第八章　常微分方程

函数是实际问题中抽象出来的，反映了客观现实世界运动过程中量与量之间的一种关系。但在实际问题中，函数有时不能直接写出来，却比较容易建立变量和它的导数（或微分）之间的关系，此关系式就是所谓微分方程。建立方程以后，从方程中求出函数，即解微分方程。

第一节

微分方程的基本概念

已知 $y' = f(x)$, 求 y —— **积分问题**

推广

已知含 y 及其若干阶导数的方程，求 y

—— **微分方程问题**

引例1. 一曲线通过点(1,2) ,在该曲线上任意点处的切线斜率为 2x , 求该曲线的方程 .

解: 设所求曲线方程为 $y = y(x)$, 则有如下关系式:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x & ① \\ y\big|_{x=1} = 2 & ② \end{cases}$$

由 ① 得 $y = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$ （C为任意常数)

由 ② 得 $C = 1$, 因此所求曲线方程为 $y = x^2 + 1$.

引例2. 质量为m的物体，只受重力影响自由下落. 设自由落体的初始位置和初速度均为零，试求s和t的关系.

解： 设物体自由下落的距离s和时间t的关系为 $s=s(t)$.

由牛顿定律：$\dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}=g$ **(1)**　　且满足条件 $\begin{cases} s\big|_{t=0}=0 \\ v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0 \end{cases}$ **(2)**

对(1)式两边积分两次：$\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\mathrm{d}t=\int g\mathrm{d}t=gt+C_1$

$$s=\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}dt=\int (gt+C_1)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$$

由条件(2)得 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=(gt+C_1)\big|_{t=0}=0$　即 $C_1=0$.

$s\big|_{t=0}=(\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2)\big|_{t=0}=0$　即 $C_2=0$.

故距离s和时间t的关系为：$s=\dfrac{1}{2}gt^2$

2．微分方程的基本概念

含未知函数及其导数的方程叫做**微分方程**．

分类
- **常微分方程:** 未知函数为一元函数的微分方程
- **偏微分方程:** 未知函数为多元函数的微分方程

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的**阶**.

一般地，n 阶常微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

或 $$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$$ （n 阶**显式**微分方程)

n **阶线性常微分方程**的一般形式为

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x)$$

其中, $a_1(x), a_2(x), \cdots a_n(x), f(x)$均是$x$的已知函数.

微分方程的解 — 使方程成为恒等式的函数.

通解 — 解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.

特解 — 不含任意常数的解，其图形称为积分曲线.

定解条件 — 确定通解中任意常数的条件.

n 阶方程的初始条件(或初值条件):

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y_1\,,\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

例1 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x\\ y\big|_{x=1}=2\end{cases}$

例2 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-0.4\\ s\big|_{t=0}=0\,,\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=20\end{cases}$

通解: $y=x^2+C$ $\qquad s=-0.2t^2+C_1t+C_2$

特解: $y=x^2+1$ $\qquad s=-0.2t^2+20t$

例2. 验证函数 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ (C_1, C_2为常数)

是微分方程 $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0$ **的解，并求满足初始条件**

$x\big|_{t=0} = A, \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$ **的特解 .**

解: $\dfrac{d^2 x}{dt^2} = -C_1 k^2 \cos kt - C_2 k^2 \sin kt$

$$= -k^2 (C_1 \sin kt + C_2 \cos kt) = -k^2 x$$

这说明 $x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$ 是方程的解 .

C_1, C_2 是两个独立的任意常数，故它是方程的通解.

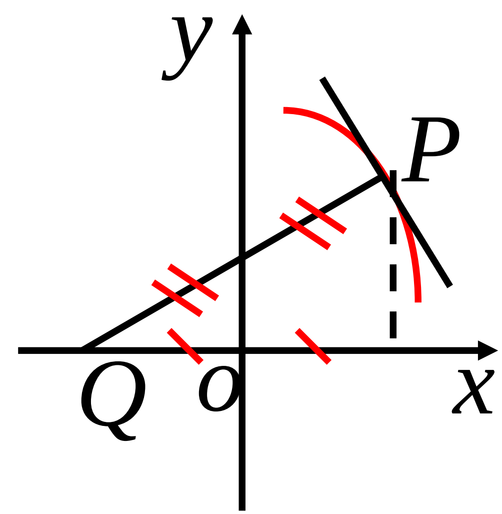
利用初始条件易得: $C_1 = A, C_2 = 0$，故所求特解为

$$x = A \cos kt$$

例3. 已知曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的法线与 x 轴交点为 Q 且线段 PQ 被 y 轴平分，求其满足的微分方程 .

解: 如图所示，点 $P(x,y)$ 处的法线方程为

$$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$$



令 $Y=0$，得 Q 点的横坐标

$$X=x+yy'$$

$$\therefore \quad x+yy'=-x,$$ 即

$$yy'+2x=0,$$

第二节 一阶微分方程

变量可分离方程

可化为变量可分离的方程

一阶线性微分方程

伯努利方程

全微分方程与积分因子

一、 变量可分离方程

变量可分离方程: $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)$$

求解方法: 当 **$g(y)\neq 0$** 分离变量 $$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=f(x)\mathrm{d}x \qquad ①$$

两边积分, 得 $$\underbrace{\int\frac{1}{g(y)}\mathrm{d}y}_{G(y)}=\underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{F(x)}$$

则有 $$G(y)=F(x)+C \qquad ②$$

由②确定的隐函数 **$y=\Phi(x, C)$** 是①的解.

若**$y=\Phi(x,C)$**能显化, 则称**$y=\Phi(x,C)$**为显式通解.

否则称②为方程①的隐式通解.

若 $g(y_0)=0$ 则 $y=y_0$ 是原方程的解.

例5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解: 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

注: 在求解过程中每一步不一定是同解变形, 因此可能增、减解.

两边积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln|y|=x^3+C_1$

或

$$\boxed{\ln|y|=x^3+\ln C}$$

(C 为任意的非0常数)

即 $y=\pm e^{x^3+C_1}$

令 $C=\pm e^{C_1}$

$y=C\,e^{x^3}$

显然 $y=0$为方程解, 通解为 $y=C\,e^{x^3}$

(C 为任意常数)

例5. 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解.

解: 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=3x^2\,\mathrm{d}x$

注: 在求解过程中每一步不一定是同解变形, 因此可能增、减解.

两边积分 $\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 3x^2\,\mathrm{d}x$

得 $\ln y = x^3+\ln C$

即 $y=e^{x^3+\ln C}$

$y=C\,e^{x^3}$ （C 为任意的非0常数）

显然 $y=0$ 为方程解, 通解为 $y=C\,e^{x^3}$ （C 为任意常数）

注： 由于对数真数的绝对值可去掉，所以以后不再写

注： 若积分出现对数，任意常数写成lnC

例6. 设降落伞从跳伞塔下落后所受空气阻力与速度成正比, 并设降落伞离开跳伞塔时($t = 0$) 速度为0, 求降落伞下落速度与时间的函数关系.

解: 根据牛顿第二定律列方程 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv$

初始条件为 $v\big|_{t=0} = 0$

对方程分离变量, 然后积分 : $\int \frac{\mathrm{d}v}{mg - kv} = \int \frac{\mathrm{d}t}{m}$

得 $-\frac{1}{k}\ln(mg - kv) = \frac{t}{m} + C$ (此处 $mg - kv > 0$)

利用初始条件, 得 $C = -\frac{1}{k}\ln(mg)$

代入上式后化简, 得特解 $v = \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$

t 足够大时

$v \approx \frac{mg}{k}$

二、可化为变量可分离的方程

1. 齐次方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程叫做齐次方程.

解法: 令 $u=\dfrac{y}{x}$ 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$

分离变量: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 可能丢解!

两边积分, 得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}+\ln C$

积分后再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u, 便得原方程的通解.

例. 解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + x u'$, 代入原方程得

$$u + x u' = u + \tan u$$

分离变量 $\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分 $\int \frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$

得 $\ln\sin u = \ln x + \ln C$, 即 $\sin u = C x$

故原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x} = C x$ (C 为任意常数)

($y = k\pi x$ 也是方程的解,当 $C = 0$ 时可给出该解)

例. 解微分方程 $(y^2-2xy)\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0.$

解: 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，则有

$$u+xu'=2u-u^2,$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 即 $\left(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u}\right)\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $\ln\dfrac{u-1}{u}=-\ln x+\ln C,$ 即 $\dfrac{x(u-1)}{u}=C,$

代回原变量得通解 $x(y-x)=Cy,$ $(C$ 为任意常数$)$

注: 显然 $x=0$(变换丢失), $y=0$, $y=x$ (变换后方程分离变量时丢失)也是原方程的解, 但在求解过程中丢失了.

内容小结

1. 概念　微分方程; 阶; 定解条件; 解;通解;　特解

2. 可分离变量方程的求解方法:分离变量后积分;

3. 解微分方程应用题的方法和步骤

(1) 找出规律列方程.

常用的方法:

1) 根据几何关系列方程(如: 例1 , 例 4)

2) 根据物理规律列方程 (如: 例2 , 例 6)

3) 根据微量分析平衡关系列方程

(2) 利用反映事物个性的特殊状态确定定解条件.

(3) 求通解, 并根据定解条件确定特解.