第六节　高斯公式　通量与散度

Green 公式 $\xrightarrow{\text{推广}}$ **Gauss 公式**

6.1　高斯公式

6.2　通量与散度

一、高斯 (Gauss) 公式

定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{(Gauss 公式)}$$

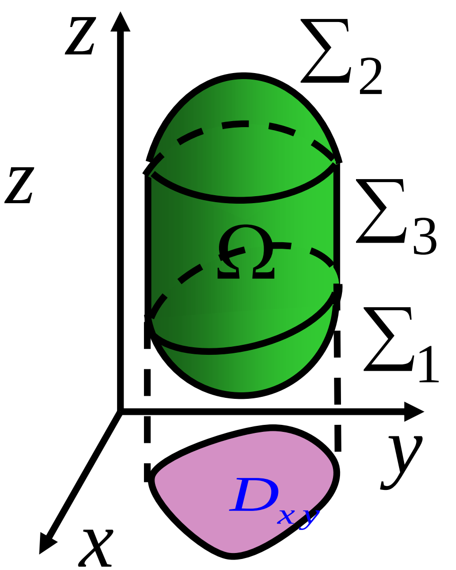
下面先证:

$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oiint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

证明: 设$\Omega: z_1(x,y) \le z(x,y) \le z_2(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$

为XY型区域, $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $\Sigma_1 : z = z_1(x,y)$,

$\Sigma_2 : z = z_2(x,y)$,则



$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}z$$

$$= \iint_{D_{xy}} \{ R(x,y,z_2(x,y)) - R(x,y,z_1(x,y)) \} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

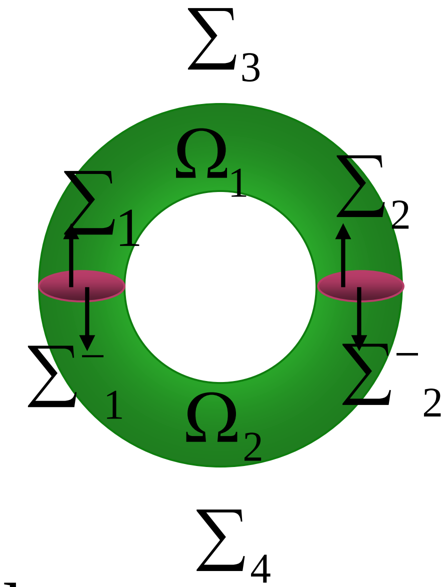
$$\oiint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_3} \right) R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_2(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} R(x,y,z_1(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

所以 $$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_\Sigma R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若 Ω 不是 **XY–**型区域 , 则可引进辅助面

将其分割成若干个 **XY–**型区域, 如有



$$\iiint_{\Omega_1}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma_3+\Sigma_1^-+\Sigma_2^-}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\iiint_{\Omega_2}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma_4+\Sigma_1+\Sigma_2}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

相加，得 $$\iiint_{\Omega}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}ydz=\oiint_{\Sigma}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

类似可证 $$\iiint_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

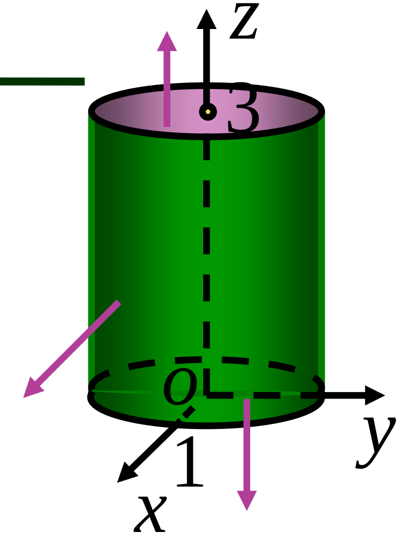
$$\iiint_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

三式相加, 即得所证 **Gauss** 公式:

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}ydz=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}xdy$$

例1. 计算 $\oint\!\!\oint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

Σ：柱面 $x^2+y^2=1$ **及平面** $z=0$, $z=3$ **所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.**



解: 这里 $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$

利用**Gauss** 公式, 得

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=-\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

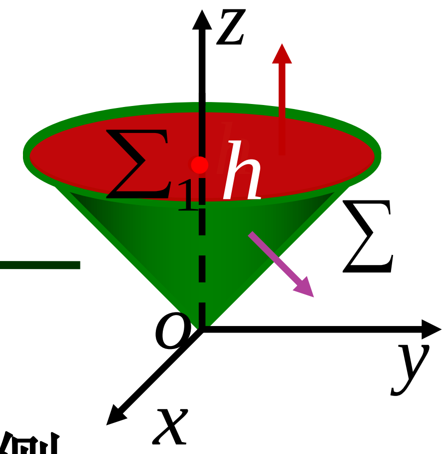
$$=-\int_0^3 z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}dxdy\quad=-\frac{9\pi}{2}$$

思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

注：用**Gauss**公式前必须验证条件

例2. 计算 $I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$

其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及 $z=h(>0)$ 之间部分的下侧.



解：作辅助面

$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2$，取上侧

记 Σ,Σ_1 所围区域为 Ω，则

$$I=\iint_{\Sigma}x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy)$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

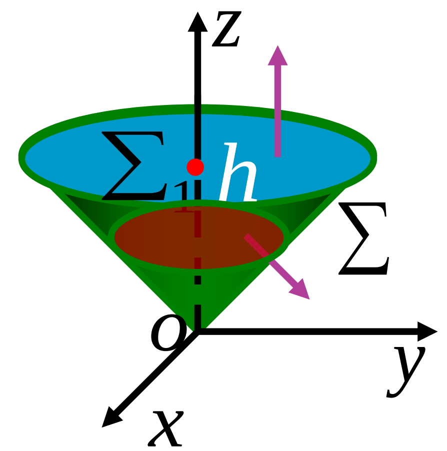
利用对称性

$$=2\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\pi h^4$$

$$=2\int_0^h zdz\iint_{D_z}dxdy-\pi h^4$$

$$=2\int_0^h z\cdot\pi z^2\mathrm{d}z-\pi h^4$$

$$=-\frac{1}{2}\pi h^4$$



例3. 设Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2,\ 1\le z\le 2$ 取上侧, 求

$$I=\iint_\Sigma (x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: 作取下侧的辅助面

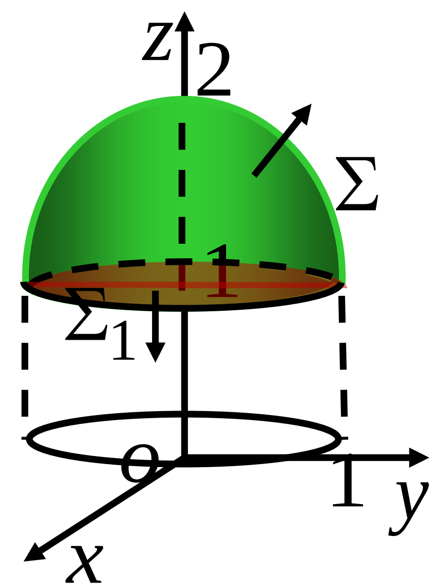
$$\Sigma_1: z=1 \qquad (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$

$$I=\Big(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\Big)(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\Big[-\iint_{D_{xy}}(x^2\cdot 1^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big]$$

$$=\int_1^2 dz\iint_{D_z}dxdy-\iint_{D_{xy}}(r\cos\theta)^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_1^2\pi(2-z)\,\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}$$



思考与练习 设$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$取外侧，**Ω 为Σ所围立体,** $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$**,判断下列演算是否正确?**

(1) $$\iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iint_\Sigma x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v \ne \frac{3}{R}\iiint_\Omega \mathrm{d}v=4\pi R^2$$

(2) $$\iint_\Sigma \frac{x^3}{r^3}\,dy\,\mathrm{d}z+\frac{y^3}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z^3}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\ne\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y^3}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z^3}{r^3}\right)\right]dv=\ldots$$

二、通量与散度

引例. 设稳定流动的不可压缩流体的密度为1,速度场为

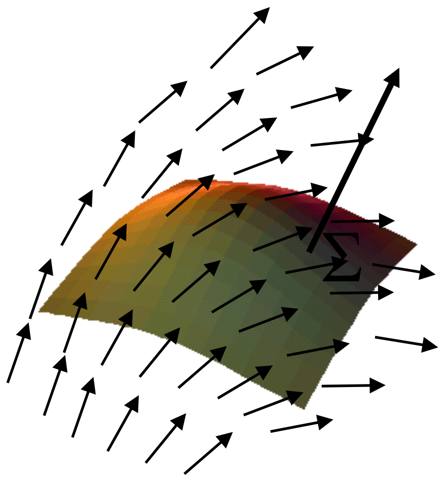
$$\vec{v}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

设Σ 为场中任一有向曲面,单位时间通过曲面Σ 的流量为

$$\Phi=\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

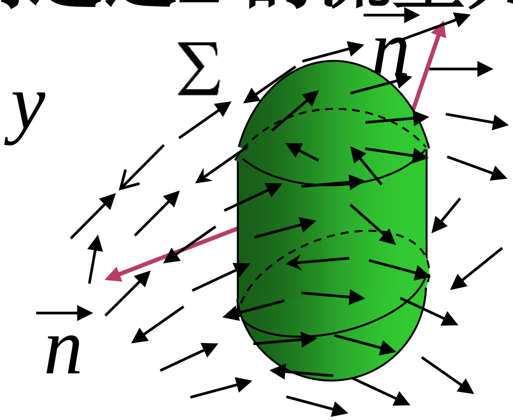
$$=\iint_\Sigma\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_\Sigma|\vec{v}|\cos\theta\,\mathrm{d}S$$



$\vec{v},\vec{n}$ 同向积分为正,异向积分为负

若Σ 为方向向外的闭曲面, 则单位时间通过Σ 的流量为

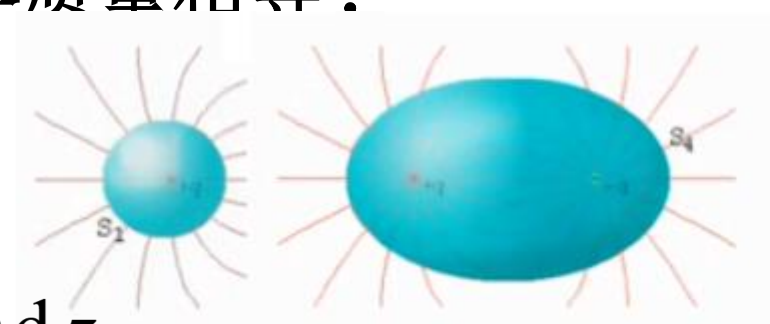
$$\Phi = \oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



当$\Phi > 0$ 时, 流入Σ 的流体质量<流出的, Σ 内有源;

当$\Phi < 0$ 时, 流入Σ 的流体质量>流出的, Σ 内有洞 ;

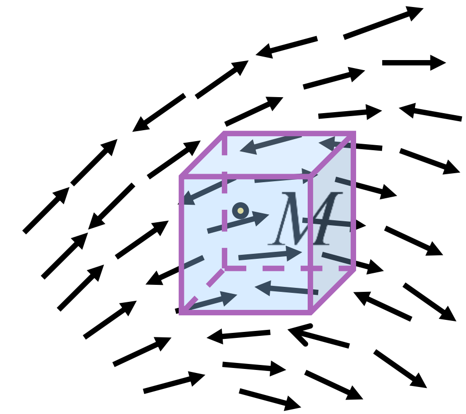
当$\Phi = 0$ 时, 流入与流出Σ 的流体质量相等 .



根据高斯公式, 流量也可表为

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

点M为场内任意一点，设Σ 是包含点 M 且方向向外的任一闭曲面，记Σ 所围域为Ω, 体积为V



$$\frac{\Phi}{V}=\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\lim_{\Omega\to M}\frac{\Phi}{V}=\lim_{\Omega\to M}\frac{1}{V}\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\Omega\to M}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{(\xi,\eta,\tau)}=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_M$$

$$((\xi,\eta,\tau)\in\Omega)$$

其值为正,则在M点有源，其值为负,则在M点有洞,其值为0，则在M点无源无洞.

定义: 设有向量场

$$\vec{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

其中P, Q, R具有连续一阶偏导数, Σ 是场内的一片有向曲面,其单位法向量 $\vec{n}$, 则称

$$\Phi=\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

为向量场 $\vec{A}$ 通过有向曲面 Σ 的**通量**.

在场中点 $M(x, y, z)$ 处

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\xlongequal{\text{记作}}\operatorname{div}\vec{A}$$

divergence

称为向量场 $\vec{A}$ 在点 M 的**散度**.

内容小结

1. 高斯公式及其应用

公式: $$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

应用: **(1) 计算曲面积分**

(非闭曲面时注意添加辅助面的技巧)

(2) 推出闭曲面积分为零的充要条件:

$$\oiint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\rightleftarrows \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0$$

2. 通量与散度

设向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$, ***P*, *Q*, *R*,** 在域**G**内有一阶 连续偏导数,则

向量场通过有向曲面 **Σ** 的通量为

$$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S$$

G 内任意点处的散度为

$$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$