第五节

对坐标的曲面积分

一、有向曲面及曲面元素的投影

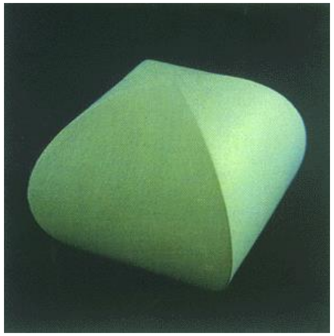
二、 对坐标的曲面积分的概念与性质

三、对坐标的曲面积分的计算法

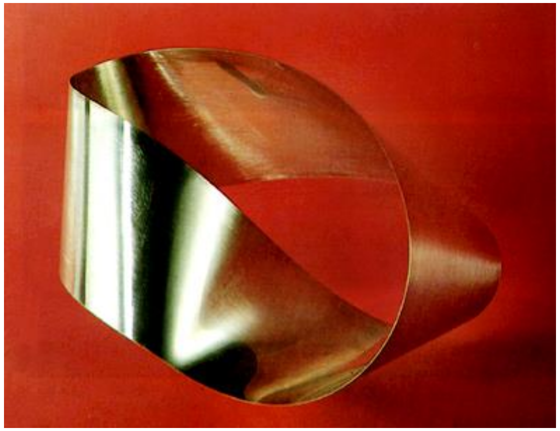
四、两类曲面积分的联系

一、有向曲面及曲面元素的投影

- 曲面分类 $\begin{cases} \text{双侧曲面} \\ \text{单侧曲面} \end{cases}$

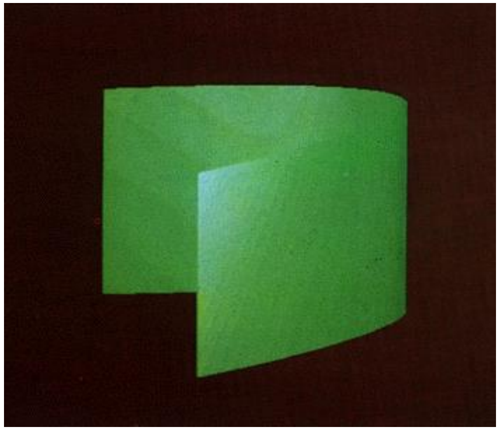


曲面分内侧和外侧

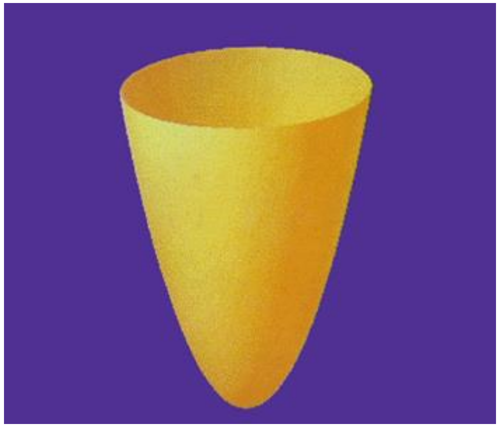


莫比乌斯带

(单侧曲面的典型)



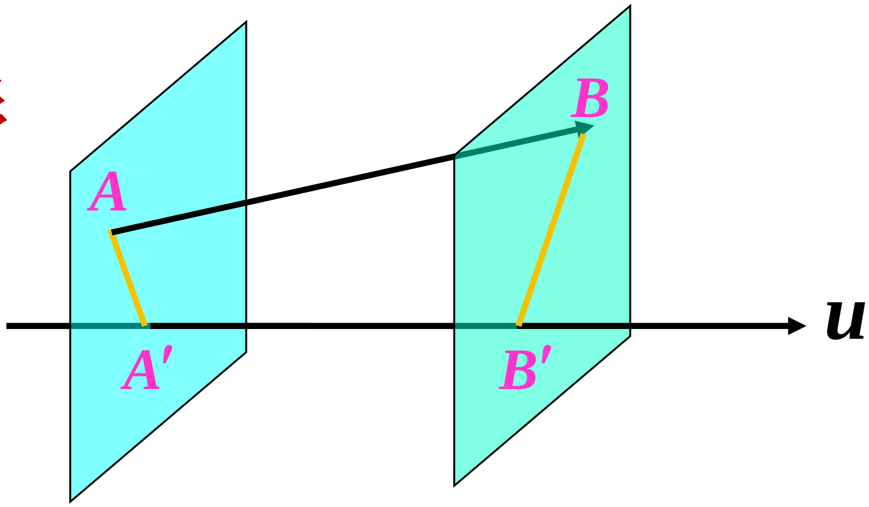
曲面分左侧和右侧



曲面分上侧和下侧

一只小虫可以爬遍整个曲面而不必跨过它的边缘!

•空间一向量在轴上的投影



向量$\overrightarrow{AB}$在轴u上的投影记为

$$\Pr j_u \overrightarrow{AB} = A'B'. = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi \quad (0 \le \varphi \le \pi)$$

(1) $0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, 投影为正；

(2) $\dfrac{\pi}{2} < \varphi \le \pi$, 投影为负；

(3) $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, 投影为零；

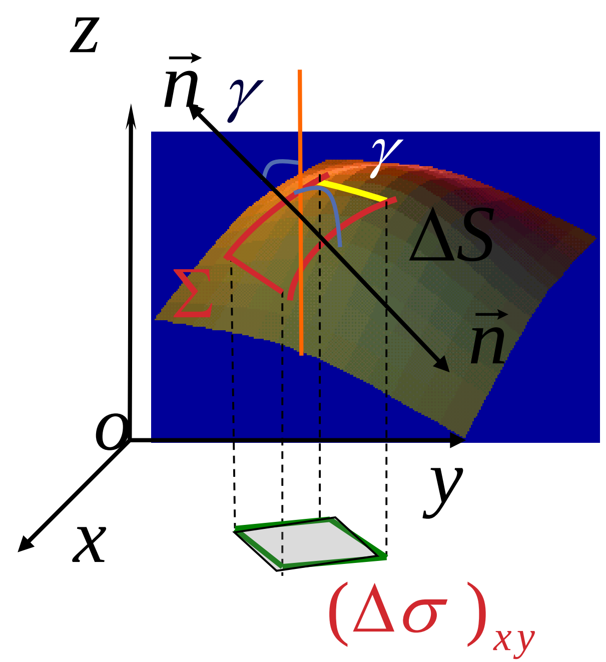
• 设 Σ 为有向曲面, 其面积元素ΔS在 ***xoy*** 面上的投影区域的面积为$(\Delta\sigma)_{xy}\ge 0$, ΔS 在 ***xoy*** 面上的投影记为$(\Delta S)_{xy}$,

定义为

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma>0\text{时}\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma<0\text{时}\\ 0, & \text{当}\cos\gamma\equiv 0\text{时}\end{cases}$$

$$=\Delta S\cos\gamma$$

类似可规定$(\Delta S)_{yz}$, $(\Delta S)_{zx}$



$$(\Delta\sigma)_{xy}=\Delta S\,|\cos\gamma|$$

• 指定了侧的曲面叫有向曲面, 其方向用法向量指向

表示：

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧

二、对坐标的曲面积分的概念与性质

1. 引例 设稳定流动的不可压缩流体的速度场为

$$\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$$

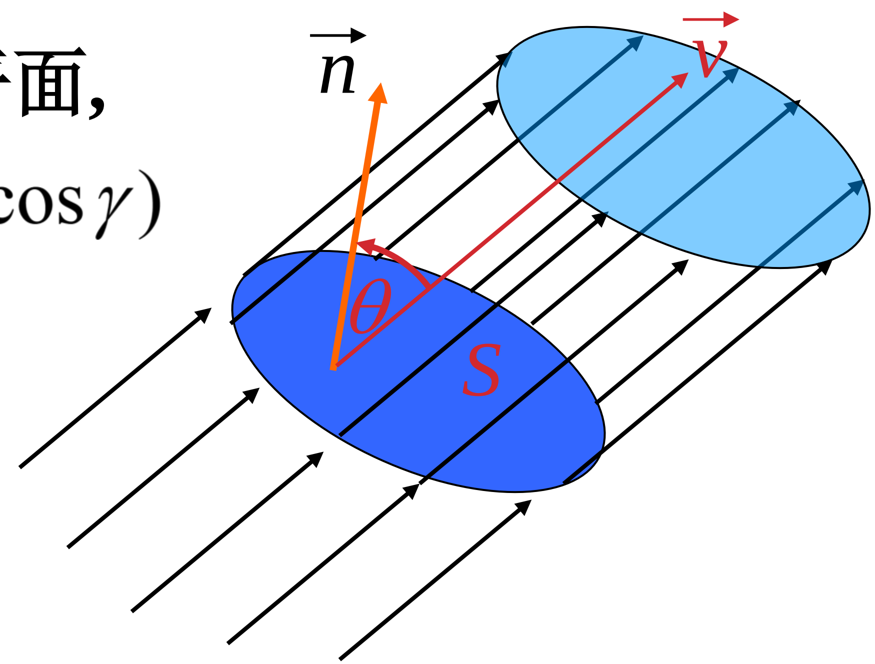
求单位时间流过有向曲面 Σ 的流量Φ .

分析: 若 Σ 是面积为S 的平面,

法向量: $\vec{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

流速为常向量: $\vec{v}$

则流量



$$\Phi=S\cdot|\vec{v}|\cos\theta$$

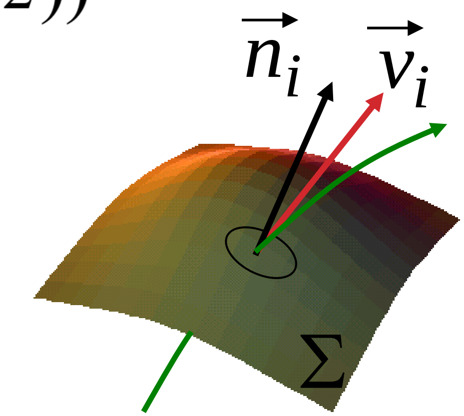
$$=\vec{v}\cdot\vec{S}$$

$$=S\,\vec{v}\cdot\vec{n}$$

对一般的有向曲面Σ，对稳定流动的不可压缩流体的速度场 $\vec{v}=(P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z))$

用“分割,近似, 求和, 取极限”

进行分析可得 $\Phi=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}\vec{v}_i\cdot\vec{n}_i\,\Delta S_i$



设 $\vec{n}_i=(\cos\alpha_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$，则

$$\Phi=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i]\Delta S_i$$

$$=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

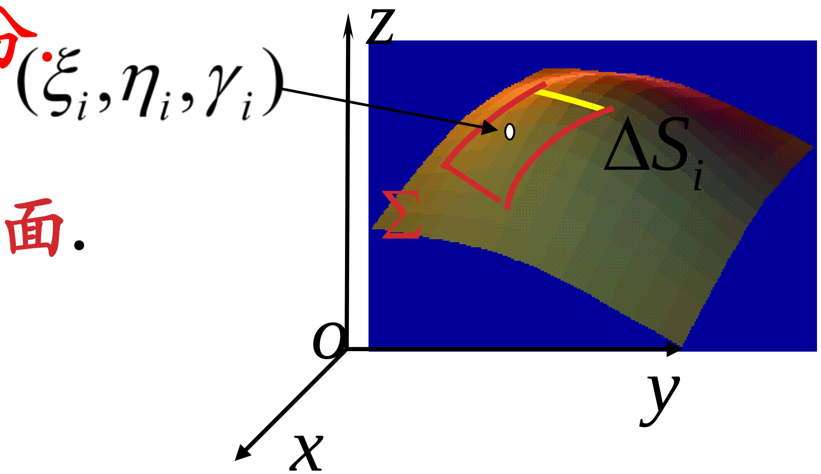
2. 定义. 设 Σ 为光滑的有向曲面, $R(x,y,z)$ 是 Σ 上定义的有界函数，将Σ任意分割成 **n** 小块 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$

在 ΔS_i 上任取一点$(\xi_i,\eta_i,\gamma_i),i=1,2,\cdots,n$

$\lambda=\{\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots,\Delta S_n$的直径$\}$ 若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)(\Delta S_i)_{xy} \xlongequal{\text{记作}} \iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

存在,则称此极限为 $R(x,y,z)$ 在有向曲面Σ上对坐标(x,y)的曲面积分，或第二类曲面积分.



R 叫做被积函数; Σ 叫做积分曲面.

dxdy 叫做投影元素.

同样方法可定义

$P(x,y,z)$ 在有向曲面Σ上对 (y, z) 的曲面积分和

$Q(x,y,z)$ 在有向曲面Σ上对 (z, x) 的曲面积分;

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

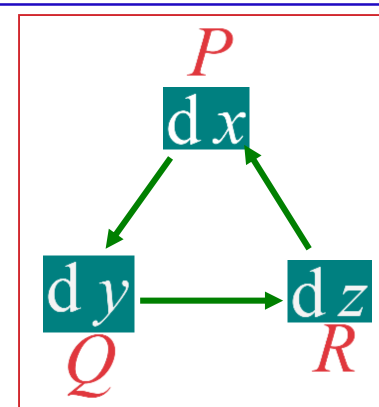
$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\gamma_i)(\Delta S_i)_{xz}$$

应用中，通常三项同时出现，此时三个积分的和简记为：

$$\boxed{\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

引例中, 流过有向曲面 Σ 的流体的流量为

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



3. 性质 **假设以下曲面积分均存在，**

(1) 线性　**以对坐标x,y的曲面积分为例。**

$$\iint_{\Sigma}[R_1+R_2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}R_1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma}R_2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma}kR(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=k\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(2) 积分曲面的可加性

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2}R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(3) 方向性　记Σ^-表示Σ的反侧曲面，则

$$\iint_{\Sigma^-}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

4) 对称性 以对坐标(x,y)的曲面积分为例：

若Σ关于xoy面对称，且上半部分Σ_1的侧与下半部分相反，

$$\iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint_{\Sigma_1} R\,\mathrm{d}x\mathrm{dy} & R(x,y,-z)=-R(x,y,z)\\ 0 & R(x,y,-z)=R(x,y,z)\end{cases}$$

三、对坐标的曲面积分的计算法

定理： 设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧，$R(x, y, z)$ 是 Σ 上的连续函数，则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证： $\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$

$\because \Sigma$ 取上侧，$\therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy}$

$\zeta_i = z(\xi_i, \eta_i)$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i))(\Delta \sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

曲面 $\sum : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧,

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

说明：由以上两个公式可以看到，将左端对坐标(x,y)的曲面积分化为二重积分时，其方法仍旧是将曲面积分记号中的三部分同时换. 即：

(i) 将积分曲面 Σ 换成投影域 D_{xy}；

(ii) 将被积函数中的 z 换成 $z(x,y)$；

(iii) 将式中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 视为记号，按 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma \mathrm{d}S$ 理解：当 Σ 取上侧时，$\cos\gamma$ 为正值，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 就是 D_{xy} 的面积微元 $\mathrm{d}\sigma$，直接用在二重积分中；当 Σ 取下侧时，$\cos\gamma$ 为负值，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 就是面积微元 $\mathrm{d}\sigma$ 的反值，在二重积分中改用$(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$.

曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧,

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧	>0 为右侧	>0 为上侧	外侧
	<0 为后侧	<0 为左侧	<0 为下侧	内侧

$$(\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma > 0\text{时} \\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \text{当}\cos\gamma < 0\text{时} \\ 0, & \text{当}\cos\gamma \equiv 0\text{时} \end{cases}$$

曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧,

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

说明：由以上两个公式可以看到，将左端对坐标(x,y)的曲面积分化为二重积分时，其方法仍旧是将曲面积分记号中的三部分同时换．即：

(i) 将积分曲面 Σ 换成投影域 D_{xy}；

(ii) 将被积函数中的 z 换成 $z(x,y)$；

(iii) 将式中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 视为记号，按 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma \mathrm{d}S$ 理解：当 Σ 取上侧时，$\cos\gamma$ 为正值，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 就是 D_{xy} 的面积微元 $\mathrm{d}\sigma$，直接用在二重积分中；当 Σ 取下侧时，$\cos\gamma$ 为负值，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 就是面积微元 $\mathrm{d}\sigma$ 的反值，在二重积分中改用$(-\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$．

- 若$\Sigma: x = x(y,z), (y,z)\in D_{yz}$,则有

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

(前正后负)

- 若$\Sigma: y = y(z,x), (z,x)\in D_{zx}$,则有

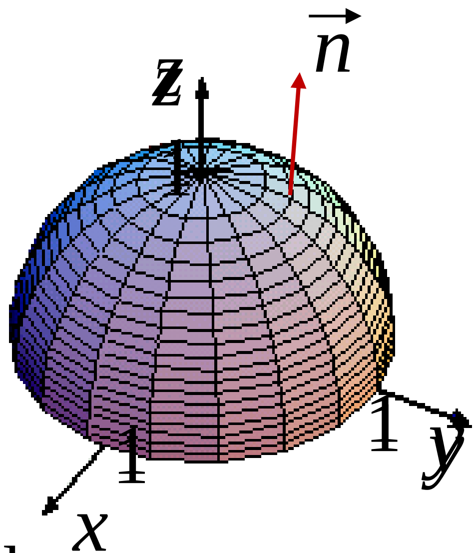
$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x,y(z,x),z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

(右正左负)

一投二代三计算

例1. 计算 $\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ Σ：上半单位球面上侧

解： $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$



$D_{xy}: x^2+y^2\le 1$

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

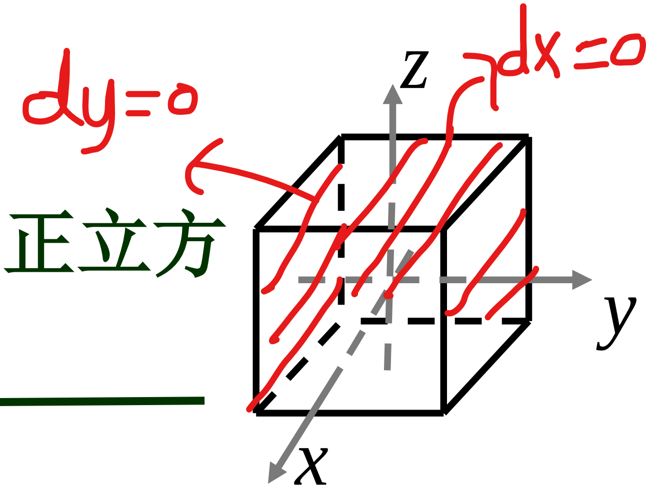
$$=+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$\underline{\underline{r=\sin t}}\ 2\pi\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\sqrt{1-\sin^2 t}\,dt=\frac{\pi}{2}$$

例2. 计算 $\iint_{\Sigma}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

其中 Σ 是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: Σ 的顶部 $\Sigma_1: z=\frac{a}{2}\ \left(|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2}\right)$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2: z=-\frac{a}{2}\ \left(|x|\le\frac{a}{2}, |y|\le\frac{a}{2}\right)$ 取下侧

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma_1}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}(z+x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

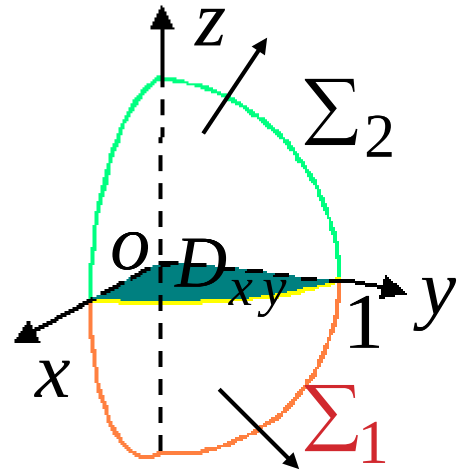
$$=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\left(-\frac{a}{2}+x\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=a\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a^3$$

例3. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在第一和第五卦限部分.

思考: 下述解法是否正确:

$$\boxed{\text{根据对称性} \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \cancel{=} 0}$$



解: 把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases} \quad (x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

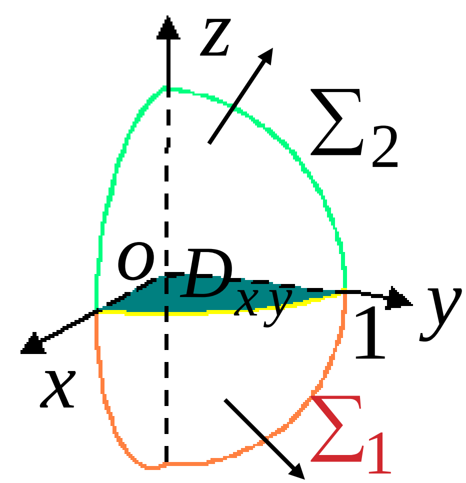
$$\therefore \quad \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{\Sigma_2} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{1-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\iint_{D_{xy}} r^2 \sin\theta\cos\theta\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta\,\mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r = 2/15$$



四、两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy} \Big]$$

曲面的方向用法向量的方向余弦刻画

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\alpha_i + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\beta_i + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cos\gamma_i \Big]\Delta S_i$$

$$= \iint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

例5. 设 $\Sigma: z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I=\iint_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$.

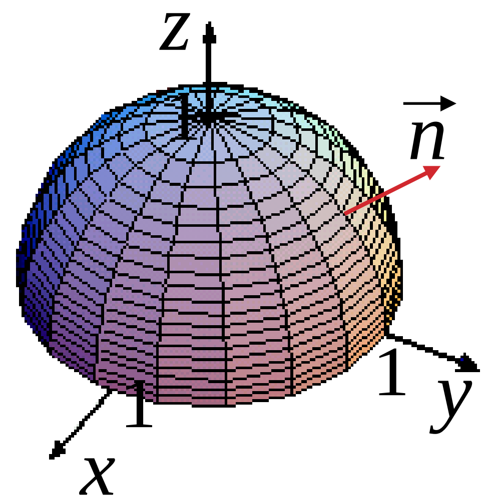
解:

$$I=\iint_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}(1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)\,r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}$$



$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

内容小结

1. 两类曲面积分及其联系

定义:

- $\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta S_i$
- $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Big[P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}\Big]$$

性质： $\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$$=-\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

联系： $\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

2. 常用计算公式及方法

$$\text{面积分}\begin{cases}\text{第一类 (对面积)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{cases}\xrightarrow{\text{转化}}\text{二重积分}$$

(1) 统一积分变量 —— 代入曲面方程
(方程不同时分片积分)

$$\text{(2) 积分元素投影}\begin{cases}\text{第一类：面积投影}\\ \text{第二类：有向投影}\end{cases}$$

(3) 确定积分域 —— 把曲面积分域投影到相关坐标面

注：二重积分是第一类曲面积分的特殊情况.

当 $\Sigma: z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 时，

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

（上侧取“+”, 下侧取“−”）

类似可考虑在 *yoz* 面及 *zox* 面上的二重积分转化公式 .