1．设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}, & x\ge 0\\ 0\ , & x<0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}e^{-\frac{y}{3}}, & y\ge 0\\ 0\ , & y<0\end{cases}$$,求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度.

解 $f_Z(z)=\begin{cases}e^{-z/3}(1-e^{-z/6}), & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}$

2 设某种商品一周的需要量是一个随机变量, 其概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & \text{当}x>0\text{时},\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

如果各周的需要量相互独立, 求两周需要量的概率密度函数.

解 分别用 X 和 Y 表示第一、二周的需求量 则

$$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}ye^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases},$$

从而两周需求量 $Z=X+Y$, 利用卷积公式计算.

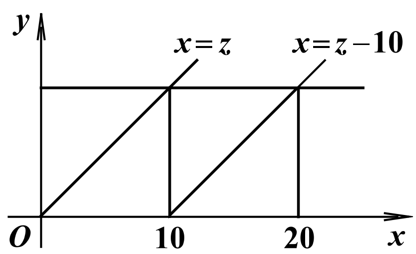
当 $z\le 0$ 时, 若 $x>0$, 则 $z-x<0$, $f_Y(z-x)=0$; 若 $x\le 0$, 则 $f_X(x)=0$, 从而 $f_Z(z)=0$;

当 $z>0$ 时, 若 $x\le 0$, 则 $f_X(x)=0$; 若 $z-x\le 0$, 即 $z\le x$, 则 $f_Y(z-x)=0$,

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^z xe^{-x}(z-x)e^{-(z-x)}dx=\frac{z^3}{6}e^{-z}$, 从而 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z^3}{6}e^{-z}, & z>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$.

3.在一简单电路中, 两电阻 R_1 和 R_2 串联连接, 设 R_1,R_2 相互独立,它们的概率密度均为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$



求总电阻 $R=R_1+R_2$ 的概率密度.

解 R 的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(z-x)dx.$$

易知仅当 $\begin{cases}0<x<10\\ 0<z-x<10\end{cases}$, 即 $\begin{cases}0<x<10\\ z-10<x<z\end{cases}$ 时上述积分的被积函数不等于零(如图), 由此

即得 $f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)dx, & 0\le z<10\\ \int_{z-10}^{10}f(x)f(z-x)dx, & 10\le z\le 20,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$ 将 $f(x)$ 的表达式代入上式得

$$f_R(z)=\begin{cases}(600z-60z^2+z^3)/15000, & 0\le z<10\\ (20-z)^3/15000, & 10\le z\le 20.\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$