第30讲
常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

二、交错级数及其审敛法

设 $u_n > 0, n = 1, 2, \cdots,$ 则各项符号正负相间的级数

$$u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n-1} u_n + \cdots$$

称为交错级数 .

定理6 . (Leibnitz 判别法) 若交错级数满足条件:

1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots);$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 收敛 , 且其和 $S \leq u_1,$

其余项满足 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

定理6 . (Leibnitz 判别法)若交错级数满足条件:

1) $u_n \ge u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots);$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛 , 且 $S \le u_1, \left| r_n \right| \le u_{n+1}$.

证: $\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \ge 0$

$\because \{u_n\}\downarrow \quad \therefore S_2 \le S_4 \le S_6 \le \cdots$ 即 $\{S_{2n}\}$ 单调递增,

$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \le u_1$

$\therefore S_{2n}$ 是单调递增有上界数列, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \le u_1$

又 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \le u_1$

定理6 . (Leibnitz 判别法)若交错级数满足条件:

1) $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, \cdots)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ **收敛 , 且** $S \leq u_1, |r_n| \leq u_{n+1}$.

证:

S_n 的余项:

$$r_n = S - S_n = \begin{cases} u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots & \textbf{n为偶数} \\ -(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots) & \textbf{n为奇数} \end{cases}$$

$$\therefore \quad |r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots \leq u_{n+1}$$

用**Leibnitz 判别法**判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$ 收敛

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}+\cdots$ 收敛

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

(Leibnitz 判别法) 若交错级数满足条件:

1) $u_n \geq u_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛.

用**Leibnitz 判别法**判别下列级数的敛散性:

1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+($

2) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{n+1}{10^{n+1}}}{\dfrac{n}{10^n}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{n+1}{n}$$

3) $\frac{1}{10}-\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}-\frac{4}{10^4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}+\cdots$ 收敛

上述级数各项取绝对值后所成的级数是否收敛？

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{10^n}$.

发散 收敛 收敛

取绝对值提高发散性

三、绝对收敛与条件收敛

定义: 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 , 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 ;

若原级数收敛, 但取绝对值以后的级数发散, 则称原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛 .

例如 : $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 为条件收敛 .

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

定理7. 绝对收敛的级数一定收敛 .

证: 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛 ,

令 $v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|) \qquad (n = 1, 2, \cdots)$

显然 $v_n \ge 0$, 且 $v_n \le |u_n|$, 根据比较审敛法 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛,

$$u_n = 2v_n - |u_n|$$

$$\Big\downarrow \; \sum_{n=1}^{\infty}|u_n|, \; \sum_{n=1}^{\infty} 2v_n \text{ 收敛}$$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛

定理7. 绝对收敛的级数一定收敛.

注：① 判别级数是否绝对收敛,可用正项级数的审敛法.

② 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，那么一般不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

但如果 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散是用根值法或比值法确定的,

可由 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散推出 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

例1. 证明下列级数绝对收敛：

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4};\qquad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{e^n}.$$

证: (1)

$$\because \left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|\le\frac{1}{n^4}\text{，而}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\text{收敛，}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|\text{收敛}$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛 .

例1. 证明下列级数绝对收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{e^n}$.

---

(2) 交错级数， 绝对收敛用正项级数判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{e^{n+1}}}{\frac{n^2}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{e} < 1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n^2}{e^n}\right|$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{e^n}$ 绝对收敛.

第三节　幂级数

一、函数项级数的概念

二、幂级数及其收敛性

三、幂级数的运算

一、 函数项级数的基本概念

1. 函数项级数

设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 为定义在区间 I 上的函数, 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的函数项级数 .

2. 收敛点、发散点

对 $x_0 \in \mathrm{I}$, 若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 称 x_0 为其收敛点; 若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散 , 称 x_0 为其发散点.

3. 收敛域、发散域 所有收敛点的全体称为其收敛域；所有发散点的全体称为其发散域 .

4. 和函数

在收敛域上, 函数项级数的和是 **x** 的函数 $S(x)$, 称它为级数的和函数 , 并写成 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

5. 余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$

其中，$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 表示函数项级数前 **n** 项的和.

则在收敛域上有 $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$

例1. 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

它的收敛域是 $(-1, 1)$，当 $x \in (-1, 1)$ 时，有和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

它的发散域是 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$，或写作 $|x| \geq 1$.

二、幂级数及其收敛性

1. 幂级数

形如 $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数，其中数列 $a_n \ (n = 0,1,\cdots)$称为幂级数的系数 .

因为若令 $t = x - x_0$ 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

所以只研究

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

2. 幂级数的收敛域

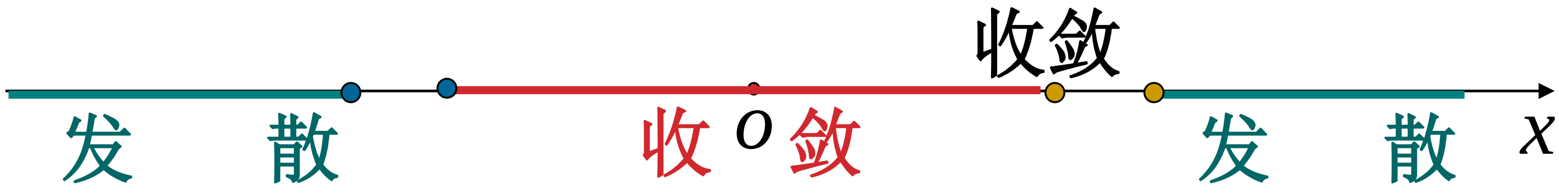
定理 . (Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $x = x_0$ 点收敛，则它在满足 $|x| < |x_0|$

的一切点 x 处都绝对收敛.

反之，若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则它在满足

$|x| > |x_0|$ 的一切点 x 处也发散 .



定理 . (Abel定理) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

阿贝尔，N.H.

在 $x = x_0$ 点收敛，则它在满足 $|x| < |x_0|$ 的一切点 x 处 都绝对收敛.

反之，若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则它在满足 $|x| > |x_0|$ 的一切点x处 也发散 .

证(1): 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$，于是存在常数 $M > 0$，使 $|a_n x_0^n| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots)$

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

定理.(Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $x = x_0$ 点收敛，则它在满足 $|x| < |x_0|$ 的一切点x处都绝对收敛.

反之，若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则它在满足 $|x| > |x_0|$ 的一切点 x处也发散.

证(1): $$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

当 $|x| < |x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛，$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 也收敛，

故原幂级数绝对收敛.

定理 . (Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 点收敛，则它在满足 $|x| < |x_0|$ 的一切点 x处都绝对收敛.

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则它在满足 $|x| > |x_0|$ 的一切 点x 处也发散 .

证(2): 反证法

假设有一点 x_1 满足 $|x_1| > |x_0|$ 且使级数收敛，则由前面的证明可知, 级数在点 x_0 也应收敛, 与所设矛盾, 故假设不真. 所以若当 $x = x_0$ 时幂级数发散，则对一切满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的 x，原幂级数也发散 .

由Abel 定理可以看出, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间.

用 $\pm R$ 表示幂级数收敛与发散的分界点, 则

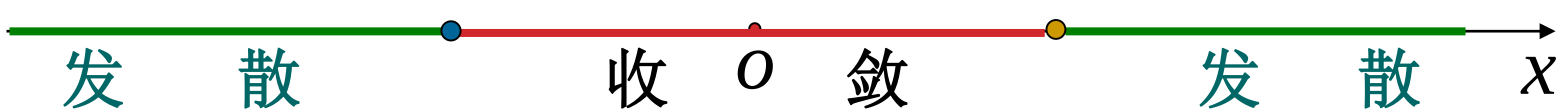
$R = 0$ 时, 幂级数仅在 $x = 0$ 收敛 ;

$R = \infty$ 时, 幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛 ;

$0 < R < \infty$, 幂级数在 $(-R, R)$ 收敛 ;在$[-R, R]$ 外发散; 在 $x = \pm R$ 可能收敛也可能发散 .

R 称为收敛半径 , $(-R, R)$ 称为收敛区间.

$(-R, R)$ 加上收敛的端点称为收敛域.



内容小结

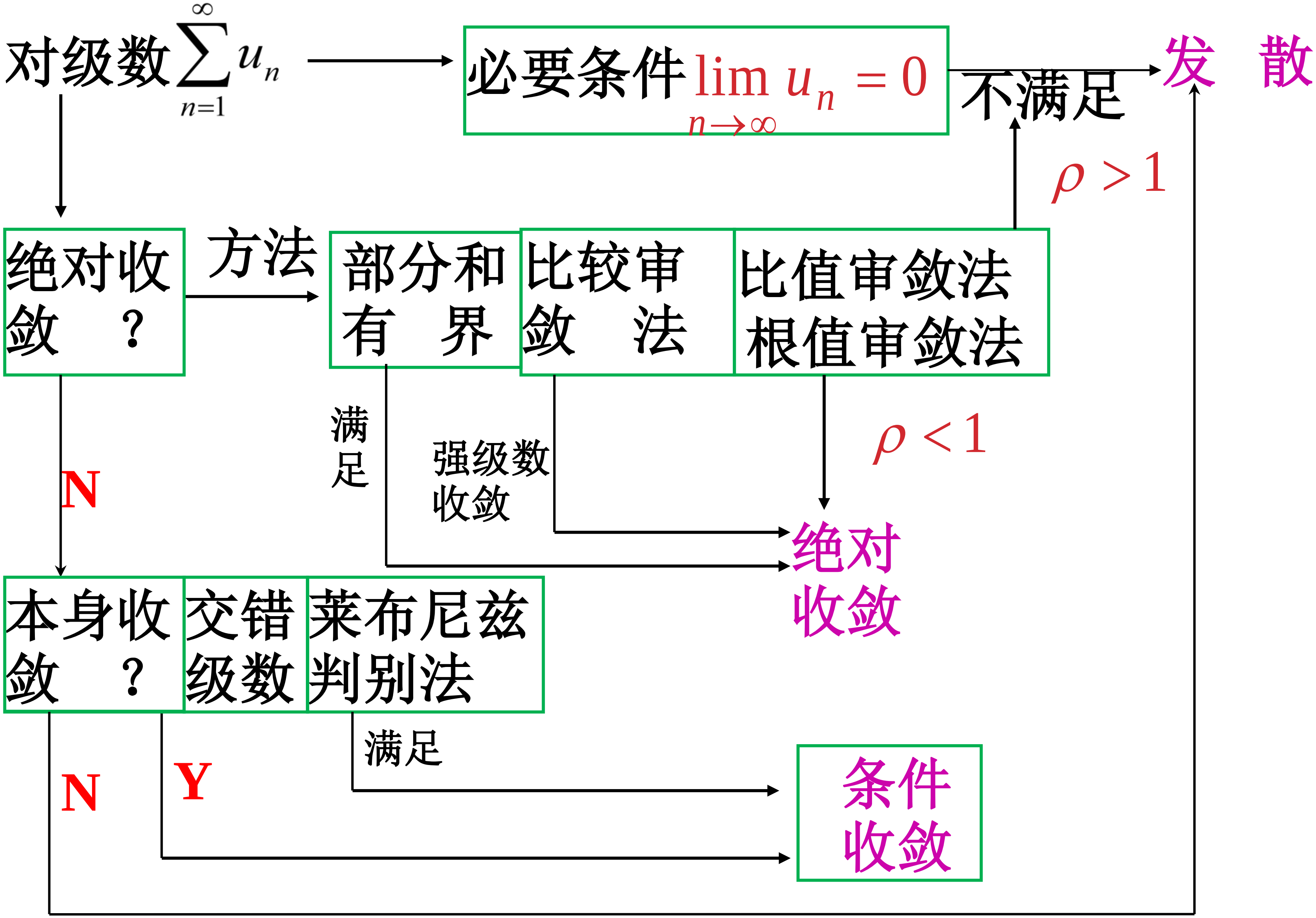
任意项级数审敛法

概念： 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为收敛级数

$$\begin{cases} 若 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| 收敛，称 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ 绝对收敛 \\ 若 \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| 发散，称 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \ 条件收敛 \end{cases}$$

Leibniz判别法：

$$\left.\begin{aligned} u_n \ge u_{n+1} > 0 \\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \end{aligned}\right\} \longrightarrow 则交错级数 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n 收敛$$



对级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$
必要条件$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$
不满足
发 散
$\rho > 1$
绝对收敛？
方法
部分和有 界
比较审敛 法
比值审敛法
根值审敛法
满足
强级数收敛
$\rho < 1$
N
绝对收敛
本身收敛？
交错级数
莱布尼兹判别法
满足
N
Y
条件收敛