第四节 三重积分的概念与计算

4.1 三重积分的概念

4.2 三重积分在直角坐标系中的计算

4.3 三重积分在柱坐标系中的计算

4.4 三重积分在球坐标系中的计算

4.1 三重积分的概念

引例: 设物体占据空间有界闭区域Ω， 密度函数为 $f(x,y,z)\in C(\Omega)$, 求物体的质量 m.

1)"分割" 将Ω任意分为 n 个小区域 $\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$

2)"取近似" 在 Δv_k 中任取一点 (ξ_k,η_k,γ_k), 则

$$\Delta m_k \approx f(\xi_k,\eta_k,\gamma_k)\Delta v_k \quad k=1,2,\cdots,n$$

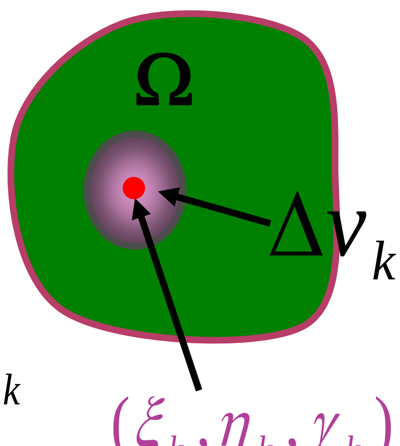
3) "求和" $m=\sum_{k=1}^{n}\Delta m_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\gamma_k)\Delta v_k$

4) "取极限" 定义 Δv_k 的直径为

$$\lambda(\Delta v_k)=\max\left\{\left|P_1P_2\right| \middle| P_1,P_2\in\Delta v_k\right\}$$ 令

$$\lambda=\max_{1\le k\le n}\{\ \lambda(\Delta v_k)\ \}$$ 则

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\gamma_k)\Delta v_k$$

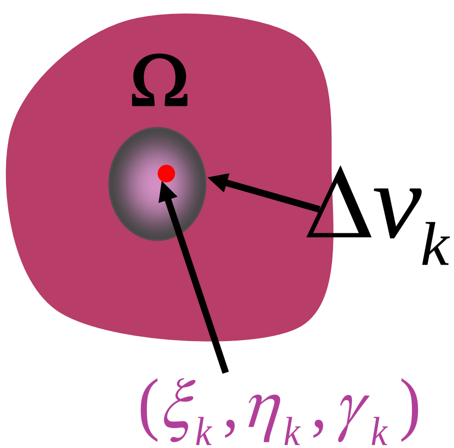


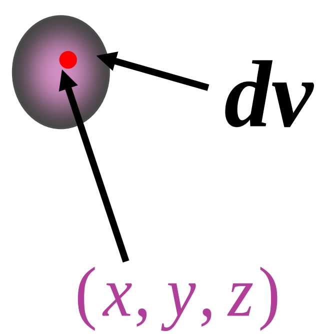
定义. 设 $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, **若对 Ω 作任意分割:** $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$, **任意取点** $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$, "乘积和式" 极限

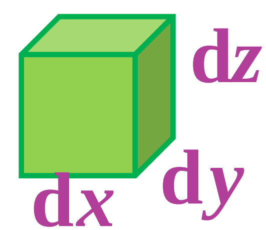
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \xlongequal{\text{记作}} \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的**三重积分**.

$\mathrm{d}v$ 称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.







性质： 三重积分的性质与二重积分相似.例如

中值定理. 设 $f(x,y,z)$ 在有界闭域 Ω 上连续, V 为 Ω 的体积, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

3.2 三重积分在直角坐标系中的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x,y,z)\geq 0,$ 并将它看作某物体的密度函数，通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

方法1．投影法(“先一后二”)

方法2．截面法(“先二后一”)

方法3．三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.

方法1. 先一后二

把Ω往xoy面上投影，投影区域为 D,任取$(x,y,0)\in D$, 作垂直xoy面的直线,从下往上穿过Ω,

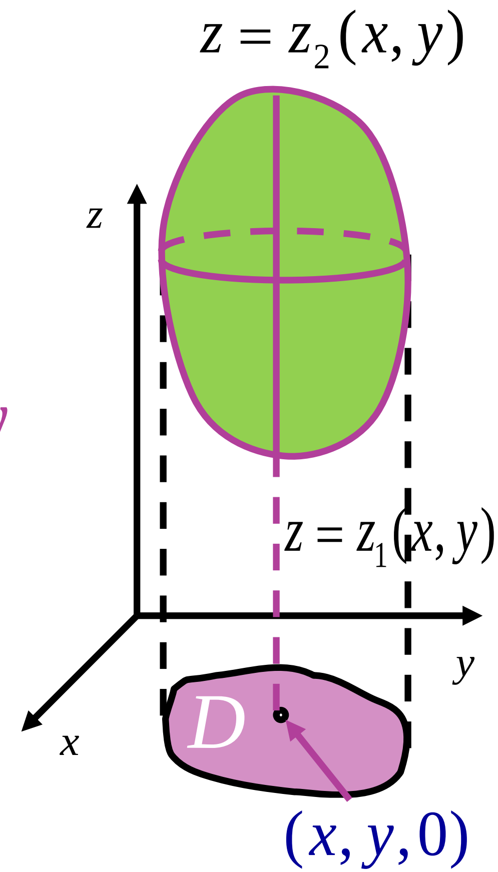
穿入点竖坐标 $z=z_1(x,y)$，

穿出点竖坐标 $z=z_2(x,y)$

（后积投影面）（先积一条线）

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint_D\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

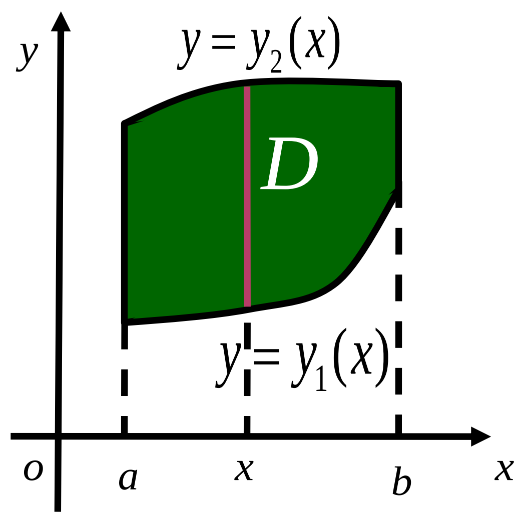
$$\overset{\text{记作}}{=\!=}\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

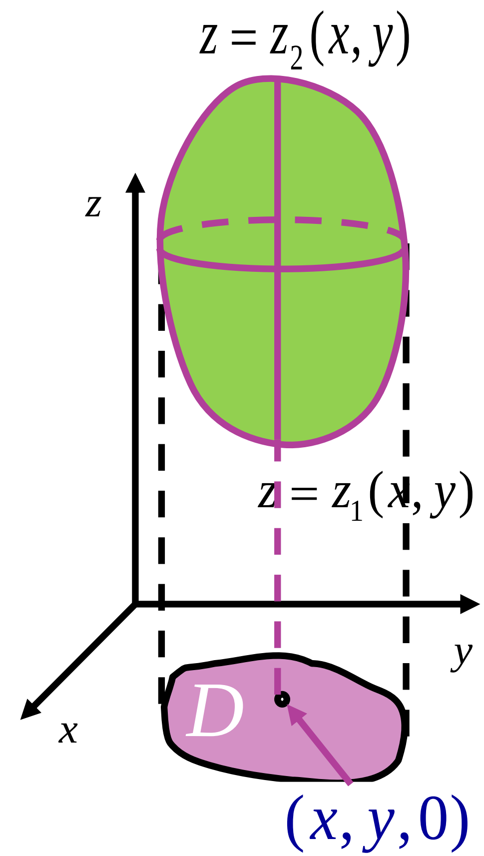


$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \iint_D \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\stackrel{\text{记作}}{=\!=} \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

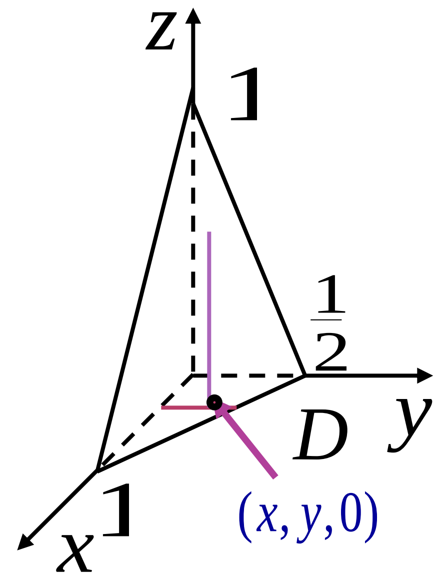
$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$





例1. 计算三重积分 $\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

解: $\Omega:\begin{cases} 0\le z\le 1-x-2y \\ D_{xy}:\begin{cases} 0\le y\le \frac{1}{2}(1-x) \\ 0\le x\le 1 \end{cases}\end{cases}$

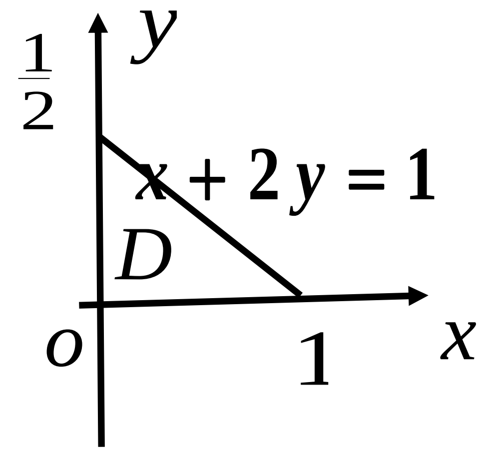


$$\therefore \iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

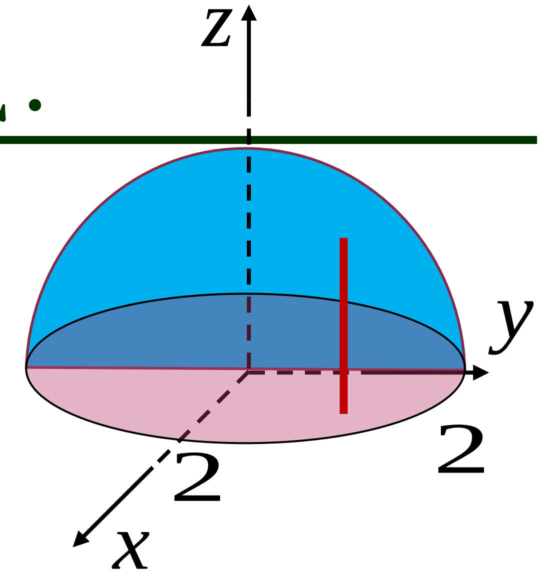
$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$



例2. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭区域.



方法1. 投影法

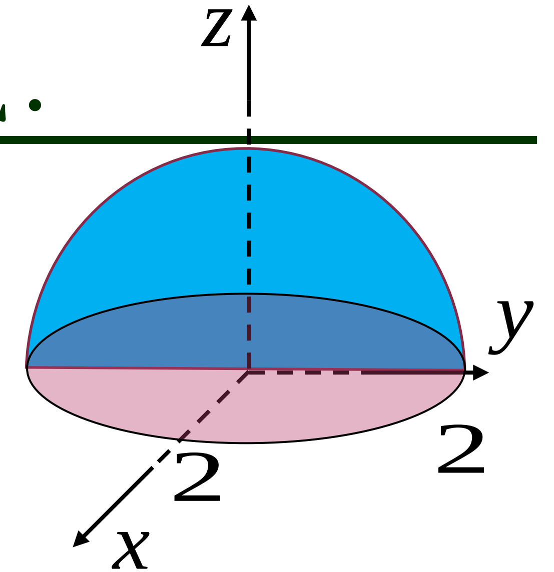
解: $\Omega:\begin{cases}0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\\ D_{xy}\end{cases}$

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例2. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭区域.



方法1. 投影法

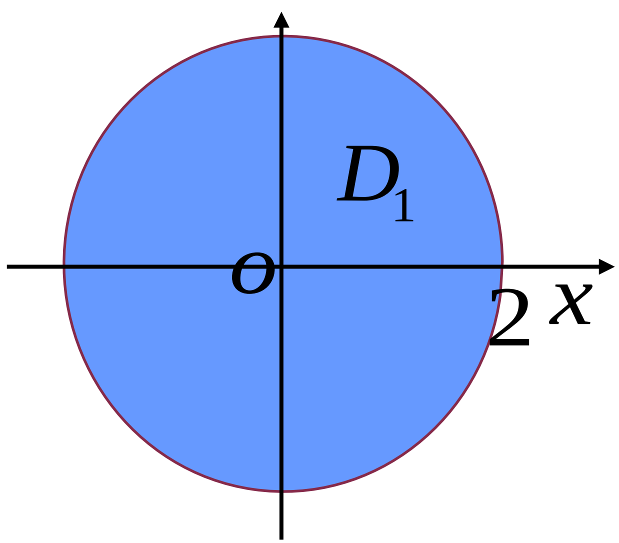
解: $D_{xy}:\begin{cases}0\le r\le 2\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{4-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

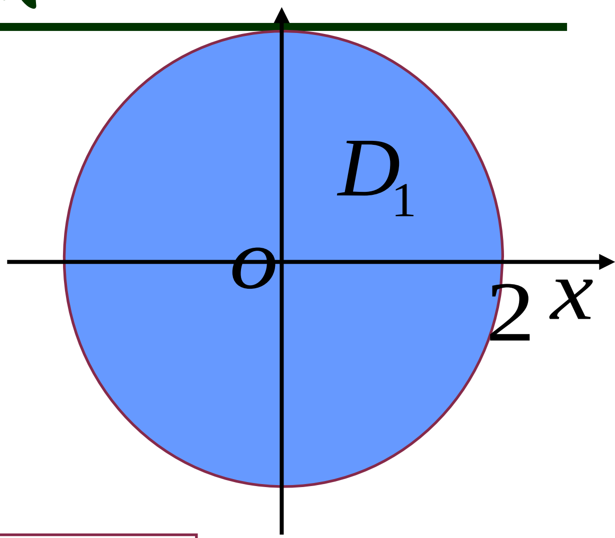
$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\;r\,dr$$

$$=2\pi\int_0^2 r^2\sqrt{4-r^2}\,dr$$



例2. 计算三重积分$\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭区域.

方法1. 投影法



解: $\therefore\ \iiint_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

$$= 2\pi\int_0^2 r^2\sqrt{4-r^2}\,dr$$

令 $r = 2\sin t$

$dr = 2\cos t\,dt$

r	0	2
t	0	$\frac{\pi}{2}$

$$I = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t\ 2\cos t\cdot 2\cos t\,dt$$

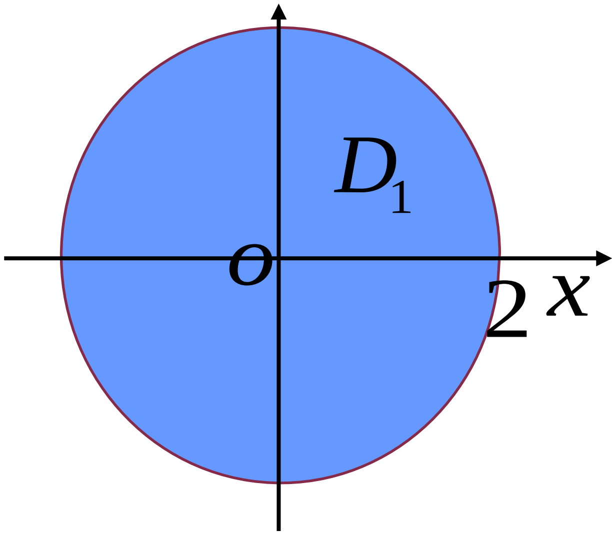
例2. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭区域.

方法1. 投影法

解: $I = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin^2 t \; 2\cos t \cdot 2\cos t\,dt$

$$= 32\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\left(1-\sin^2 t\right)dt$$

$$= 32\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt\right)$$



$$= 2\pi^2$$

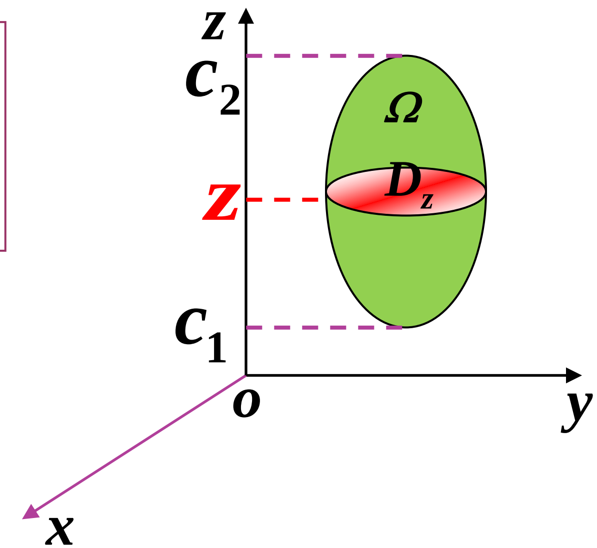
方法2. 截面法(“先面后线”)

(1) 积分区域Ω向某轴(如z轴)投影，得投影区间$[c_1, c_2]$;

(2) 对$z \in [c_1, c_2]$，用过z轴且平行xOy面的平面去截Ω，

得截面D_z;

$$\Omega = \begin{cases} (x, y) \in D_z \\ c_1 \le z \le c_2 \end{cases}$$



$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \mathrm{d}V$$

$$= \int_{c_1}^{c_2} \mathrm{d}z \iint_{D_z} f(x, y, z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{c_1}^{c_2} F(z) \mathrm{d}z.$$

(3) 计算二重积分$\iint_{D_z} f(x, y, z) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，结果为z的函数$F(z)$;

(4) 计算积分$\int_{c_1}^{c_2} F(z) \mathrm{d}z$.

通常当被积函数仅与变量z有关，且截面D_z易知时使用.

例2. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭区域.

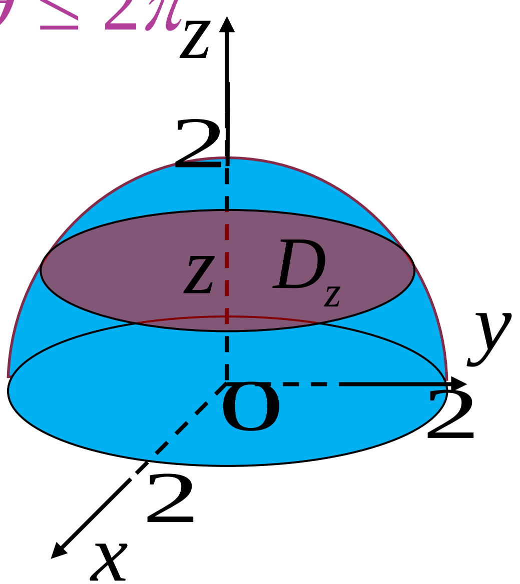
方法2. 截面法(“先面后线”)

$$\Omega:\begin{cases}0\le z\le 2\\(x,y)\in D_z:\ x^2+y^2\le 4-z^2\end{cases}\qquad\begin{cases}0\le r\le\sqrt{4-z^2}\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$I=\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^2\mathrm{d}z\iint_{D_z}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,dy$$

$$=\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}}r\ \ rdr$$



例2. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成的闭区域.

方法2. 截面法(“先面后线”)

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{4-z^2}} r\ rdr$$

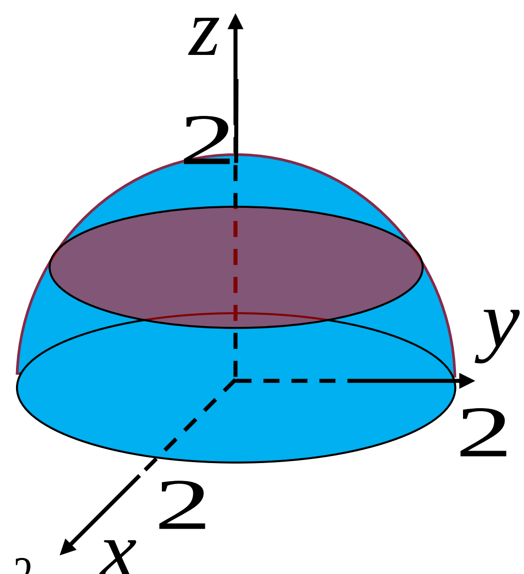
$$\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{\sqrt{4-z^2}}$$

$$=\frac{1}{3}2\pi\cdot 2\int_0^2\left(\sqrt{4-z^2}\right)^3\mathrm{d}z$$

令 $z=2\sin t$

$dz=2\cos t\,dt$

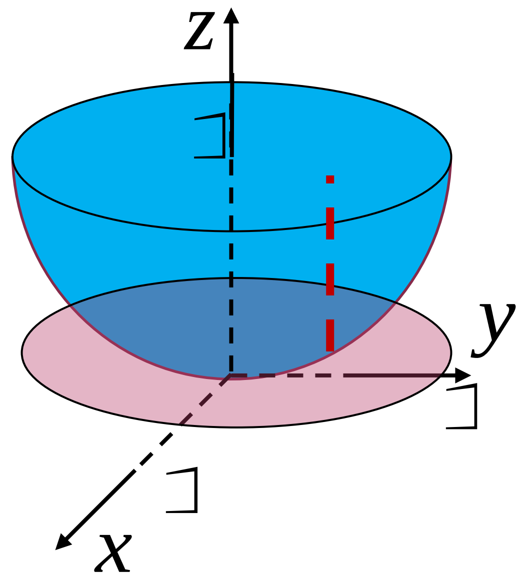
z	0	2
t	0	$\frac{\pi}{2}$



$$I=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos t)^3\cdot 2\cos t\,dt=2\pi^2$$

例3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 其中Ω为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 在z=0和z=1之间的闭区域.

方法1. 投影法（“先线后面”）



$$\Omega:\begin{cases} x^2+y^2\le z\le 1 \\ D_{xy} \end{cases}$$

$$\therefore \iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

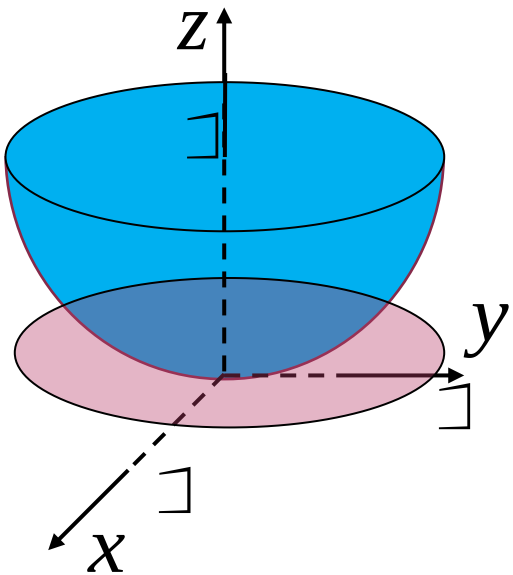
$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1} z\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{1}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 在z=0和z=1之间的闭区域.

方法1. 投影法（“先线后面”）

$$\Omega:\begin{cases} x^2+y^2\le z\le 1 \\ D_{xy} \end{cases}$$



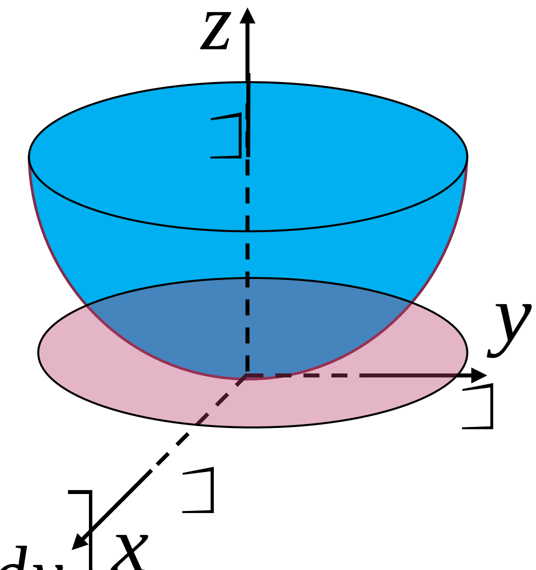
$$I=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}z^2\Big|_{x^2+y^2}^{1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\left[1-\left(x^2+y^2\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left[\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

例3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 在z=0和z=1之间的闭区域.

方法1. 投影法（"先线后面"）



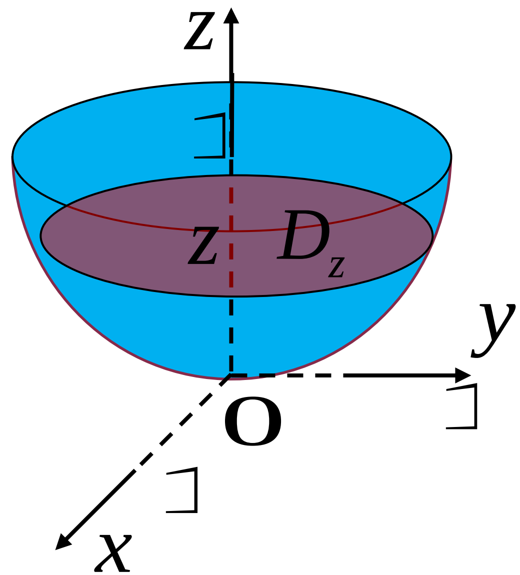
$$\Omega:\begin{cases} x^2+y^2\le z\le 1 \\ D_{xy}\begin{cases} 0\le r\le 1 \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}\end{cases}$$

$$I=\frac{1}{2}\left[\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,dy-\iint_{D_{xy}}\left(x^2+y^2\right)^2\mathrm{d}x\,dy\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[S_{D_{xy}}-\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(r^2\right)^2 r\,dr\right]=\frac{\pi}{3}$$

例3. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ 其中Ω 为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在z=0和z=1之间的闭区域.

方法2. 截面法 (“先面后线”)



$$\Omega : \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ (x, y) \in D_z :\ x^2 + y^2 \le z \end{cases}$$

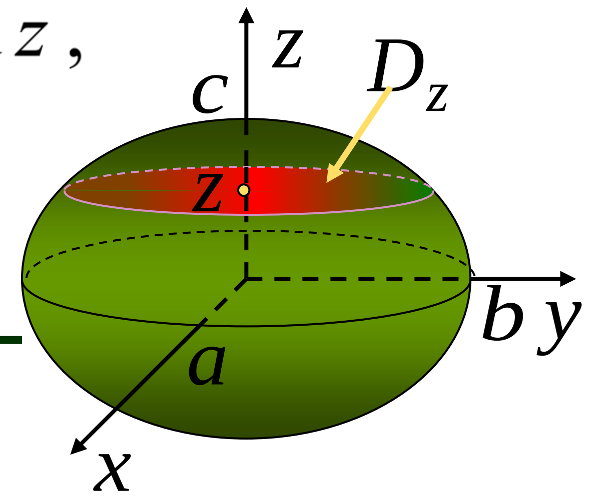
$$\therefore \iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 z\,\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 z\, S_{D_z} \mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 z\,\pi\left(\sqrt{z}\right)^2 \mathrm{d}z = \pi \int_0^1 z^2\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}$$

例4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$，

其中 $\Omega: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1.$



解： $\Omega: \begin{cases} -c \le z \le c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1 - \dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$

用“先面后线”

$$\therefore \iiint_{\Omega} z^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} z^2 \, \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-c}^{c} z^2 \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) \mathrm{d}z = \frac{4}{15} \pi abc^3$$

小结: 三重积分的计算方法

方法1. “先线后面”

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

方法2. “先面后线”

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_a^b \mathrm{d}z \iint_{D_Z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$