第二节　一阶微分方程

变量可分离方程

可化为变量可分离的方程

★　一阶线性微分方程

伯努利方程

全微分方程与积分因子

二、可化为变量可分离的方程

1. 齐次方程

形如 $\dfrac{dy}{dx}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程叫做齐次方程.

解法: 令 $u=\dfrac{y}{x}$ 则 $y=ux$, $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

代入原方程得 $u+x\dfrac{du}{dx}=\phi(u)$

分离变量: $\dfrac{du}{\phi(u)-u}=\dfrac{dx}{x}$ 可能丢解!

两边积分, 得 $\displaystyle\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}+\ln C$

积分后再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 u, 便得原方程的通解.

例1. 解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$.

解: 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + x u'$, 代入原方程得

$$u + x u' = u + \tan u$$

分离变量 $$\frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分 $$\int\frac{\cos u}{\sin u}\,\mathrm{d}u = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

得 $\ln\sin u = \ln x + \ln C$, 即 $\sin u = C\,x$

故原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x} = C\,x$ (C 为任意常数)

($y = k\pi x$ 也是方程的解,当 $C = 0$ 时可给出该解)

例2. 解微分方程 $(y^2-2xy)\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=0.$

解: 方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2\dfrac{y}{x}-(\dfrac{y}{x})^2$ 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则有

$$u+xu'=2u-u^2,$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2-u}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$ 即 $(\dfrac{1}{u-1}-\dfrac{1}{u})\mathrm{d}u=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

积分得 $\ln\dfrac{u-1}{u}=-\ln x+\ln C,$ 即 $\dfrac{x(u-1)}{u}=C,$

代回原变量得通解 $x(y-x)=Cy,$ (C 为任意常数)

注: 显然 $x=0$(变换丢失), $y=0$, $y=x$ (变换后方程分离变量时丢失)也是原方程的解, 但在求解过程中丢失了.

2. 准齐次型方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a\,x+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

$(a^2+a_1^2\neq 0)$

$(b^2+b_1^2\neq 0)$

$(c^2+c_1^2\neq 0)$

(1) 当 $\dfrac{a_1}{a}\neq\dfrac{b_1}{b}$ 时,作变换 $x=X+h,\ y=Y+k$, (**h, k** 为待定常数), 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y$, 原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{a\,X+bY+a\,h+b\,k+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}\right)$$

令 $\begin{cases} a\,h+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$, 解出 h, k

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=f\left(\frac{a\,X+bY}{a_1X+b_1Y}\right)=f\left(\frac{a+b\dfrac{Y}{X}}{a_1+b_1\dfrac{Y}{X}}\right)$$

(齐次方程)

求出其解后，将 $X=x-h, Y=y-k$ 代入，即得原方程的解.

(2) 当 $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda$ 时,原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\right)$$

令 $v=ax+by$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+bf\left(\frac{v+c}{\lambda v+c_1}\right)$$ (可分离变量方程)

例3. 求解 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2} = -5 \end{cases}$ $x = X + h,\ y = Y + k,$

解: 令 $\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases}$ 得 $h=1, k=-5$

令 $x = X + 1,\ y = Y - 5$

得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $Y = X\,u$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{dX} = X\dfrac{\mathrm{d}u}{dX} + u$

$$X\frac{\mathrm{d}u}{dX} + u = \frac{1+u}{1-u}$$

$$X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

例3. 求解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x-y-6}$ $\quad y\big|_{x=2}=-5$

$$X\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}X}=\frac{1+u^2}{1-u} \qquad \frac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}X}{X}$$

积分得

$$\arctan u-\tfrac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln C X$$

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln C(x-1)$$

利用 $y\big|_{x=2}=-5$ 得 $C=1$,

故所求特解为

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

三、一阶线性微分方程

一阶线性微分方程标准形式: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$ **(1)**

若 $Q(x)\equiv 0$, 称其为方程 (1) 对应的齐次方程;

若 $Q(x)\not\equiv 0$, 称方程 (1) 为非齐次方程.

1. 解齐次方程

$$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$$

分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln C$

故通解为 $\boxed{y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}$

例1. 解微分方程 $\frac{dy}{dx}-2xy=0$

解: $y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

$=Ce^{-\int(-2x)\,\mathrm{d}x}$

$=Ce^{\int 2x\,\mathrm{d}x}$

$=Ce^{x^2}$

原方程的解为 $y=Ce^{x^2}$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$ $\qquad y=Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \Rightarrow y=C\,e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x)=C(x)e^{-\int P(x)dx}$,

$$y'=C'(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}+C(x)\left(e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\right)'$$

将之代回原方程得

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}+C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}(-P(x))+P(x)C(x)\left(e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\right)=Q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}=Q(x)$$

$$C'(x)=Q(x)\cdot\ e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \Rightarrow y=Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x)=C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$,

(2) $C'(x)=Q(x)\cdot e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$

(3) $C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}dx+C$

(4) $y=C(x)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$

$$=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}dx+C\right)e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

2. 解非齐次方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用**常数变易法**：作变换 $y(x)=C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，

原方程的通解

即 $$\boxed{y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]}$$

$$y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

对应齐次方程通解 $y=\boxed{C}e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

例4. 解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$

解: $y= e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)\, e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$P(x)=-\frac{2}{x+1};\ Q(x)=(x+1)^{\frac{5}{2}}$$

$$y=e^{\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}e^{-\int\frac{2}{x+1}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\int(x+1)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=(x+1)^2\left[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C\right]$$

即得原方程通解

四、伯努利 (Bernoulli)方程

伯努利方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$

解法: ① 方程两边同除y^n, 得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$$

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+P(x)z=Q(x)$$

② 令 $z=y^{1-n}$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$ (线性方程)

③ 求出此方程通解

④ 换回原变量即得伯努利方程的通解.

例5. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: $y^{-2}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y^{-1}}{x}=a(\ln x) \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}y^{-1}}{\mathrm{d}x}-\dfrac{y^{-1}}{x}=-a\ln x$

令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为 $z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=x\left[\int\frac{-a\ln x}{x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$

五、全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

则称 $$P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0 \qquad ①$$

为全微分方程 (又叫做恰当方程) .

判别: P, Q 在某单连通域D内有连续一阶偏导数, 则

① 为全微分方程 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\in D$

求解步骤:

1. 求原函数 $u(x,y)$　　方法1　凑微分法;

　方法2　利用积分与路径无关的条件.

2. 由 $\mathrm{d}u=0$ 知通解为 $u(x,y)=C$.

例5. 求解

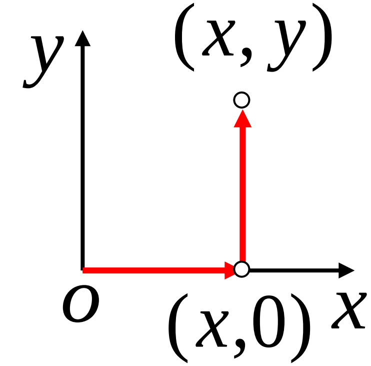
$$(5x^4+3xy^2-y^3)\,\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y=0$$

解: 因为 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，故这是全微分方程.

取 $x_0=0,\ y_0=0,$ 则有

$$u(x,y)=\int_0^x 5x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(3x^2y-3xy^2+y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3$$



因此方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C$$

例6. 求解 $(x+\frac{y}{x^2})\mathrm{d}x-\frac{1}{x}\mathrm{d}y=0$

解: $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$,

$\therefore$ 这是一个全微分方程.

用凑微分法求通解.

将方程改写为

$$x\,\mathrm{d}x-\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}=0$$

即 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2)-\mathrm{d}(\frac{y}{x})=0,$

或 $\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x})=0$

故原方程的通解为 $\frac{1}{2}x^2-\frac{y}{x}=C$

思考: 如何解方程

$$(x^3+y)\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0\,?$$

这不是一个全微分方程,

但若在方程两边同乘 $\frac{1}{x^2}$,

就化成全微分方程.

积分因子法

对于微分方程

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

当 $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 时, 它不是全微分方程.

与原方程同解?
会丢掉使积分因子为0或无意义的解，不影响通解

若存在连续可微函数 $\mu = \mu(x,y) \neq 0$, 使

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

为全微分方程, 则称 $\mu(x,y)$为原方程的积分因子.

在简单情况下, 可凭观察和经验根据微分倒推式得到积分因子.

常用微分倒推公式:

1) $\mathrm{d}x \pm \mathrm{d}y = \mathrm{d}(\,x \pm y\,)$

2) $x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\,xy\,)$

3) $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\,\frac{1}{2}(x^2 + y^2))$

4) $$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}(\,\frac{x}{y}\,)$$

5) $$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2} = \mathrm{d}(\,\frac{-y}{x}\,)$$

6) $$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{xy} = \mathrm{d}(\,\ln\frac{x}{y}\,)$$

7) $$\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{x^2 + y^2} = \mathrm{d}(\,\arctan\frac{x}{y}\,)$$

8) $$\frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \mathrm{d}(\,\sqrt{x^2 + y^2}\,)$$

积分因子不一定唯一.

例如, 对 $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = 0$

可取 $\mu = \frac{1}{y^2}$, $\mu = \frac{1}{x^2}$,

$\mu = \frac{1}{xy}$, $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$

内容小结

1. 一阶线性方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

方法1　先解齐次方程，再用常数变易法.

方法2　用通解公式

$$y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

2. 伯努利方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad(n\neq 0,1)$

令 $u=y^{\overset{1-n}{\cancel{1-\alpha}}}$， 化为线性方程求解.