复习

解非齐次方程 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

对应齐次方程通解 $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

原方程的通解

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

即 $$y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

伯努利 (Bernoulli)方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

解法: ① 方程两边同除y^n，得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

② 令 $z=y^{1-n}$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ (线性方程)

③ 求出此方程通解

④ 换回原变量即得伯努利方程的通解.

第三节　可降阶的高阶微分方程

全微分方程

$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

$y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

则称
$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \qquad ①$$

为全微分方程 (又叫做恰当方程) .

判别: P, Q 在某单连通域D内有连续一阶偏导数, 则

① 为全微分方程 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\in D$

求解步骤:

1. 求原函数 $u(x,y)$　　方法1　凑微分法;

方法2　利用积分与路径无关的条件.

2. 由 $\mathrm{d}\,u = 0$ 知通解为 $u(x,y) = C$.

例5. 求解

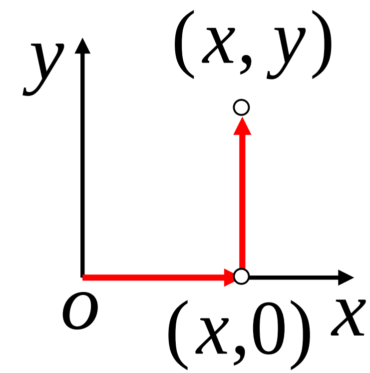
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解: 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 故这是全微分方程.

取 $x_0=0,\ y_0=0$, 则有

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

（C 为任意常数）

例6. 求解 $(x+\frac{y}{x^2})\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\mathrm{d}y=0$

解: $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

$\therefore$ 这是一个全微分方程.

用凑微分法求通解.

将方程改写为

$$x\,\mathrm{d}x-\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

即 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)-\mathrm{d}(\frac{y}{x})=0,$

或 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x})=0$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}=C$ （C 为任意常数）

思考: 如何解方程

$$(x^3+y)\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0\,?$$

这不是一个全微分方程,

但若在方程两边同乘 $\frac{1}{x^2}$,

就化成全微分方程.

积分因子法

对于微分方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

当 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 时, 它不是全微分方程.

与原方程同解？会丢掉使积分因子为0或无意义的解，不影响通解

若存在连续可微函数 $\mu = \mu(x,y) \neq 0$, 使

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

为全微分方程, 则称 $\mu(x,y)$为原方程的**积分因子**.

在简单情况下, 可凭观察和经验根据微分倒推式得到积分因子.

常用微分倒推公式:

1) $\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}y = \mathrm{d}(\,x \pm y\,)$

2) $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\,xy\,)$

3) $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\,\frac{1}{2}(x^2 + y^2))$

4) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}(\,\dfrac{x}{y}\,)$

5) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}(\,\dfrac{-y}{x}\,)$

6) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}(\,\ln\dfrac{x}{y}\,)$

7) $\dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}(\,\arctan\dfrac{x}{y}\,)$

8) $\dfrac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \mathrm{d}(\,\sqrt{x^2 + y^2}\,)$

积分因子不一定唯一.

例如, 对 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$

可取 $\mu = \dfrac{1}{y^2}$, $\mu = \dfrac{1}{x^2}$,

$\mu = \dfrac{1}{xy}$, $\mu = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

一、$y^{(n)} = f(x)$ 型的微分方程

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)\,\mathrm{d}x + C_1 \right] \mathrm{d}x + C_2$$

$$= \int \left[\int f(x)\,\mathrm{d}x \right] \mathrm{d}x + C_1 x + C_2$$

依次通过 ***n*** 次积分, 可得含 ***n*** 个任意常数的通解 .

例1. 求解 $y'' = e^{2x} - \cos x$.

解: $y' = \int \left(e^{2x} - \cos x \right) dx + C_1$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} - \sin x + C_1$$

$$y = \frac{1}{4} e^{2x} + \cos x + C_1 x + C_2$$

（C_1 和 C_2为任意常数）

二、 $y'' = f(x, y')$ 型的微分方程

设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$, 原方程化为一阶方程

$$p' = f(x, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(x, C_1)$

则得 $y' = \varphi(x, C_1)$

再一次积分, 得原方程的通解

$$y = \int \varphi(x, C_1)\,\mathrm{d}x + C_2$$

（C_1 和 C_2为任意常数）

例2.求解方程 $xy'' + 2y' = 0$

解法一 设 $y' = p(x)$, 则 $y'' = p'$,

原方程化为一阶方程

$$xp' + 2p = 0$$ 可分离变量

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{2}{x}p \quad \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{2}{x}dx$$

$$\Rightarrow \ln p = -2\ln x + \ln C_1 \Rightarrow p = C_1\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow y' = C_1\frac{1}{x^2} \Rightarrow y = -\frac{C_1}{x} + C_2$$

（C_1 和 C_2为任意常数）

例2.求解方程 $xy'' + 2y' = 0$

解法二 $x \cdot xy'' + 2 \, x \, y' = 0$

$$x^2 y'' + 2xy' = 0$$

$$\left(x^2 y'\right)' = 0 \Rightarrow x^2 y' = C_1$$

$$y' = \frac{C_1}{x^2}$$

$$y = -\frac{C_1}{x} + C_2$$

（C_1 和 C_2为任意常数）

三、$y'' = f(y, y')$ 型的微分方程

令 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

故方程化为 $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$$

设其通解为 $p = \varphi(y, C_1)$, 即得

$$y' = \varphi(y, C_1)$$

分离变量后积分, 得原方程的通解

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2$$

例4 求解 $yy'' - y'^2 = 0$.

解: 设 $y' = p(y)$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

代入方程得 $yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} - p^2 = 0$, $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = \frac{p}{y}$ 即 $\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{d}y}{y}$

两端积分得 $\ln p = \ln y + \ln C_1$,

即 $p = C_1 y$, $\therefore$ $y' = C_1 y$

$y' - C_1 y = 0$

(一阶线性齐次方程)

$\frac{dy}{y} = C_1\,\mathrm{d}x$

(分离变量)

故所求通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$ (C_1 和C_2为任意常数)

例5. 解初值问题 $\begin{cases} y'' - e^{2y} = 0 \\ y\big|_{x=0} = 0, \quad y'\big|_{x=0} = 1 \end{cases}$

解：令$y' = p(y)$, 则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 代入方程得

$$p\,\mathrm{d}p = e^{2y}\,\mathrm{d}y$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1$

利用初始条件,得 $C_1 = 0$, 根据 $p\big|_{y=0} = y'\big|_{x=0} = 1 > 0$, 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p = e^y \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{e^y} = \mathrm{d}x$$

积分得 $-e^{-y} = x + C_2$, 再由 $y\big|_{x=0} = 0$, 得 $C_2 = -1$

故所求特解为 $1 - e^{-y} = x$

内容小结

可降阶微分方程的解法 —— 降阶法

1. $y^{(n)} = f(x)$

   逐次积分

2. $y'' = f(x, y')$

   令 $y' = p(x)$，则 $y'' = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$

3. $y'' = f(y, y')$

   令 $y' = p(y)$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$

第四节 高阶线性微分方程

一、高阶线性微分方程解的结构

二、二阶常系数齐次线性微分方程

三、二阶常系数非齐次线性微分方程

一、 *n* 阶线性微分方程解的结构

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

$$\begin{cases} f(x)\not\equiv 0 \text{ 时, 称为非齐次方程;} \\ f(x)\equiv 0 \text{ 时, 称为齐次方程.} \end{cases}$$

复习: 一阶线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$

通解: $$y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}Y}+\underbrace{e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解 }y^*}$$

4.1 高阶线性微分方程解的结构

定理1. 若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

的两个解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ (C_1, C_2为任意常数)

也是该方程的解. **(叠加原理)**

证: 将 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 代入方程左边, 得

$$[C_1 y_1'' + C_2 y_2''] + P(x)[C_1 y_1' + C_2 y_2'] + Q(x)[C_1 y_1 + C_2 y_2]$$

$$= C_1[y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1] + C_2[y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2] = 0$$

证毕

说明:

1. 定理对*n*阶方程同样适用

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0$$

2. $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ **不一定是所给二阶方程的通解.**

例如, $y_1(x)$ 是某二阶齐次方程的解, 则

$$y_2(x)=2\,y_1(x)$$ **也是齐次方程的解**

但是 $$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=(C_1+2\,C_2)y_1(x)$$

并不是通解

为解决通解的判别问题, 下面引入函数的线性相关与线性无关概念.

定义: 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数, 若存在**不全为 0** 的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$,使得

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) + \cdots + k_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in I$$

则称这 n 个函数在 I 上**线性相关**, 否则称为**线性无关**.

例如, $1, \cos^2 x, \sin^2 x$, 在$(-\infty, +\infty)$上都有

$$1 - \cos^2 x - \sin^2 x \equiv 0$$

故它们在任何区间 I 上都**线性相关**;

又如, $1, x, x^2$, 若在某区间 I 上 $k_1 + k_2 x + k_3 x^2 \equiv 0$, 则根据二次多项式至多只有两个零点, 可见 k_1, k_2, k_3 必需全为 0, 故 $1, x, x^2$ 在任何区间 I 上都 **线性无关**.

两个函数在区间 I 上线性相关与线性无关的充要条件:

$y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\rightleftarrows$ 存在不全为 **0** 的 k_1, k_2 使

$$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \equiv 0$$

$$\rightleftarrows \quad \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \equiv -\frac{k_2}{k_1}$$

(无妨设 $k_1 \neq 0$)

$y_1(x), y_2(x)$ 线性无关 $\rightleftarrows \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \not\equiv$ 常数

可微函数 y_1, y_2 线性无关

$$\rightleftarrows \quad \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

(证明略)

思考: 若 $y_1(x), y_2(x)$ 中有一个恒为 **0**, 则 $y_1(x), y_2(x)$ 必线性 <u>相关</u>

定理 2. 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程的两个线性无关特解, 则 $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ $(C_1, C_2$为任意常数) 是该方程的通解. (自证)

例如, 方程 $y'' + y = 0$ 有特解 $y_1 = \cos x, y_2 = \sin x$, 且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \not\equiv$ 常数, 故方程的通解为

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

推论. 若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 $\boldsymbol{n}$ 阶齐次方程

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0$$

的 $\boldsymbol{n}$ 个线性无关解, 则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n \quad (C_k\text{为任意常数})$$

2. 线性非齐次方程解的结构

定理4 若 y_1^*, y_2^* 是非齐次线性微分方程的任意两个解，则它们的差 $y_1^* - y_2^*$ 是对应齐次方程的解.

定理5（非齐次线性方程的通解）

若 y^* 是非齐次方程线性微分方程的一个解,Y 是相应齐次方程的通解，则 $y = Y + y^*$ 是非齐次方程的通解.

定理6 设 y_1^* 与 y_2^* 分别为方程

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x)$$ 与

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_2(x)$$

的解，则 $y = y_1^* + y_2^*$ 为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$ 的解.

例1. **设** $y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*$ **是** $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\ (\neq 0)$

的三个线性无关的解，证明：该方程的通解为

$$y = C_1 y_1^* + C_2 y_2^* + C_3 y_3^* \quad \text{其中}\ C_1 + C_2 + C_3 = 1$$

解： 由 $y_1^*,\ y_2^*,\ y_3^*$ **是** $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)\ (\neq 0)$

的三个线性无关的解，得：

$y_1^* - y_3^*,\ y_2^* - y_3^*$ 是 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

的线性无关的解

通解为 $C_1\left(y^*{}_1 - y^*{}_3\right) + C_2\left(y^*{}_2 - y^*{}_3\right) + y^*{}_3$

$$= C_1 y^*{}_1 + C_2 y^*{}_2 + \left(C_1 - C_2 + 1\right) y^*{}_3$$

例2. 设线性无关函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$的解, C_1, C_2 是任意常数, 则该方程的通解是 (D).

$\cancel{(A)}$ $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$;

$\cancel{(B)}$ $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (C_1 + C_2) y_3$;

(C) $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 + C_1 + C_2) y_3$;

(D) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$.

提示: (C) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) - y_3$

(D) $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3$

$y_1 - y_3, y_2 - y_3$ 都是对应齐次方程的解,

二者线性无关 . (反证法可证)

例3. 已知微分方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 有三个解 $y_1 = x,\ y_2 = e^x,\ y_3 = e^{2x}$，求此方程满足初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3$ 的特解 .

解: $y_2 - y_1$ 与 $y_3 - y_1$ 是对应齐次方程的解, 且

$$\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{e^x - x}{e^{2x} - x} \neq \text{常数}$$

因而线性无关, 故原方程通解为

$$y = C_1(e^x - x) + C_2(e^{2x} - x) + x$$

代入初始条件 $y(0)=1,\ y'(0)=3$, 得 $C_1 = -1,\ C_2 = 2$,

故所求特解为 $y = 2e^{2x} - e^x$.