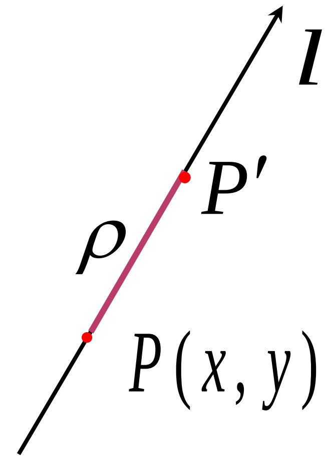
第七节　方向导数与梯度

7.1　方向导数

7.2　梯度

7.1 方向导数



定义: 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处沿方向 l (方向角为 α , β) 存在下列极限:

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}\ \overset{\text{记作}}{=}\ \frac{\partial f}{\partial l}$$

$$\left(\begin{array}{l}\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,,\\ \Delta x=\rho\cos\alpha\,,\ \Delta y=\rho\cos\beta\,,\end{array}\right)$$

则称 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 为函数在点 P 处沿方向 l 的**方向导数**.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\rho} \qquad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\cos\beta) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

特别:

当 l 与 x 轴同向 $\left(\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$

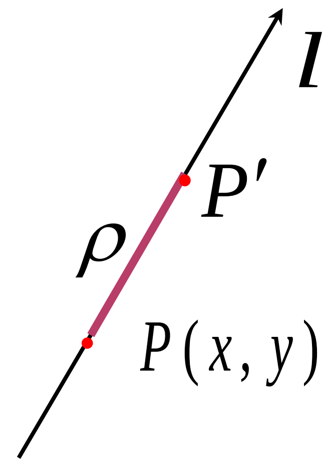
当 l 与 x 轴反向 $\left(\alpha = \pi, \beta = \frac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{\partial f}{\partial x}$

当 l 与 y 轴同向 $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 0\right)$ 时，有 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$

当 l 与 y 轴反向 $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = \pi\right)$ 时，有 $\frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{\partial f}{\partial y}$

定理: 若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处可微，

则函数在该点沿任意方向 l 的方向导数存在，



且有 $$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

其中 α,β 为 l 的方向角.

证明: 由函数 $f(x,y)$ 在点 P 可微，得

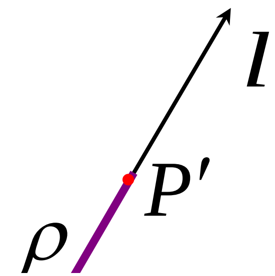
$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\rho)$$

$$\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{o(\rho)}{\rho}$$

故 $$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

定理 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处可微，则它在该点沿任一方向 l 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$



其中，α, β 为 l 的方向角.

注 1 可微条件是方向导数存在的充分条件，必要性不成立

$\boxed{\text{函数在} P_0 \text{沿任意方向的方向导数存在}} \not\Rightarrow \boxed{\text{函数在} P_0 \text{可微}}$

2 偏导数 不是 方向导数

偏导数 → 双侧

方向导数 → 单侧

例1 求函数 $f(x,y)=xe^{y^2}$ 在点 $P(1,-1)$ 处沿从点 $A(1,1)$ 到点 $B(4,5)$ 的方向的方向导数.

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$$

解 向量 $\boldsymbol{l}=\overrightarrow{AB}=3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，它的单位向量为

$$\boldsymbol{l}^0=\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{j}=(\cos\alpha,\cos\beta).$$

由 f 可微及 $f_x'(1,-1)=\mathrm{e}^{y^2}\Big|_{(1,-1)}=\mathrm{e}$，$f_y'(1,-1)=2xy\mathrm{e}^{y^2}\Big|_{(1,-1)}=-2\mathrm{e}$ 得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,-1)}=f_x'(1,-1)\cos\alpha+f_y'(1,-1)\cos\beta$$

$$=\mathrm{e}\cdot\frac{3}{5}+(-2\mathrm{e})\cdot\frac{4}{5}=-\mathrm{e}.$$

例2. 求函数 $u = x^2 yz$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿向量 $\vec{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数.

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

解: 向量 $\vec{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \qquad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\left(2xyz \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} - x^2 z \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x^2 y \cdot \frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}$$

7.2　二元函数梯度

$\nabla f, \nabla z$

定义 函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$处的梯度(gradient),

向量

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$ 记作 $\operatorname{grad} f$,

方向导数与梯度关系

(1) 函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处沿l的方向导数等于梯度在l方向上的投影.

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad} f\cdot\vec{l}^{\,0}=|\operatorname{grad} f|\cos\theta,$$

$\vec{l}^{\,0}$是$\vec{l}$的单位向量，θ是梯度$\operatorname{grad} f$与$\vec{l}$的夹角.

(2) 方向导数沿梯度(反)方向取得最大(小)值：$\pm|\operatorname{grad} f|$

方向导数沿梯度的垂直方向取值：　0

$$\nabla f = grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

方向导数与梯度关系

(1) $$\frac{\partial f}{\partial l} = \text{grad } f \cdot \vec{l}^{\,0} = |\text{grad } f| \cos\theta,$$

(2) 方向导数沿梯度(反) 方向取得最大(小)值： $\pm|grad\ f|$

方向导数沿梯度的垂直方向取值： 0

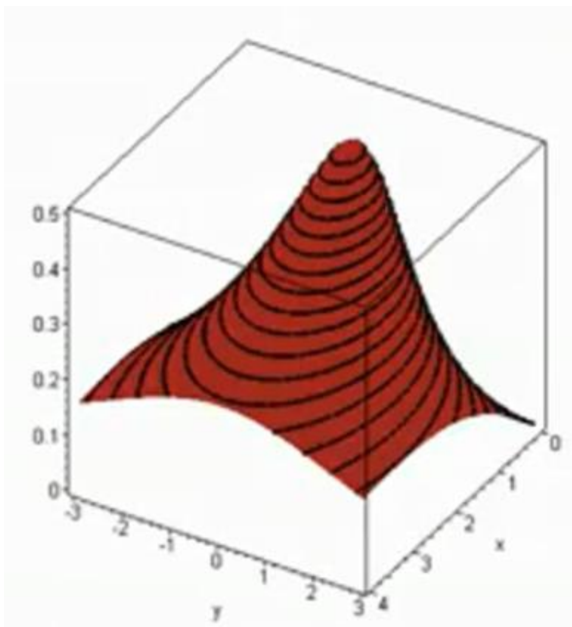
函数在某点的梯度：

它的方向与取得最大方向导数的方向一致，

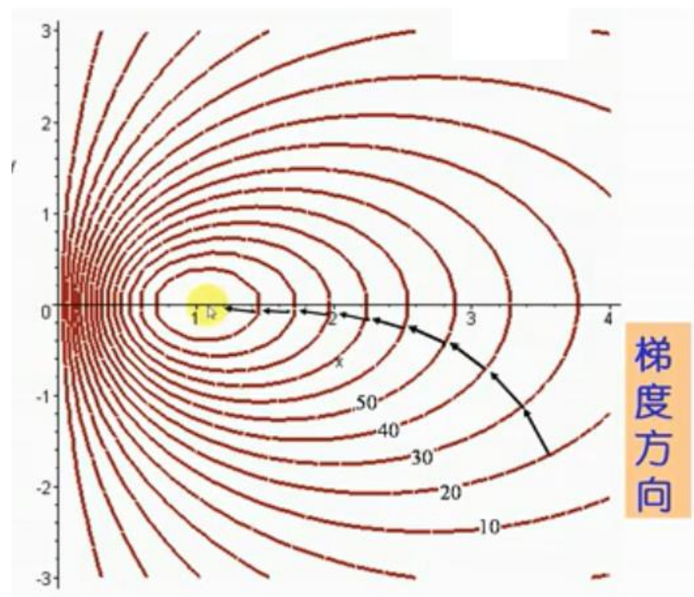
模为方向导数的最大值： $$|\mathbf{grad} f(x,y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

2. 梯度的几何意义

对函数 $z=f(x,y)$，曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=C \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影 $L^*: f(x,y)=C$ **称为函数 f 的等值(高)线**.



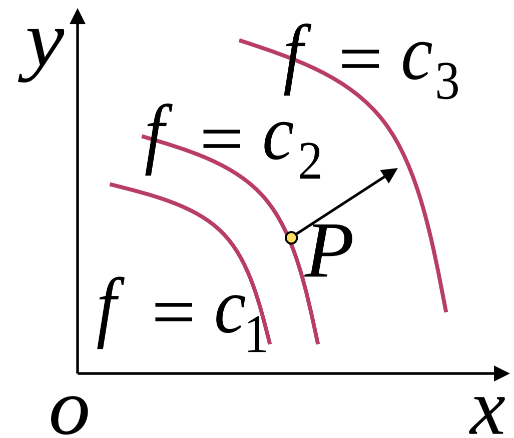
$$z=\frac{x}{x^2+y^2+1}$$



对函数 $z=f(x,y)$，曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=C \end{cases}$ 在 xoy 面上的投影 $L^*: f(x,y)=C$ **称为函数 f 的等值(高)线**.

设 f_x, f_y 不同时为零，**则 L^* 上点 P 处的法向量为**

$$(f_x, f_y)\big|_P = \text{grad}\, f\big|_P$$



(设 $c_1 < c_2 < c_3$)

同样，对应函数 $u=f(x,y,z)$，

有等值面(等量面) $f(x,y,z)=C$，

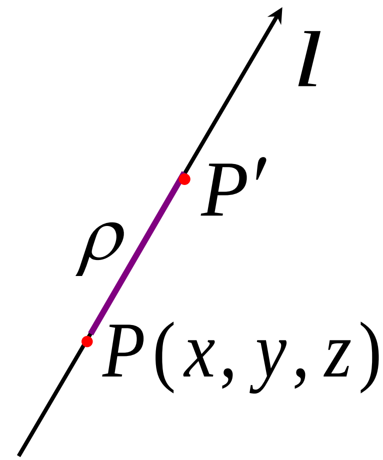
当各偏导数不同时为零时，其上点 P 处的法向量为 $\text{grad}\, f\big|_P$.

函数在一点的梯度垂直于该点等值面(或等值线)，指向函数增大的方向.

三元函数的方向导数与梯度

定义: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处

沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 的极限:



$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}$$

$$=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial l}$$

$$\left(\begin{array}{l}\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2},\\ \Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta,\ \Delta z=\rho\cos\gamma\end{array}\right)$$

称为函数在点 P 处沿方向 l 的方向导数.

若三元函数$u=f(x, y, z)$在空间区域G内具有一阶连续偏导数, 则对于每一点$P(x, y, z) \in G$, 都可定义一个向量(梯度),

$$\mathbf{grad} f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\boldsymbol{i}}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}.$$

类似于二元函数, 该向量方向与取得最大方向导数的方向一致, 其模为方向导数的最大值.

例4 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y$ 在点$(1, 1, 2)$处的梯度, 并问在哪些点处梯度为零.

例4 求函数 $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 3x - 2y$ 在点(**1, 1, 2**)处的梯度, 并问在哪些点处梯度为零.

解: 由梯度计算公式得

$$\operatorname{grad} u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

$$= (2x+3)\boldsymbol{i} + (4y-2)\boldsymbol{j} + 6z\boldsymbol{k},$$

故

$$\operatorname{grad} u(1,1,2) = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k}$$

在 $P_0(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ 处梯为0.

内容小结

1. 方向导数

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 沿方向 **l** (方向角为 α,β,γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿方向 **l** (方向角为 α,β)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

2. 梯度

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f=(f_x(x,y),\,f_y(x,y))$$

3. 关系

- 可微 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 方向导数存在 $\underset{\not\longleftarrow}{\not\longrightarrow}$ 偏导数存在

- $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\operatorname{grad} f\cdot\vec{l}^{\,0}$　梯度在方向 $\vec{l}$ 上的投影.

附加题 1. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\big|_M=$ $\underline{\dfrac{2}{9}(1,2,-2)}$

解: $\operatorname{grad} u\big|_M=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\Bigg|_{(1,2,-2)}$

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{r^2}\cdot 2x$

注意 x , y , z 具有轮换对称性

$$=\left(\frac{2x}{r^2},\frac{2y}{r^2},\frac{2z}{r^2}\right)\Bigg|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{9}(1,2,-2)$$

2. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数是 $\underline{\;1/2\;}$.

提示: $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 则

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}^{\,0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{y^2+1})}{\mathrm{d}\,y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$