第五章　重 积 分

本章我们将利用一元函数积分学解决多元函数积分法及应用问题. 也就是先将一元函数问题的微分法推广到多元函数问题上去, 得到所谓的重积分,然后利用一元函数积分法来解决重积分的计算问题.

与定积分类似, 重积分的概念也是从实践中抽象出来的, 是定积分的推广, 其中的数学思想与定积分一样, 也是一种"和式的极限". 所不同的是：定积分的被积函数是一元函数, 积分范围是一个区间；而重积分的被积函数是多元函数, 积分范围是平面或空间中的一个区域.

第一节

二重积分的概念与性质

主要内容:

(1) 二重积分的概念;

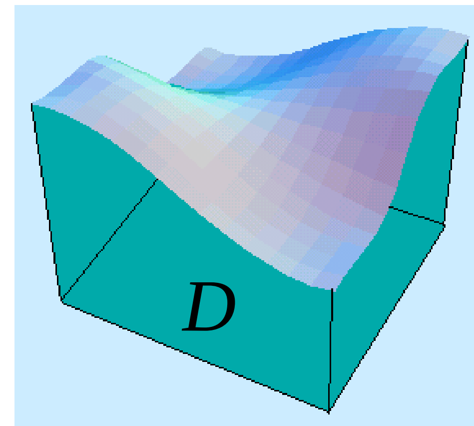
(2) 二重积分的性质.

重点: 二重积分的概念与性质 .

难点: 二重积分的对称性 .

一、引例

$z = f(x, y)$



1.曲顶柱体的体积

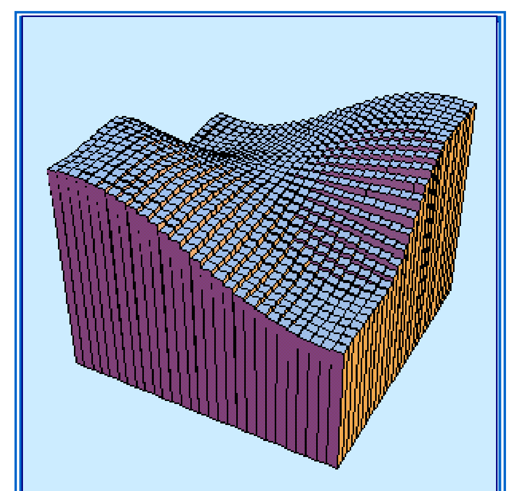
给定曲顶柱体:

底: xoy 面上的闭区域 D

顶: 连续曲面 $z = f(x, y) \geq 0$

侧面: 以 D 的边界为准线，母线平行于 z 轴的柱面，

求曲顶柱体的体积.

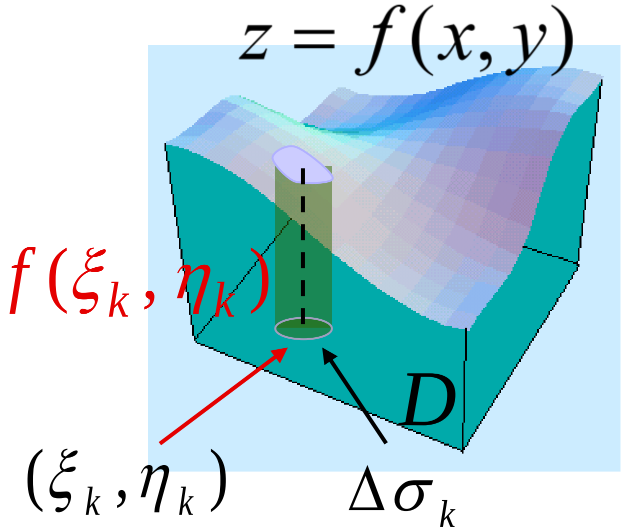


解法: 类似定积分解决问题的思想:

“分割，近似，求和，取极限”

1)“分割”

用任意曲线网将D分为 n 个区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，以每个小区域的边界为准线，作母线平行于z轴的柱面，原曲顶柱体被分为 n 个小曲顶柱体.



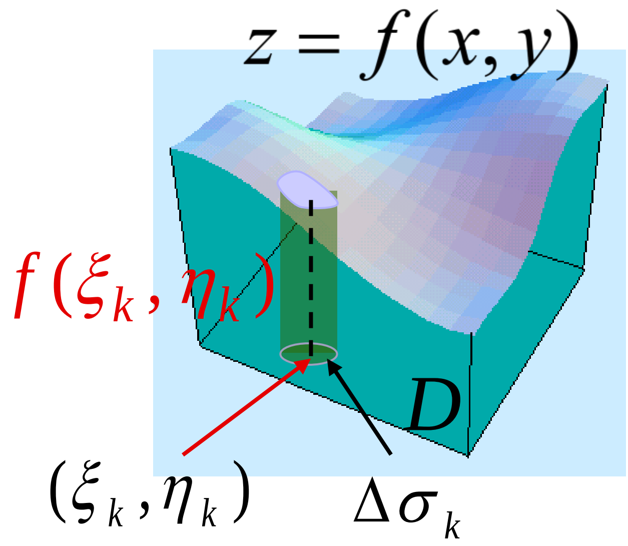
2)“近似”

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中任取一点 (ξ_k, η_k)，则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

3) “求和”

$$V=\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$



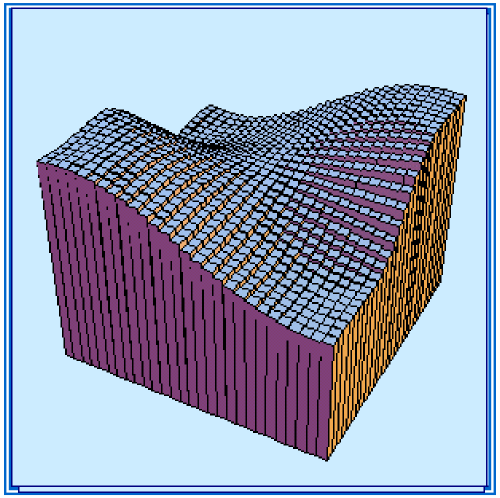
4) “取极限”

定义$\Delta\sigma_k$的直径为

$$\lambda(\Delta\sigma_k)=\max\{|P_1P_2|\,|\,P_1,P_2\in\Delta\sigma_k\}$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\lambda(\Delta\sigma_k)\}$

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

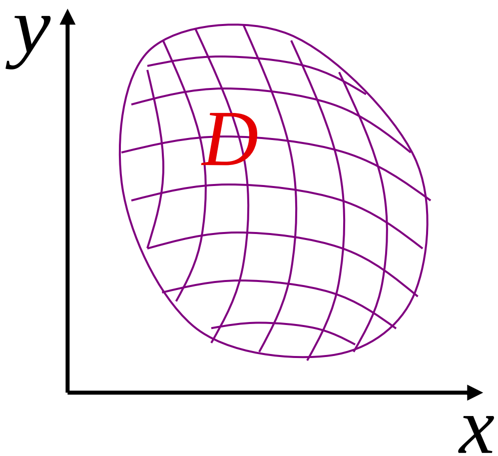


2. 平面薄片的质量

有一个平面薄片，在 xoy 平面上占有区域 D，其面密度为 $\mu(x,y)\in C$，计算该薄片的质量 M.

若 $\mu(x,y)\equiv\mu$ (常数)，设 D 的面积为 σ，则

$$M=\mu\cdot\sigma$$



若 $\mu(x,y)$ 非常数，仍可用

"分割，近似，求和，取极限"

解决.

1)"分割"

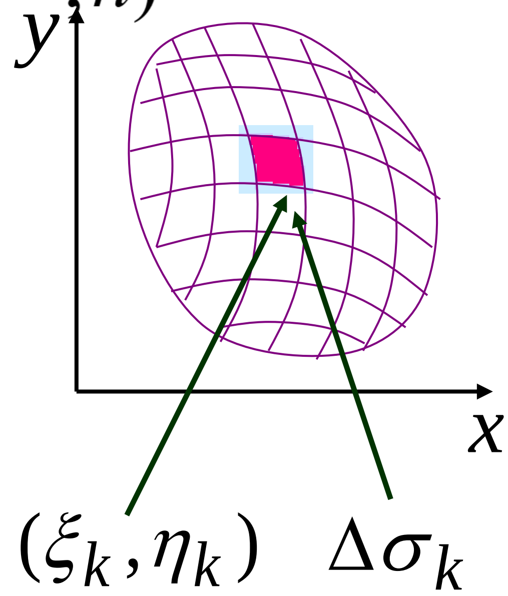
用任意曲线网分 D 为 n 个小区域 $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$，

相应把薄片也分为小区域.

2)"近似"

在每个 $\Delta\sigma_k$ 中**任取**一点 (ξ_k,η_k), 则第 **k** 小块的质量

$$\Delta M_k \approx \mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \quad (k=1,2,\cdots,n)$$



3)"求和"

$$M=\sum_{k=1}^{n}\Delta M_k \approx \sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

4)"取极限"

令 $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\{\lambda(\Delta\sigma_k)\}$

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$$

两个问题的共性:

(1) 解决问题的步骤相同

“分割, 近似求和, 取极限”

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积:

$$V=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

平面薄片的质量:

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二、二重积分的定义及可积性

1. 定义: 设 $f(x,y)$ 是定义在有界区域 D 上的有界函数，将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$，任取一点 $(\xi_i, \eta_i) \in \Delta\sigma_i$，若存在一个常数 I，使

$$I = \lim_{\lambda\to 0} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i}_{\text{积分和}} \xlongequal{\text{记作}} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

则称 $f(x,y)$ 可积，称 I 为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分.

$$\underbrace{\iint_D}_{\text{积分域}} \boxed{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积微元}}}_{\text{被积表达式}}$$

积分和

被积表达式

x, y 称为积分变量

积分域

被积函数

面积微元

注：若 $f(x,y)$ 在 D 上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域 D，这时 $\Delta\sigma_k = \Delta x_k \Delta y_k$，因此面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引例1中曲顶柱体体积：

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量：

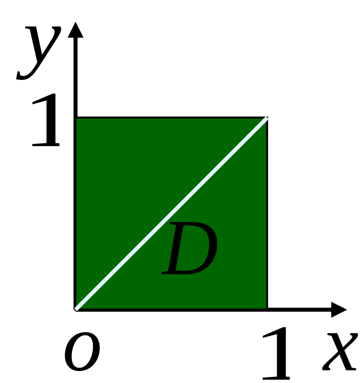
$$M = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

2. 二重积分存在性:

1. 若函数$f(x,y)$在有界闭区域D上连续，则$f(x,y)$在D上可积.

2. 若有界函数$f(x,y)$在有界闭区域D上除去有限个点或有限条曲线外都连续，则$f(x,y)$在D上可积.

例如，$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ 在 $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le 1\end{cases}$



上二重积分存在；

但 $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ 在D上二重积分不存在.

3. 二重积分的几何意义:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $f(x, y)>0$ 时, 二重积分就是曲顶柱体的体积 V ;

当 $f(x, y)<0$ 时，二重积分等于 $-V$;

若 $f(x,y)$ 在区域 D 的某些部分区域上是正的，而在其它部分区域上是负的，则二重积分表示这些部分区域上柱体体积的代数和，即用 xOy 平面上方的柱体体积去减 xOy 平面下方的柱体体积.

三、二重积分的性质

性质1 (线性性质)设$f(x,y)$和$g(x,y)$在D上可积，k为常数，则

$$1.\ \iint_D k f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \quad (k\text{ 为常数})$$

$$2.\ \iint_D [f(x,y)\pm g(x,y)]\,\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \pm \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

性质2 (对区域的可加性)设$f(x,y)$在D上可积且$D=D_1+D_2$,则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

性质3 设在有界闭域D上恒有 $f(x,y)\equiv 1$，则

$$\iint_D 1\cdot \mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma = S_D$$

$$\boxed{\text{区域D为底，高为1的柱体体积}}$$

性质4 (保号性) 设$f(x,y)$ 在D上可积，且 $f(x,y)\geq 0$，

则
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \geq 0.$$

推论：(保序性) 设$f(x,y)$和$g(x,y)$在D上可积，

且 $f(x,y)\leq \varphi(x,y)$，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leq \iint_D \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

性质5 设$f(x,y)$在D上可积，则$|f(x,y)|$也在D上可积，且

$$\therefore \quad \left|\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}\sigma$$

性质6 设$f(x,y)$在D上可积，且M, m分别为$f(x,y)$在D上的最大值和最小值,则

$$mS_D \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le MS_D$$

7.(二重积分的中值定理) 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域D上连续，则至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

二重积分中值公式

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\,S_D$$

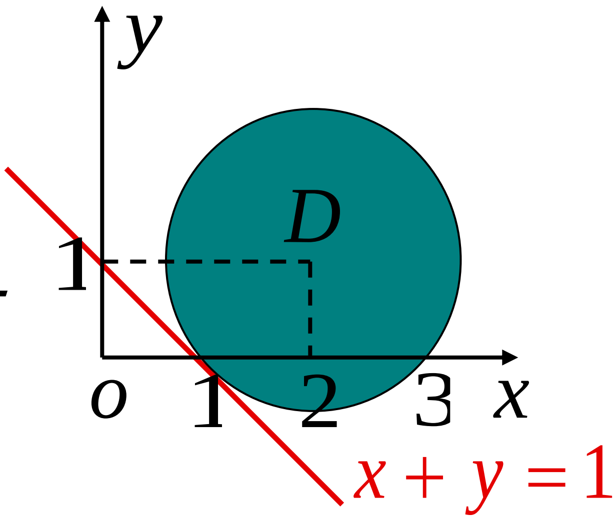
$f(x,y)$在D上的平均值

$$f(\xi,\eta) = \frac{1}{S_D}\iint_D f(x,y)d\sigma$$

例1. (1) 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$



解:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2\le 2 \\ x+y=1 \Rightarrow y=1-x\end{cases} \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=0\end{cases}$$

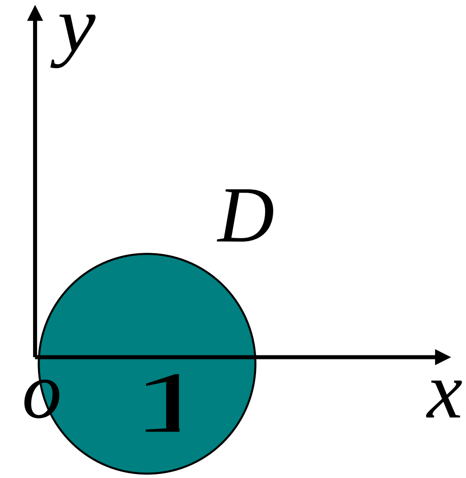
f在D上 $x+y\ge 1 \Rightarrow (x+y)^2\le(x+y)^3$

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

例1. (2) 利用二重积分性质估计

$$\iint_D e^{x^2+y^2-2x}\,\mathrm{d}\sigma \text{ 的值.}$$

其中 $D: x^2+y^2 \le 2x$



解： $D: x^2+y^2 \le 2x \Rightarrow x^2+y^2-2x \le 0 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1$

其实没用

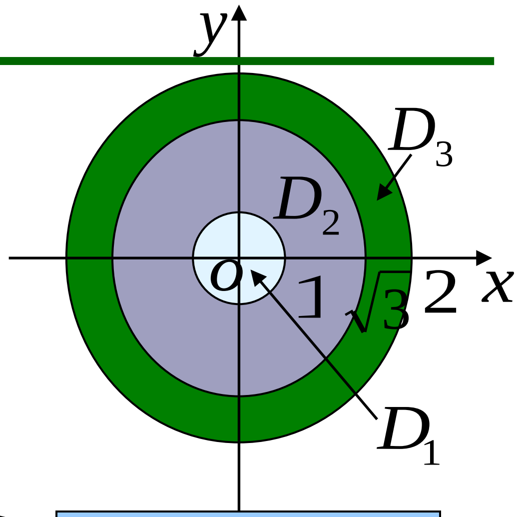
$$e^{-1} = e^{0-1} \le e^{[(x-1)^2+y^2]-1} = e^{x^2+y^2-2x} \le e^0 = 1$$

$$S_D = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

$$e^{-1}\pi \le \iint_D e^{x^2+y^2-2x}\,\mathrm{d}\sigma \le 1\cdot\pi = \pi$$

例2. 判断积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的正负号.

解: 分积分域为 D_1, D_2, D_3, 则



$$\text{原式} = \underline{\iint_{D_1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

$$-\iint_{D_2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

舍去此项

$$\underline{-\iint_{D_3} \sqrt[3]{x^2+y^2-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

二次放缩，应该是小于号

猜想结果为负

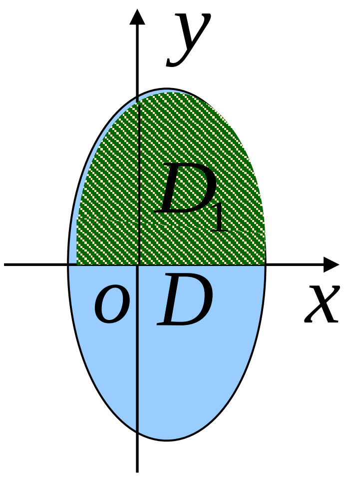
$$< \iint_{D_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_3} \sqrt[3]{3-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \pi - \sqrt[3]{2}\pi\,(4-3) = \pi\,(1-\sqrt[3]{2}) < 0$$

四、二重积分的对称性

(1) 域D 关于x 轴 (y) 对称,

D 位于 x 轴上方的部分为D_1，则



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & \text{当} f(x,-y) = f(x,y) \\ 0 & \text{当} f(x,-y) = -f(x,y) \end{cases}$$

(2) 域D关于y轴(x)对称，D位于y轴右侧的部分为D_2, 则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & \text{当} f(-x,y) = f(x,y) \\ 0 & \text{当} f(-x,y) = -f(x,y) \end{cases}$$

如, D_1 为圆域 $D: x^2+y^2 \le 1$ 在第一象限部分, 则有

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma = 4\iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$$

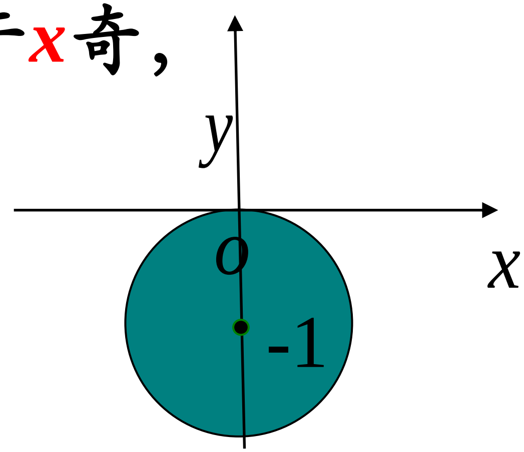
(3) 设积分区域D具有轮换对称性 (即D关于直线$y=x$对称)，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma=\tfrac{1}{2}\left(\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma\right).$$

例3 设 $D: x^2+y^2\le 2y$ ，函数$f(x)$连续，计算

$$I=\iint_D\left[1+xyf(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}\sigma.$$

解：D关于x对称， $xyf\left(x^2+y^2\right)$ 关于x奇，



$$I=\iint_D 1\mathrm{d}\sigma+\iint_D xyf\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}\sigma=S_D+0=\pi$$

内容小结

1. 二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

2. 二重积分的性质（与定积分性质相似）

第18，,19幻灯片很可能不严谨