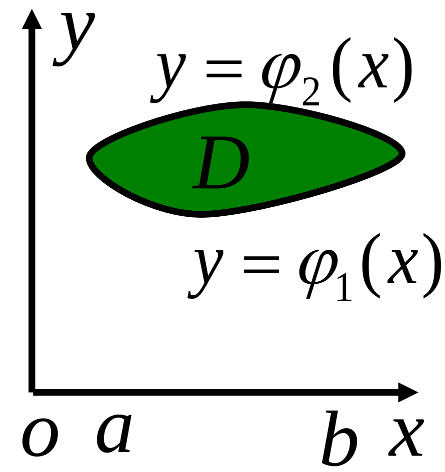
$$\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} dxdy = \oint_L Pdx + Qdy.$$

注：运用格林公式时必须先验证条件

(1)区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成

(2)$P(x,y)$ $Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数

三、格林公式的简单应用



平面区域面积求法:

1. $A=\int_a^b\left[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right]dx$

2. $A=\iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

3. $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

令: $Q = x,\ P = -y$

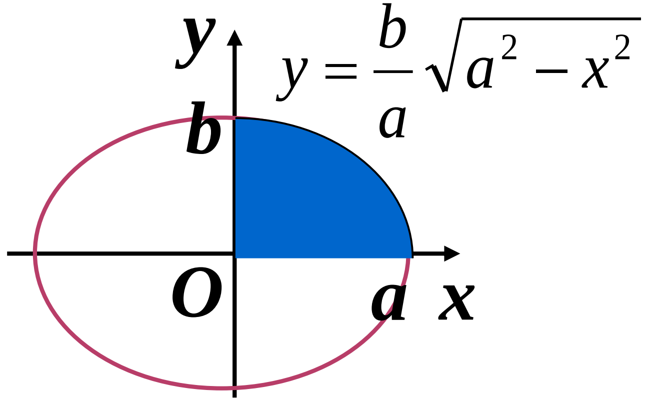
$$\oint_L -y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=\iint_D(1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2A$$

推论: 正向闭曲线 L 所围区域 D 的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$$

例1 求椭圆面积 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

解法一： 定积分法



$$A=4\int_0^a y\,dx$$

$$=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$=4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\cos dt$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\pi ab$$

$x=a\sin t$

x	0	a
t	0	$\frac{\pi}{2}$

例1 求椭圆面积 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

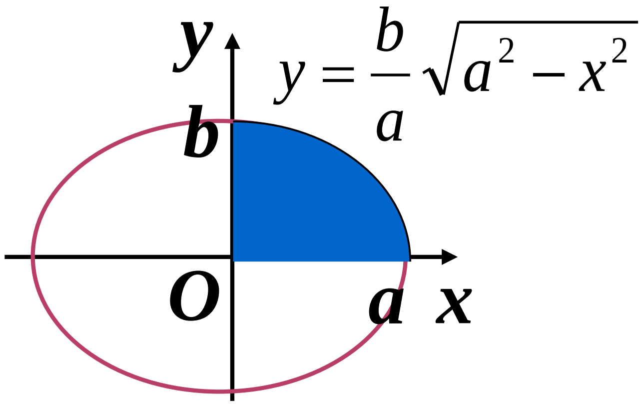
解法二: **曲线积分法**

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x \qquad L:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},\quad t:0\to 2\pi$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\,a\cos t\cdot b\cos t-b\sin t\left(-a\sin t\right)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\,dt$$

$$=\pi ab$$



例2. 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

证:

$$\begin{cases} P = 2xy & \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x \\ Q = x^2 & \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x \end{cases}$$

则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$

利用格林公式, 得 $\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$

注: 运用格林公式时必须先验证条件:

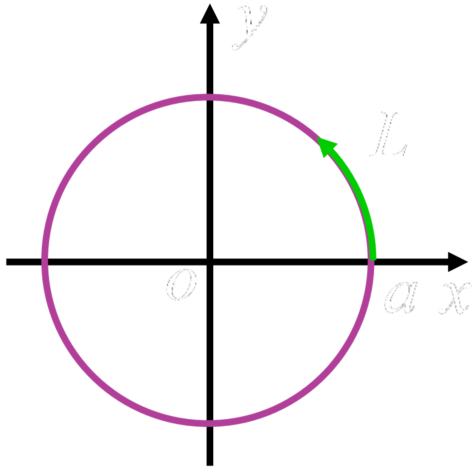
(1) 区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成.

(2) $P(x,y)$ $Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数.

例3. 计算 $\oint_L (y+\sin^2 x)dx+(9x+\cos^2 y)\mathrm{d}y$

L 是半径为a的圆周的正向边界曲线.

解: $\begin{cases} P=y+\sin^2 x \quad \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=1 \\ Q=9x+\cos^2 y \quad \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=9 \end{cases}$



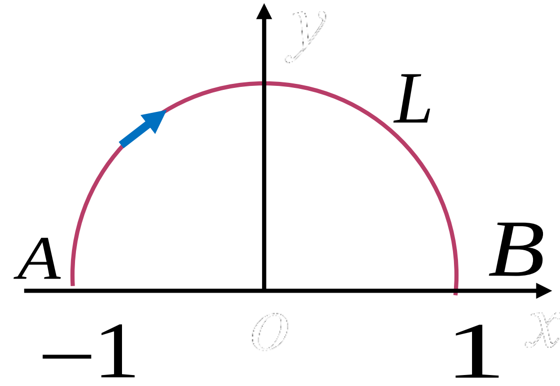
则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y} \quad =8$

$$\oint_L (y+\sin^2 x)dx+(9x+\cos^2 y)\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 8\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=8S_D \;=8\pi a^2$$

例4.计算 $\int_L x^3\,dy+(2y-1)dx$

L **是** $x^2+y^2=1, y\ge 0$ **顺时针方向.**



解法一：定积分法

$$L:\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \end{cases},\quad t:\pi\to 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} dx=-\sin t\,dt \\ dy=\cos t\,dt \end{cases}$$

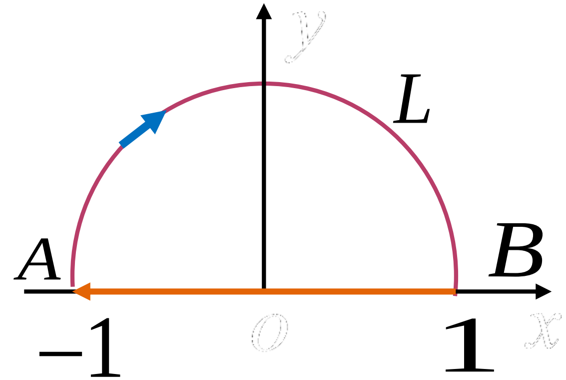
$$I=\int_\pi^0 (\cos t)^3\cos t\,dt+(2\sin t-1)(-\sin t\,dt)$$

$$=\int_\pi^0 (\cos^4 t-2\sin^2 t+\sin t)\,dt$$

$$=-\int_0^\pi \cos^4 t\,dt+2\int_0^\pi \sin^2 t\,dt-\int_0^\pi \sin t\,dt$$

$$=-2I_4+4I_2-2=\frac{5}{8}\pi-2$$

例4. 计算 $\int_L x^3 \mathrm{d}y + (2y-1)dx$



L 是 $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$ 顺时针方向

解法二：格林公式法

$$\begin{cases} P = 2y - 1 \\ Q = x^3 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2 \\ &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 \end{aligned}$$

$$I = \oint_{L+\overrightarrow{BA}} + \int_{\overrightarrow{AB}}$$

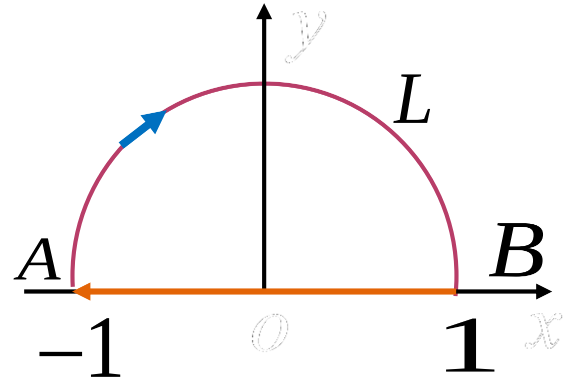
$$\oint_{L+\overrightarrow{BA}} x^3 dy + (2y-1)dx$$

$$= -\iint_D (3x^2 - 2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (2 - 3x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 \left[2 - 3(r\cos\theta)^2\right] r\,\mathrm{d}r$$

例4. 计算 $\int_L x^3\,\mathrm{d}y+(2y-1)dx$

L 是 $x^2+y^2=1, y\geq 0$ 顺时针方向



解法二： 格林公式法 $I=\oint_{L+\overrightarrow{BA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}$

$$\oint_{L+\overrightarrow{BA}} x^3dy+(2y-1)dx=\int_0^\pi d\theta\int_0^1\left[2-3(r\cos\theta)^2\right]r\,\mathrm{d}r$$

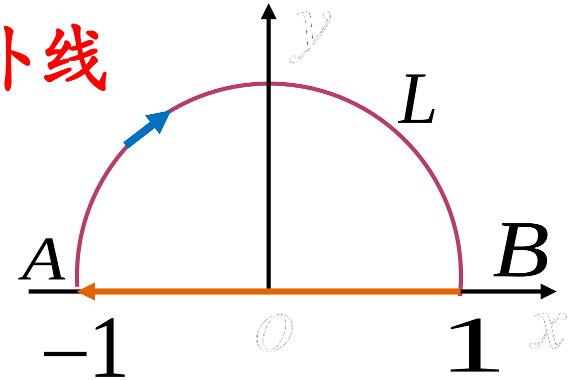
$$=\int_0^\pi\left(1-\frac{3}{4}\cos^2\theta\right)d\theta=\int_0^\pi d\theta-\frac{3}{4}\int_0^\pi\cos^2\theta d\theta=\frac{5}{8}\pi$$

$$\int_{\overrightarrow{AB}} x^3dy+(2y-1)dx=0+\int_{-1}^1(0-1)dx=-2$$

$$I=\oint_{L+\overrightarrow{BA}}+\int_{\overrightarrow{AB}}=\frac{5}{8}\pi-2$$

例4. 计算 $\int_L x^3\,\mathrm{d}y+(2y-1)dx$ 补线

L 是 $x^2+y^2=1, y\geq 0$ 顺时针方向



注: L不封闭时添加有方向辅助线l， l方向任意指定

但用格林公式时， $L+l$（l^-）必须为正（负）方向，

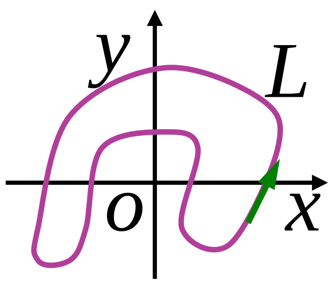
若 $L+l$（l^-）负方向，改变方向后L^-+l^-（l）用格林公式.

例6. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解:

$$\begin{cases} P = \dfrac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ Q = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases} \quad \left(x^2+y^2 \neq 0\right)$$

i)设 L 所围区域为D, 当$(0,0) \notin D$时,



$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

例6. 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

---

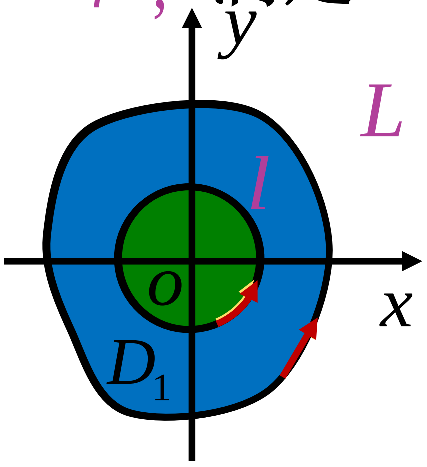
ii）当$(0,0)\in D$时，**在D内作圆周** $l: x^2+y^2=r^2$, **满足:**

$r>0$

l 在L内

l 逆时针方向

记 L 和 l^- 所围的区域为 D_1



对区域 D_1 应用格林公式

$$\oint_{L+l^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} - \oint_l \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= \iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

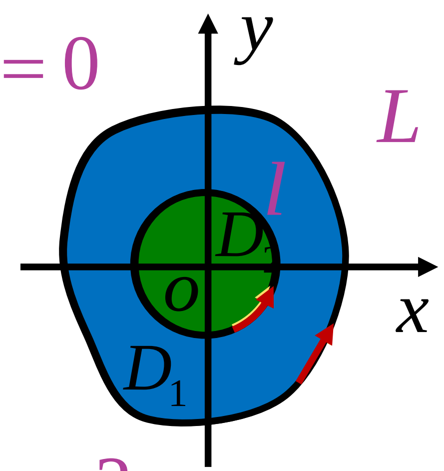
例6. 计算 $\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

挖洞

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\therefore\quad \oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

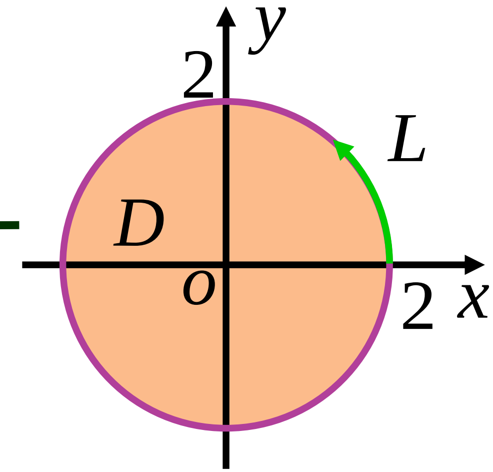
$$\boxed{\begin{cases} x=r\cos t\\ y=r\sin t\end{cases}}\qquad =\int_0^{2\pi}\frac{r^2\cos^2 t+r^2\sin^2 t}{r^2}\,\mathrm{d}t=2\pi$$



注：若被积函数分母含x^2+y^2，需添加小圆周辅助线.

例7.设 $L: x^2+y^2=4$, 且取正向, 问下列计算

$$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$ 的方法是否正确？



解: (1) $\because \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

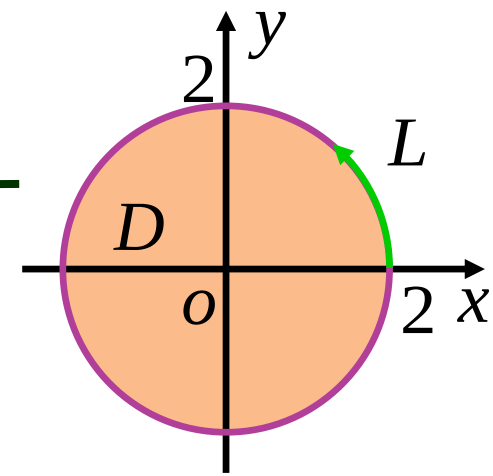
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\therefore \oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_D 0\,\mathrm{d}\sigma = 0 \quad \times$$

(2) $\displaystyle \oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\iint_D 2\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi \quad \checkmark$

例8. 设 $L: x^2+y^2=4$，且取正向，问下列计算

$$\oint_L \frac{x^3\,\mathrm{d}y - y^3\,\mathrm{d}x}{3}$$ 的方法是否正确？



解： (1) $\because \dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{x^3}{3} = x^2 \qquad \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{-y^3}{3} = -y^2$

$$\therefore \oint_L \frac{x^3\,\mathrm{d}y - y^3\,\mathrm{d}x}{3} = \iint_D (x^2 \cancel{+ y^2})d\sigma = \iint_D 4d\sigma = 16\pi$$

(2) $$\oint_L \frac{x^3\,\mathrm{d}y - y^3\,\mathrm{d}x}{3} = \iint_D (x^2+y^2)d\sigma$$

$$= \iint_D r^3 d\theta\,\mathrm{d}r = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr = 8\pi$$

注：可以用曲线方程化简曲线积分的被积函数，但不能用曲线方程化简二重积分的被积函数.

内容小结

格林公式 $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

1.运用格林公式时必须先验证条件

2. ***L***不封闭时添加有方向辅助线，再用格林公式

3.*P*(*x*,*y*) ,*Q*(*x*,*y*)在***D***上不具有连续一阶偏导数时，采用挖点法，挖掉***D***上使***P*(*x*,*y*) *Q*(*x*,*y*)**不具有连续一阶偏导数的点

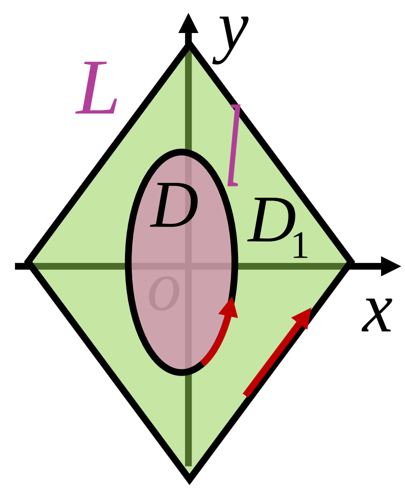
练习*. 计算 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{4x^2 + y^2}$ L 是正向闭曲线 $|x| + |y| = 2$

解: 令 $P = \frac{y}{4x^2 + y^2}$, $Q = \frac{-x}{4x^2 + y^2}$

则当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4x^2 - y^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$l: 4x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向, 记 L 和 l^- 所围的区域为 D_1

l 所围的区域为D



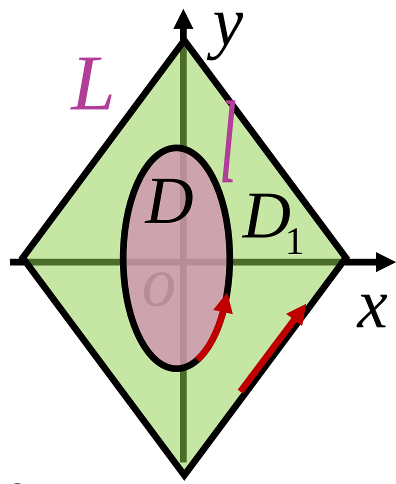
$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{4x^2 + y^2}$$

$$= \oint_{L+l^-} \frac{ydx - xdy}{4x^2 + y^2} - \oint_{l^-} \frac{ydx - xdy}{4x^2 + y^2}$$

练习*. 计算 $\oint_L \dfrac{y\,dx - x\,dy}{4x^2+y^2}$ **L** 是正向闭曲线 $|x|+|y|=2$

解: $l: 4x^2+y^2=1$,取逆时针方向，记 **L** 和 **l^-** 所围的区域为 D_1

l 所围的区域为**D**



$$\oint_L \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$$

$$= \oint_{L+l^-} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2} - \oint_{l^-} \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2}$$

$$= \iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_l \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{4x^2+y^2} = \oint_l y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = -2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi$$

注：若被积函数分母含$x^2/a^2+y^2/b^2$，需添加小椭圆辅助线

$P(x,y)$,$Q(x,y)$在D上某些点不具有连续一阶偏导数时，

用挖点法，根据函数特点选曲线

四、平面上曲线积分与路径无关

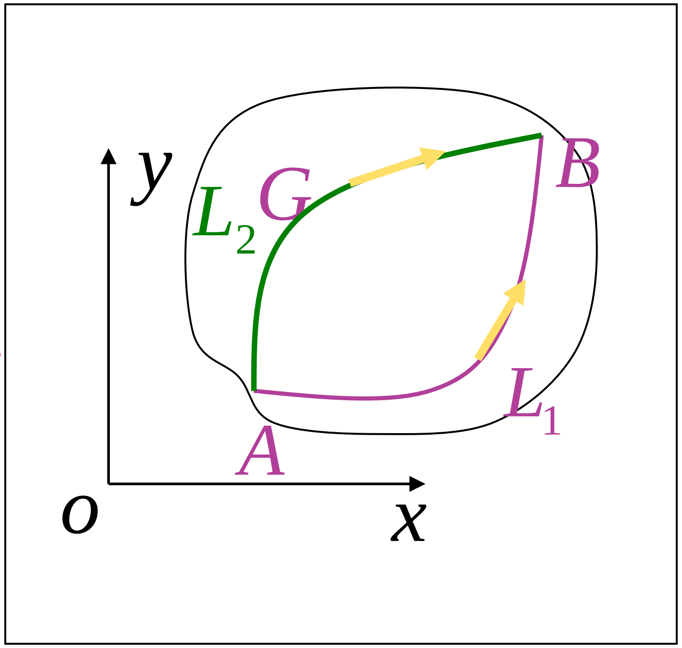
设G是一个开区域，且$P(x, y)$, $Q(x, y)$在G内具有一阶连续偏导数. 若对G内任意指定的两个点$A\,(x_1, y_1)$, $B\,(x_2, y_2)$，以及G内从点A到点B的任意两段曲线L_1, L_2，等式

$$\int_{L_1} Pdx + Qdy = \int_{L_2} Pdx + Qdy$$

恒成立，则称曲线积分 $\int_L Pdx + Qdy$ 在G内与路径无关. 此时,从点A到点B的曲线积分可记为 $\int_A^B Pdx + Qdy$

或 $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy$

否则称曲线积分与路径有关.



五、原函数

设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$具有一阶连续偏导数. 若二元函数 $u=u\,(x, y)$ 满足

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

则称函数$u=u\,(x, y)$ 是表达式 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 的一个原函数.