2013 级本科高等数学（A、D）II 试卷(A)

评　分　标　准

一、完成下列各题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. $f(x,0)=(x^2+1)\arctan 1$，

$$f'_x(x,0)=2x\cdot\frac{\pi}{4},\ f'_x(1,0)=\frac{\pi}{2}.$$

2. $\varphi'_x(x,y)=f'_1(xy,\frac{y}{x})y+f'_2(xy,\frac{y}{x})\frac{-y}{x^2}$

$$\varphi'_x(1,1)=f'_1(1,1)-f'_2(1,1)=a-b.$$

3. $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}$，　$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}$，　$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$$

4. 法 1　利用区域及被积函数的轮换对称性

法 2　$\iint\limits_D|y-x|d\sigma=\iint\limits_{D_{下}}(x-y)d\sigma+\iint\limits_{D_{上}}(y-x)d\sigma$

$$=\int_0^1\left[\int_0^x(x-y)dy\right]dx+\int_0^1\left[\int_x^1(y-x)dy\right]dx$$

$$=\frac{1}{3}$$

5. 由 PQ 被 y 轴平分得 $Q(-x,0)$；由 $P(x,y)$ 处法线斜率 $k=-\frac{1}{y'}$，

法线方程为 $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$，令 $Y=0$ 得 $X_0=x+yy'$，

故 $Q(x+yy',0)$. 由此得到 $P(x,y)$ 满足的微分方程为

$$-x=x+yy'，即\quad 2x+yy'=0.$$

解得曲线方程为 $x^2+\frac{y^2}{2}=C$.

二、计算下列各题（共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

1. 补线 $L_1:\begin{cases} x=x \\ y=0 \end{cases}, x:0\to 2$，则有

$$I=\iint\limits_D (x+y)d\sigma-\int_{L_1}(e^x\sin y-xy)dx$$

$$=\iint\limits_D xd\sigma+\iint\limits_D yd\sigma-\int_0^2(e^x\sin 0-x\cdot 0)dx$$

$$=\overline{x}S_D+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2\cos\theta} r\sin\theta\cdot rdr\right]d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}$$

2. 补面 Σ_0： $z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$，取下侧. 则

$$I=2\iiint\limits_D (x+y+z)dV-\iint\limits_{\Sigma_0}(z^2+3x)dxdy$$

$$=2\iiint\limits_D xdV+2\iiint\limits_D ydV+2\iiint\limits_D zdV-\iint\limits_D (0^2+3x)(-dxdy)$$

$$=2\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^a r\cos\theta\cdot r^2\sin\theta dr\right]d\varphi\right\}d\theta+0$$

$$=2\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\sin^2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{a^4}{4}=\frac{\pi}{2}a^4.$$

$$=2\int_0^a zdz\iint\limits_{D_z}dxdy+3\iint\limits_D xdxdy=2\int_0^a z\cdot\pi(\sqrt{a^2-z^2})^2dz+0=\frac{\pi}{2}a^4$$

$$=2\iint\limits_D\left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} zdz\right]dxdy+3\iint\limits_D xdxdy=\iint\limits_D (a^2-x^2-y^2)dxdy+0$$

$$=a^2\iint\limits_D dxdy-\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=a^2\cdot\pi a^2-\frac{1}{2}\pi a^4=\frac{\pi}{2}a^4$$

3. (1) $R=1,\quad [-1,1)$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\ \ [-1,1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}\dfrac{-1}{x}\ln(1-x) & [-1,0)\cup(0,1)\\ 1 & x=0\end{cases}$$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n+1}=\frac{-1}{x}\ln(1-x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2\ln 2.$

4. 设三角形的三边长分别为x,y,z，则$2p=x+y+z$, 令

$$L=p(p-x)(p-y)(p-z)+\lambda(x+y+z-2p),$$

及

$$\begin{cases}L_x=p(p-y)(p-z)+\lambda=0\\ L_y=p(p-x)(p-z)+\lambda=0\\ L_z=p(p-x)(p-y)+\lambda=0\\ 2p=x+y+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=z\\ 2p=x+y+z\end{cases},$$

$\therefore\quad x=y=z=\dfrac{2p}{3}.$

$\because\quad p-x>0, p-y>0, (p-x)+(p-y)=z<p$ ，

故S为在该域上的最大值. 由于最大值在域上一定存在，驻点唯一，因此最大值在上述点处取得，且为

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}=\sqrt{p\frac{p}{3}\frac{p}{3}\frac{p}{3}}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

得分

三、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

说明：请将下列各题的答案填入下表内，否则不得分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	A	D	D	D	C	10	$8\pi a^4$	$-\dfrac{1}{2}$	$2e^x-x$