第三节　　幂级数

一、函数项级数的概念

二、幂级数及其收敛性

三、幂级数的运算

一、 函数项级数的基本概念

1. 函数项级数

设 $u_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 为定义在区间 I 上的函数, 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

为定义在区间 I 上的函数项级数 .

2. 收敛点、发散点

对 $x_0 \in \mathrm{I}$, 若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛, 称 x_0 为其收敛点; 若常数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散 , 称 x_0 为其发散点.

3. 收敛域、发散域 所有收敛点的全体称为其收敛域；所有发散点的全体称为其发散域 .

4. 和函数

在收敛域上, 函数项级数的和是 **x** 的函数 $S(x)$, 称它为级数的和函数 , 并写成 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$

5. 余项 $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$

其中，$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ 表示函数项级数前 **n** 项的和.

则在收敛域上有 $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, $\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0$

例1. 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

它的收敛域是 $(-1,1)$，当 $x \in (-1,1)$ 时，有和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

它的发散域是 $(-\infty,-1]$ 及 $[1,+\infty)$，或写作 $|x| \geq 1$.

二、幂级数及其收敛性

1. 幂级数

形如 $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

的函数项级数称为幂级数，其中数列 $a_n \ (n=0,1,\cdots)$ 称为幂级数的系数 .

因为若令 $t = x - x_0$ 　则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$

所以只研究

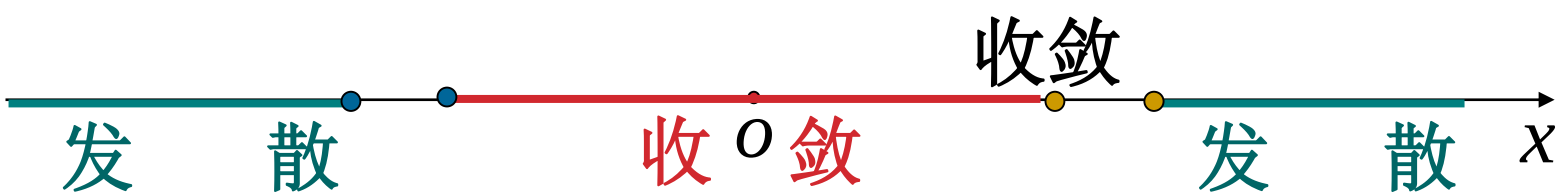
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

2. 幂级数的收敛域

定理 . (Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $x = x_0$ 点收敛，则它在满足 $|x| < |x_0|$ 的一切点x 处都**绝对收敛**.

反之，若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则它在满足 $|x| > |x_0|$ 的一切点 x 处也**发散** .



定理 . (Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $x = x_0$ 点收敛，则它在满足 $|x| < |x_0|$ 的一切点 x 处 都绝对收敛.

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则它在满足 $|x| > |x_0|$ 的一切点x处 也发散 .

证(1): 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛, 则必有 $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$,于是存在常数 $M > 0$, 使 $|a_n x_0^n| \le M \quad (n = 1, 2, \cdots)$

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

定理 . (Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $x = x_0$ 点收敛，则它在满足 $|x| < |x_0|$ 的一切 点x处都绝对收敛.

反之，若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散，则它在满足 $|x| > |x_0|$ 的一切点 x处也发散 .

证(1): $$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \le M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

当 $|x| < |x_0|$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$ 收敛，$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 也收敛，

故原幂级数绝对收敛 .

定理 . (Abel定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

在 $x = x_0$ 点收敛 , 则它在满足 $|x| < |x_0|$ 的一切点 x 处都绝对收敛.

反之, 若当 $x = x_0$ 时该幂级数发散 , 则它在满足 $|x| > |x_0|$ 的一切 点 x 处也发散 .

证(2): 反证法

假设有一点 x_1 满足 $|x_1| > |x_0|$ 且使级数收敛 , 则由前面的证明可知, 级数在点 x_0 也应收敛, 与所设矛盾, 故假设不真. 所以若当 $x = x_0$ 时幂级数发散 , 则对一切满足不等式 $|x| > |x_0|$ 的 x , 原幂级数也发散 .

由Abel 定理可以看出, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域是以原点为中心的区间.

用 $\pm R$ 表示幂级数收敛与发散的分界点, 则

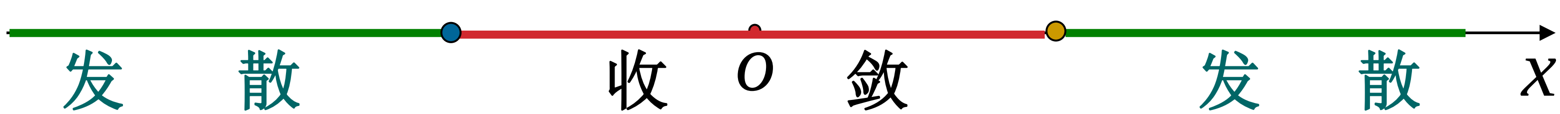
$R = 0$ 时, 幂级数仅在 $x = 0$ 收敛 ;

$R = \infty$ 时, 幂级数在 $(-\infty, +\infty)$ 收敛 ;

$0 < R < \infty$, 幂级数在 $(-R, R)$ 收敛 ;在$[-R, R]$ 外发散; 在 $x = \pm R$ 可能收敛也可能发散 .

R 称为收敛半径 , $(-R, R)$ 称为收敛区间.

$(-R, R)$ 加上收敛的端点称为收敛域.



定理2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, 则

1) 当$0<\rho<\infty$ 时, $R = 1/\rho$;

2) 当$\rho = 0$ 时, $R = \infty$;

3) 当$\rho = \infty$时, $R = 0$.

证: $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\cdot|x| = \rho|x|$$

1) 若$\rho \neq 0$, 则根据比值审敛法可知:

当 $\rho|x|<1$, 即 $|x|<\frac{1}{\rho}$ 时, 原级数收敛;

当 $\rho|x|>1$, 即 $|x|>\frac{1}{\rho}$ 时, 原级数发散.

因此级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$.

定理2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$, 则

1) 当$0<\rho<\infty$ 时, $R = {}^{1}\!/_{\rho}$;

2) 当$\rho = 0$ 时, $R = \infty$;

3) 当$\rho = \infty$时, $R = 0$.

证: $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = \rho|x|$$

2) 若 $\rho = 0$, 则根据比值审敛法可知, 对任意 x 原级数绝对收敛 , 因此 $R = \infty$;

3) 若 $\rho = \infty$,则对除 $x = 0$ 以外的一切 x 原级数发散 , 因此 $R = 0$.

定理2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的系数满足 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1) 当 $0<\rho<\infty$ 时，$R = {}^{1}\!/\!_{\rho}$；

2) 当 $\rho = 0$ 时，$R = \infty$；

3) 当 $\rho = \infty$ 时，$R = 0$.

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ 的收敛半径为 } R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}$$

例1. 求幂级数 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$ 的收敛半径及收敛域.

解: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=1$

对端点 $x=1$, 级数为交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$, 收敛;

对端点 $x=-1$, 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n}$, 发散.

故收敛域为 $(-1,1]$.

例2. 求下列幂级数的收敛域 :

规定: 0 ! = 1

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n; \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n .$$

解: (1)

$$\because\ R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

所以收敛域为 $(-\infty\,,+\infty)$.

例2. 求下列幂级数的收敛域：

规定: $0\,! = 1$

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$;　　(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$.

解：(2)

$$\because\ R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n\,!}{(n+1)\,!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

所以级数仅在 $x = 0$ 处收敛.

例3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n}$ 的收敛半径 .

解: 级数缺少奇次幂项,不能直接应用定理2, 故直接由比值审敛法求收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[2(n+1)]!}{[(n+1)!]^2} x^{2(n+1)}}{\frac{[2n]!}{[n!]^2} x^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} x^2 = 4x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{当 } 4x^2 < 1 \text{ 即 } |x| < \frac{1}{2} \text{ 时级数收敛} \\ \text{当 } 4x^2 > 1 \text{ 即 } |x| > \frac{1}{2} \text{ 时级数发散} \end{array}\right\} \quad \text{故 } R = \frac{1}{2}.$$

例4. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n n}$ **的收敛域.**

解: 令 $t = x-1$, 级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n}t^n$

$$\therefore R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n n}}{\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(n+1)}{2^n n} = 2$$

当 $t = 2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 此级数发散;

当 $t = -2$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 此级数收敛;

因此级数的收敛域为 $-2 \le t < 2$,

故原级数的收敛域为 $-2 \le x-1 < 2$, 即 $-1 \le x < 3$.

三、幂级数的运算

1. 幂级数的加减运算

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2,

$R=\min\{R_1, R_2\}$, 则在**(-*R*,*R*)**内 $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$ 绝对收敛,

且：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

2. 幂级数的分析运算

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R>0$，则其和函数 $S(x)$ 在收敛域上连续，且在收敛区间内可逐项求导与逐项求积分，运算前后收敛半径相同：

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},\quad x\in(-R,R)$$

$S(x)$
$\neq$

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-R,R)$$

$=$

$S(x)-S(0)$

帮助求和函数！

幂级数三个主要问题：

1. R及收敛域

2. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 展开

3. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x)$ 求和

例5 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ 的和函数 $S(x)$.

解： 易求出幂级数的收敛半径为 1 ,$x=\pm 1$ 时级数发散，

故当 $x\in(-1,1)$ 时，

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n x^{n-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x}$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$$

注 幂级数特点：x^{n-1}系数为n比x次数大1

方法：先积分后求导　　　系指差1先求积

例6 求级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$的和函数 $S(x)$

解： $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1},$

$$S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}=\frac{1}{1-x},\qquad -1<x<1$$

两边取变限积分得 $\int_0^x S'(x)\,dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,dx$

$S(x)-S(0)=-\ln(1-x),\quad \therefore S(x)=-\ln(1-x),\ -1<x<1$

因为x=-1时级数收敛 而-ln(1-x)连续，所以

$$S(x)=-\ln(1-x),\ -1\le x<1$$

注: 幂级数的一般项特点： x^{n+1}系数为x次数的倒数

方法：先求导后积分　　　　系指互倒先求导

例7 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}$.

解： 易求出幂级数的收敛半径为 1， 且 $x=-1$时级数收敛， 则当 $x\neq 0$ 时, 有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\quad(0<|x|<1\text{及}\,x=-1)$$

而 $S(0)=1$, $\therefore S(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1, & x=0\end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n}=S\Big(\frac{1}{2}\Big)=-2\ln\Big(1-\frac{1}{2}\Big)=2\ln 2$$

内容小结

1. 求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$

先求收敛半径，再讨论端点的收敛性．

2) 对非标准型幂级数(缺项或通项为复合式)

求收敛半径时直接用比值法或根值法,

也可通过换元化为标准型再求．

2. 幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减运算.

2) 在收敛区间内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分.

思考与练习

1. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛，问该级数收敛半径是多少？

答： 根据Abel 定理可知，级数在 $|x| < |x_0|$ 收敛，$|x| > |x_0|$ 时发散．故收敛半径为 $R = |x_0|$.

2*. 在幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n} x^n$ 中，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2}\,\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n} = \begin{cases} 3/2\,, & n\ \text{为奇数} \\ 1/6\,, & n\ \text{为偶数} \end{cases}$$

能否确定它的收敛半径不存在？

答: 不能. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+(-1)^n}\,\frac{|x|}{2} = \frac{|x|}{2}$$

当 $|x| < 2$ 时级数收敛，$|x| > 2$ 时级数发散，$\therefore R = 2.$

说明: 可以证明

比值判别法成立 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 根值判别法成立