概率论中的高等数学

一、函数、极限和连续

二、导数

三、定积分

四、二重积分

知识点思维导图

一、函数、极限和连续

二、导数

三、定积分

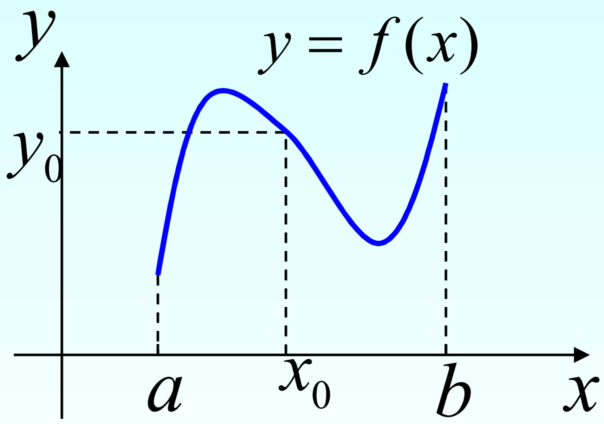
四、二重积分

一、函数、极限和连续

函数$y=f(x)$. x为自变量, y为因变量,

定义域 D , 值域 $f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$.

函数 $f(x)$ 的图像.它通常对应着平面直角坐标系 xoy 上的曲线.



$(D=[a,b])$

五类基本初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数.**

（1）常见幂函数 $y=x \quad y=x^2 \quad y=x^3$

$y=x^{-1} \quad y=\sqrt{x} \quad y=\sqrt[3]{x}$

（2）常见指数函数 $y=e^x \quad y=e^{-x}$

（3）常见对数函数 $y=\ln x$

（4）常见三角函数 $y=\sin x \quad y=\cos x$

$y=\tan x \quad y=\cot x$

（5）常见反三角函数 $y=\arcsin x \quad y=\arccos x$

$y=\arctan x \quad y=\operatorname{arc}\cot x$

函数的极限

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A = f(+\infty) \qquad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A = f(x_0+0)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A = f(-\infty) \qquad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A = f(x_0-0)$$

极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B,$

则 (1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\pm g(x)\right] = A\pm B;$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)g(x)\right] = AB;$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}. \quad (B\neq 0)$

函数的连续

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right]=0$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$$

定理 设 $u=\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $y=f(u)$在 $\boldsymbol{u=a}$ 连续，即 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$,则复合函数$y=f(\varphi(x))$当$\boldsymbol{x\to x_0}$时的极限存在且等于$\boldsymbol{f(a)}$,即

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(a).$$

将定理结论换写法

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(a)=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).$$

$$\lim_{u\to a}f(u)=\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(a).$$

（1）基本初等函数在其定义域内都是连续的.

（2）初等函数在其定义区间内均为连续函数.

求连续函数在连续点的极限等于求该点函数值！

二、导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=y'\big|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

函数$\boldsymbol{y=f(x)}$的导函数, 简称导数. 记为

$$y',\ f'(x),\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

导数基本公式（背下来）

(1) $(C)' = 0$

(2) $(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}$

(3) $(e^{x})' = e^{x}$

(4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$

(6) $(\cos x)' = -\sin x$

(7) $(\tan x)' = \sec^{2} x$

(8) $(\cot x)' = -\csc^{2} x$

(9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(11) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$

(12) $(\operatorname{arc}\cot x)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$

导数的四则运算

$$(1)\ \big(u(x)\pm v(x)\big)' = u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2)\ \big(u(x)v(x)\big)' = u(x)v'(x)+u'(x)v(x);$$

$$(3)\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x)\neq 0).$$

复合函数求导

$$y=f[\varphi(x)]\Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

三、定积分

[*a*, *b*]称为积分区间

积分上限

积分号

积分下限

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

被积函数

被积表达式

积分变量

如果函数*f*(*x*)在区间[*a*, *b*]上定积分存在,则称 *f*(*x*)在 [*a*, *b*]可积.

性质1（线性性质）

(1) $$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k\text{是常数}).$$

性质2（对积分区间的可加性 ）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

积分上限函数的求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x) \qquad \left[\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]_x'=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

积分基本公式（背下来）

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ （k为常数）. (2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{1+\alpha} + C$ $(\alpha \neq -1)$.

(3) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$ (4) $\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C.$

(5) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.$ (6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$

(7) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C.$ (8) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$

(9) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$ (10) $\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C.$

定积分凑微分法（第一类换元法）

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x))\Big|_a^b, \quad (F'(u) = f(u)).$$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal[\substack{\alpha=\varphi(a)\\ \beta=\varphi(b)}]{u=\varphi(x)} \int_\alpha^\beta f(u)\mathrm{d}u = F(u)\Big|_\alpha^\beta$$

定积分换元法（第二类换元法）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal[\substack{\varphi(\alpha)=a\\ \varphi(\beta)=b}]{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

定积分分部积分公式

设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 都具有连续导数，则

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v=[uv]_a^b-\int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

四、二重积分

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}_{\text{积分和}}$$

$$\iint_{\underbrace{D}_{\text{积分域}}} \boxed{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积微元}}}$$

积分表达式

性质1 (线性性质)设$f(x,y)$和$g(x,y)$在D上可积，k为常数，则

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$

$$\iint_D k\cdot f(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质2 (对积分区域的可加性)设$f(x,y)$在D上可积且$D=D_1+D_2$,

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

直角坐标系下的计算公式

(1)积分区域为X型时 $D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$

(2)积分区域为Y型时 $D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

若积分区域为矩形区域 $D:\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

根据二重积分化为二次积分的计算公式，在计算二重积分时一定要先把积分区域画出来！

极坐标系下的计算公式

1. 极点在区域***D***之外
$$D:\begin{cases} r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta) \\ \alpha\le\theta\le\beta \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$$

2. 极点在区域***D***的边界上
$$D:\begin{cases} 0\le r\le r_2(\theta) \\ \alpha\le\theta\le\beta \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_0^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$$

3. 极点在区域***D***内
$$D:\begin{cases} 0\le r\le r_2(\theta) \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$$

一、函数、极限和连续

（一）函数的概念和性质

（二）初等函数

（三）函数的极限

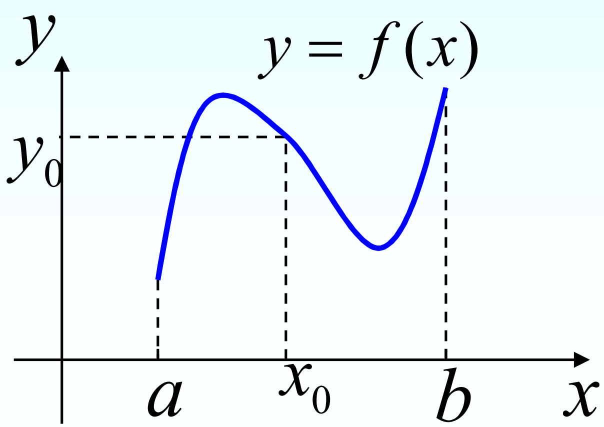
（四）函数的连续

（一）函数的概念和性质

设 D 是 $\mathbf{R}$ 的一个非空数集.若对每个数 $x \in D$,按照某种法则 f,有唯一确定的 $y \in \mathbf{R}$与之对应, 则称 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的函数,记为 $y=f(x)$. 称D 为定义域, x为自变量, y 为因变量或函数, $f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$称为函数的值域.

$$G(f)=\{(x, y) \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的图像.它通常对应着平面直角坐标系 xoy上的曲线.



$(D=[a,b])$

设函数 $y=f(u)$的定义域为D_u,函数 $u=g(x)$的定义域为D_x .若对于D_x内任意一点 x，有确定的值 $u=g(x)\in D_u$与之对应,由于 $y=f(u)$，又有确定的值 y与之对应.这样通过 u 有确定的数 y 与 x 对应,从而得到了一个以 x 为自变量,y 为因变量的函数，此函数称为 $y=f(u)$与$u=g(x)$复合而成的复合函数,记为 $y=f(g(x))$, u为中间变量.

1. 有界性

设X为实数集. 如果存在正数M, 使得对任意的 $x\in X$ 所对应的 $f(x)$ 使 $|f(x)|\le M$总成立, 则称函数 $f(x)$ 在X上有界. 如果这样的 M 不存在, 称函数 $f(x)$ 在X上无界.

例 (1) 函数 $y=\cos x$ 在其定义域内是有界的，也称它是有界函数.

(2) 函数 $y=x\cos x$ 在其定义域内是无界的，也称它是无界函数.

(3) 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在开区间 (0, 1) 内是无界的; 但它在(1, 2)内是有界的.

2. 单调性

如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2， 当 $x_1 < x_2$时，恒有 $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$)，则称函数$f(x)$ 在I 上单调增加(减少). 去掉等号称为“严格单调”

例 (1) $y = x^2$

在区间$(-\infty, +\infty)$ 上不是单调函数，

但它在$[0, +\infty)$ 上是严格单调增加，

在$(-\infty, 0]$上是严格单调减少.

(2) $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$上是严格单调增加.

3. 奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称，如果对于任意$x\in D$有$f(-x)=f(x)$，则称函数$f(x)$在D上是偶函数；如果对于任意$x\in D$，有$f(-x)=-f(x)$，则称函数$f(x)$在D上是奇函数.

在几何上，偶函数的图象关于y轴对称，奇函数的图象关于原点对称.

例 (1) 函数 $y=\sin x$是奇函数，

(2) 函数 $y=\cos x$是偶函数.

4. 周期性

设函数$f(x)$在数集D上有定义，若存在不为零的数T，对于任何x,且$x+T\in D$都有$f(x+T)=f(x)$，则称函数$f(x)$是周期函数，称T为$f(x)$的周期. 使上式成立的最小正数称为最小正周期. 通常我们所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例 (1) 函数 $y=\sin x$是周期函数，周期为2π.

(2) 函数 $y=\tan x$是周期函数，周期为π.

（二）初等函数

1. 基本初等函数

幂函数，指数函数，对数函数，三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

（1）幂函数

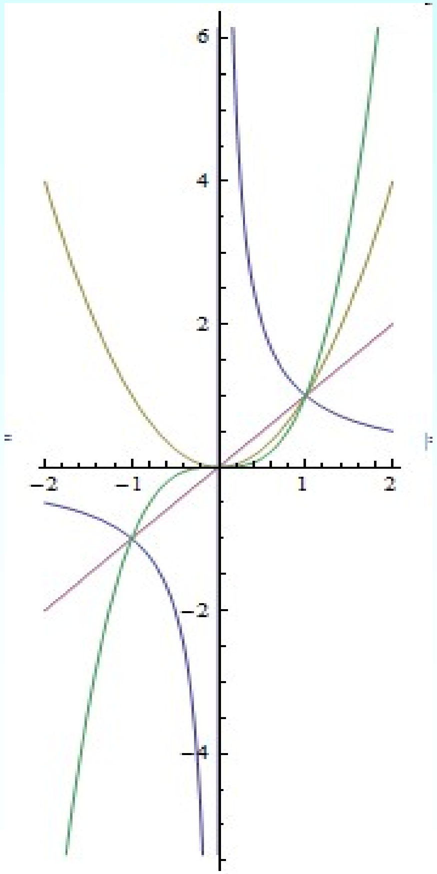
$$y = x^{\mu}$$

$$y = x \qquad y = x^2 \qquad y = x^3$$

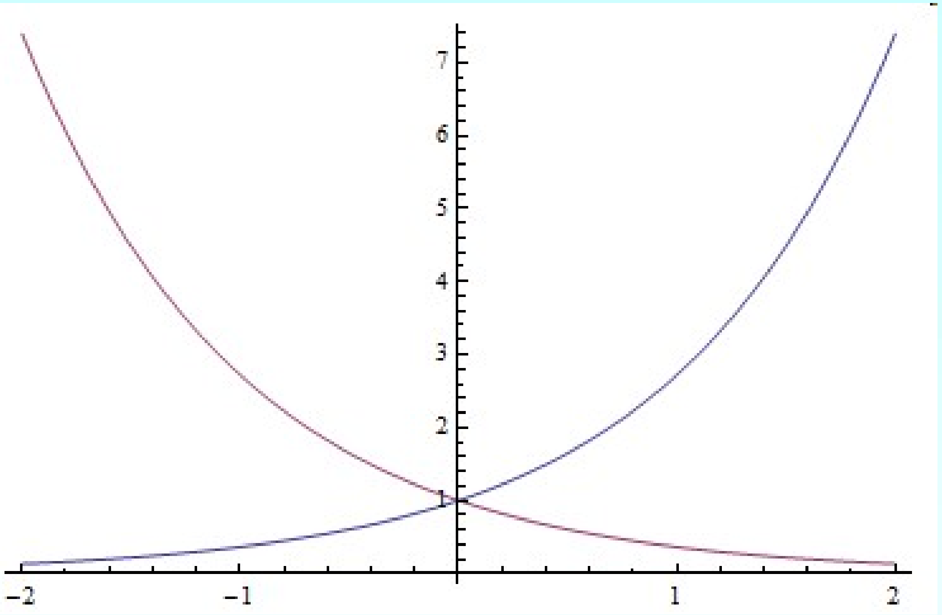
$$y = x^{-1} \qquad y = \sqrt{x} \qquad y = \sqrt[3]{x}$$

$$x^{\mu} = e^{\ln(x^{\mu})} = e^{\mu \ln x}$$

$$a^{\mu} \cdot a^{\lambda} = a^{\mu+\lambda} \qquad a^{\mu} \cdot b^{\mu} = (ab)^{\mu}$$



（2）指数函数 $y = a^x \quad y = e^x \quad y = e^{-x}$



定义域：全体实数***R***

值域：　$y > 0$

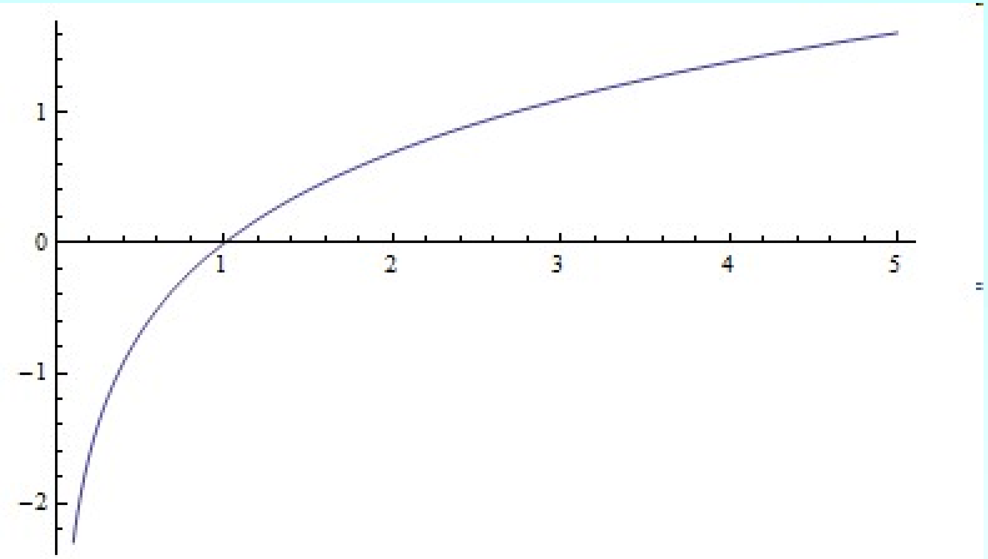
特殊点：**(0, 1)**

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$$

（3）对数函数 $y=\log_a x \quad y=\ln x$



定义域：$x>0$

值域：全体实数$\boldsymbol{R}$

特殊点：**(1, 0)**

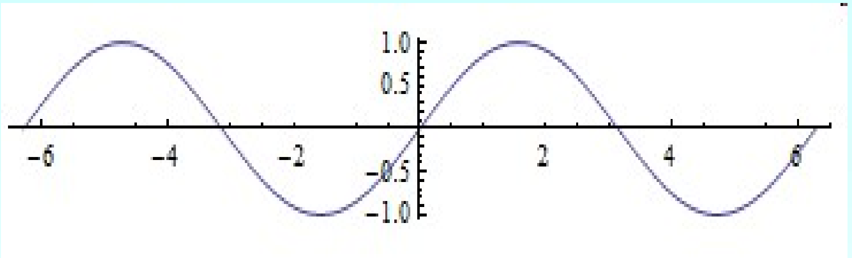
$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\ln(x_1x_2)=\ln x_1+\ln x_2$$

$$\ln\frac{x_1}{x_2}=\ln x_1-\ln x_2$$

（4）三角函数

$$y = \sin x$$



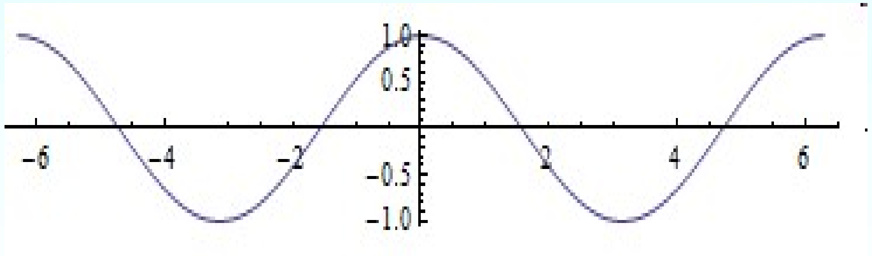
定义域：全体实数$\boldsymbol{R}$

值域：**[-1, 1]**

周期：$\mathbf{2\pi}$

特殊点：**(0, 0)**

$$y = \cos x$$



定义域：全体实数$\boldsymbol{R}$

值域：**[-1, 1]**

周期：$\mathbf{2\pi}$

特殊点：**(0, 1)**

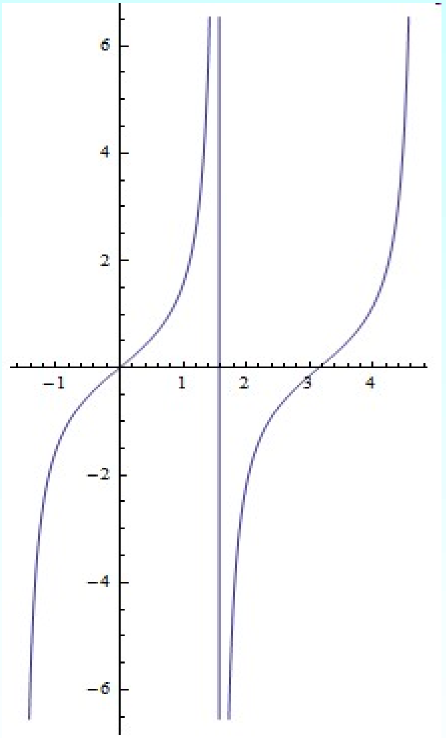
$$\sin(\theta \pm \varphi) = \sin\theta\cos\varphi \pm \cos\theta\sin\varphi$$

$$\cos(\theta \pm \varphi) = \cos\theta\cos\varphi \mp \sin\theta\sin\varphi$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

（4）三角函数

$$y = \tan x$$

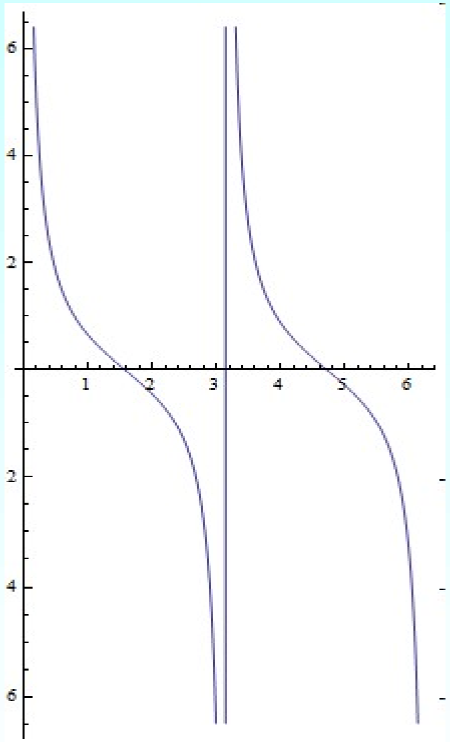


$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$y = \cot x$$



定义域： $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

值域：(-∞, +∞)

周期：π

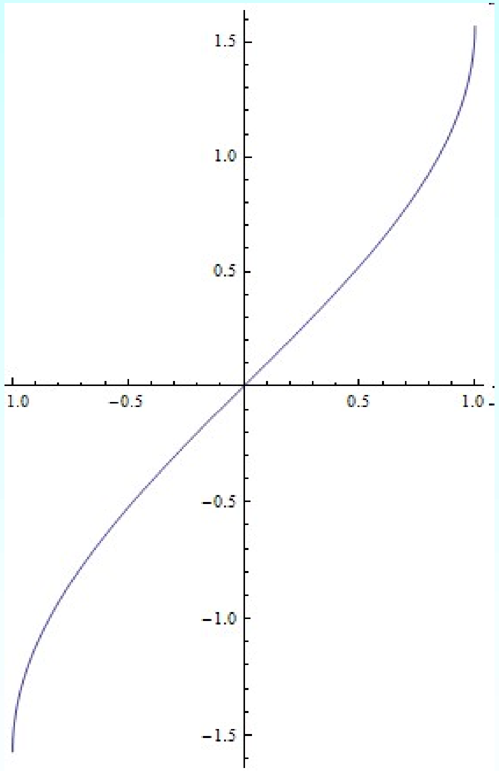
定义域： $x \neq k\pi$

值域：(-∞, +∞)

周期：π

（5）反三角函数

$$y = \arcsin x$$



定义域：**[-1, 1]**

值域：**[-π/2, π/2]**

$$\sin(\arcsin x) = x$$

$$\cos(\arccos x) = x$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$$

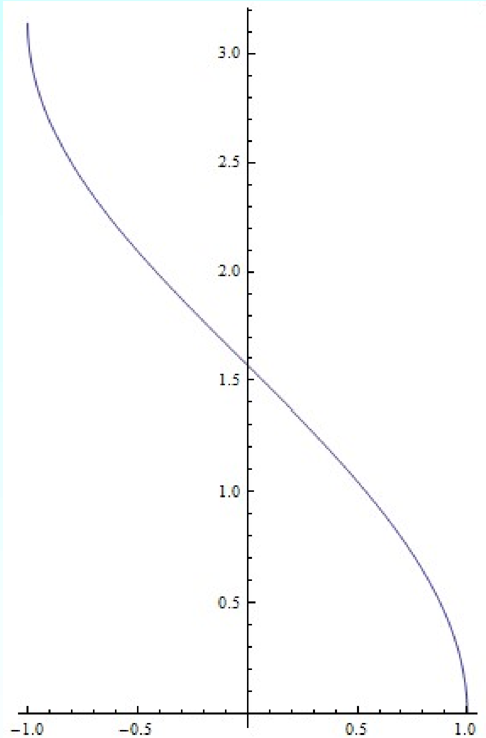
$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

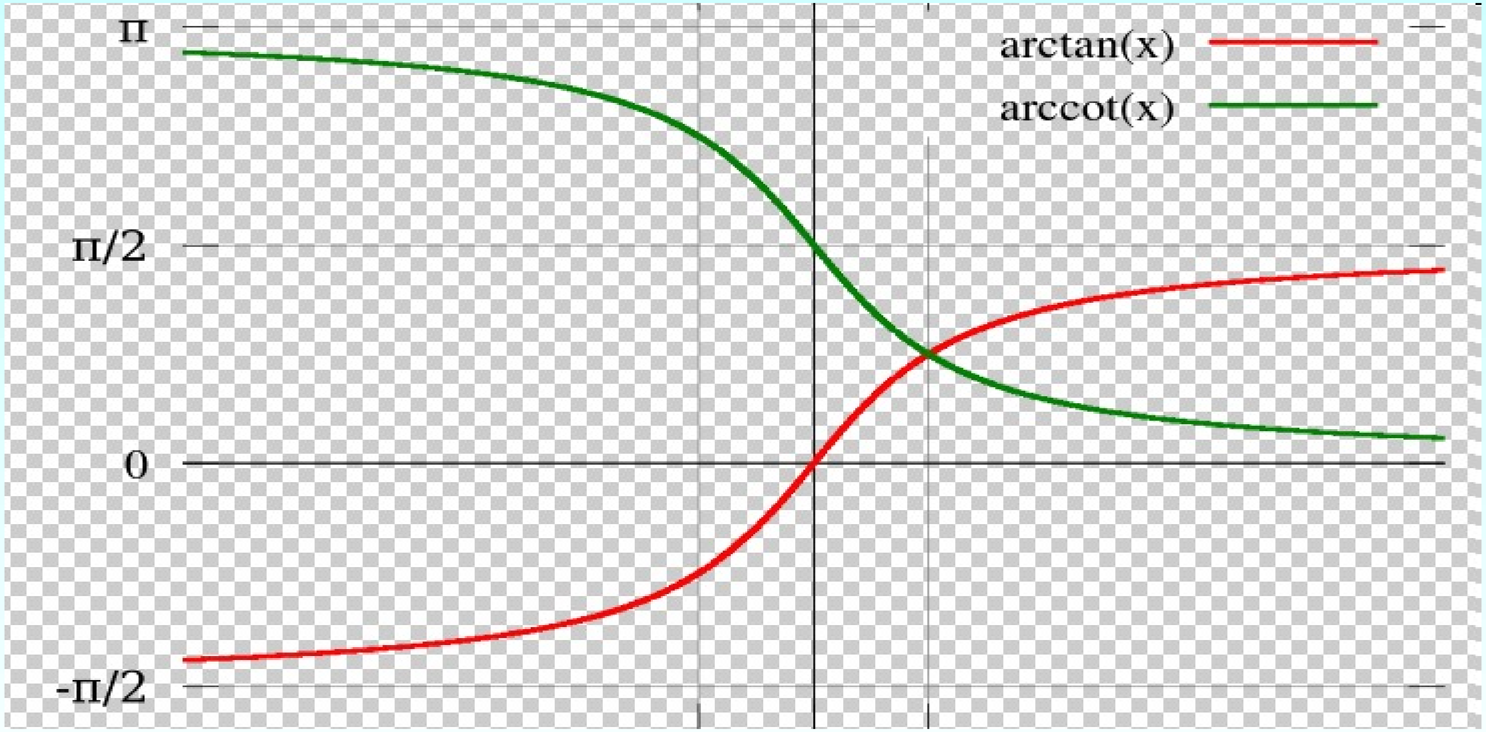
$$y = \arccos x$$



定义域：**[-1, 1]**

值域：**[0, π]**

（5）反三角函数



$y = \arctan x$

定义域：(-∞, +∞)

值域：(-π/2, π/2)

$y = \operatorname{arc}\cot x$

定义域：(-∞, +∞)

值域：(0, π)

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而构成的函数称为初等函数.

$$y=\sqrt{1+x^2}, \quad y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y=e^{-3x}, \quad y=e^{\ln\sin^2 x}$$

$$y=\sin\frac{x}{2}, \quad y=\arctan\frac{x}{3}$$

分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in R\setminus Q.\end{cases}$$

（三）函数的极限

1.自变量 x 趋于无穷大时函数的极限

1） $x\to+\infty$时的极限

定义1　设 $f(x)$ 在$(a,+\infty)$有定义，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 X，使得对于 $x>X$ 的一切 x，恒有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称数A为$f(x)$当 $x\to+\infty$时的**极限**，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$$

通俗地说：当自变量 x 趋于正无穷大时，

函数值 $f(x)$与A靠的越来越近.

2）$x \to -\infty$时的极限

设 $f(x)$ 在$(-\infty, a)$ 有定义，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数 X，使得对于 $x < -X$ 的一切 x，恒有不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称数 A 为 $f(x)$当 $x \to -\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

通俗地说：当自变量 x 趋于负无穷大时，

函数值 $f(x)$与A靠的越来越近.

3） $x\to\infty$时的极限

对于任意给定的正数ε, 总存在正数 X ,使得对于 $|x|>X$ 的一切 x，恒有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称数 A 为 $f(x)$当 $x\to\infty$时的极限, 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A$$

通俗地说：当自变量 x 趋于无穷大时，

函数值 $f(x)$与A靠的越来越近.

如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 直线 $\boldsymbol{y = A}$ 称为曲线 $\boldsymbol{y = f(x)}$ 的水平渐近线.

结论 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A. \end{cases}$

2. 自变量 x 趋于有限值时函数的极限

定义2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若对于任意给定的正数ε, 存在$\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$时，恒有不等式

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(x)$当 $x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad or \quad f(x)\to A\ (x\to x_0).$$

通俗地说：当自变量 x 趋于 x_0 时，

函数值 $f(x)$与A靠的越来越近.

左极限（单侧极限）

设函数 $f(x)$在点 x_0 的左侧附近有定义，若对于任意给定的正数ε，存在$\delta>0$，当 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时，恒有不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A为函数 $f(x)$当$x\to x_0$时的左极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A \quad or \quad f(x_0 - 0) = A.$$

通俗地说：当自变量 x 从左侧趋于 x_0 时，

函数值$f(x)$与A靠的越来越近.

右极限（单侧极限）

设函数 $f(x)$在点 x_0 的右侧附近有定义，若对于任意给定的正数ε，存在$\delta>0$，当 $0 < x - x_0 < \delta$时，恒有不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

成立，则称 A为函数 $f(x)$当$x\to x_0$时的右极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A \quad or \quad f(x_0+0) = A.$$

通俗地说：当自变量 x 从右侧趋于 x_0 时，

函数值 $f(x)$与A靠的越来越近.

结论 $$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A}$$

3. 无穷大量

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty.$$

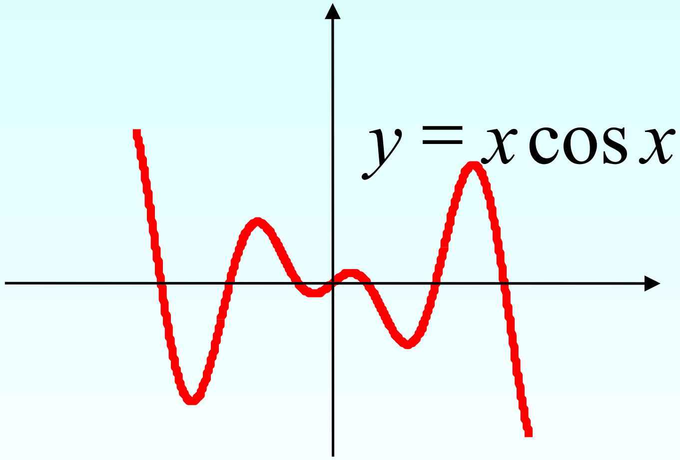
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.$$

注 **(i)** 无穷大不是很大的数，它是描述函数的一种状态.

(ii) 一个函数是否为无穷大与自变量的变化趋势有关.

(iii) 函数为无穷大, 必定无界. 但反之不真 ！



若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，称直线 $x = x_0$ 为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线.

4. 极限的四则运算法则

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B,$

则 (1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = A + B;$

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = A - B;$

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) g(x)] = AB;$

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}. \quad (B \neq 0)$

结论对单侧极限，自变量趋于无穷大的极限也同样成立.

5. 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad 或 \quad \lim_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad 或 \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

常见的等价无穷小：（$x\to 0$）

$$\sin x \sim x \sim \tan x,\quad 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2},$$

$$\arcsin x \sim x \sim \arctan x,$$

$$\ln(1+x) \sim x\ ,\quad e^x - 1 \sim x\ ,$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

（四）函数的连续

定义 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，给自变量 x 以增量 Δx，$x_0+\Delta x\in U(x_0)$，相应地有函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right]=0$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

通俗地说：自变量改变量趋于0，函数的改变量也趋于0.

等价定义 设 $y=f(x)$ 在点 x_0的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

通俗地说：当自变量 x 趋于 x_0 时，

函数值 $f(x)$与$f(x_0)$靠的越来越近.

单侧连续

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$ ，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0处左连续.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ ，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0处右连续.

函数在点 x_0连续的充要条件是:

函数在点 x_0左连续且右连续.

连续函数的四则运算和复合运算

定理1 **(1)** 有限个在某点连续的函数的和是一个在该点连续的函数.

(2) 有限个在某点连续的函数的积是一个在该点连续的函数.

(3) 两个在某点连续的函数的商是一个在该点连续的函数,只要分母在该点不为零.

定理2 设 $u=\varphi(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, $y=f(u)$ 在 $\boldsymbol{u=a}$ 连续,

即 $\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$,则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 当 $\boldsymbol{x\to x_0}$ 时的极限存在且等于 $\boldsymbol{f(a)}$,即

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(a).$$

将定理结论换写法

$$\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(a)=f(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)).$$

$$\lim_{u\to a}f(u)=\lim_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f(a).$$

由于初等函数是由5类基本初等函数和常函数经过有限次的四则运算和复合得到的函数，综上所述，有如下结论.

（1）基本初等函数在其定义域内都是连续的.

（2）初等函数在其定义区间内均为连续函数.

求连续函数在连续点的极限等于求该点函数值！

函数的间断点

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，如果 $f(x)$ 符合下列条件之一：

(1) $f(x)$ 在 x_0 点无定义;

(2) $f(x)$ 在 x_0 点有定义，但极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $f(x)$ 在 x_0 点有定义，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 也存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;

则 $f(x)$ 在 x_0 不连续, 称 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

二、导数

（一）导数的概念

1. 函数在一点处的导数

定义 设函数$y=f(x)$在点x_0处的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称$y=f(x)$在点x_0处可导，并称该极限值为函数$y=f(x)$在点x_0处的导数，记为$f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

也可以记作 $y'\big|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

注 (i) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$是函数 $y=f(x)$在间隔 Δx 内的平均变化率，从而 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$为函数在点的变化率；

(ii) 令$x = x_0 + \Delta x$，则定义式可写为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

令$\Delta x = -h$，则定义式也可写为

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}.$$

2. 单侧导数

函数$y=f(x)$在点x_0 的左导数，记为$f'_-(x_0)$，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

函数$y=f(x)$在点x_0 的右导数，记为$f'_+(x_0)$，即

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

结论 函数$f(x)$在点x_0处可导的充要条件是左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

例 讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

3. 导函数

函数$y=f(x)$在区间(a, b)内可导

$\Leftrightarrow$ 函数$y=f(x)$在(a, b)内每一点都可导.

函数$y=f(x)$在区间$[a, b]$内可导

$\Leftrightarrow$ ①函数$y=f(x)$在(a, b)内每一点都可导;
② $y=f(x)$在$x=a$处右可导, 在$x=b$处左可导.

设函数$y=f(x)$在区间I上可导, 则对于I内的每一个x值, 都有唯一确定的导数值与之对应, 这就构成了x的一个新的函数, 这个新的函数叫做原来函数$y=f(x)$的导函数, 简称导数. 记为

$$y', f'(x), \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

（二）导数基本公式（背下来）

(1) $(C)' = 0$

(2) $(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}$

(3) $(e^{x})' = e^{x}$

(4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

(5) $(\sin x)' = \cos x$

(6) $(\cos x)' = -\sin x$

(7) $(\tan x)' = \sec^{2} x$

(8) $(\cot x)' = -\csc^{2} x$

(9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$

(11) $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^{2}}$

(12) $(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^{2}}$

（三）导数的四则运算

设函数$u(x)$，$v(x)$在点x处可导, 则它们的和、差、积与商(分母为零的点除外)在 x处也可导, 且

$$(1)\ \left(u(x)\pm v(x)\right)'=u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2)\ \left(u(x)v(x)\right)'=u(x)v'(x)+u'(x)v(x);$$

$$(3)\ \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\qquad (v(x)\neq 0).$$

注 定理中的(1)、(2)可以推广到有限个函数的情形.

（四）复合函数求导

定理　设函数 $u=\varphi(x)$在点x处可导, 而$y=f(u)$在对应的u处可导, 则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在x处可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

……………链锁规则(链式法则**chain rule**)

注 **(i)** 此定理可推广到任意有限个函数复合的情形.

(ii) 使用链锁规则的关键:首先把复合函数分解为一些简单函数的复合, 然后由最外层开始先使用法则, 再利用求导公式, 一层层求导. 注意不能脱节, 不能遗漏.

例1 求下列函数的导数

$$(1)\, y=\log_a x \Rightarrow y=\frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow y'=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(2)\, y=\sin(x^2) \Rightarrow y=\sin u,\, u=x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du}=\cos u,\ \frac{du}{dx}=2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2x\cdot\cos(x^2)$$

or $\quad y'=\cos(x^2)\cdot(x^2)'=\cos(x^2)\cdot 2x$

$$(3)\, y=a^x \Rightarrow y=e^{x\ln a} \Rightarrow y'=e^{x\ln a}\cdot(x\ln a)'$$

$$=a^x\ln a$$

例2 已知 $f(u)$ 可导, $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$，求 y'.

$$y'=[f(\sin^2 x)]'+[f(\cos^2 x)]'$$

$$=f'(\sin^2 x)\cdot(\sin^2 x)'+f'(\cos^2 x)\cdot(\cos^2 x)'$$

$$=f'(\sin^2 x)\cdot(2\sin x\cos x)+f'(\cos^2 x)\cdot(-2\cos x\sin x)$$

$$=\sin 2x[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)]$$

注 $[f(\sin^2 x)]'$与 $f'(\sin^2 x)$ 含义的区别:

$[f(\sin^2 x)]'$ 表示函数 $f(\sin^2 x)$对x的导数;

而$f'(\sin^2 x)$表示函数$f(\sin^2 x)$ 对 $\sin^2 x$ 的导数.

例3 已知 $F'(x)=f(x)$, 求 $\dfrac{dF(\ln x)}{dx}, \dfrac{dF(\sqrt{x})}{dx}$

$$\frac{dF(\ln x)}{dx}=\frac{dF(\ln x)}{d\ln x}\cdot\frac{d\ln x}{dx}=F'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}f(\ln x)$$

$$\frac{dF(\sqrt{x})}{dx}=\frac{dF(\sqrt{x})}{d\sqrt{x}}\cdot\frac{d\sqrt{x}}{dx}=F'(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}f(\sqrt{x})$$

三、定积分

（一）定积分的概念和性质

（二）积分基本公式

（三）换元积分法

（四）分部积分法

（一）定积分的概念和性质

定义1 设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上有界. 在区间$[a, b]$内任意插入n-1个分点: $a=x_0<x_1<x_2< \dots <x_{n-1}<x_n=b$，记各小区间长度为$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ $(i=1,2, \dots, n)$，在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点$\xi_i(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$，作和式

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta x_i\}$，只要当$\lambda \to 0$时, 和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 总趋于确定的值I，则称$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，称此极限为函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

[*a*, *b*]称为积分区间

积分上限

积分号

积分下限

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

被积函数

被积表达式

积分变量

如果函数***f*(*x*)**在区间[***a*, *b***]上定积分存在,则称 ***f*(*x*)**在 [***a*, *b***]可积.

注 **(i)** 定义中要求$a<b$, 为方便起见, 允许$b\le a$, 并规定

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x,\quad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

(ii) 定积分是一个数值, 是一个依赖于被积函数$f(x)$及积分区间$[a, b]$的常量，与积分变量采用什么字母无关, 即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(u)\mathrm{d}u=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(y)\mathrm{d}y=\cdots$$

性质1（线性性质）

(1) $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

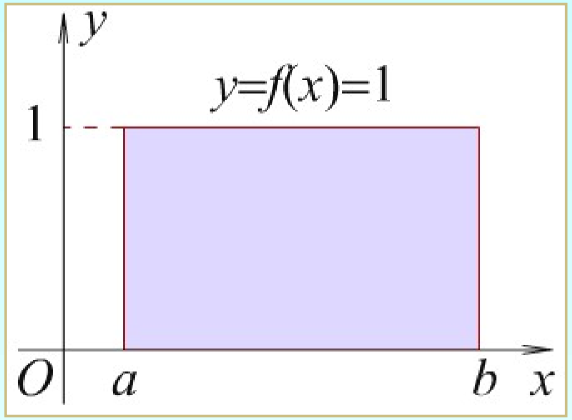
(2) $$\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (k\text{是常数}).$$

性质2（对积分区间的可加性）

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

性质3 若在区间$[a,b]$上$f(x)\equiv 1$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a.$$



性质4

若区间$[a,b]$上$f(x)\geq 0$, 则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0.$

推论1

若在区间$[a,b]$上$f(x)\leq g(x)$, 则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$

性质5（绝对可积性）

若区间$[a, b]$上$f(x)$可积, 则 $|f(x)|$ 可积, 且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

性质6（估值定理）

设 M, m是函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的最大值与最小值，则

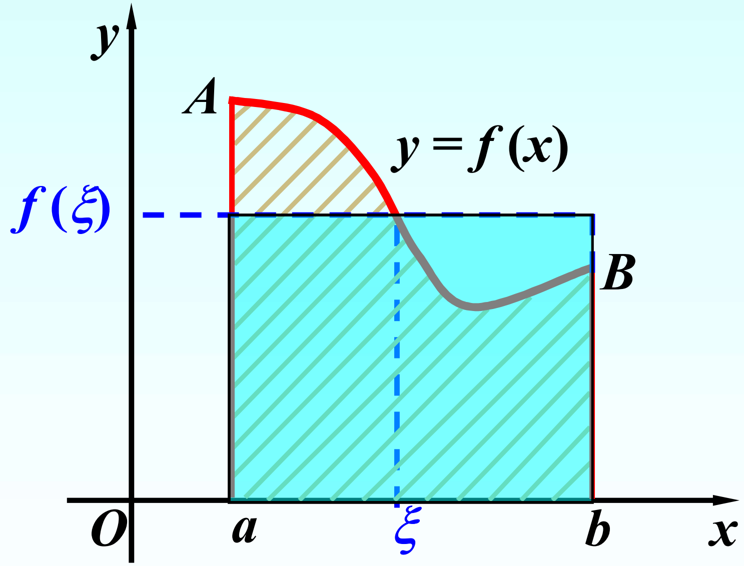
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

性质7 (积分中值定理)

设$f(x)$在$[a, b]$上连续, 则在$[a, b]$上至少存在一点ξ, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \qquad a \le \xi \le b \quad \text{积分中值公式}$$

注 (i) 该公式的几何解释: 一条连续曲线 $y = f(x)$ 在$[a, b]$上的曲边梯形面积等于以区间$[a, b]$的长为底, $[a, b]$ 中一点 ξ的函数值为高的矩形面积 .



(ii) 通常将 $f(\xi) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 称为$f(x)$在$[a, b]$上的平均值.

积分上限函数的性质

定理1 如果$f(x)$在$[a,b]$上连续，则积分上限函数

$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在$[a, b]$上可导，且

$$\Phi'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=f(x),(a\le x\le b)$$

注 $\Phi'(x)=f(x)$ 表明积分上限的函数 $\Phi(x)$ 就是 $f(x)$ 的一个原函数，即连续函数必有原函数，因此定理1又称原函数存在定理.

几个常用结论

$$\left[\int_{a}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

$$\left[\int_{\psi(x)}^{b} f(t)\mathrm{d}t\right]' = -f(\psi(x))\psi'(x)$$

$$\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t\right]' = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

（二）积分基本公式（背下来）

(1) $\int k\mathrm{d}x = kx + C \quad (k\text{为常数}).$ (2) $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{1+\alpha} + C \quad (\alpha \neq -1).$

(3) $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C.$ (4) $\int e^{x}\mathrm{d}x = e^{x} + C.$

(5) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C.$ (6) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C.$

(7) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C.$ (8) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C.$

(9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C.$ (10) $\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C.$

（三）换元积分法

1. 不定积分凑微分法

定理　设函数 $f(u)$ 在区间 I 上有定义且有原函数 $F(u)$，

$u=\varphi(x)$ 有连续导数，且 $\varphi(x)$ 的值域包含在 I 中，则有

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}=F(\varphi(x))+C. \quad (*)$$

称此方法为第一类换元法，也称凑微分法；

称(*)式为凑微分公式.

例2 计算下列不定积分

$$(1)\int 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}u=2\mathrm{d}x]{u=2x} \int \mathrm{e}^{u}\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{u}+C = \mathrm{e}^{2x}+C$$

$$\int \cos 3x\mathrm{d}x \xlongequal[\mathrm{d}u=3\mathrm{d}x]{u=3x} \int \cos u\cdot\frac{1}{3}\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\sin u + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C$$

$$\int 2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(2x) = \mathrm{e}^{2x}+C$$

$$(2)\int \tan x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} = \boxed{-\ln|\cos x|+C}$$

$$\int \cot x\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x} = \boxed{\ln|\sin x|+C}$$

常见的凑微分的形式（背下来！）

(1) $\int f(ax+b)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\quad (a\neq 0).$

(2) $\int f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int f(x^n)\mathrm{d}x^n.$

(3) $\int f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}\ln x.$

(4) $\int f(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}.$

(5) $\int f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}\sin x.$

(6) $\int f(\tan x)\sec^2 x\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}\tan x.$

(7) $\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x.$

(8) $\int f(\arctan x)\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}\arctan x.$

(9) $\int f(\arcsin x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x.$

2. 定积分凑微分法

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x = F(\varphi(x))\Big|_a^b \quad (F'(u) = f(u)).$$

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal[\substack{\alpha=\varphi(a)\\ \beta=\varphi(b)}]{u=\varphi(x)} \int_\alpha^\beta f(u)\mathrm{d}u = F(u)\Big|_\alpha^\beta$$

例 计算 $\int_0^1 (ax+1)^n \mathrm{d}x \quad (a \neq 0, n \neq -1)$.

$$\text{原式} = \frac{1}{a}\int_0^1 (ax+1)^n \,\mathrm{d}(ax+1) = \left.\frac{(ax+1)^{n+1}}{a(n+1)}\right|_0^1 = \frac{(a+1)^{n+1}-1}{a(n+1)}$$

$$\text{原式} \xlongequal{t=ax+1} \frac{1}{a}\int_1^{a+1} t^n \mathrm{d}t = \left.\frac{t^{n+1}}{a(n+1)}\right|_1^{a+1}$$

3. 不定积分换元法（第二类换元法）

定理 设函数 $f(x)$在区间 I内连续， $x=\varphi(t)$ 在 I 对应的区间 I_t内有连续导数，且 $\varphi'(t)\neq 0$，则有换元公式

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)},$$

其中 $t=\varphi^{-1}(x)$是 $x=\varphi(t)$ 的反函数.

4. 定积分换元法（第二类换元法）

定理　设函数$f(x)$在区间$[a, b]$上连续，$x=\varphi(t)$ 满足下列条件：

(1) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b$ 且当t从α变到β时，对应的x单调地从a变到b；

(2) $\varphi'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上连续.

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

注意积分上下限同时要变！！！

计算 $\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x$， 其中 $f(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x \xlongequal{t=x-1} \int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^0 0\mathrm{d}t+\int_0^1 2t\mathrm{d}t=0+t^2\Big|_0^1=1$$

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}\Rightarrow f(x-1)=\begin{cases}2(x-1), & x\geq 1,\\ 0, & x<1.\end{cases}$$

$$\int_0^2 f(x-1)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x-1)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x-1)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 0\mathrm{d}x+\int_1^2 2(x-1)\mathrm{d}x=0+(x^2-2x)\Big|_1^2=1$$

注意：由于被积函数在积分区间内表达式不唯一，所以需要把积分区间根据不同表达式分段！！！

设 $f(x)$在$[-a, a]$上连续，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{a} [f(x) + f(-x)]dx$$

特别地 $$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & f(-x) = -f(x) \\ 2\int_{0}^{a} f(x)dx, & f(-x) = f(x) \end{cases}$$

（四）分部积分法

1. 不定积分分部积分公式

设函数 $u = u(x)$ 与 $v = v(x)$ 都具有连续导数，则

$$\int uv'\mathrm{d}x = \int (uv)'\mathrm{d}x - \int u'v\mathrm{d}x$$

即

$$\boxed{\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.}$$

例 计算下列积分

$$(1)\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C$$

$$(2)\int x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\overset{t=-x}{=\!=\!=}\int t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t+C=-x\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}+C$$

$$(3)\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int x^2\mathrm{d}\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x-\int 2x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\cdots$$

定积分分部积分公式

设函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 都具有连续导数，则

$$\boxed{\int_a^b u\,\mathrm{d}v=\left[uv\right]_a^b-\int_a^b v\,\mathrm{d}u}$$

四、二重积分

（一）二重积分的概念和性质

（二）直角坐标系下的计算公式

（三）极坐标系下的计算公式

（一）二重积分的概念和性质

设函数$z=f(x, y)$在平面有界闭区域 D 上有定义，将D任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i$ $(i=1,2,\ldots)$,其中$\Delta\sigma_i$ 表示第i个小区域,同时也表示其面积.在 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i$的直径$\}$，若不论区域$D$的分法如何，也不论小区域上点$(\xi_i,\eta_i)$的取法如何，当$\lambda\to 0$时，上述和式都有确定的极限$I$，则称函数$f(x,y)$ 在D上可积，并且称极限 I 就是$f(x,y)$ 在D上的二重积分．记为　　　　　.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}_{\text{积分和}}$$

$$\underbrace{\iint_D}_{\text{积分域}} \boxed{\underbrace{f(x,y)}_{\text{被积函数}}\,\underbrace{\mathrm{d}\sigma}_{\text{面积微元}}}$$

积分表达式

基本性质

性质1 (线性性质)设$f(x,y)$和$g(x,y)$在D上可积，k为常数，则

$$\iint_D (f(x,y)+g(x,y))\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$

$$\iint_D k\cdot f(x,y)\mathrm{d}\sigma = k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质2 (对积分区域的可加性)设$f(x,y)$在D上可积且$D=D_1+D_2$,则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

对称性质

性质1 设积分区域D关于x轴对称， D_1为D在x轴上方的部分，则

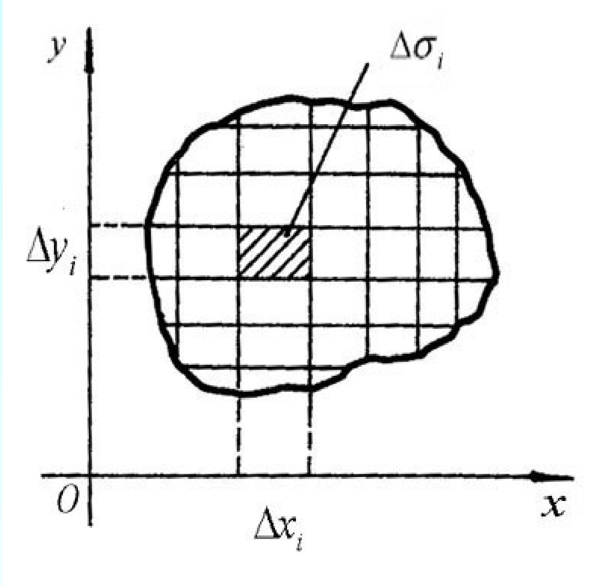
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases} 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & \text{当} f(x,-y)=f(x,y) \\ 0, & \text{当} f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

性质2 设积分区域D关于y轴对称， D_2为D在y轴右侧的部分，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases} 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \text{当} f(-x,y)=f(x,y) \\ 0, & \text{当} f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

（二）直角坐标系下的计算公式

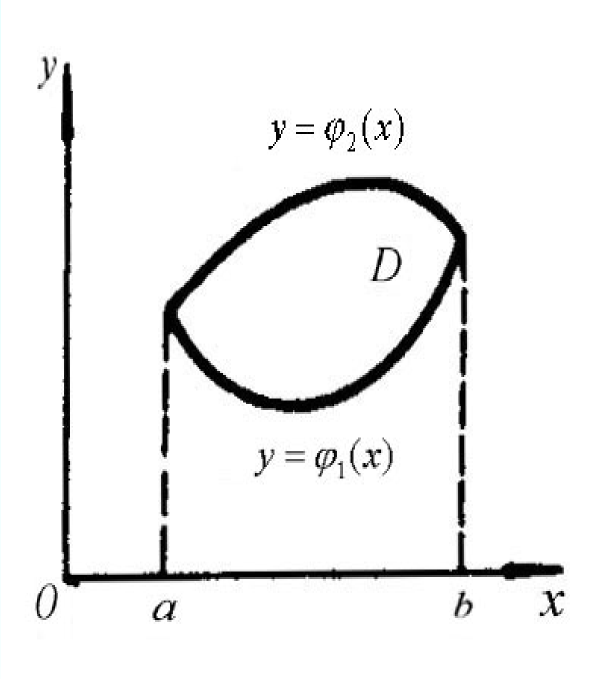
若函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则二重积分的值与区域 D 的划分无关.因此，在直角坐标系下可以用平行于坐标轴的直线网把区域分成若干个矩形小区域. 则 $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$.所以在直角坐标系下，常把面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 写成 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是二重积分可表示成



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

1. 积分区域处理

(1) X型区域

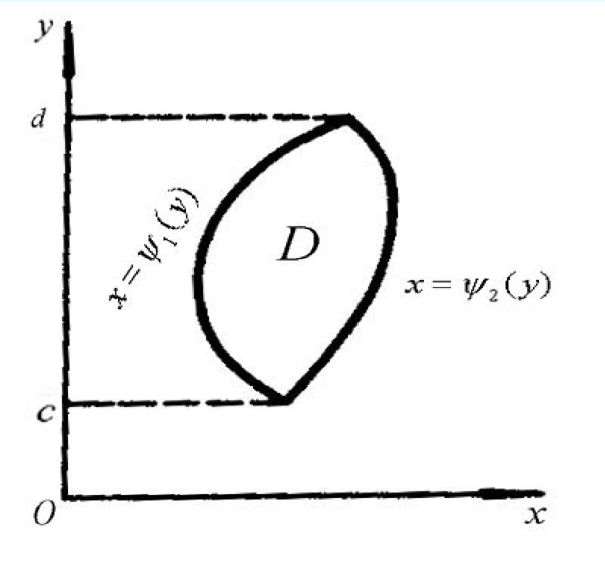


$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$D=\{(x,y)\mid\ a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\ \}$$

(2) Y型区域

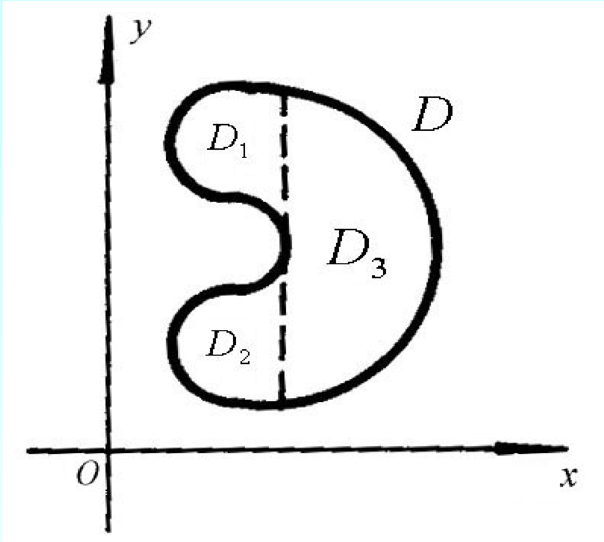
$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



$$D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$$

(3)非简单闭区域

若积分区域D既不是X型区域又不是Y型区域，此时，需用平行于x轴或y轴的直线将区域D划分成X型区域或Y型区域.



由图示，D分割成了D_1，D_2，D_3三个X型区域．由二重积分的性质有

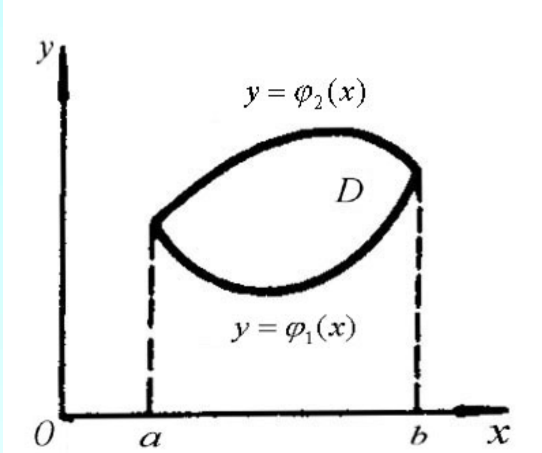
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

2. 二重积分化为二次积分

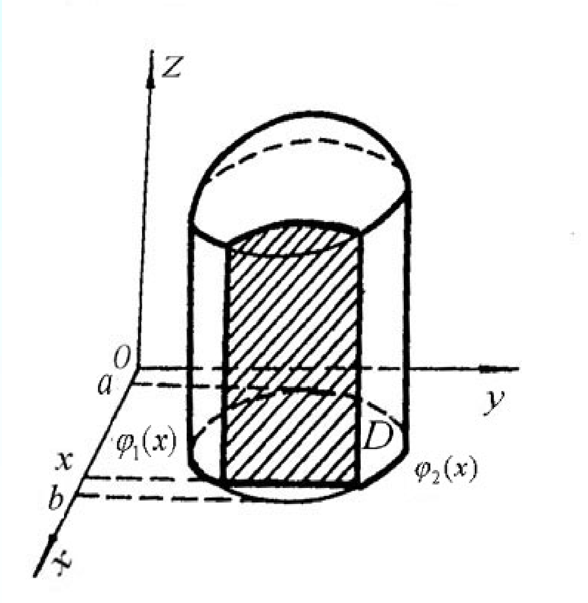
(1)积分区域为X型时

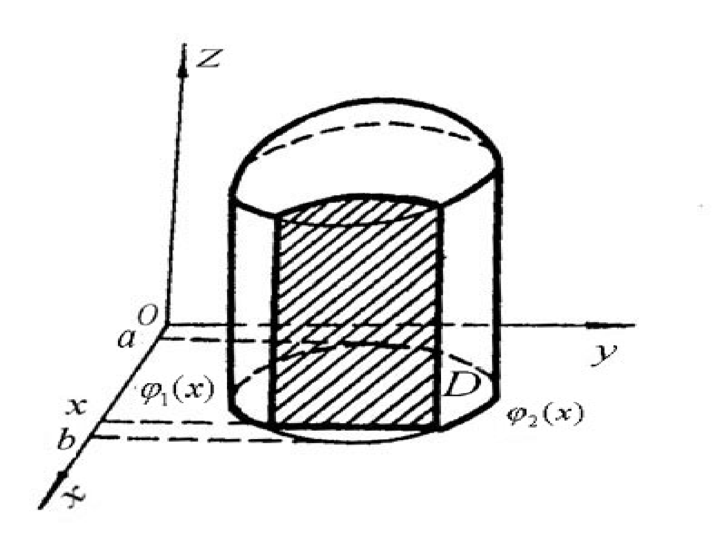
设$f(x, y) \geq 0$，积分区域为

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x) \\ a \leq x \leq b\end{cases}$$



在[a,b]中任取一点x，作平行于yoz坐标面的平面，此平面与曲顶柱体相交，截面是一个以$[\varphi_1(x),\varphi_2(x)]$为底，曲线$z=f(x,y)$为曲边的曲边梯形(如图中阴影部分).





根据定积分中“计算平行截面面积为已知的立体的体积”的方法，设该曲边梯形的面积为$A(x)$，则所求曲顶柱体的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x.$$

由定积分的意义，有 $A(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$，于是

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

这就是直角坐标系下二重积分的计算公式，它把二重积分化为二次积分．它是一个先对***y***后对***x***的二次积分．上面公式还常记为

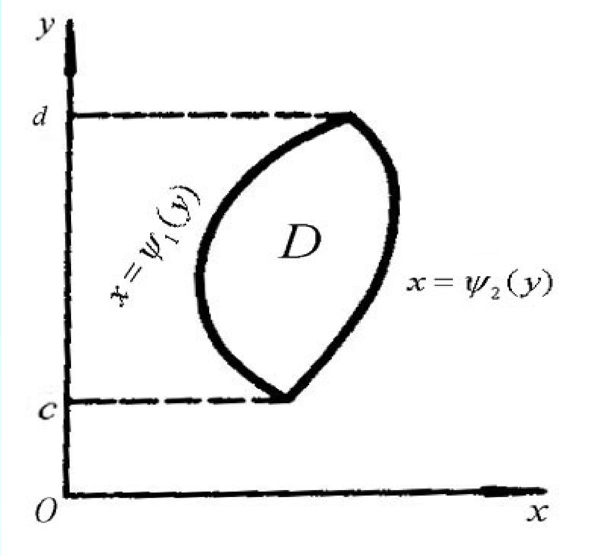
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

注 推导过程中的***f*(*x*, *y*)≥0**条件去掉，上述公式也成立！

(2)积分区域为Y型时

积分区域为

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



类似，可得以下公式

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

这个二次积分称为先对***x*** 后对***y***的二次积分.

若积分区域为矩形区域 $D:\begin{cases} a \le x \le b \\ c \le y \le d \end{cases}$

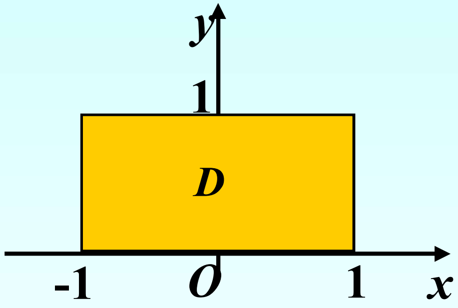
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x.$$

根据二重积分化为二次积分的计算公式，在计算二重积分时一定要先把积分区域画出来！

例1 计算

$$I=\iint_D (x+y+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\ \}.$$

解： 积分区域如图



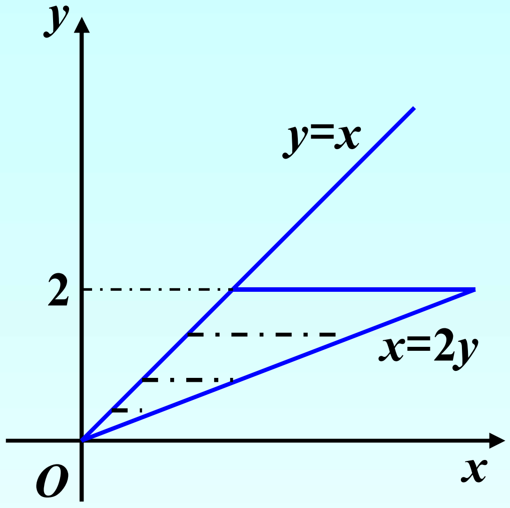
$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^1 (x+y+3)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}(x+\frac{7}{3})\mathrm{d}x=7.$$

$$I=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-1}^{1}(x+y+3)\mathrm{d}x=\int_0^1 2(y+3)\mathrm{d}y=7.$$

注 本例说明：两个不同积分次序的二次积分相等，这个结果使我们在具体计算一个二重积分时，可以有选择地将其化为其中一种二次积分，以使计算更为简单.

例2 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+y^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中D是由下列三条直线所围成:

$$y=x,\ y=\frac{1}{2}x,\ y=2.$$



解：积分区域如图

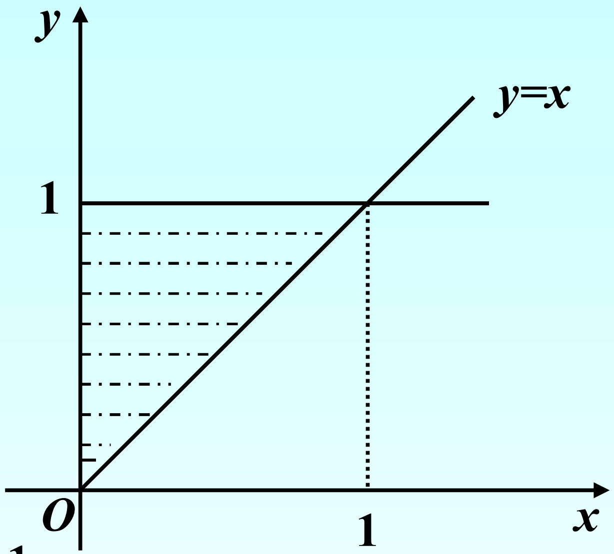
$$I=\int_0^2 \mathrm{d}y\int_y^{3y}(x^2+y^2-y)\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\frac{32}{3}y^3-2y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{112}{3}.$$

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{x/2}^{x}(x^2+y^2-y)\mathrm{d}y+\int_2^4 \mathrm{d}x\int_{x/2}^{2}(x^2+y^2-y)\mathrm{d}y.$$

注 合理选择二次积分的次序以简化二重积分的计算是我们常常要考虑的问题，其中，既要考虑积分区域的形状，又要考虑被积函数的特性.

例3 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，

其中D是由$y=x$，$y=1$，$x=0$所围成.



解： 积分区域如图

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y e^{-y^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1 ye^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}.$$

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_x^1 e^{-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

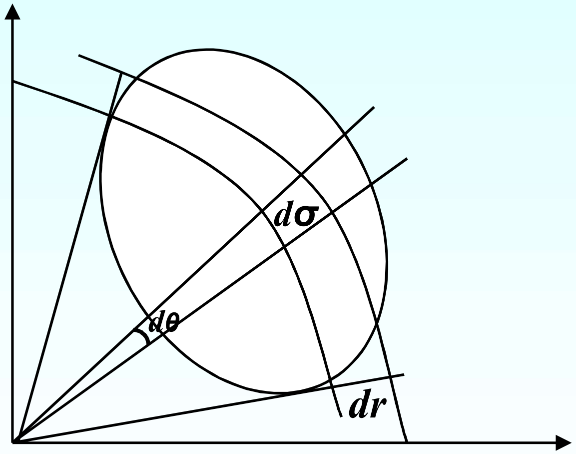
注 将二重积分化为二次积分进行计算，积分次序的选择太重要了！一般被积函数少哪个变量，就先对它积分！

（三）极坐标系下的计算公式

直角坐标与极坐标的关系为 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.

其中$\boldsymbol{r}$为极径，$\boldsymbol{\theta}$为极角.

计算曲顶柱体的体积，积分区域如图



$$\because\ \mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}r = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\ \mathrm{d}V = f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\ V = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

1. 极点在区域***D***之外

$$D:\begin{cases} r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta) \\ \alpha\le\theta\le\beta \end{cases}$$

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$$

2. 极点在区域***D***的边界上

$$D:\begin{cases} 0\le r\le r_2(\theta) \\ \alpha\le\theta\le\beta \end{cases}$$

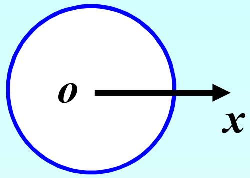
$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta \int_0^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$$

3. 极点在区域***D***内

$$D:\begin{cases} 0\le r\le r_2(\theta) \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r$$

例1 计算 $\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中D是圆心在原点，半径为R的闭圆.



解: 积分区域如图所示

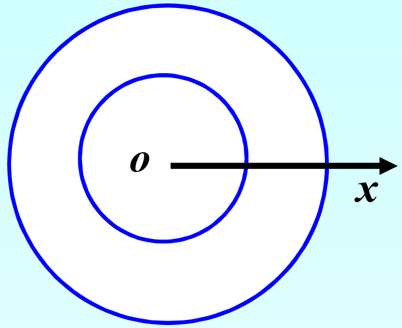
（根据被积函数的特点，显然不适合直角坐标系下的计算公式，属于刚才的第3种情形）

$$D:\begin{cases}0\le r\le R\\0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$$

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R e^{-r^2}\ r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^R=\pi(1-e^{-R^2}).$$

例2 计算 $\iint\limits_{D} x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中D是由圆$x^2+y^2=1$和$x^2+y^2=4$所围成的环形区域.



解：积分区域如图所示

由积分区域的轮换对称性

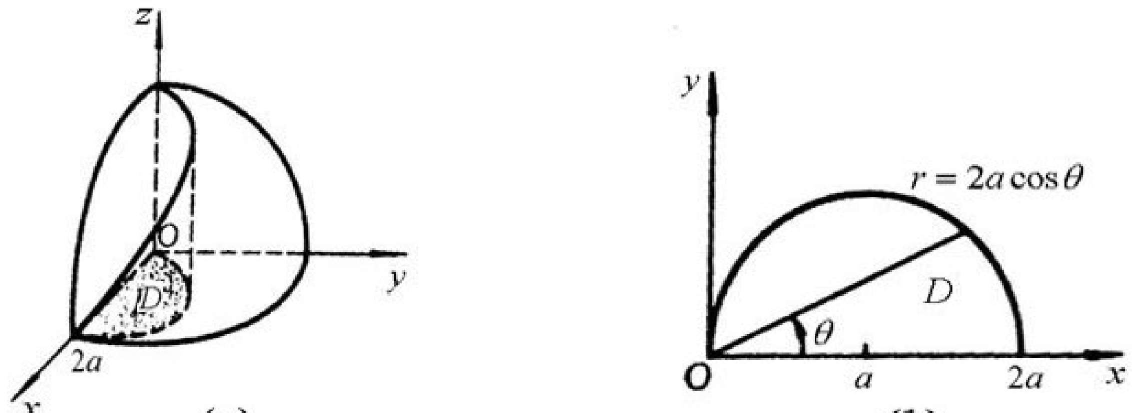
$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\pi\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2=\frac{15}{4}\pi.$$

$$I=\iint\limits_{D}(r\cos\theta)^2 r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^3\mathrm{d}r.$$

例3 计算以 $f(x,y)=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ 为顶面以***D***为底的曲顶柱体的体积,其中***D***是由***x***轴和半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 所围成的区域.

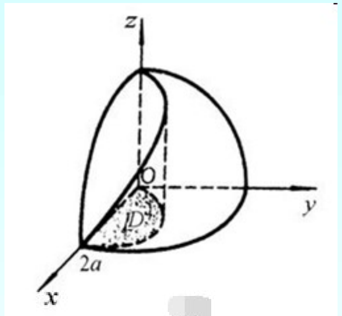
分析： 画出曲顶柱体和区域***D***的图如下



(a) (b)

$$V=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例3 计算以 $f(x,y)=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}$ 为顶面以D为底的曲顶柱体的体积,其中D是由x轴和半圆周 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 所围成的区域.

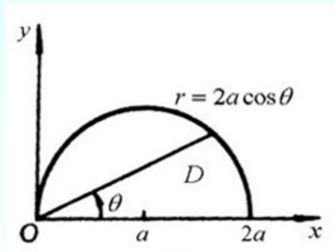


解: 如图所示

$$V=\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r$$

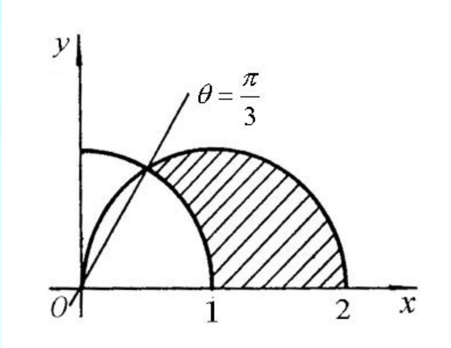
$$=\frac{8}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)a^3.$$



球面 $x^2+y^2+z^2=4a^2$和柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所围图形在第一卦线部分的体积与本题是一个意思.

例4 计算 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中 $D=\{\ (x,y)\ |\ y>0,\ \ 1\le x^2+y^2\le 2x\ \}$.

解： 如图所示积分区域:



$$x^2+y^2=1\Rightarrow r=1,$$

$$x^2+y^2=2x\Rightarrow r=2\cos\theta$$

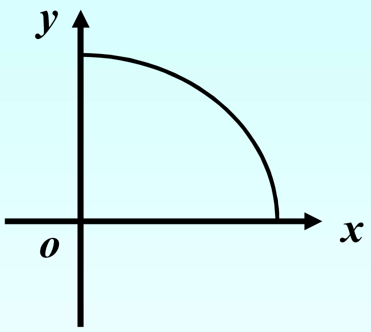
$$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_1^{2\cos\theta} r\sin\theta\cdot r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-8\cos^3\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)=\frac{11}{24}.$$

例5 计算 $\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad D: x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq R^2.$

解：积分区域如图所示



$$D:\begin{cases} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^R e^{-r^2}\, r\mathrm{d}r$$

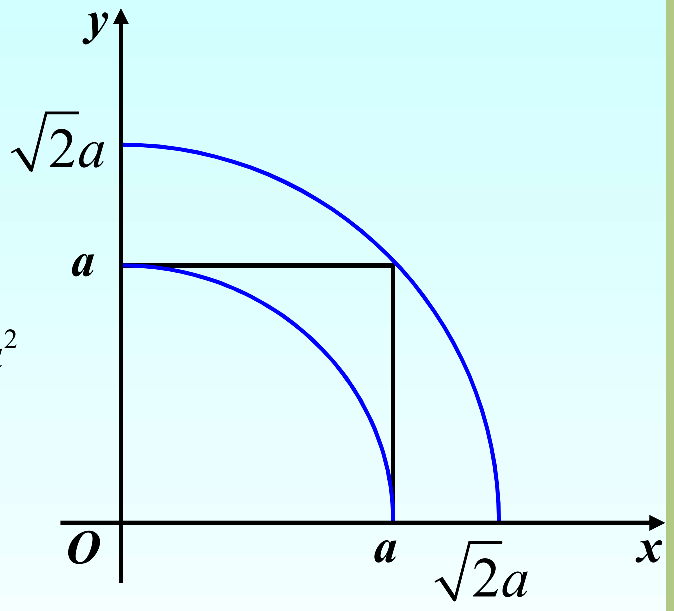
$$= \frac{\pi}{2}\cdot\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^R = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}).$$

由例1的结果和二重积分的对称性质试试求解！

例6 利用二重积分证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

解： 令 $I_a = \int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x$

$$I_a^2 = \int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_0^a e^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^a e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}y$$



令 $D:\begin{cases}0 \le x \le a \\ 0 \le y \le a\end{cases}, D_1:\begin{cases}x^2+y^2 \le a^2 \\ x \ge 0, y \ge 0\end{cases}, D_2:\begin{cases}x^2+y^2 \le 2a^2 \\ x \ge 0, y \ge 0\end{cases}$

如图所示区域，由例5结果

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}), \quad \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$$

根据如图所示区域关系有 $\dfrac{\pi}{4}(1-e^{-a^2}) \le I_a^2 \le \dfrac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$

令 a->+∞并开方得到结论.

注 利用本例结果可证概率论与数理统计中标准正态分布的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ 的广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$. 故也称 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 为概率积分.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x\overset{x=\sqrt{2}u}{=\!=\!=}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\sqrt{2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=1.$$