第八节　多元函数的极值

8.1　多元函数的极值及最大值、最小值

8.2　条件极值　拉格朗日乘数法

一、问题的提出

引例: 某商店卖两种牌子的果汁, 本地牌子每瓶进价1元, 外地牌子每瓶进价1.2元. 店主估计, 如果本地牌子的每瓶卖x元,外地牌子的每瓶卖y元, 则每天可卖出$70-5x+4y$瓶本地牌子的果汁, $80+6x-7y$瓶外地牌子的果汁. 问: 店主每天以什么价格卖两种牌子的果汁可取得最大收益?

每天的收益为

$$f(x,y)=(x-1)(70-5x+4y)+(y-1.2)(80+6x-7y).$$

求最大收益, 即求二元函数的最大值.

一元函数$y=f(x)$极值

(1) $x\in D$

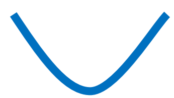
(2) 极值可疑点 $\begin{cases} f'(x_i)=0\ (\text{驻点}) \\ f'(x_j)=\text{不存在} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x_{i1}, x_{i2}, \cdots \\ x_{j1}, x_{j2}, \cdots \end{matrix}$

(3) 判别法

(1) 第一充分条件

$x<x_0$时，$f'(x)<0$

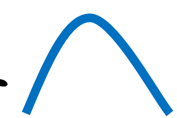
$x>x_0$时，$f'(x)>0$



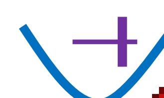
$\Longrightarrow f(x_0)$为极小值

(2) 第二充分条件

$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)<0 \Longrightarrow f(x_0)$为极大值



$f'(x_0)=0,\ f''(x_0)>0 \Longrightarrow f(x_0)$为极小值



8.1 多元函数的极值及应用

定义: 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有

$$f(x,y)\le f(x_0,y_0)\quad (\text{或 } f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$$

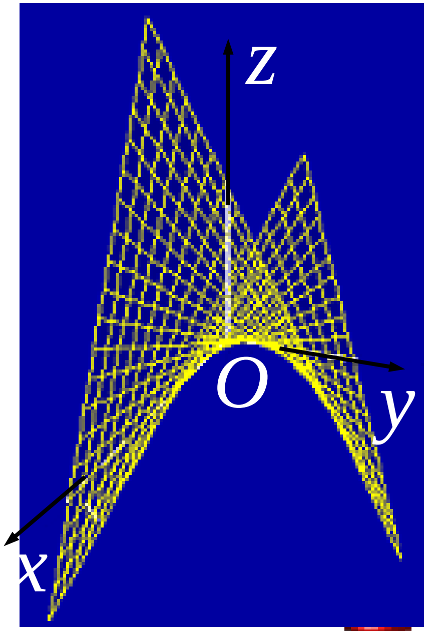
则称函数在该点取得**极大值(极小值)**. 极大值和极小值统称为**极值**, 使函数取得极值的点称为**极值点**.

例如：

$z=3x^2+4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;

$z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 (0,0) 有极大值;

$z=xy$ 在点 (0,0) 无极值.



定理1 (必要条件) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数，且在该点取得极值，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\ f'_y(x_0,y_0)=0$$

证: 不妨设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极大值，故

在 (x_0,y_0) 的某去心邻域内有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$.

特别地，固定 $y=y_0$，则有 $f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$.

即 $z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 取得极大值.

$z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取得极大值.

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

定理1 (必要条件) 函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值, 则有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0,\ f'_y(x_0, y_0) = 0$$

说明: 使得所有一阶偏导数都为 0 的点称为**驻点**.

但驻点不一定是极值点.

例如, $z = xy$ 有驻点(0, 0), 但在该点不取极值.

问题：在什么情况下，驻点是极值点?

定理2 (充分条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0,y_0)=0,\ f_y(x_0,y_0)=0$$

令 $A=f_{xx}(x_0,y_0),\ B=f_{xy}(x_0,y_0),\ C=f_{yy}(x_0,y_0)$

则: 1) 当$AC-B^2>0$时, 点(x_0,y_0)是极值点,

$$\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$$

2) 当 $AC-B^2<0$时, 没有极值.

3) 当 $AC-B^2=0$时, 不能确定, 需另行讨论.

求函数 $z = f(x, y)$ 的极值的一般步骤:

1. 求定义域，解方程组 $f_x(x,y)=0$，$f_y(x,y)=0$ 求出实数解，得驻点;

2. 对每一个驻点 (x_0, y_0)，求二阶偏导数的值 ***A*, *B*, *C***;

3. 定出 $AC - B^2$ 的符号，再判定是否有极值.

例1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解： 第一步 定义域.

第二步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \Rightarrow x_1=1,\ x_2=-3 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \Rightarrow y_1=0,\ y_2=2 \end{cases}$

得驻点: **(1, 0)，(1, 2)，(–3, 0)，(–3, 2)**.

第三步 判别. 求二阶偏导数

$$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A},\quad \underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B},\quad \underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$$

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=12\times 6>0,\ A>0,$$

$\therefore f(1,0)=-5$ 为极小值;

在点(1,2) 处 $A=12, B=0, C=-6$

$AC-B^2=12\times(-6)<0, \therefore f(1,2)$ 不是极值;

在点(–3,0) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$AC-B^2=-12\times 6<0, \therefore f(-3,0)$ 不是极值;

在点(–3,2) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$AC-B^2=-12\times(-6)>0, A<0,$

$\therefore f(-3,2)=31$ 为极大值.

$f_{xx}(x,y)=6x+6,\ f_{xy}(x,y)=0,\ f_{yy}(x,y)=-6y+6$

A B C

例2 求由方程 $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$ 确定的函数 $z=f(x, y)$ 极值.

解 将方程两边分别对 x, y 求偏导,

$$\begin{cases} 2x+2z\cdot z'_x-2-4z'_x=0 \\ 2y+2z\cdot z'_y+2-4z'_y=0 \end{cases} \Longrightarrow \text{驻点} P(1,-1)$$

将上述方程组两边再分别对 x, y 求偏导,

$$A=z''_{xx}|_P=\frac{1}{2-z}, \quad B=z''_{xy}|_P=0, \quad C=z''_{yy}|_P=\frac{1}{2-z},$$

$$AC-B^2=\frac{1}{(2-z)^2}>0 \quad (z\neq 2)$$

因此, 函数在 P 处有极值.

例2 求由方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$确定的函数**$z=f(x, y)$极值.**

将 $P(1,-1)$ 代入原方程，得到 $z_1=-2$, $z_2=6$

$$A=z''_{xx}|_P=\frac{1}{2-z},\quad B=z''_{xy}|_P=0,\quad C=z''_{yy}|_P=\frac{1}{2-z},$$

当 $z_1=-2$时，$A=\frac{1}{4}>0$，所以$z=f(1,-1)=-2$为极小值.

当 $z_1=6$ 时，$A=-\frac{1}{4}<0$，所以 $z=f(1,-1)=6$为极大值.

2. 应用——最值问题

依据

函数 f 在有界闭域上连续

$\Downarrow$

函数 f 在闭域上可达到最值

最值可疑点 $\begin{cases} \text{驻点} \\ \text{边界上的最值点} \end{cases}$

特别, 当区域内部最值存在, 且只有一个极值点 P 时,

$f(P)$ 为极小(大) 值 $\Longrightarrow$ $f(P)$ 为最小(大) 值

例3. 某厂要用铁板做一个体积为2m^3的有盖长方体水箱，问当长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省？

法一: 设水箱长,宽分别为 x , y m ,则高为 $\dfrac{2}{xy}$ m,

则水箱所用材料的面积为

$$A = 2\left(xy + y\cdot\frac{2}{xy} + x\cdot\frac{2}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}\right) \quad \begin{pmatrix} x>0 \\ y>0 \end{pmatrix}$$

令 $\begin{cases} A_x = 2\left(y - \dfrac{2}{x^2}\right) = 0 \\ A_y = 2\left(x - \dfrac{2}{y^2}\right) = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$

高为 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

8.2　条件极值

极值问题 $\begin{cases} \text{无条件极值：对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值：对自变量除定义域限制外，还有其它条件限制} \end{cases}$

条件极值的求法:

方法1　代入法. 例如，

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下，求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

$$\Big\Downarrow \text{转化} \quad \text{从条件 } \varphi(x,y)=0 \text{ 中解出 } y=\psi(x)$$

求一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的无条件极值问题

方法2 拉格朗日乘数法. 例如,

在条件$\varphi(x,y)=0$下, 求函数$z=f(x,y)$的极值.

如方法 1 所述，设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数 $y=\psi(x)$,

则问题等价于一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的极值问题，故

极值点必满足 $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 故有 $f_x-f_y\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记 $\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$ 极值点必满足 $$\begin{cases} f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

在条件$\varphi(x,y)=0$下，求函数$z=f(x,y)$的极值.

目标函数

极值点必满足 $\begin{cases} f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$

约束条件

引入辅助函数 $\boxed{F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)}$ （λ为参数）

则极值点满足: $\begin{cases} F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ F_\lambda=\varphi=0 \end{cases}$

辅助函数F 称为**拉格朗日(Lagrange)函数**.利用拉格朗日函数求极值的方法称为**拉格朗日乘数法.**

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如，求函数 $u=f(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$, $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值.

设 $F=f(x,y,z)+\lambda_1\varphi(x,y,z)+\lambda_2\psi(x,y,z)$

解方程组
$$\begin{cases} F_x=f_x+\lambda_1\varphi_x+\lambda_2\psi_x=0 \\ F_y=f_y+\lambda_1\varphi_y+\lambda_2\psi_y=0 \\ F_z=f_z+\lambda_1\varphi_z+\lambda_2\psi_z=0 \\ F_{\lambda_1}=\varphi=0 \\ F_{\lambda_2}=\psi=0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点.

例5 将正数12分成三个正数x, y, z之和, 使得$u=x^3y^2z$最大.

解 令 $F = x^3y^2z + \lambda(x+y+z-12)$

$$\begin{cases} F_x = 3x^2y^2z + \lambda = 0 \\ F_y = 2x^3yz + \lambda = 0 \\ F_z = x^3y^2 + \lambda = 0 \\ F_\lambda = x + y + z - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点}(6, 4, 2)$$

唯一解即是最大值点.

$$\Rightarrow u_{\max} = 6^3 \cdot 4^2 \cdot 2 = 6912.$$

例3. 某厂要用铁板做一个体积为2 m^3 的有盖长方体水箱，问当长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省?

法二: 设水箱长,宽，高分别为 x , y ， z m ,则

则水箱所用材料的面积为 $A = 2(xy + yz + zx)$

$$xyz = 2 \Rightarrow \varphi(x, y) = xyz - 2 = 0$$

$$F = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y) = 2(xy + yz + zx) + \lambda(xyz - 2)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} F_x = 2(y+z) + \lambda yz = 0 \Rightarrow -\lambda x yz = 2(y+z)x \\ F_y = 2(x+z) + \lambda xz = 0 \Rightarrow -\lambda x y z = 2(x+y)y \\ F_z = 2(y+x) + \lambda xy = 0 \Rightarrow -\lambda xy z = 2(y+x)z \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = z \\ F_\lambda = xyz - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x = y = z = \sqrt[3]{2}$$

例3. 某厂要用铁板做一个体积为2 m^3的有盖长方体水箱，问当长、宽、高各取怎样的尺寸时, 才能使用料最省?

法二: 设水箱长,宽，高分别为 x , y ， z m ,则

则水箱所用材料的面积为 $A=2(xy+yz+zx)$

$$xyz=2 \Rightarrow \varphi(x,y)=xyz-2=0$$

$$F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=2(xy+yz+zx)+\lambda(xyz-2)$$

$$\Rightarrow x=y=z=\sqrt[3]{2}$$

根据实际问题可知最小值在定义域内应存在, 因此可断定此唯一驻点就是最小值点. 即当长、宽、高均为 $\sqrt[3]{2}$ 时, 水箱所用材料最省.

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x, y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值，

设拉格朗日函数 $F=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$

解方程组 $\begin{cases} F_x=f_x+\lambda\varphi_x=0 \\ F_y=f_y+\lambda\varphi_y=0 \\ F_\lambda=\varphi=0 \end{cases}$ 求驻点 .

3. 函数的最值问题

第一步 找目标函数，确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值