第34讲　傅里叶级数

一　三角级数、三角函数系的正交性

二　函数展开成傅里叶级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ **(谐波函数)**

(A为振幅, ω为角频率, φ为初相)

复杂的周期运动：$y = A_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underline{A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)}$

(谐波迭加)

$$\underline{A_n \sin\varphi_n} \cos n\underline{\omega t} + \underline{A_n \cos\varphi_n} \sin n\underline{\omega t}$$

令 $\dfrac{a_0}{2} = A_0,\ a_n = A_n \sin\varphi_n,\ b_n = A_n \cos\varphi_n,\ \omega t = x$

得函数项级数 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

称上述形式的级数为三角级数.

背景

$f(x)$可否展成 $\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

$\dfrac{a_0}{2}$ 直流部分

$a_1\cos x+b_1\sin x$ 一次谐波

若可展成，如何确定系数？

定理1 组成三角级数的函数系

$$1,\cos\frac{\pi}{l}x,\sin\frac{\pi}{l}x,\cos\frac{2\pi}{l}x,\sin\frac{2\pi}{l}x,\cdots,\cos\frac{n\pi}{l}x,\sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots$$

在 $[-l,l]$ 上 **正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-l,l]$ 上的积分等于 0 . 两个相同的函数的乘积在 $[-l,l]$ 上的积分不等于 0 .**

证：$\int_{-l}^{l}1\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{-l}^{l}=0 \qquad n=1,2,\cdots$

$$\int_{-l}^{l}1\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx=-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}x\Big|_{-l}^{l}=0 \qquad n=1,2,\cdots$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{(k+n)\pi}{l}xdx+\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{(k-n)\pi}{l}xdx$$

定理1 组成三角级数的函数系

$$1,\cos\frac{\pi}{l}x,\sin\frac{\pi}{l}x,\cos\frac{2\pi}{l}x,\sin\frac{2\pi}{l}x,\cdots,\cos\frac{n\pi}{l}x,\sin\frac{n\pi}{l}x,\cdots$$

在 $[-l,l]$ 上 正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-l,l]$ 上的积分等于 **0**.两个相同的函数的乘积在 $[-l,l]$ 上的积分不等于 **0**.

证：
$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{k+n}{l}\pi x+\cos\frac{k-n}{l}\pi x\right]\mathrm{d}x$$

$(k\neq n)$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=-\tfrac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left[\cos\frac{k+n}{l}\pi x-\cos\frac{k-n}{l}\pi x\right]\mathrm{d}x$$

$$=0\quad k\neq n$$

定理1 组成三角级数的函数系

$$1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \cdots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \cdots$$

在 $[-l, l]$ 上 正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-l, l]$ 上的积分等于 0 .两个相同的函数的乘积在 $[-l, l]$ 上的积分不等于 0 .

证： $\int_{-l}^{l} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x = 2l$ $\quad \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \int_{-l}^{l} \frac{1+\cos\frac{2n\pi}{l}x}{2}\mathrm{d}x$

$$\int_{-l}^{l} \sin^2\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \int_{-l}^{l} \frac{1-\cos\frac{2n\pi}{l}x}{2}\mathrm{d}x = l \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

二、函数展开成傅里叶级数

定理2. 设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right) \qquad ①$$

右端级数可逐项积分，则有

$$\left\{\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)\end{aligned}\right. \qquad ②$$

证： 由定理条件,对①在 $[-l,l]$ 逐项积分，得

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\right)$$

$$\therefore\quad a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)$$

$$\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x+\ b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{k\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\right.$$

$$=a_k\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$ （利用正交性）

$$\therefore\quad a_k=\tfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\quad(k=0,1,\cdots)$$

类似地, 用 sin*kπx/l* 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$b_k=\tfrac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\quad(k=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \qquad ①$$

T=2π

$$\begin{cases} \boxed{a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x} \\ a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

由公式 ② 确定的 a_n , b_n称为函数 $f(x)$的**傅里叶系数**； 以 $f(x)$的傅里叶系数为系数的三角级数 ① 称为 $f(x)$ 的**傅里叶级数**.

傅里叶，J.-B.-J.

定理3 (收敛定理, 展开定理) 设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数, 并满足狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内至多有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛 , 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为间断点} \end{cases}\qquad =\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$$

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数 . (证明略)

注意: 函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

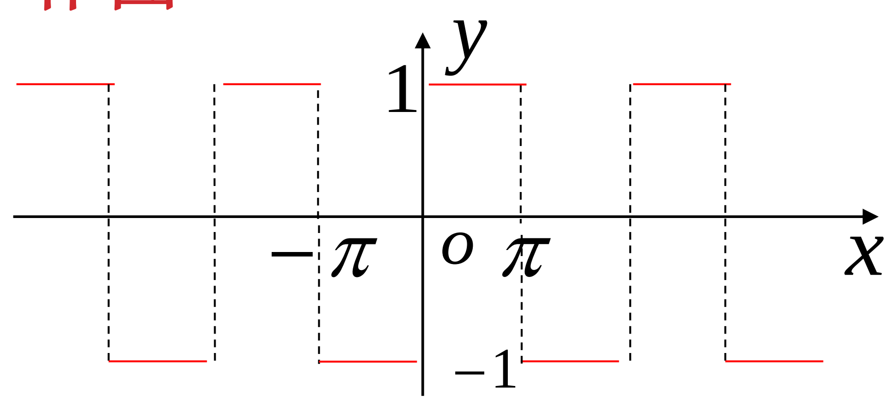

狄利克雷, P.G.L.

例1.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解:（1）作图



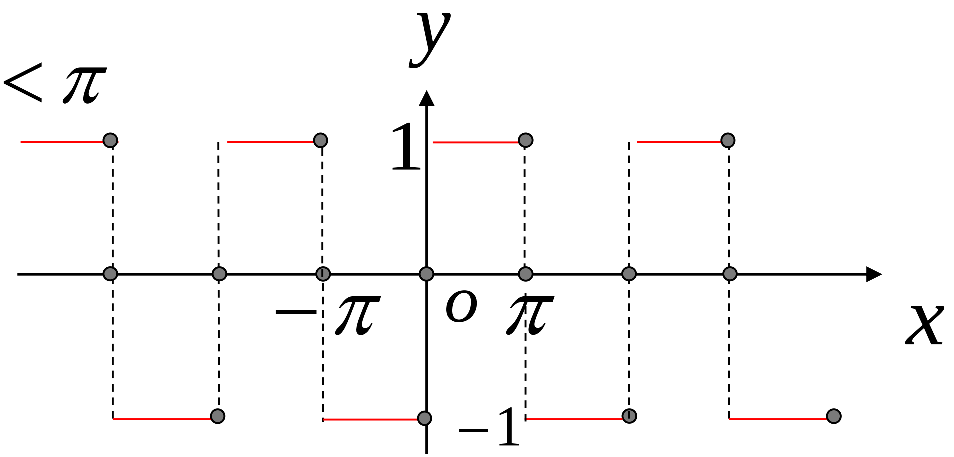
$f(x)$ 在 $x = n\pi \ (n \in Z)$ **处间断**

函数满足 Dirichlet 条件:

例1.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.



解：（2）

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=0$$

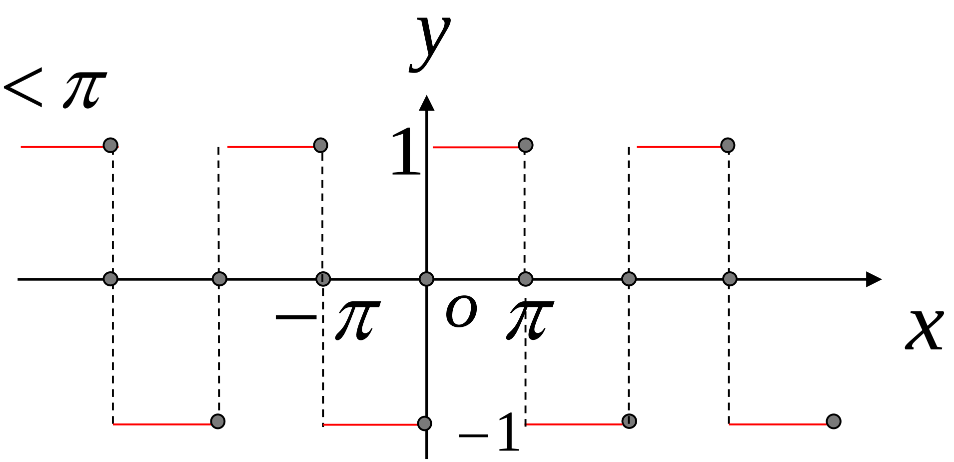
$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}(nx)=-\frac{2}{n\pi}\cos nx\,\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

例1.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi\end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解：（2）

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

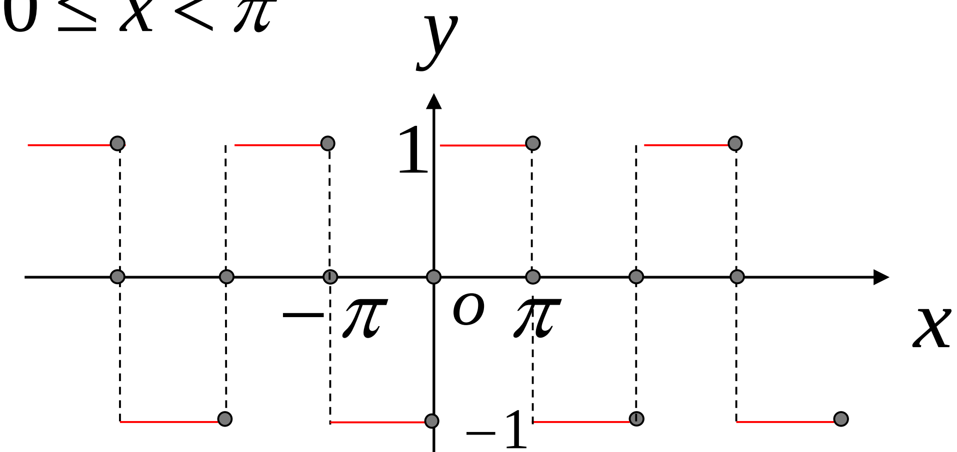
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & n = 1,3,5,\cdots \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots\end{cases}$$

例1.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi\end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.



解：（3）

$a_0 = 0,\quad a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n] = \begin{cases}\dfrac{4}{n\pi}, & n = 1,3,5,\cdots \\ 0, & n = 2,4,6,\cdots\end{cases}$$

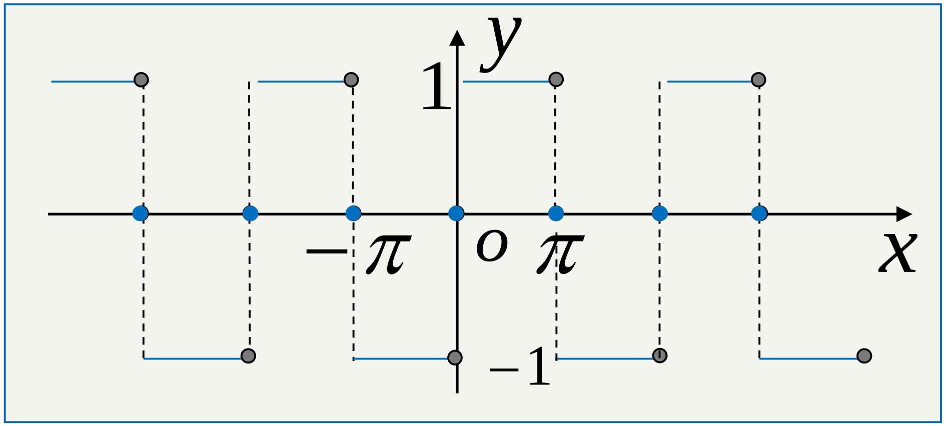
$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \cdots = \begin{cases} f(x), & (-\infty < x < +\infty, \text{且} x \ne n\pi\ (n\in Z)) \\ 0 & (x = n\pi\ (n \in Z))\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots)$$

说明:

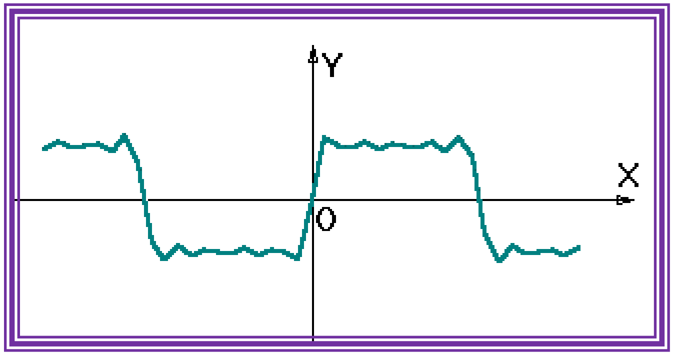


1) 根据收敛定理可知,

当$x=k\pi\ \ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$

时, 级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$

2) 傅氏级数的部分和逼近



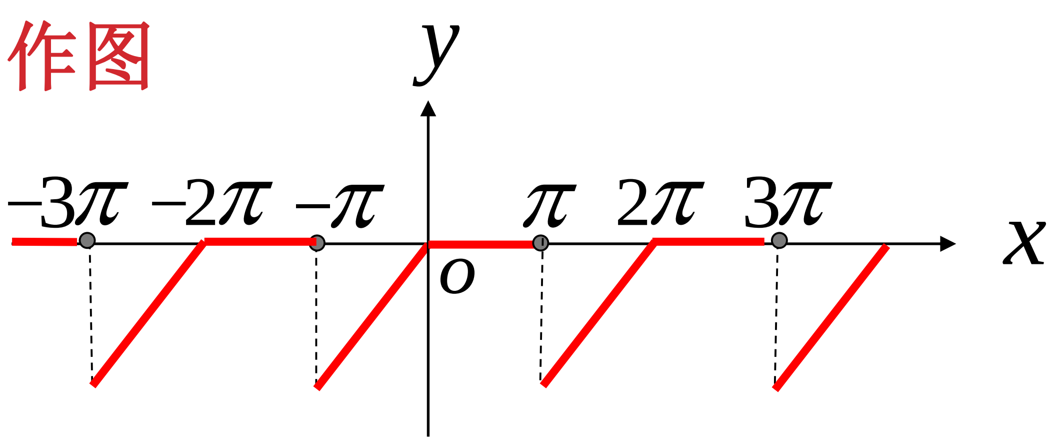
***f*(*x*) 的情况见右图.**

例2.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解：（1）作图

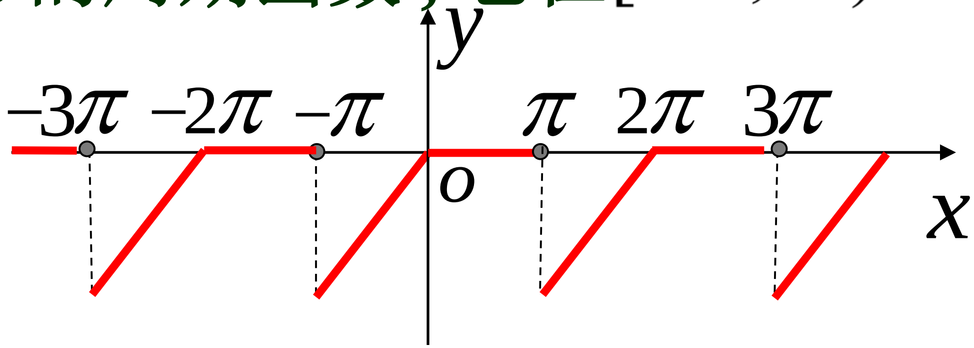


$f(x)$ 在 $x=(2k+1)\pi \ (k\in Z)$ 处间断

函数满足 Dirichlet 条件:

例2.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解(2) $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0} x\,\mathrm{d}(\sin\ nx)$$

$$=\frac{1}{n}x\sin\ nx\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0}\sin\ nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{0}\sin\ nx\,d(nx)$$

$$=\frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n^2}\left[1-(-1)^n\right]$$

$$\int_{-\pi}^{0} x \sin nx \, \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0} x \, \mathrm{d}(\cos nx)$$

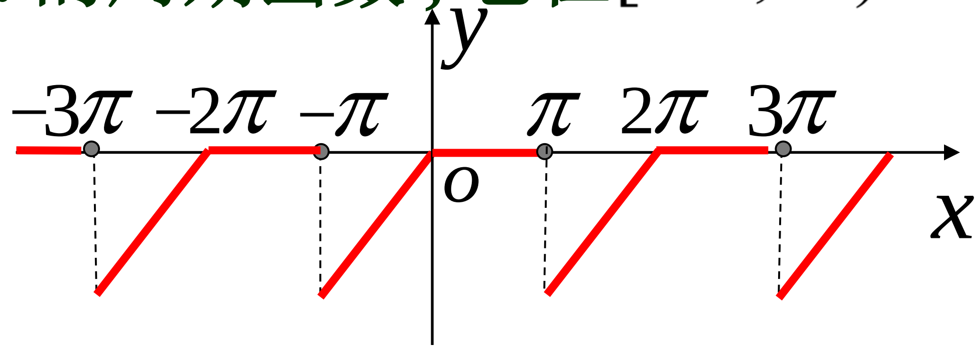
$$= -\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_{-\pi}^{0} + \underline{\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{0} \cos nx \, dx}$$

$$= 0 - \left[-\frac{-\pi}{n} (-1)^n \right] + 0$$

$$= -\frac{\pi}{n}(-1)^n$$

例2.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

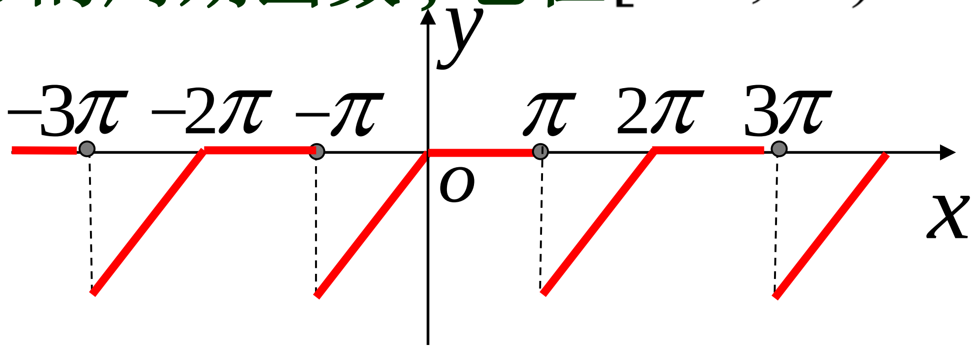
解(2) $a_0=-\dfrac{\pi}{2}$, $a_n=\dfrac{1}{n^2\pi}[1-(-1)^n]$, $b_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

$$=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

例2.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解(3)

$$-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{[1-(-1)^n]}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right)$$

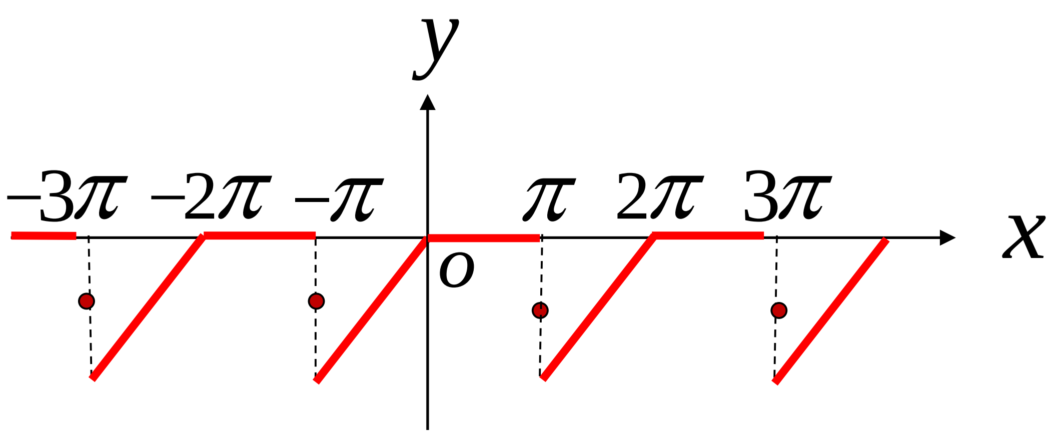
$$=\begin{cases} f(x) & \left(-\infty < x < +\infty, \text{且} x \neq (2k+1)\pi \ (k \in Z)\right) \\ \dfrac{-\pi+0}{2}=-\dfrac{\pi}{2} & \left(x \neq (2k+1)\pi \ (k \in Z)\right) \end{cases}$$

例2.设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

注：傅里叶级数图像



内容小结

1. 周期为 $2l$ 的函数的傅里叶级数及收敛定理

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\quad(x\neq\text{间断点})$$

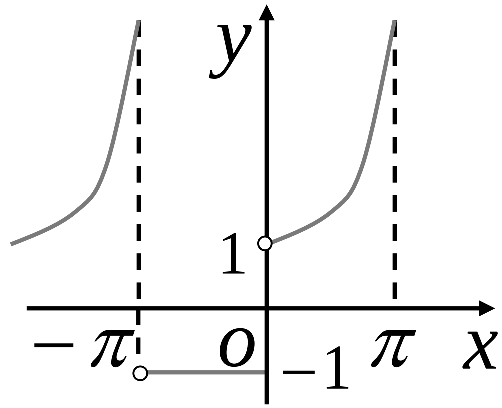
其中
$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots)\\[2ex] b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots)\end{cases}$$

注意: 若 x_0 为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

思考与练习

1. 设周期函数在一个周期内的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$$



则它的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad \pi^2/2 \quad}$, 在 $x=4\pi$ 处收敛于 $\underline{\quad 0 \quad}$.

提示:

$$\frac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2}=\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{f(4\pi^-)+f(4\pi^+)}{2}=\frac{f(0^-)+f(0^+)}{2}=\frac{-1+1}{2}$$

2. 设 $f(x)=\pi x-x^2, 0<x<\pi$, 又设 $S(x)$ 是 $f(x)$在 $(0,\pi)$内以2π**为周期的正弦级数展开式的和函数, 求当** $x\in(\pi,2\pi)$时 $S(x)$ **的表达式 .**

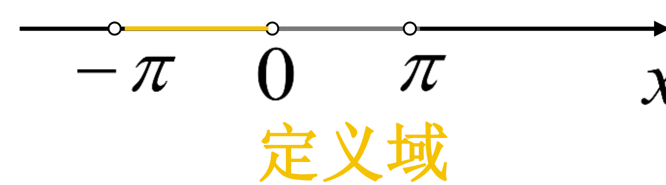
解: 由题设可知应对$f(x)$ **作奇延拓:**

$$F(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ \pi x+x^2, & -\pi<x<0\end{cases}$$

在$(-\pi,\pi)$上, $S(x)=F(x)$; 在$(\pi,2\pi)$上, **由周期性:**

$x-2\pi\in(-\pi,0)$

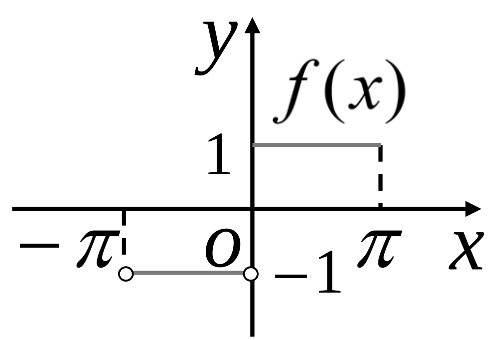
$$\begin{aligned}S(x)&=S(x-2\pi)\\&=\pi(x-2\pi)+(x-2\pi)^2\\&=x^2-3\pi x+2\pi^2\end{aligned}$$



3. 写出函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上

傅氏级数的和函数 .

答案: $S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$



傅里叶 (1768 – 1830)

法国数学家. 他的著作《热的解析理论》(1822) 是数学史上一部经典性文献，书中系统的运用了三角级数和三角积分，他的学生将它们命名为傅里叶级数和傅里叶积分. 他深信数学是解决实际问题最卓越的工具. 以后以傅里叶著作为基础发展起来的傅里叶分析对近代数学以及物理和工程技术的发展都产生了深远的影响.

狄利克雷 (18 05 – 1859)

狄利克雷，P.G.L.

德国数学家. 对数论, 数学分析和数学物理有突出的贡献, 是解析数论的创始人之一, 他是最早提倡严格化方法的数学家. 1829年他得到了给定函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛的第一个充分条件; 证明了改变绝对收敛级数中项的顺序不影响级数的和, 并举例说明条件收敛级数不具有这样的性质. 他的主要论文都收在《狄利克雷论文集 (1889—1897)中.