

第四节

高阶线性微分方程

高阶线性微分方程解的结构

二阶常系数线性齐次微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程

二、二阶常系数齐次线性微分方程

形式: $y'' + p y' + q y = 0$ (p, q 为常数) ①

因为 r 为常数时, 函数 e^{rx} 和它的导数只差常数因子, 所以令①的解为 $y = e^{rx}$ (r 为待定常数), 代入①得

$$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$$
$$\longrightarrow r^2 + pr + q = 0 \quad \text{②}$$

称②为微分方程①的**特征方程**, 其根称为**特征根**.

1. 当 $p^2 - 4q > 0$ 时, ②有两个相异实根 r_1, r_2 , 则微分方程有两个线性无关的特解: $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}$,

因此方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数}) \quad r^2 + pr + q = 0$$

2. 当 $p^2 - 4q = 0$ 时, 特征方程有两相等实根

$$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}, \text{ 则微分方程有一个特解 } y_1 = e^{r_1 x}.$$

设另一特解 $y_2 = y_1 u(x) = e^{r_1 x} u(x)$ ($u(x)$ 待定)

代入方程得:

$$e^{r_1 x} [(u'' + 2r_1 u' + r_1^2 u) + p(u' + r_1 u) + q u] = 0$$

$$u'' + (2r_1 + p)u' + (\underline{r_1^2 + pr_1 + q})u = 0$$

注意 r_1 是特征方程的重根

$$u'' = 0$$

取 $u = x$, 则得 $y_2 = x e^{r_1 x}$, 因此原方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$$

3. 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特征方程有一对共轭复根

$$r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \alpha - i\beta$$

这时原方程有两个复数解:

$$y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

利用解的叠加原理, 得原方程的线性无关特解:

$$\overline{y_1} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$\overline{y_2} = \frac{1}{2i}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

因此原方程的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

小结:

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征方程: $r^2 + pr + q = 0$, 特征根: r_1, r_2

特 征 根	通 解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i \beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

以上结论可推广到高阶常系数线性微分方程.

例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^2 - 2r - 3 = 0$,

特征根: $r_1 = -1, r_2 = 3$,

因此原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}$$

例2. 求解初值问题
$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{d x^2} + 2 \frac{d y}{d x} + s = 0 \\ \underline{y|_{x=0} = 4}, \quad \underline{\frac{d y}{d x} \Big|_{x=0} = -2} \end{cases}$$

解: 特征方程 $r^2 + 2r + 1 = 0$

有重根 $r_1 = r_2 = -1$,

因此原方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{-x}$

利用初始条件得 $C_1 = 4, \quad C_2 = 2$

于是所求初值问题的解为 $y = (4 + 2x) e^{-x}$

推广:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (a_k \text{ 均为常数})$$

特征方程: $r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n = 0$

若特征方程含 k 重实根 r , 则其通解中必含对应项

$$(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) e^{rx}$$

若特征方程含 k 重复根 $r = \alpha \pm i\beta$, 则其通解中必含对应项

$$e^{\alpha x} [(C_1 + C_2 x + \cdots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + \\ + (D_1 + D_2 x + \cdots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]$$

(以上 C_i, D_i 均为任意常数)

例4. 求方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

解: 特征方程 $r^4 - 2r^3 + 5r^2 = 0$,

特征根:

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_{3,4} = 1 \pm 2i$$

因此原方程通解为

$$y = C_1 + C_2 x + e^x (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)$$

例7. 解方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

解: 特征方程: $r^4 + 2r^2 + 1 = 0$

$$\text{即 } (r^2 + 1)^2 = 0$$

特征根为 $r_{1,2} = \pm i, \quad r_{3,4} = \pm i$

则方程通解 :

$$y = (C_1 + C_3 x) \cos x + (C_2 + C_4 x) \sin x$$

内容小结

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (p, q \text{ 为常数})$$

特征根: r_1, r_2

(1) 当 $r_1 \neq r_2$ 时, 通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$

(2) 当 $r_1 = r_2$ 时, 通解为 $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$

(3) 当 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ 时, 通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

可推广到高阶常系数线性齐次方程求通解.