4.4 二阶常系数非齐次线性微分方程

形式： $y'' + py' + qy = f(x)$ （ p, q 为常数） ①

根据解的结构定理，其通解为

$$y = Y + y^*$$

齐次方程通解　非齐次方程特解

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式，

代入原方程比较两端表达式以确定待定系数 .

1. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

引例1. 求方程 $y''-2y'-3y=(x+1)e^x$ 的解.

解:

1. $r^2-2r-3=0 \quad \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=2$

齐次方程通解 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

2. $\lambda=1$ 不是特征方程的根.$(\lambda\neq-1,\lambda\neq2)$

设所求特解为 $y^*=(ax+b)e^x$

3. 代入方程:

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

引例2. 求方程 $y''-3y'+2y=(2x-1)e^x$ 的解.

解:

1. $r^2-3r+2=0 \quad \Rightarrow r_1=1,\ r_2=2$

齐次方程通解 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}$

2. $\lambda=1$ 是特征方程的单根. $(\lambda=r_1=1)$

设所求特解为 $y^*=x(ax+b)e^x$

3. 代入方程:

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

引例3. 求方程 $y''-4y'+4y=xe^{2x}$ **的解.**

解:

1. $r^2-4r+4=0 \quad \Rightarrow r_1=r_2=2$

齐次方程通解 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}$

2. $\lambda=2$ **是特征方程的2重根 .**$\left(\lambda=r_1=r_2=2\right)$

设所求特解为 $y^*=x^2(ax+b)e^{2x}$

3. **代入方程 :**

$y'' + py' + qy = f(x)$

1. $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

λ 为实数，$P_m(x)$ 为 **m** 次多项式.

设特解为 $y^* = e^{\lambda x} Q(x)$, 其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$$y^{*\prime} = e^{\lambda x}[\lambda Q(x) + Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime} = e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x) + 2\lambda Q'(x) + Q''(x)]$$

代入原方程，得

$$e^{\lambda x}[\underline{\lambda^2 Q(x)} + \underline{2\lambda Q'(x)} + \underline{Q''(x)}]$$
$$+ e^{\lambda x}[\underline{p\lambda Q(x)} + \underline{pQ'(x)}] + \underline{e^{\lambda x} qQ(x)} = e^{\lambda x} P_m(x)$$

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

1. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

$$y''+py'+qy=f(x)$$

λ 为实数，$P_m(x)$为 **m** 次多项式.

设特解为 $y^*=e^{\lambda x}Q(x)$, 其中$Q(x)$为待定多项式,

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]$$

代入原方程, 得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根, 即$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$, 则取 **Q (x)** 为 **m** 次待定系数多项式 $Q_m(x)$, 从而得到特解形式为 $y^*=e^{\lambda x}Q_m(x)$.

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(2) 若λ 是特征方程的单根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p\neq 0,$$

则 $Q'(x)$ 为 m 次多项式, 故特解形式为 $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$

(3) 若 λ 是特征方程的重根，即

$$\lambda^2+p\lambda+q=0,\quad 2\lambda+p=0,$$

则 $Q''(x)$ 是 m 次多项式,故特解形式为 $y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

小结 对方程①, 当λ 是特征方程的 k 重根 时,可设特解 $y^*=x^kQ_m(x)e^{\lambda x}\quad (k=0,1,2)$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

例1. 求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ **的一个特解.**

解: 特征方程为 $r^2 - 2r - 3 = 0$， $r_1 = -1$， $r_2 = 2$

$\lambda = 0$ 不是特征方程的根 .

设所求特解为 $y^* = ax + b$， 代入方程 :

$$(2\cdot 0 - 2)\, a + (-3)(ax + b) = 3x + 1$$

比较系数, 得

$$\begin{cases} -3a = 3 \\ -2a - 3b = 1 \end{cases} \longrightarrow a = -1,\ b = \frac{1}{3}$$

于是所求特解为 $y^* = -x + \dfrac{1}{3}$.

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x)$$

例2. 求方程 $y''-5y'+6y=\underline{x}e^{2x}$的通解.

解: 特征方程为 $r^2-5r+6=0$, $r_1=2$, $r_2=3$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

$\lambda=2$, 是特征方程的单根.

设非齐次方程特解为 $y^*=x(ax+b)e^{2x}$

代入方程得 $-2ax-b+2a=x$

比较系数, 得 $\begin{cases}-2a=1\\2a-b=0\end{cases} \longrightarrow a=-\frac{1}{2}, b=-1$

因此特解为 $y^*=x(-\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

所求通解为 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}-(\frac{1}{2}x^2+x)e^{2x}$.

2. $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

引例1. 求方程 $y''-y'-2y=e^x\cos 2x$ **的解.**

解:

1. $r^2-2r-3=0 \quad \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=2$

齐次方程通解 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$

2. $\lambda+\omega i=1+2i$ 不是特征方程的根 .

$(\lambda+\omega i\neq -1, \lambda+\omega i\neq 2)$

设所求特解为 $y^*=e^x(a\cos 2x+b\sin 2x)$

3. 代入方程：

2. $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

引例2. 求方程 $y''+4y=2\sin 2x$ **的解.**

解:

1. $r^2+4=0 \quad \Rightarrow r_1=-2i\,,\ r_2=2i$

齐次方程通解 $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$

2. $\lambda+\omega i=2i$ **是特征方程的单根 .**

$\left(\lambda+\omega i=r_2=2i\right)$

设所求特解为 $y^*=x\left(a\cos 2x+b\sin 2x\right)$

3. **代入方程 :**

2. $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

引例3. 求方程 $y''-y=(x+1)\sin x$ 的解.

解: **1.** $r^2-1=0 \quad \Rightarrow r_1=-1,\ r_2=1$

齐次方程通解 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$

2. $\lambda+\omega i=\ i$ 不是特征方程的根.

$(\lambda+\omega i\neq -1, \lambda+\omega i\neq 1)$

设所求特解为 $y^*=(ax+b)\cos x+(cx+d)\sin x$

3. 代入方程:

2. $f(x)=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$型

对非齐次方程

$$y''+py'+qy=e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x+\tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$$

$(p, q$ 为常数$)$

$\lambda+i\omega$**为特征方程的 *k* 重根 (*k* = 0, 1),则可设特解:**

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m\cos\omega x+\tilde{R}_m\sin\omega x]$$

其中 $m=\max\{n, l\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

例3. 求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解 .

解: 本题 $\lambda = 0,\ \omega = 2,\ P_l(x) = x,\ \tilde{P}_n(x) = 0,$

特征方程 $r^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow r_1 = -i\ ,\ \ r_2 = i$

$\lambda + \omega i = 2i$ 不是特征方程的根, 故设特解为

$$y^* = (a\,x + b)\cos 2x + (c\,x + d)\sin 2x$$

代入方程得

$$(-3a\,x - 3b + 4c)\cos 2x - (3c\,x + 3d + 4a)\sin 2x = x\cos 2x$$

比较系数 , 得 $\begin{cases} -3a = 1 \\ -3b + 4c = 0 \\ -3c = 0 \\ -3d + 4a = 0 \end{cases}$ $\quad \therefore\ \ a = \dfrac{-1}{3},\ \ d = \dfrac{4}{9}$

$b = c = 0$

于是求得一个特解 $y^* = \dfrac{-1}{3}x\cos 2x + \dfrac{4}{9}\sin 2x\ .$

例4. 求方程 $y''+9y=18\cos 3x-30\sin 3x$ 的通解.

解: 特征方程为 $r^2+9=0$, 其根为 $r_{1,2}=\pm 3i$

对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

$\lambda+\omega i=3i$ 为特征方程的单根,

设非齐次方程特解为 $y^*=x(a\cos 3x+b\sin 3x)$

代入方程: $\underline{6b}\cos 3x\underline{-6a}\sin 3x=\underline{18}\cos 3x\underline{-30}\sin 3x$

比较系数, 得 $a=5$, $b=3$,

因此特解为 $y^*=x(5\cos 3x+3\sin 3x)$

所求通解为

$$y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+x(5\cos 3x+3\sin 3x)$$

内容小结

1. $y'' + p\,y' + q\,y = P_m(x)\,e^{\lambda x}$

λ 为特征方程的 k (=0, 1, 2) 重根, 则设特解为

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$$

2. $y'' + p\,y' + q\,y = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x]$

$\lambda \pm i\omega$ 为特征方程的 k (=0, 1)重根, 则设特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m(x)\cos\omega x + \tilde{R}_m(x)\sin\omega x]$$

$$m = \max\{\,l\,,\,n\,\}$$

3. 上述结论也可推广到高阶方程的情形.