第二节
二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

二、利用极坐标计算二重积分

一、利用直角坐标计算二重积分

主要内容:

(1) 区域的划分;

(2) 二重积分化为二次积分.

重点: (1) 交换积分次序;

(2) 直角坐标系下二重积分的计算.

难点: 交换积分次序.

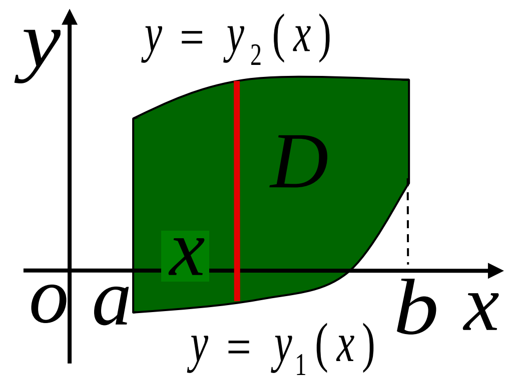
一、利用直角坐标计算二重积分

1. X－型区域

由曲顶柱体体积的计算可知，当被积函数 $f(x,y) \geq 0$

且在D上连续时，若D为 X－型区域

$$D = \left\{ a \leq x \leq b,\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \right\}$$

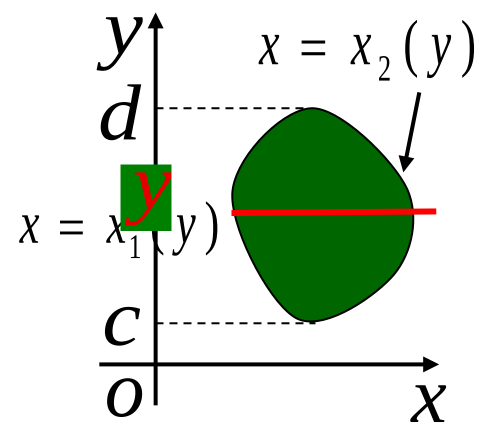


则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

X型区域特点：夹在两条平行线 $x=a$和 $x=b$之间，穿过D内部且平行于y轴的直线与D的边界至多有两个交点.

一、利用直角坐标计算二重积分

2. $Y-$ 型区域 若D为$Y-$型区域



$$D = \{x_1(y) \le x \le x_2(y), c \le y \le d\}$$

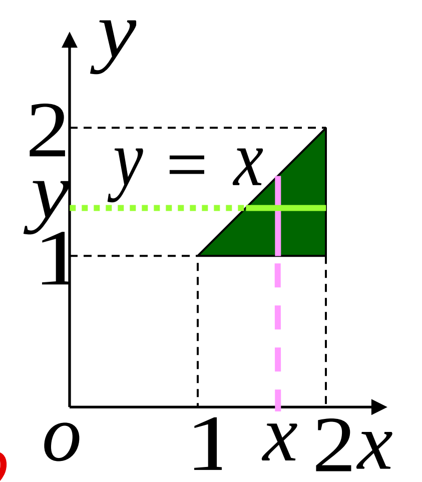
则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

Y型区域特点： 夹在两条平行线$y=c$和$y=d$之间，穿过D内部且平行于x轴的直线与D的边界至多有两个交点.

例1. 计算 $I=\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$, 其中$D$ 是直线 $y=1, x=2$, 及 $y=x$ 所围的闭区域.

解法1. 将D看作X–型区域, 则$D:\begin{cases}1\le x\le 2\\ 1\le y\le x\end{cases}$



$$I=\int_1^2 \mathrm{d}x\int_1^x xy\,\mathrm{d}y=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}xy^2\right]_1^x \mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^3-\tfrac{1}{2}x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{8}$$

解法2. 将D看作Y–型区域, 则 $D:\begin{cases}y\le x\le 2\\ 1\le y\le 2\end{cases}$

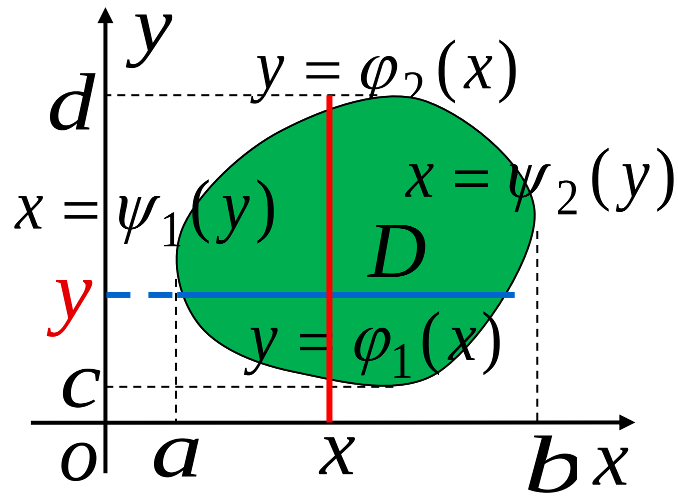
$$I=\int_1^2 \mathrm{d}y\int_y^2 xy\,\mathrm{d}x=\int_1^2\left[\tfrac{1}{2}x^2y\right]_y^2\mathrm{d}y=\int_1^2\left[2y-\tfrac{1}{2}y^3\right]\mathrm{d}y=\frac{9}{8}$$

说明: (1) 若积分区域既是X–型区域又是Y–型区域，

则有 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

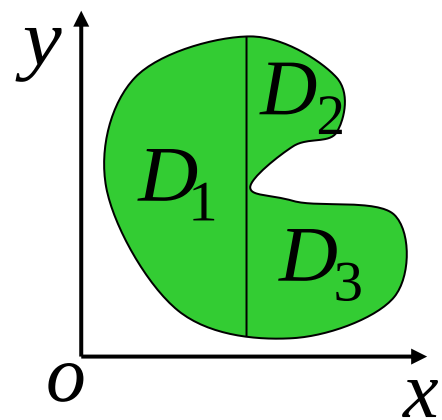
$$=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



为计算方便,可选择积分序, 必要时还可以交换积分序.

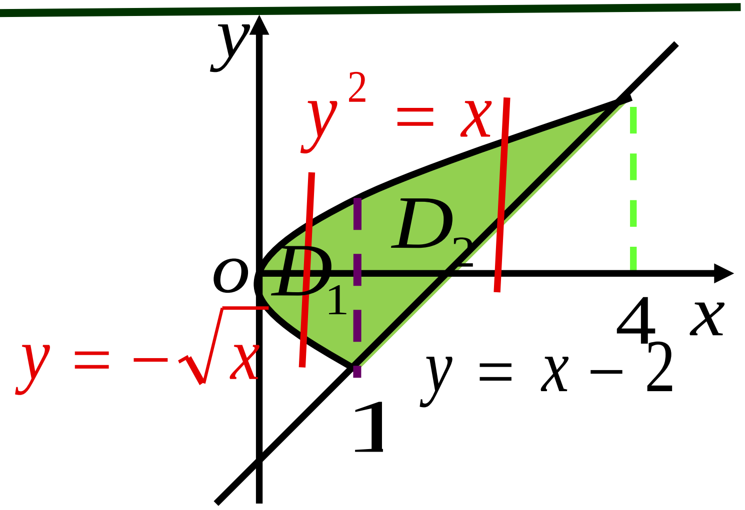
(2) 若积分域较复杂,可将它分成若干X-型域或Y-型域，则

$$\iint_D=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}+\iint_{D_3}$$



例2 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$由 $y^2=x$ 及 $y=x-2$ 所围.

解法1. 将D看作X–型区域，则先对y后对x积分，



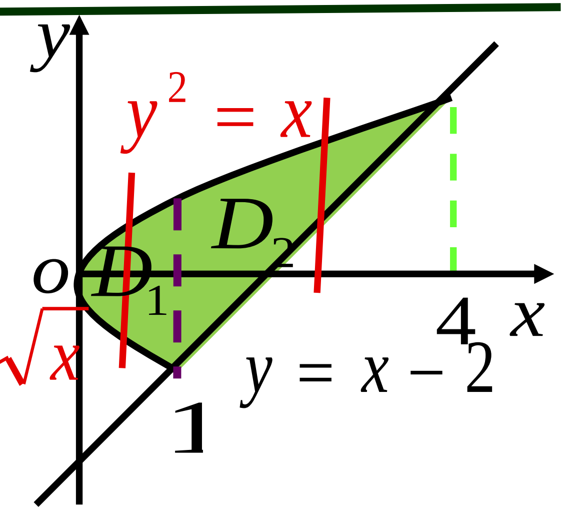
$$\begin{cases} y^2=x \\ y=x-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}, \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

$$D_1:\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x} \end{cases} \quad D_2:\begin{cases} 1\le x\le 4 \\ x-2\le y\le\sqrt{x} \end{cases}$$

例2 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中*D*由 $y^2=x$ 及 $y=x-2$ 所围.

解法1. 将*D*看作*X*–型区域, 则

先对 y 后对 x 积分,



$$D_1:\begin{cases}0\le x\le 1\\ -\sqrt{x}\le y\le\sqrt{x}\end{cases}\qquad D_2:\begin{cases}1\le x\le 4\\ x-2\le y\le\sqrt{x}\end{cases}$$

$$\therefore \iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_1^4\mathrm{d}x\int_{x-2}^{\sqrt{x}}xy\,\mathrm{d}y$$

利用对称性

$$=0+\int_1^4 x\frac{1}{2}\left[x-(x-2)^2\right]\mathrm{d}x$$

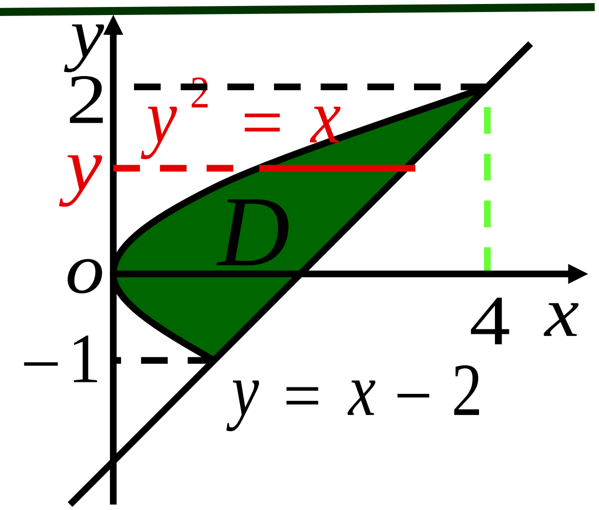
$$=\frac{45}{8}$$

本质：不能用一个表达式来表示！

例2 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中D由 $y^2=x$ 及 $y=x-2$ 所围.

解法2. 将D看作Y–型区域, 则

先对 x 后对 y 积分,



$$D:\begin{cases} y^2\le x\le y+2 \\ -1\le y\le 2 \end{cases}$$

$$\therefore \iint_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y+2}xy\,\mathrm{d}x$$

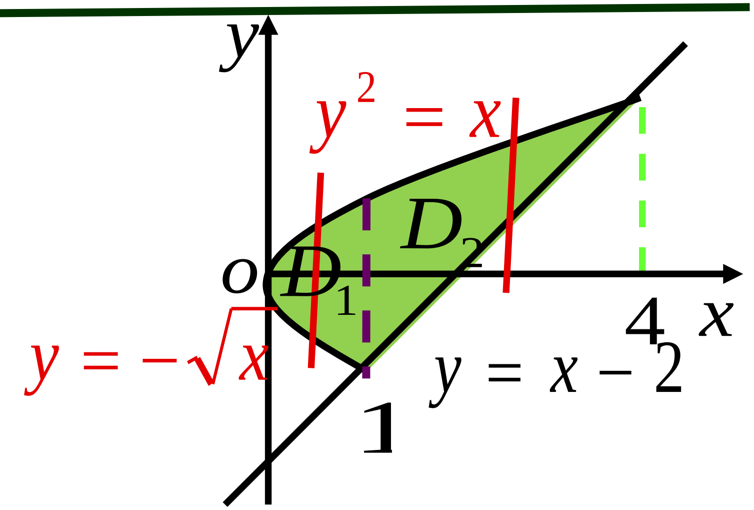
$$=\int_{-1}^{2}y\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y \quad =\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}y[(y+2)^2-y^4]\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{1}{6}y^6\right]_{-1}^{2}=\frac{45}{8}$$

例2 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中D由 $y^2 = x$ 及 $y = x - 2$ 所围.

解法1. 将D看作X–型区域, 则

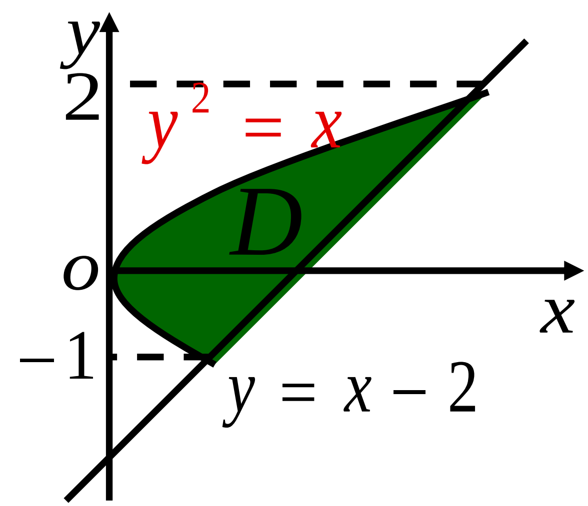
先对 y 后对 x 积分,



解法2. 将D看作Y–型区域, 则

先对 x 后对 y 积分,

注 合理选择二次积分的次序以简化二重积分的计算是我们常常要考虑的问题，其中，既要考虑积分区域的形状，又要考虑被积函数的特性.



计算二重积分步骤

1. 画出积分区域D的图形，判断类型（X or Y），确定积分次序.

混合型划分为简单型

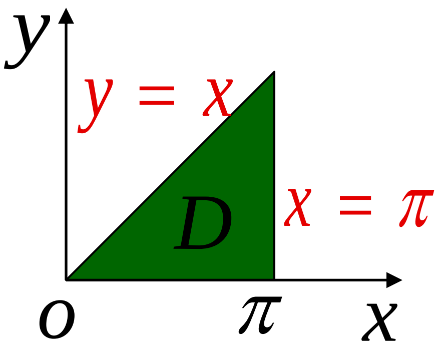
2. 利用性质（对称性）

3. 二重积分化二次积分，正确写出积分限.

4. 计算二次积分.

例3. 计算 $\iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是直线 $y=x, y=0, x=\pi$ 所围成的闭区域.

解: 由被积函数可知, 先对 x 积分不行,



因此取D 为X – 型域:

$$D: \begin{cases} 0 \le y \le x \\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iint_D \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \int_0^{x}\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$= 2$$

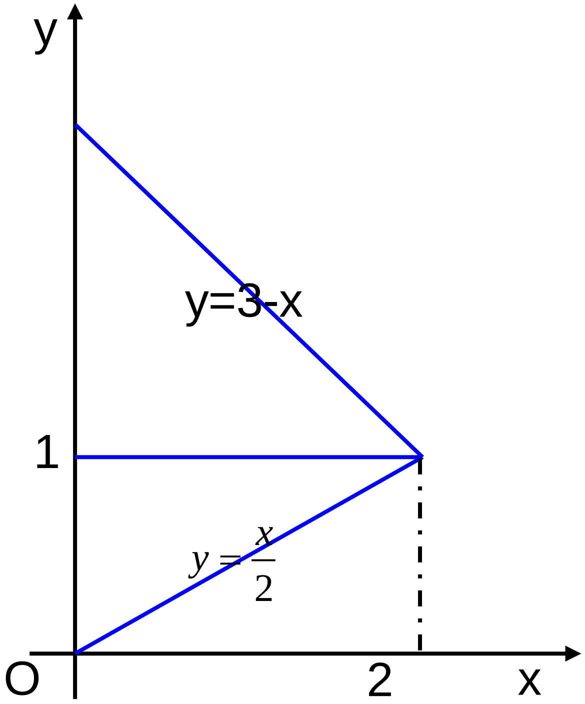
注 将二重积分化为二次积分进行计算, 在选择积分序时, 不但要考虑积分区域的形状, 还要考虑被积函数的特征.

例4 设函数 $f(x,y)$ 在所给区域D上可积，改变积分次序.

(1) $\int_a^b \mathrm{d}y \int_a^y f(x,y)\mathrm{d}x.$

(2) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^3 \mathrm{d}y \int_0^{3-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$

注 计算二重积分时，合理选择积分序是比较关键的步骤，积分序选择不当可能会使计算繁琐甚至无法计算出结果.因此，对给定的二次积分，交换其积分次序是常见的一种题型.



例5 计算 $I=\iint\limits_{D}|y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D:-1\le x\le 1,0\le y\le 2.$ $\ne|2-x^2|$

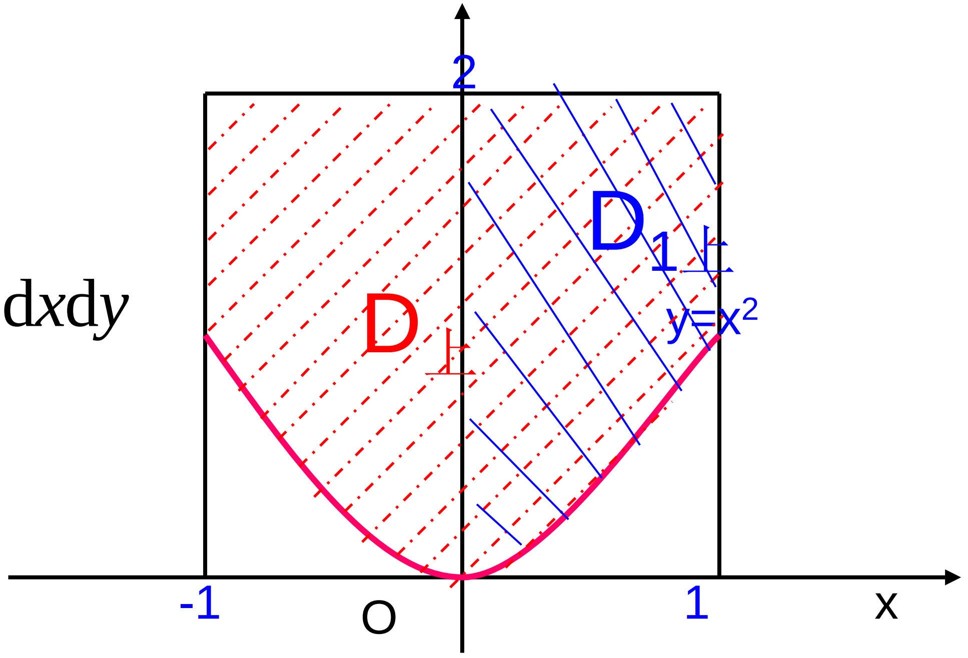
解： D关于y轴对称，且被积函数关于x为偶函数，故

$$I=2\iint\limits_{D_1}|y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D_1:0\le x\le 1,0\le y\le 2.$$

将D_1分为$D_{1上}$和$D_{1下}$两部分，因此去绝对值得

$$\iint\limits_{D_1}|y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D_{1上}}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{1下}}(x^2-\mathrm{y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

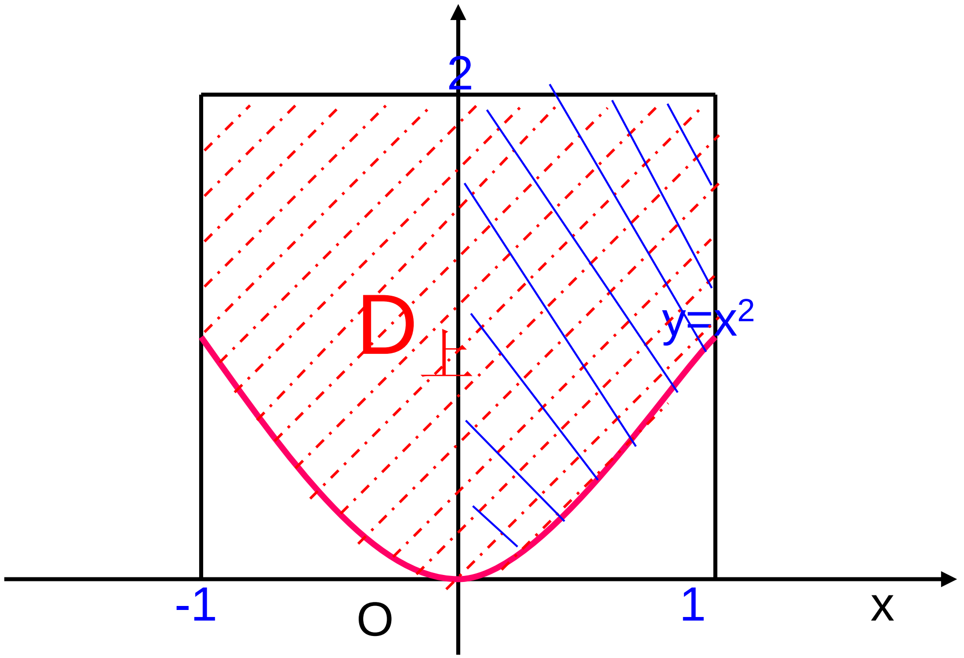


例5 计算 $I=\iint\limits_{D}|y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D:-1\le x\le 1,0\le y\le 2.$

$$\iint\limits_{D_1}|y-x^2|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{1上}}(y-x^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_{1下}}(x^2-\mathrm{y})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

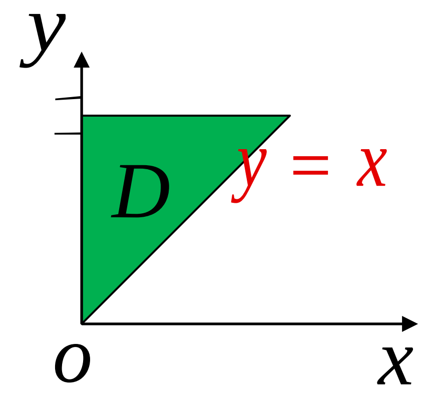
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^2}^{2}(y-x^2)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(x^2-\mathrm{y})\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{23}{15}\qquad\therefore\quad I=\frac{46}{15}.$$



注 对于此类含有绝对值的二重积分，与一元函数的定积分类似，要先根据区域与被积函数的特性去掉被积函数中的绝对值号.

练习2 计算积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2} \mathrm{d}y.$



解：

$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 1 \end{cases}$$

交换积分顺序

$$D:\begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 e^{-y^2} \mathrm{d}y \int_0^y \mathrm{d}x = \int_0^1 y e^{-y^2} \mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-y^2} \mathrm{d}\left(-y^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

练习3 改变积分次序

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \mathrm{d}y \int_{\frac{1}{y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \mathrm{d}y \int_{y}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

解:

$$D_1: \begin{cases} \dfrac{1}{y} \le x \le 2 \\ \dfrac{1}{2} \le y \le 1 \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} y \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

练习4 计算积分$\iint_{D} \left| y - x^2 \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中**D: -1**$\le x \le$**1, 0**$\le y \le$**2.**