石家庄铁道学院 2011-2012 学年第Ⅱ学期

2010 级本科概率统计期末考试试卷　参考答案（A）

一.（30 分）

1．记 A 为事件“利率下调”， 那么 $\overline{A}$ 即为 “利率不变”，

记 B 为事件“股票价格上涨”．则

$$E(X+2Y)\ P(A)=60\%,\ P(\overline{A})=40\%,\ P(B\mid A)=80\%,\ P(B\mid\overline{A})=40\%,$$

（1） $P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})$ 　----------3 分

$=60\%\times 80\%+40\%\times 40\%=64\%.$ ----------5 分

（2） $E(X+2Y)\ P(A\mid B)=\dfrac{P(A)P(B\mid A)}{P(B)}=\dfrac{3}{4}$

2.（1）

X	0	1	2
P	0.3	0.45	0.25

Y	−1	0	2
P	0.55	0.25	0.2

$p_{11}\neq p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 1}$，所以不独立

（2）

XY	−2	−1	0	2	4
P	0.15	0.3	0.35	0.1	0.1

（3） $E(X+2Y)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_i+2y_j)p_{ij}=0.65$

法 2　$E(X+2Y)=E(X)+2E(Y)=0.95-2\times 0.15=0.65$ ——本人解

二、解答下列各题（共 30 分）

1． $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$

(1) $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(x)dx=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$

(2) $y=e^x\Rightarrow x=\ln y\Rightarrow x'=\dfrac{1}{y}$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 1<y<e\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

法 2 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ P\{e^X\le y\} & y>0\end{cases}=\begin{cases}0 & y\le 0\\ P\{X\le \ln y\} & y>0\end{cases}$

$$=\begin{cases}0 & y\le 0\\ F_X(\ln y) & y>0\end{cases},$$

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}F_X'(\ln y)\dfrac{1}{y}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}1\cdot\dfrac{1}{y}, & 1<y<e\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2.（1）区域 D 的面积为 $|D|=\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx=\dfrac{4}{3}$——从几何可知——本人解

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0\le y\le 1-x^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（2）$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{1-x^2}\dfrac{3}{4}\mathrm{d}y, & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3}{4}(1-x^2), & -1<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\dfrac{3}{4}\mathrm{d}x, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{3}{2}\sqrt{1-y}, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立.

（3）$p\{Y\ge X^2\}=\iint\limits_{x^2\le y\le 1-x^2}\dfrac{3}{4}dxdy=\dfrac{3}{4}\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-x^2-x^2)dx$

$$=\frac{3}{4}\cdot 2\left[x-\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ——本人解

3. ——本人解

1)$P\{X=1,Y=1\}=P\{XY=1\}=\dfrac{1}{3}$

$P\{X=2,Y=2\}=P\{XY=4\}=\dfrac{1}{12}$

2)$\because P\{X=2,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=P\{XY=2\}=0$

$\therefore P\{X=2,Y=1\}=P\{X=1,Y=2\}=0$

3）再结合边缘分布得

Y \ X	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	1/4	0	1/6	1/3
1	0	1/3	0	1/3
2	1/4	0	1/12	1/3
$p_{\cdot j}$	1/2	1/3	1/6	

三.

1．似然函数 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\begin{cases}\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}, & x_i>0\\ 0, & 其它\end{cases}$ ------- 4 分

对数似然函数 $\ln L_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$ ---------- 6 分

令 $\dfrac{d\ln L_1(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)}{d\lambda}=\dfrac{n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$ -------------------- 8 分

解得 $\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\dfrac{1}{\bar{x}}$ ------------- 10 分

2． $H_0:\mu=50,\ H_1:\mu\neq 50.$

取检验统计量 $T=\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1).$ ----------------- 4 分

拒绝域 $|t|=\dfrac{\left|\bar{X}-50\right|}{s/\sqrt{n}}>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.306$ -----------------6 分

由样本观测值算得, $|t|=\dfrac{\left|\bar{x}-50\right|}{s/\sqrt{n}}=0.56<2.306$ -------------8 分

故接受原假设 H_0，即认为包装机正常工作. -------------10 分

四.（每空 3 分）

1．D； 因互斥未必独立

注：$\because 0\overset{互斥}{=\!=\!=}P(AB)\overset{独立}{=\!=\!=}P(A)P(B)$，

所以当 $P(A)>0,P(B)>0$ 时，独立与互斥不可能同时发生

2．B；

因分布函数 $F(x)$ 右连续， $F(x)$ 单调不减， $F(-\infty)=0,\ F(+\infty)=1$

连续型另有：$F(x)$连续，　$F'(x)=f(x)$——其连续区间上

3. C；因

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm E(XY)-EX\cdot EY$$
$$=D(X)+D(Y)\pm Cov(X,Y)$$
$$Cov(X,Y)=E((X-EX)(Y-EY))=E(XY)-EX\cdot EY$$
$$Cov(X,Y)=E((X-EX)(Y-EY))=E(XY)-EX\cdot EY$$

4. B；

5. D；

6. D. ——本人解

因 $E(\overline{X})=EX=\lambda,\quad D(\overline{X})=\dfrac{DX}{n}=\dfrac{\lambda}{n},\quad E(S^2)=\sigma^2=DX=\lambda$

7. 0.6. ——本人解

因 $P(\overline{A}\cup\overline{B}\mid A\cup B)=P(\overline{AB}\mid A\cup B)=1-P(AB\mid A\cup B)$

$$=1-\frac{P((AB)(A\cup B))}{P(A\cup B)}=1-\frac{P(AB)}{P(A)+P(B)-P(AB)}$$
$$=1-\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)+P(B)-P(B)P(A\mid B)}=1-\frac{0.4\times0.5}{0.3+0.4-0.4\times0.5}$$
$$=1-\frac{0.2}{0.5}=0.6$$

8. 1，16 ——本人解

因　$EY=EX_1-2EX_2+3EX_3-1=\dfrac{6-0}{2}-2\times1+3\times\dfrac{1}{3}-1=1$

$$DY=DX_1+4DX_2+9EX_3=\frac{(6-0)^2}{12}+4\times3+9\times\frac{1}{3^2}=16$$

9. $\Phi(2)$. ——本人解

因　$\lim\limits_{n\to\infty}p\{\dfrac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\le2\}=\lim\limits_{n\to\infty}p\{\dfrac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-p}{\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}}\le2\}$

$$=\lim_{n\to\infty}p\{\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\le2\}=\int_{-\sqrt{\ }}^{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(2)$$