第三节 格林公式（二）

一、区域连通性的分类

二、格林公式

三、格林公式的简单应用

四、平面上曲线积分与路径无关条件

五、原函数

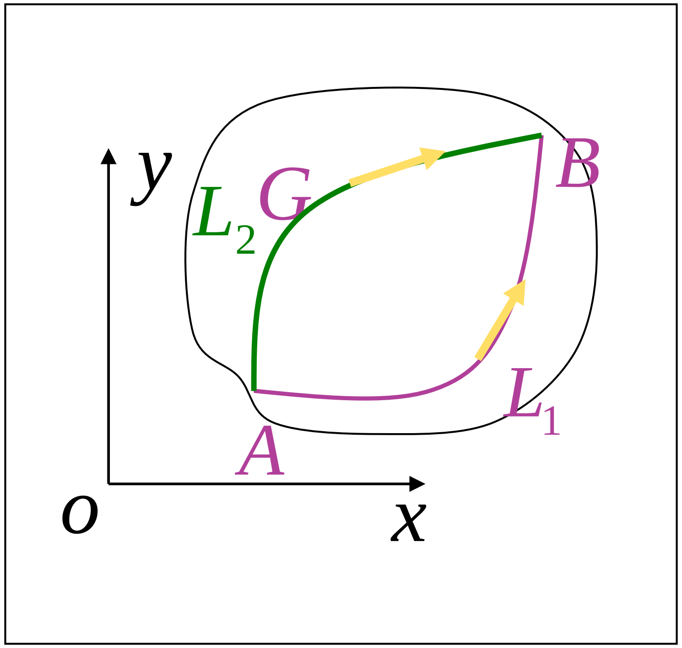
四、平面上曲线积分与路径无关

设G是一个开区域，且$P(x,y)$, $Q(x,y)$在G内具有一阶连续偏导数. 若对G内任意指定的两个点$A\,(x_1,y_1)$, $B\,(x_2,y_2)$，以及G内从点A到点B的任意两段曲线L_1, L_2，等式

$$\int_{L_1} Pdx+Qdy=\int_{L_2} Pdx+Qdy$$

恒成立，则称曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$ 在G内与路径无关. 否则称曲线积分与路径有关. 此时,从点A到点B的曲线积分可记为 $\int_A^B Pdx+Qdy$

或 $\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx+Qdy$



五、 原函数

设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$具有一阶连续偏导数. 若二元函数 $u=u(x, y)$ 满足

$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

则称函数$u=u(x, y)$ 是表达式 $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ 的一个原函数.

四个等价条件

定理2. 设D是单连通域，函数$P(x,y), Q(x,y)$在D内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(2) 沿D中任意光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

(3) 对D中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

与路径无关, 只与起止点有关.

(4) $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$在 D 内有原函数

即 $\mathrm{d}\,u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

(1) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

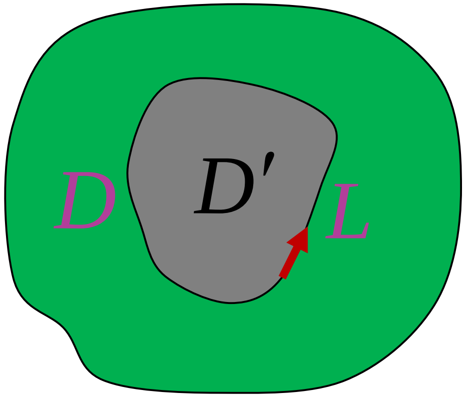
(2) 沿D 中任意光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$.

证明 **(1)** $\Longrightarrow$ **(2)**

设L为D中任一分段光滑闭曲线,所围区域为 $D'\subset D$

(如图) , 因此在 D' 上

$$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$$



利用格林公式**, 得**

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

(2) 沿 D 中任意光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

(3) 对 D 中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与路径无关, 只与起止点有关.

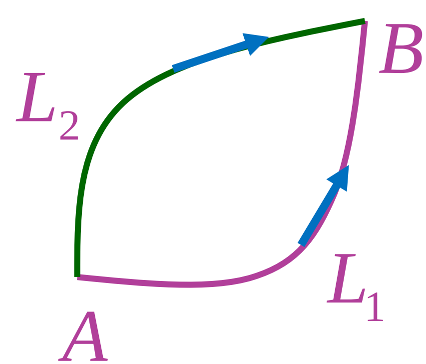
证明 (2) $\Longrightarrow$ (3)

设 L_1, L_2 为 D 内任意两由 A 到 B 的有向分段光滑曲线

$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{L_1 + L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$$

$$\therefore \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$



说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

(3) 对 D 中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

与路径无关, 只与起止点有关.

(4) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内有原函数

即 $\mathrm{d}\,u(x,y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

证明 (3) $\Longrightarrow$ (4)

在 D 内取定点 $A(x_0, y_0)$ 和任一点 $B(x, y)$, 因曲线积分与路径无关, 有函数

$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则 $\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y)$

(3) 对 D 中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

与路径无关, 只与起止点有关.

(4) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内有原函数

即 $\quad \mathrm{d}u(x,y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

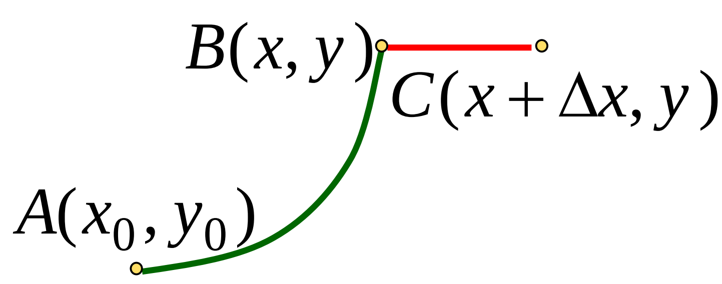
证明 (3) $\Longrightarrow$ (4) $\quad u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y)$$

$$= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\,y)} P\mathrm{d}x$$

$$= P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x$$



(3) 对 D 中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

与路径无关, 只与起止点有关.

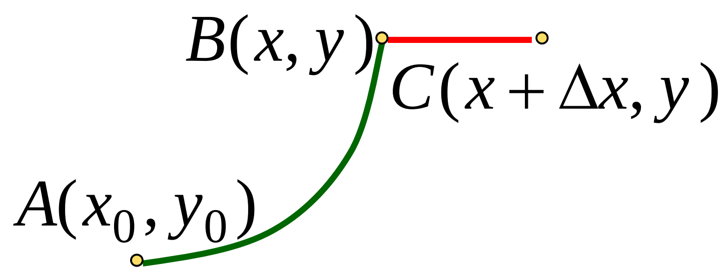
(4) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ **在 D 内有原函数**

即 $\quad \mathrm{d}\,u(x,y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

证明 (3) $\Longrightarrow$ (4) $\qquad u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

$$\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y)$$

$$= P(x+\theta\,\Delta x, y)\Delta x$$



$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} P(x+\theta\,\Delta x, y) = P(x,y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$, 因此有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

(4) $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$在 ***D*** 内有原函数

即 $\mathrm{d}u(x,y)=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

(1) 在 ***D*** 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

证明 (4) $\Longrightarrow$ (1)

设存在函数 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

则 $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=P(x,y)\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\end{cases}$$

P*, *Q 在 ***D*** 内具有连续的偏导数,

$$\boxed{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}}$$

从而在***D***内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

定理2. 设D 是单连通域，函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$在D 内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

(2) 沿D 中任意光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

(3) 对D 中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

与路径无关, 只与起止点有关.

(4) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在 D 内有原函数

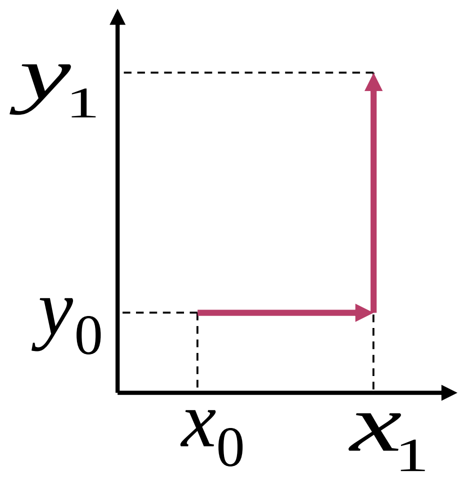
即 $\mathrm{d}\,u(x,y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

注:根据定理2，若在某区域内 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，则

1) 计算曲线积分时，可选择方便的积分路径;

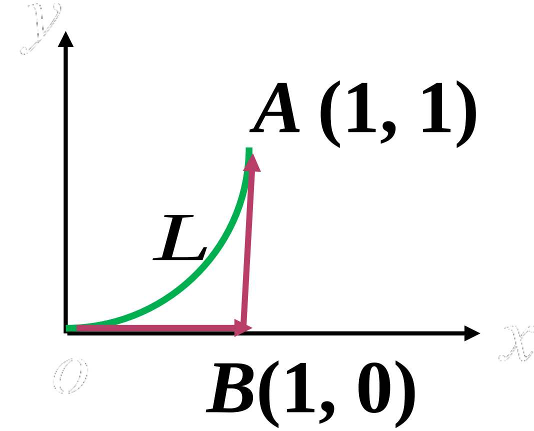
$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)\,\mathrm{d}y$$



例1. 计算 $\int_L xy^2\,\mathrm{d}x+(x^2y+1)\,\mathrm{d}y$,

其中 L **为沿** $y=x^3$ **从** $O\,(0,0)$ **到** $A\,(1,1)$.



解: $\begin{cases} P=xy^2 & \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=2xy \\ Q=x^2y+1 & \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2xy \end{cases}$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 曲线积分与路径无关

$$\int_L xy^2dx+\left(x^2y+1\right)dy=\int_{OB}+\int_{BA}$$

$$=0+\int_0^1(y+1)dy$$

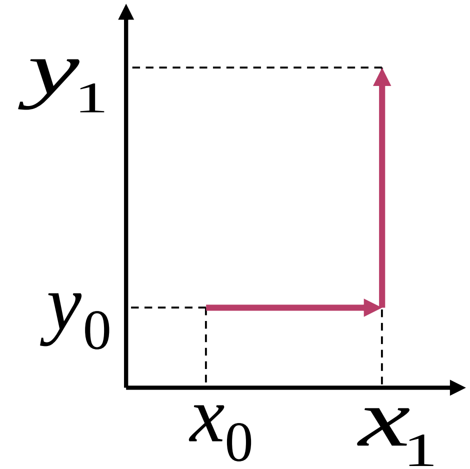
$$=\frac{3}{2}$$

注:根据定理2，若在某区域内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则

1) 计算曲线积分时，可选择方便的积分路径;

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x_1} P(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,y)\,\mathrm{d}y$$



2) 求曲线积分时，可利用格林公式简化计算，

若积分路径不是闭曲线，可添加辅助线;

例2. 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 O (0, 0) 到 A (4, 0).

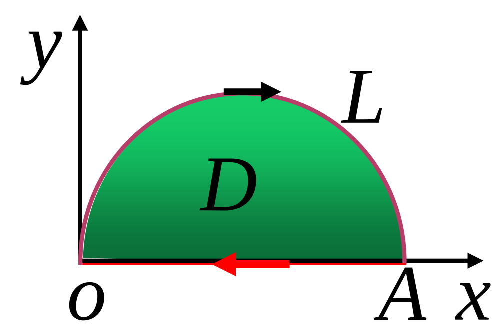
解: $\begin{cases} P = x^2+3y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=3 \\ Q = y^2-x \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-1 \end{cases}$

添加辅助线段 $\overline{AO}$, 它与L 所围区域为D, 则

$$\text{原式} = \oint_{L+\overline{AO}} (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}} (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x = 8\pi+\frac{64}{3}$$



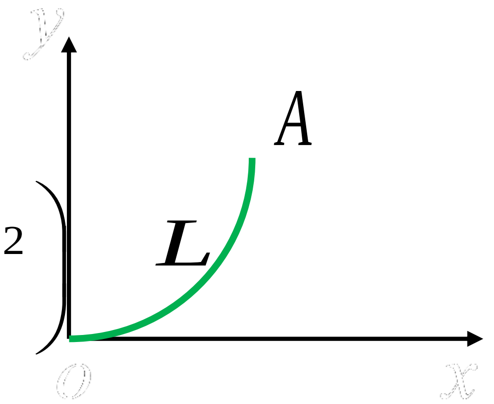
注:根据定理2，若在某区域内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则

3) 则存在$u(x, y)$，使得$du = P\,dx + Q\,dy$;

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}\mathrm{d}u=u(x,y)\Big|_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}$$

例3. 计算 $\displaystyle\int_L xy^2dx+x^2ydy$

其中L 为沿 $y=x^3$从 O (0, 0) 到 A (1, 1).



解: $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ $\quad xy^2dx+x^2ydy=d\left(\dfrac{1}{2}x^2y^2\right)$

$$\int_L xy^2dx+x^2ydy=\frac{1}{2}x^2y^2\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}$$

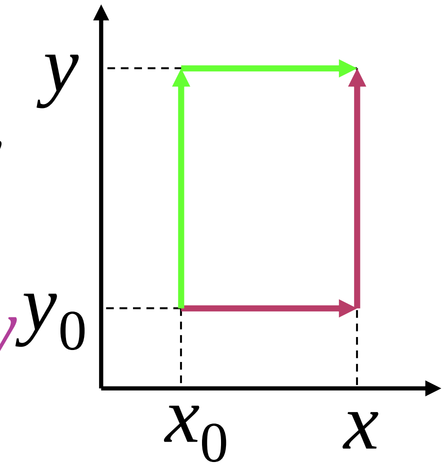
说明:根据定理2，若在某区域内 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, 则

4) 可用积分法求 $\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在域 D 内的原函数:

取定点 $(x_0, y_0)\in D$ 及动点 $(x, y)\in D$, 则原函数为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$



或 $$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$$

例4. 验证 $xy^2\,\mathrm{d}x + x^2 y\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

证: $P = xy^2,\ Q = x^2 y,$ 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

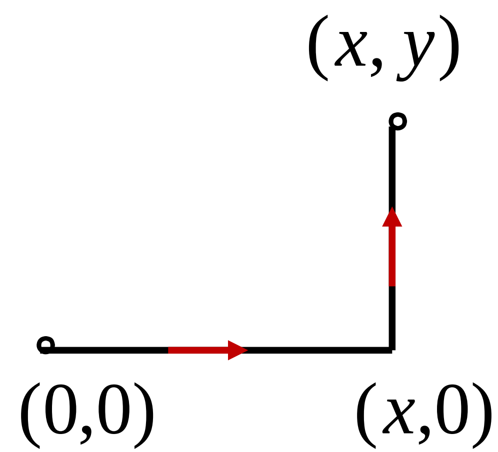
由定理 可知, 存在函数 $u\,(x\,,\,y)$ 使

$$\mathrm{d}u = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2 y\mathrm{d}y$$

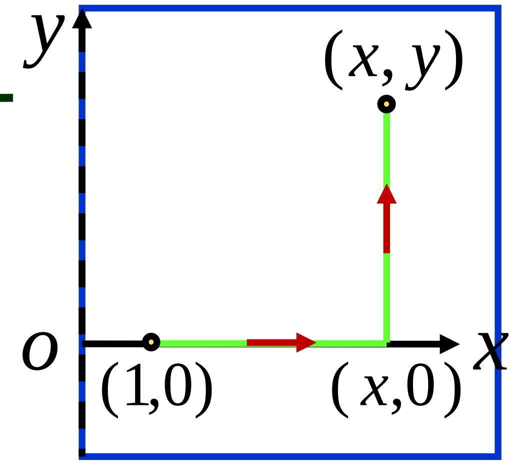
$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\mathrm{d}x + x^2 y\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x x\cdot 0^2\,\mathrm{d}x + \int_0^y x^2 y\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^y x^2 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}x^2 y^2$$



例5. 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 ($x > 0$) 内存在原函数 , 并求出它.



证: 令 $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (x > 0)$$

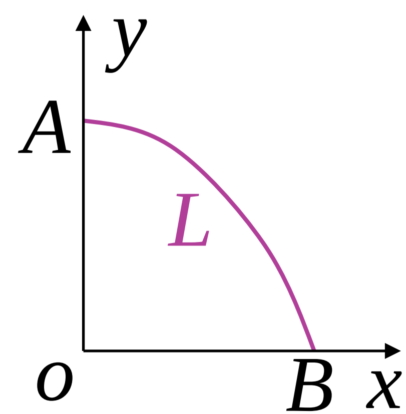
由定理 可知存在原函数

$$u(x, y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$= -\int_1^x 0 \cdot \mathrm{d}x + x\int_0^y \frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \arctan\frac{y}{x} \qquad (x > 0)$$

例6. 设质点在力场 $\vec{F}=\dfrac{k}{r^2}(y,-x)$ 作用下沿曲线 L：$y=\dfrac{\pi}{2}\cos x$ 由 $A(0,\dfrac{\pi}{2})$ 移动到 $B(\dfrac{\pi}{2},0)$，求力场所作的功 W (其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).

解: $W=\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_L \dfrac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$



令 $P=\dfrac{ky}{r^2},\ Q=-\dfrac{kx}{r^2}$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{k(x^2-y^2)}{r^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad (x^2+y^2\neq 0)$$

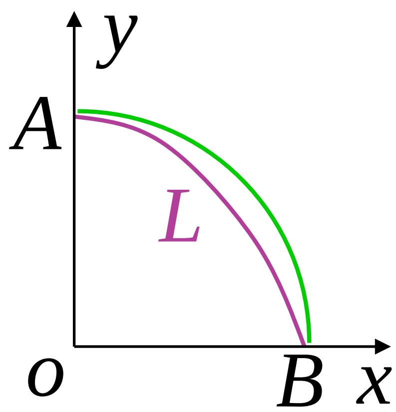
可见, 在不含原点的单连通区域内积分与路径无关.

取圆弧 $\widehat{AB}$: $x=\frac{\pi}{2}\cos\theta,\ y=\frac{\pi}{2}\sin\theta\ \ (\theta:\frac{\pi}{2}\to 0)$

$$W=\int_{\widehat{AB}}\frac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$$

$$=k\int_{\pi/2}^{0}-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}k$$



思考: 积分路径是否可以取 $\overline{AO}\cup\overline{OB}$? 为什么?

注意, 本题只在不含原点的单连通区域内积分与路径无关!

内容小结

1. 格林公式 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

$\Longleftrightarrow$ 对 D 内任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$