判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 敛散性

方法一：

若 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在，则无穷级数收敛.

若 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则无穷级数发散.

方法二：

$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则无穷级数发散.

第29讲

常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

比较审敛法

比值审敛法

根式审敛法

二、交错级数及其审敛法

三、绝对收敛与条件收敛

一、正项级数及其审敛法

若 $u_n \geq 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数 .

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$\{S_n\} = \{S_1, S_2, \cdots, S_n \cdots\}$ 单调递增,

$$\{S_n\} \begin{cases} \text{无上界，则 } \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \\ \text{有上界，则 } \lim\limits_{n\to\infty} S_n \text{ 存在，则 } \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \end{cases}$$

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 有界 .

证: “$\Longrightarrow$”

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$\{S_n\}$ 单调递增,

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 ,则 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在

则 $\{S_n\}$ 有界.

定理 1. 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\rightleftarrows$ 部分和序列 S_n $(n=1,2,\cdots)$ 有界 .

证: “$\Longleftarrow$”

$\because u_n \geq 0$, $\therefore$ 部分和数列 $\{S_n\}$ 单调递增,

又已知 $\{S_n\}$ 有界,

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且存在 $N \in Z^+$，对一切 $n > N$，有 $u_n \leq v_n$ **(常数 $k > 0$)**，则有

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

证（1）

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$\sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

$$\therefore S_n \leq \sigma_n$$

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且存在 $N \in Z^+$，对一切 $n > N$，有 $u_n \le v_n$ (常数 $k > 0$)，则有

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散．

证（1） $S_n \le \sigma_n$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则有 $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n$

$S_n \le \sigma$，又 $\because \{S_n\}$ 单调递增，

$\lim_{n\to\infty} S_n$ 存在，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛．

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数,

且存在 $N \in Z^{+}$, 对一切 $n > N$, 有 $u_n \le v_n$ **(常数 $k > 0$),** 则有

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

证（2）

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

$$\sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n$$

$$\therefore S_n \le \sigma_n$$

定理2 (比较审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且存在 $N \in Z^+$，对一切 $n > N$，有 $u_n \le v_n$ (常数 $k > 0$), 则有

(1) 若强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

(2) 若弱级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

证（2） $S_n \le \sigma_n$，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则有 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$，

因此 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散 .

例1. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ 的敛散性.

证: 因为

$$0 \le \sin\frac{\pi}{2^n} \le \frac{\pi}{2^n}$$

而级数 $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ 收敛

根据比较审敛法可知, 所给级数收敛 .

例2. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 发散 .

证:因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \ge \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1,2,\cdots)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散

根据比较审敛法可知, 所给级数发散 .

例3. 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ **(常数 $p>0$)的敛散性.**

解: 1) 若 $p\le 1$, 因为对一切 $n\in Z^+$,

$$\frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$$

而调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,

由比较审敛法可知 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散 .

例3. 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ **(常数 $p>0$)的敛散性.**

解: 1) 若 $p\le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散 .

$$S_n-1\le\int_1^n\frac{1}{x^p}dx$$

2) 若 $p>1$, $S_n=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$

$$x\in[1,2]\Rightarrow\int_1^2\frac{1}{2^p}dx\le\int_1^2\frac{1}{x^p}dx\Rightarrow\frac{1}{2^p}\le\int_1^2\frac{1}{x^p}dx$$

$$x\in[2,3]\Rightarrow\int_2^3\frac{1}{3^p}dx\le\int_2^3\frac{1}{x^p}dx\Rightarrow\frac{1}{3^p}\le\int_2^3\frac{1}{x^p}dx$$

$$\cdots$$

$$x\in[n-1,n]\Rightarrow\int_{n-1}^n\frac{1}{n^p}dx\le\int_{n-1}^n\frac{1}{x^p}dx\Rightarrow\frac{1}{n^p}\le\int_{n-1}^n\frac{1}{x^p}dx$$

例3. 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ **(常数 $p>0$) 的敛散性.**

解: 1) 若 $p\le 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散 .

$$\boxed{S_n - 1 \le \int_1^n \frac{1}{x^p}dx}$$

2) 若 $p>1$,

$$S_n \le 1+\int_1^n x^{-p}dx = 1+\frac{1}{1-p}x^{-p+1}\Big|_1^n$$

$$=1+\frac{1}{1-p}\left(n^{-p+1}-1\right)=1+\frac{1}{p-1}\left(1-n^{-p+1}\right)$$

$$\le 1+\frac{1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$$

例3. 讨论 p 级数 $1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$ **(常数 $p>0$) 的敛散性.**

解: 1) 若 $p\le 1,$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 发散 .

2) 若 $p>1,$

$$S_n \le \frac{p}{p-1}$$

$$S_n=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$ $\{S_n\}$单调递增

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, **p 级数收敛 .**

调和级数与 ***p* 级数**是两个常用的比较级数.

若存在$N \in Z^{+}$, 对一切$n \geq N$,

$$(1)\ \ u_n \geq \frac{1}{n},\ 则\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ 发散;$$

$$(2)\ \ u_n \leq \frac{1}{n^p}\ \ (p > 1),\ 则\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ 收敛.$$

定理3. (比较审敛法的极限形式) 设两正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

当 $0 < l < \infty$ 时, 两个级数同时收敛或发散 ;

证: 据极限定义, 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时,

$$\left| \frac{u_n}{v_n} - l \right| < \varepsilon \overset{\Delta}{=} \frac{l}{2} \qquad (l \neq \infty)$$

$$-\frac{l}{2} \le \frac{u_n}{v_n} - l \le \frac{l}{2} \Rightarrow \quad \frac{l}{2} v_n \le u_n \le \frac{3l}{2} v_n$$

由定理 2 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或同时发散 ;

例4. 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 的敛散性 .

解:

$$\boxed{\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}}$$

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{发散}.$$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ 发散 .

例5. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 的敛散性.

解:

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\ln[1+\frac{1}{n^2}]}{\frac{1}{n^2}}=1$$

$$\ln(1+\frac{1}{n^2})\sim\frac{1}{n^2}$$

$$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\text{收敛}.$$

根据比较审敛法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln[1+\frac{1}{n^2}]$ 收敛.

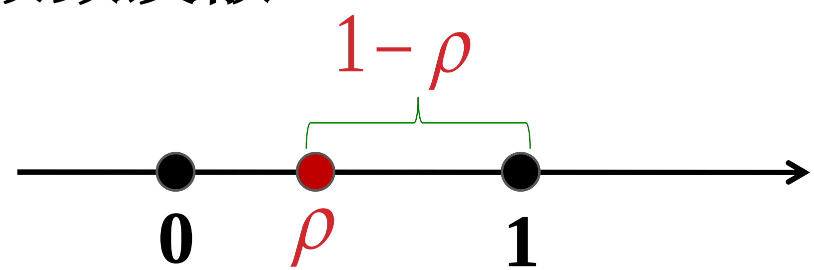
定理4 . 比值审敛法 (D’alembert 判别法)

设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;　　(3) 当 $\rho=1$ 时, 不确定.

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

证: (1) 当 $\rho<1$ 时,



$$取\ \varepsilon=\frac{1-\rho}{2}>0,\quad 由\ \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$$

知存在 $N\in Z^{+}$, 当 $n>N$ 时, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon=\dfrac{1-\rho}{2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\frac{1-\rho}{2}\triangleq r\quad<1\quad\Rightarrow u_{n+1}<ru_n\quad(n>N)$$

定理4 . 比值审敛法 (D'alembert 判别法)

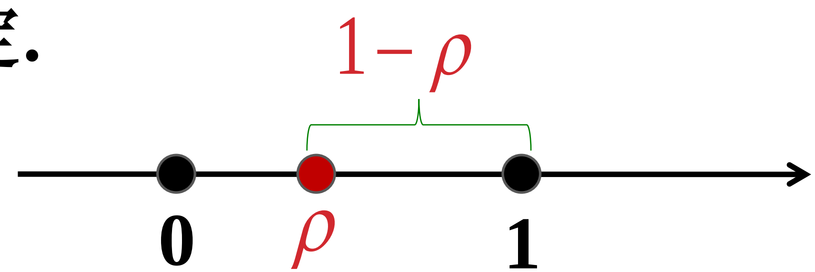
设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho=1$ 时, 不确定.

证: (1) 当 $\rho<1$ 时,



$$\Rightarrow u_{n+1}<ru_n \quad (n>N, r<1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&u_{N+2}<ru_{N+1}\\
&u_{N+3}<ru_{N+2}<r^2u_{N+1}\\
&u_{N+4}<ru_{N+3}<r^3u_{N+1}\\
&\cdots
\end{aligned}\right\}\Rightarrow
\begin{aligned}
&u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots<\\
&ru_{N+1}+r^2u_{N+1}+\ldots
\end{aligned}$$

定理4 . 比值审敛法 (D'alembert 判别法)

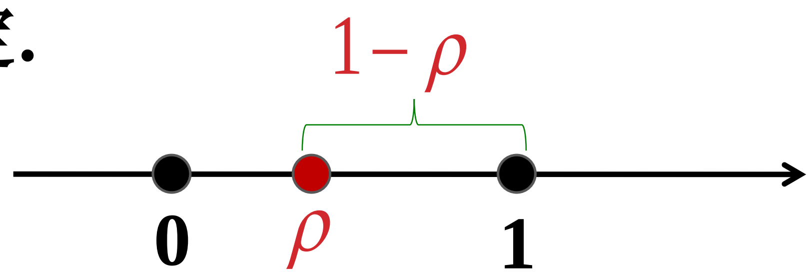
设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho=1$ 时, 不确定.

证: (1) 当 $\rho<1$ 时,



$$u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots<ru_{N+1}+r^2u_{N+1}+\ldots$$

$\because$ 级数 $ru_{N+1}+r^2u_{N+1}+\ldots$ 收敛， $\therefore u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots$ 收敛

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛.}$$

定理4 . 比值审敛法 (D'alembert 判别法)

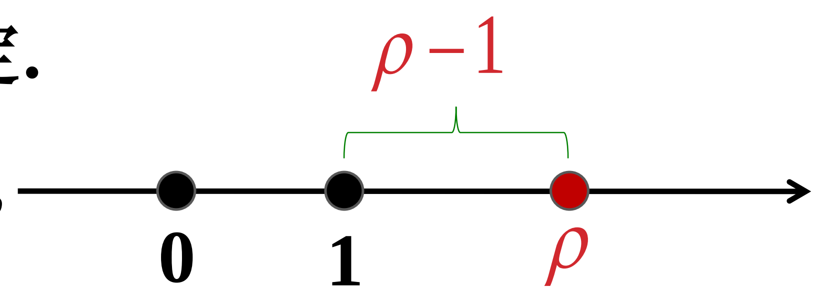
设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho=1$ 时, 不确定.

证: (2) $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时,



取 $\varepsilon=\dfrac{\rho-1}{2}>0$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho>1$

存在 $N\in Z^+$, 当 $n>N$ 时, $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon=\dfrac{\rho-1}{2}$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\frac{\rho-1}{2}\triangleq r>1\quad\Rightarrow u_{n+1}>ru_n\quad(n>N)$$

定理4 . 比值审敛法 (D’alembert 判别法)

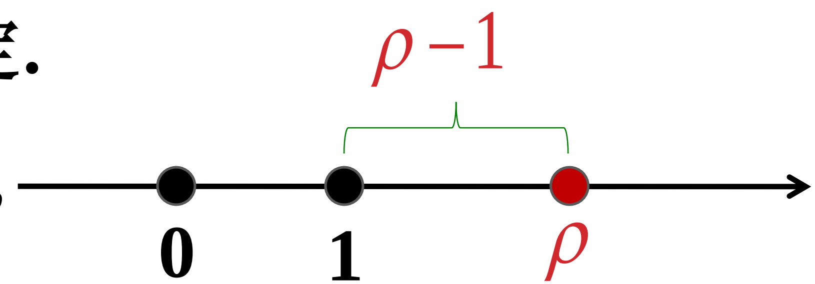
设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho=1$ 时, 不确定.

证: (2) $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时,



$$\frac{u_{n+1}}{u_n}>\rho-\frac{\rho-1}{2}\triangleq r>1 \quad\Rightarrow u_{n+1}>ru_n\ \ (n>N)$$

$$\left.\begin{aligned}
&u_{N+2}>ru_{N+1}\\
&u_{N+3}>ru_{N+2}>r^2u_{N+1}\\
&u_{N+4}>ru_{N+3}>r^3u_{N+1}\\
&\cdots
\end{aligned}\right\}\Rightarrow
\begin{aligned}
&u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots>\\
&ru_{N+1}+r^2u_{N+1}+\ldots
\end{aligned}$$

定理4 . 比值审敛法 (D'alembert 判别法)

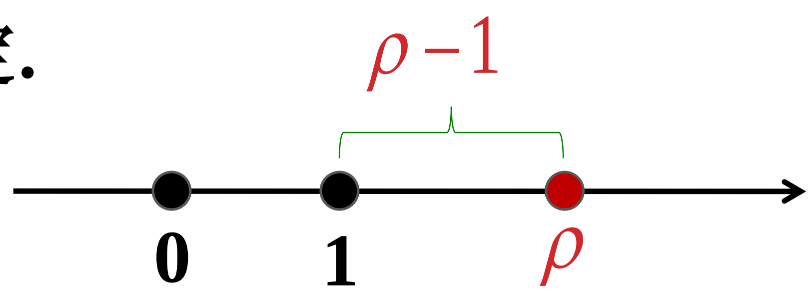
设 $\sum u_n$ 为正项级数, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$, 则

(1) 当 $\rho<1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho=1$ 时, 不确定.

证: (2) $\rho>1$ 或 $\rho=\infty$ 时,



$$u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots>ru_{N+1}+r^2u_{N+1}+\ldots$$

$\because$ 级数 $ru_{N+1}+r^2u_{N+1}+\ldots$ 发散， $\therefore u_{N+2}+u_{N+3}+\ldots$ 发散

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 发散.}$$

例6. 讨论级数敛散性 $(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^n}$. $(2)\sum_{n=1}^{\infty}n x^{n-1}\ (x>0)$

解 (1):

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2}{e}<1$$

根据定理4: 原级数收敛.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)x^n}{n x^{n-1}}=x$

根据定理4: 当$0<x<1$时, **级数收敛 ;**

当$x>1$时, **级数发散 ;**

当$x=1$时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n$ 发散.

定理5. 根值审敛法 (Cauchy判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 且 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, 则

(1) 当 $\rho < 1$ 时, 级数收敛 ;

(2) 当 $\rho > 1$ 时, 级数发散 .

(3) 当 $\rho = 1$ 时, 不确定.

例7. 判断级数敛散性 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

解: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

由根值判别法可知该级数收敛 .

内容小结

对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$