自 测 题十二(2005)

一、在各题的下划线处填上正确的答案（每小题 4 分，共 40 分）

1．[4 分]函数 $z = x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y$ 的驻点是_____

2．[4 分]函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 偏导数存在是 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微的_____条件

3．[4 分]曲线 $x = \cos^2 \frac{t}{2}$，$y = \frac{1}{2}\sin t$，$z = \sin\frac{t}{2}$ 上相应于 $t = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程是________________

4．[4 分]设 $D: |x| \le \pi, |y| \le 1$，则 $\iint\limits_D (x - \sin y)d\sigma =$______

5．[4 分]设任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，若 $|a_n| > |a_{n+1}|$，且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，则该级数是____

A．必是条件收敛　　　B．必是绝对收敛

C．必发散　　　　　　D．可能收敛，可能发散

6．[4 分]设 L 是从 $O(0, 0)$ 到点 $A(1, 1)$ 的直线段，则与曲线积分 $I = \int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$

不相等的积分是____1.

A. $\int_0^1 e^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}dx$　　　B. $\int_0^1 e^{\sqrt{2}y}\sqrt{2}dy$

C. $\int_0^{\sqrt{2}} e^r dr$　　　D. $\int_0^1 e^r \sqrt{2}dr$

7．[4 分]设 L 是由 $y = x^2$ 及 $y = 1$ 所围成的区域 D 的正向边界，则 $\int_L (xy + x^3y^3)dx + (x^2 + x^4y^2)dy =$_

8．[4 分]级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n}$ 的收敛区间为_________

9．[4 分]微分方程 $xy(y - xy') = x + yy'$ 的通解为__________________

10．[4 分]以 $y = 2e^x \cos 3x$ 为一个特解的二阶常系数齐次线性微分方程为__________________________

二、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1.[6 分]计算曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2)dx + 2xydy$，式中 L 由极坐标方程 $r = 2 - \sin\theta$ 所表示的曲线上从 $\theta = 0$ 到 $\theta = \pi/2$ 的一段

2.[6 分]设 $z = f(x + \sqrt{e^y + 1}, \frac{y}{x}) + x^2 y$，其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，　求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

3.[6 分]设 $f(x) = \begin{cases} x & -3 \le x < 0 \\ 2 - 2x/3 & 0 \le x \le 3 \end{cases}$，写出以 6 为周期的 $f(x)$ 的傅立叶级数在[-3，3]上的和函数 $s(x)$ 的表达式。

4．[6 分]求微分方程 $y'' - y = e^x + 1$ 的通解

5．[6 分]在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上，求满足 $z^2 \ge x^2 + y^2$ 的那部分面积 $(a > 0)$

三、解答下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

1． [8 分]求由 $x^2 + z^2 = a^2, x + y = a, x + y = -a, x - y = a, x - y = -a (a > 0)$ 所围成的立体的体积

2． [8 分]计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} (y - z^2)dzdx + zdxdy$，其中 Σ 是由平面曲线 $\begin{cases} z = 1 - x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ 对应于 $x \ge 0, z \ge 0$ 的部分绕 z 轴旋转一周所得到的旋转曲面，取上侧。

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1． [7 分]试讨论函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \ne 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在点 $O(0, 0)$ 处的连续性和偏导数存在性

2． [7 分]求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{2^n \cdot n!} x^n$ 的收敛区间及和函数

自 测 题十三(2006)

一、在各题的下划线处填上正确的答案(每小题 3 分，共 36 分)

1．[3 分]若 $z=f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 可微，则 $f(x,y)$ 在 $P(x_0,y_0)$ 处沿任何方向的方向导数_____

A．必定存在　　B．一定不存在

C．不一定存在　　D．仅在 x 和 y 方向存在

2．[3 分]函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $O(0,0)$ 处_____________

A．连续　　B．偏导数存在

C．可微　　D．全不对

3．[3 分]曲面 $z=x^2+y^2$ 在点(-1，2，5)处的切平面方程是________________

A．$2x+4y+z=11$　　B．$-2x-4y+z=-1$

C．$2x-4y+z=-5$　　D．$2x-4y-z=-15$

4．[3 分]设 $D: x^2+y^2\le 4$，则 $\iint\limits_D(1+\sqrt[3]{xy})d\sigma=$________________

5．[3 分]改变积分次序 $\int_2^3 dy\int_y^{6-y}f(x,y)dx=$__________________

A．$\int_2^3 dx\int_2^x f(x,y)dy$　　B．$\int_2^3 dx\int_2^x f(x,y)dy+\int_3^4 dx\int_2^{6-x}f(x,y)dy$

C．$\int_3^4 dx\int_2^{6-x}f(x,y)dy$　　D．$\int_2^3 dx\int_x^{6-x}f(x,y)dy$

6．[3 分]积分 $I=\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)dxdydz$ (Ω 是 $x^2+y^2=1$ 及 $z=1, z=2$ 围成)化为柱坐标下的三次积分为_________________________

7．[3 分]设 L 是从 $A(1,0)$到 $B(-1,2)$的线段，则曲线积分 $\int_L(x+y)ds=$________

A．$\sqrt{2}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．2　　D．0

8．[3 分]把 $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)(1-3x)}$ 展开为 x 的幂级数，其收敛区间为_________

9．[3 分]已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的前 n 项部分和为 $S_n=\dfrac{2n}{n+1}$，则 $a_n=$__________________

10．[3 分]微分方程 $y'=(2x+1)y^2$ 满足条件 $y(0)=2$ 的特解是__________________

11．[3 分]设 $y_1=x, y_2=x+\sin x, y_3=x+\cos x$ 是二阶非齐次线性微分方程的三个特解，则该方程的通解为(其中 a,b 为常数)___________________

A．$a\cos x+bx$　　B．$ax+b\sin x$

C．$a\cos x+b\sin x$　　D．$a\cos x+b\sin x+x$

12．[3 分]微分方程 $y''-2y+10y=e^x\cos 3x$ 的一个特解应具有的形式是(其中 a,b 为常数)________________________________

A．$e^x(a\cos 3x+b\sin 3x)$　　B．$e^x(a\cos 3x+bx\sin 3x)$

C．$e^x(ax\cos 3x+b\sin 3x)$　　D．$xe^x(a\cos 3x+b\sin 3x)$

二、解答下列各题(每小题 6 分，共 30 分)

1．[6 分]计算曲线积分 $\int_L\dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}$，式中 L 是以(1，0)，(0，1)，(-1，0)，(0，1)为顶点的正方形闭路，方向为逆时针。

2．[6 分]将 $f(x)=x(0\le x\le\pi)$ 展成正弦级数。

3．[6 分]求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$ 的和函数。

4．[6 分]求微分方程 $xy'+y=\cos x$ 的通解

5．[6 分]设 $z=xf(\dfrac{y}{x})$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$

三、解答下列各题(每小题 10 分，共 20 分)

1．[10 分]分别用二重积分和曲面积分表示球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在柱面 $x^2+y^2=a^2$ 内那部分（记为 Σ）的面积，并求该面积。

2．[10 分]计算 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+zdxdy$，其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $y=0$ 及 $y=h(h>0)$ 所截出部分的内侧。

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1．[7 分]在椭球面 $4x^2+y^2+z^2=4$ 的第一卦限部分上求一点，使得椭球面在该点的切平面、椭球面及三个坐标平面所围成在第一卦限部分的立体的体积最小。

2．[7 分]若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，记 $p_n=\begin{cases}0, a_n\le 0\\ a_n, a_n>0\end{cases}, q_n=\begin{cases}-a_n, a_n\le 0\\ 0, a_n>0\end{cases}$，证明 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 均收敛，并写出三个级数之间的关系。

二 00 七 级

一、在各题的下划线处填上正确的答案（每小题 3 分，共 30 分）

1．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点 $O(0,0)$ 处间断的原因是___

A．原点无定义　　B．在原点极限存在但不等于该点函数值

C．在原点无极限　　D．以上三个都不对

2．函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 可微是它在该点处沿任何方向的方向导数存在的_______

A．必要条件　B．充分条件　C．充要条件　D．以上三个都不对

3．设 $f(x,y)$ 在点 (a,b) 处偏导数存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x,b)-f(a-x,b)}{x}=$___

A．$2f_x'(a,b)$　B．$f_x'(a,b)$　C．$f_x'(2a,b)$　D．$\dfrac{1}{2}f_x'(a,b)$

4．级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 是条件收敛还是绝对收敛？__________

5．设 Σ 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被 $z=0, z=3$ 所截部分，则 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdS=$___

6．设曲线 L 是椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，其周长为 a（已知），则曲线积分 $\int_L (4x^2+y^2)ds=$

7．将 $\ln(1-9x^2)$ 展开为 x 的幂级数，其收敛半径 R＝________

8．改变二次积分的积分次序 $\int_1^e dx\int_0^{\ln x} f(x,y)dy$ ＝_______

A．$\int_1^e dy\int_0^{\ln y} f(x,y)dx$　　B．$\int_1^e dy\int_y^{\ln y} f(x,y)dx$

C．$\int_0^1 dy\int_e^{e^y} f(x,y)dx$　　D．$\int_0^1 dy\int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

9．设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x$，将它展开成傅立叶级数时，傅立叶系数 $b_n=$________

A．0　B．$(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$　C．$(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}$　D．$(-1)^n\dfrac{2}{n}$

10．微分方程 $y''+y'-6y=xe^{2x}$ 的一个特解应具有的形式______

A．$(Ax+B)e^{2x}$　B．$(Ax^2+Bx)e^{2x}$　C．$(Ax+B)e^{3x}$　D．$(Ax^2+Bx)e^{3x}$

二、解答下列各题（每小题 8 分，共 40 分）

1．求球面 $x^2+y^2+z^2=50$ 与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的交线上点 $M_0(3,4,5)$ 处的切线和法平面方程。

2．计算 $\iint\limits_D \left|y-x^2\right| dxdy$，其中 D 为 $|x|\le 1, 0\le y\le 1$

3．计算曲线积分 $\int_L \frac{-ydx+xdy}{4x^2+3y^2}$，式中 L 是正向椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$

4．把 $f(x)=\frac{1}{x^2-7x+12}$ 展开为 x 的幂级数，并指出收敛域。

5．设 $u=f(y-z,z-x,x-y)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$．

三、解答下列各题（每小题 10 分，共 20 分）

1．求二元函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6, x=0, y=0$ 所围成的闭区域 D 上的最值。

2．计算 $\iint\limits_\Sigma (y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$ 上侧

四、（10 分）假设 $f(1)=f'(1)=0$，且当 $x>0$ 时 $u(x,y)$ 是 $(\ln x-f'(x))\frac{y}{x}dx+f'(x)dy$ 的一个原函数，求 $f(x)$ 和 $u(x,y)$

二 00 八级

一、在各题的下划线处填上正确的答案（每小题 3 分，共 36 分）

1．函数 $f(x,y)=x^2y+xy^2$ 在点 $M(1,2)$ 的方向导数最大值为_______

2．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\ 2 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点 $O(0,0)$ 处______

A．无定义　　B．有极限但不连续

C．无极限　　D．连续

3．曲面 $x^2+y^2-z^2=4$ 在 $(2,-3,3)$ 处的法线方程________

A．$2x-3y-3z=4$　　B．$2x-3y-3z=-4$

C．$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-3}{-3}$　　D．$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-3}{3}$

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-n-2}}$ 的敛散性是__________

A．发散　　B．条件收敛

C．绝对收敛　　D．敛散性不定

5．设 L 为圆周 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$，取逆时针方向，

则曲线积分 $\int_L \frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2} =$ ＿＿＿＿＿＿.

A．0　　　B．π　　　C．2π　　　D．-2π

6．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\lg x)^n$ 收敛区间为＿＿＿＿＿

A．(−1, 1)　　B．(−10, 10)　　C．$(-\frac{1}{10},\frac{1}{10})$　　D．$(\frac{1}{10},10)$

7．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n!}+\frac{1}{2^n})$ 的和 S =＿＿＿＿＿

A．$e+2$　　B．$e+1$　　C．e　　D．$e-1$

8．微分方程 $y''+y=3\sin x+4\cos x$ 的特解形式应设为＿＿＿＿

A．$A\cos x+B\sin x$　　B．$x(A\cos x+B\sin x)$

C．$x^2(A\cos x+B\sin x)$　　D．$(Ax^2+B)\sin x+Cx\cos x$

9．微分方程 $(2xy^2+\frac{1}{x})dx+(2x^2y+\frac{1}{y})dy=0$ 的通解是＿＿＿＿＿

10．设 L 是以 (1, 0), (0, 1), (−1, 0), (0, −1) 为顶点的正方形闭路，

则曲线积分 $\int_L \frac{1}{|x|+|y|}ds =$ ＿＿＿＿

11．设 Σ 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则 $\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS =$ ＿＿＿＿

12．设 $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} =$ ＿＿＿＿

二、解答下列各题（每小题 8 分，共 32 分）

1．交换积分次序并求值 $\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}dx\int_0^x(x^2+y^2)dy+\int_{\frac{R}{\sqrt{2}}}^{R}dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}(x^2+y^2)dy$.

2．设 $u=f(x,xy,xyz)$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$.

3．求幂级数 $1-\frac{x-1}{3\sqrt{2}}+\frac{(x-1)^2}{3^2\sqrt{3}}-\frac{(x-1)^3}{3^3\sqrt{4}}+\frac{(x-1)^4}{3^4\sqrt{5}}-\cdots\cdots$ 的收敛域。

4．将函数 $f(x)=2+|x|$　$(|x|\le 1)$ 展开成以 2 为周期的傅立叶级数。

三、解答下列各题（每小题 9 分，共 18 分）

1．设曲线积分 $\int_L yf(x)dx+(2xf(x)-x^2)dy$ 在 $x>0$ 内与路径无关，其中 $f(x)$ 可导且 $f(1)=0$，求 $f(x)$.

2．计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma ydydz-xdzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1, z=2$ 所截部分的外侧。

四、解下列各题（第一小题 8 分，第二小题 6 分，共 14 分）

1．在平面 $3x-2z=0$ 上求一点(x，y，z)，使它与点 A(1,1,1)，B(2,3,4)的距离平方和为最小。

2．设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明：$2\int_0^a dx\int_x^a f(x)f(y)dy=\left(\int_0^a f(x)dx\right)^2$.

二 00 九级

一、在各题的下划线处填上正确的答案（每小题 3 分，共 36 分）

1．函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $O(0,0)$ 处________

A．连续但偏导数不存在　　　B．不连续但偏导数存在

C．可微　　　　　　　　　　D．偏导数连续

2．在曲线 $\begin{cases}x=t\\ y=-t^2\\ z=t^3\end{cases}$ 的所有切线中与平面 $x+2y+z=0$ 平行的切线有____

A．1 条　　　B．2 条　　　C．0 条　　　D．无数条

3．设平面 $2x+3y-z=\lambda$ 是曲面 $z=2x^2+3y^2$ 在点 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 处的切平面，

则 $\lambda=$______

A．$\dfrac{5}{4}$　　　B．$\dfrac{4}{5}$　　　C．2　　　D．$\dfrac{1}{2}$

4．设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr=$_______

A．$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　　B．$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

C．$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　　D．$\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

5．设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=$________

6．积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dxdydz$（$\Omega$ 是由 $x^2+y^2+z^2=2z$ 围成的闭区域）

化为球面坐标下的三次积分为________________________________

7．设 $L:x^2+y^2=a^2$，$L_1:x^2+y^2=ax$，则下面四个式子中错误的是____

A．$\int_L xds=0$　　B．$\int_L yds=0$　　C．$\int_{L_1}xds=0$　　D．$\int_{L_1}yds=0$

8．绝对收敛的级数是__________

A．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$　　　B．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt n})$

C．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[\sqrt2+(-1)^n]^n}{3^n}$　　　D．$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

9．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 当 $|x|<1$ 时的和函数 $s(x)=$_________

10．$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展开成周期为 2π 的傅立叶级数时，$a_4=$______

11．微分方程 $(2x+y)dx+(x-2y+1)dy=0$ 的通解是____________________

12．微分方程 $y''-y=\sin^2 x$ 的一个特解应具有的形式是（其中 a,b,c 为常数）______

A. $a\cos 2x+b\sin 2x$　　B. $a\cos^2 x+b\sin^2 x$

C. $a\cos 2x+b\sin 2x+c$　　D. $a\cos^2 x+b\sin^2 x+c$

二、求解下列各题（每小题 8 分，共 32 分）

1．计算 $\iint\limits_D y(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}})dxdy$，其中 D 为由 $y=x,y=-1,x=1$ 围成的区域。

2．将 $f(x)=\int_0^x \ln(1+t)dt$ 展开成 x 的幂级数，并指出收敛域。

3．计算曲线积分 $\int_L (e^x\sin y-y)dx+e^x\cos ydy$，其中 L 是从点 A(1,0)沿直线 $x+y=1$ 到点 B(0,1)，再从点 B 沿 $x^2+y^2=1$ 到点 C(－1,0)的曲线段。

4．设 $z=x^3 f(xy,\frac{y}{x})$，f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

三、解答下列各题（每小题 9 分，共 18 分）

1．在曲面 $z=x^2+y^2$ 上求一点 $P(x,y,z)$，使之到平面 $x+y-2z=2$ 的距离最短。

2．计算 $\iint\limits_\Sigma xydydz+yzdzdx+xzdxdy$，其中 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面围成立体的整个边界曲面的外侧。

四、完成下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1．求方程 $(x+1)y'-\alpha y=e^x(x+1)^{1+\alpha}$ 的通解，这里 α 为常数。

2．证明曲面 $xyz=1$ 上任何一点处的切平面在各坐标轴上的截距之积为常数。

石家庄铁道大学 2010 级《高等数学(A) II》期末试卷

一、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 函数 $z=\frac{x^2+y^2}{2}$ 在点(1, 1)处的梯度为__________.

2. 设 $f(x,y)=e^x\cos y+(y+1)^{xy}\arctan\frac{x}{y+x}$，则 $\frac{\partial f(1,0)}{\partial x}=$___________.

3. 设 $f(u,v)$ 可微，且 $f'_u(1,1)=f'_v(1,1)=1,\ z=f(x^y,y^x)$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=$_________.

4．设 L: $x^2+2y^2=2$ 的长度为 a，则 $\oint_L(\frac{x^2}{2}+y^2)ds=$_________.

5．设 $e^{x+y+z}-xyz=e$，则全微分 $\left.dz\right|_{\substack{x=1\\y=0}}=$_________.

6．沿曲线 L:$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 逆时针方向的曲线积分 $\oint_L\frac{xdx+ydy}{9x^2+4y^2}=$________

A．0　　B. π　　C. 2π　　D. 6π

7．设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，下列结论中正确的是__________

A. 若$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$=0，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

B. 若存在非零常数λ，使得$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

C. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_n = 0$

D. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则存在非零常数λ，使得$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = \lambda$

8. 设D: $|x|\le 1,\ |y|\le 1$，f连续，则$\iint\limits_D f(x^2+y^2)dxdy =$________

$A.\ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r^2)\cdot rdr$　　　　$B.\ 2\int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r^2)\cdot rdr$

$C.\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot rdr$　　　　$D.\ 4\int_0^1 dy \int_0^1 f(x^2+y^2)dx$

9．下列级数中绝对收敛的是______.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$，　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$，　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$，　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sin n\alpha}{n^2},(\alpha\neq 0)$

10．函数$y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + xe^x$满足的微分方程是___________

$A.\ y''-y'-2y=3xe^x.$　　　　$B.\ y''-y'-2y=3e^x.$

$C.\ y''+y'-2y=3xe^x.$　　　　$D.\ y''+y'-2y=3e^x.$

二、计算下列各题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

1. 求曲面$z = x^2 + \dfrac{y^2}{2}$平行于平面$2x+2y-z=0$的切平面方程.

2. 设$f(x, y)$具有二阶连续偏导数，$z = f(x+y, x-y)$，求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

3. 设L是由$y = 1-|x|$与x轴所围三角形的正向边界，求$\oint_L xydx + x^2dy$.

4. 设曲面$\Sigma: z = \sqrt{4-x^2-y^2}$，取上侧，计算$\iint\limits_{\Sigma} xdydz + xzdzdx + zdxdy$.

5．设$f(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < 0 \\ 2\pi(x+1) & 0 \le x \le 1 \end{cases}$，周期为 2，求$f(x)$的傅立叶系数$b_2$.

6. 设 D=$\left\{(x, y)\middle| x^2+y^2 \le 1, x \ge 0\right\}$,计算二重积分$I = \iint\limits_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

三、完成下列各题（共 2 小题，每小题 15 分，共 30 分）

1．用拉格朗日乘数法求原点到曲面$(x-y)^2 - z^2 = 4$的最短距离.

2. 将函数$\ln x$展为$(x-2)$的幂级数，指出收敛域. 并利用该幂级数的和函数求数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^n}$的和.

四、证明题（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(u)=\int_1^u dy\int_y^u f(x)dx$，证明：$F'(2)=f(2)$.

2. 证明：$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

2011 级本科班期末考试试卷(A)

一、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

说明：将各小题的结果填入括号内，否则不得分。

1. 设 $f(x,y)$ 在(0, 0)处连续，则下列命题正确的是【　　】.

   A. 若 $f(x,y)$ 在(0, 0)处可微，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

   B. 若 $f(x,y)$ 在(0, 0)处可微，则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

   C. 若 $f(x,y)$ 在(0, 0)处偏导数存在，则 $f(x,y)$ 在(0, 0)处可微

   D. 若 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在(0, 0)处可微

2. 梯度 $\operatorname{grad}\left(xy+\dfrac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$【　　】.

   A. (0, 0, 0)　　B. (1, 0, 0)　　C. (0, 0, 1)　　D. (1, 1, 1)

3. 设区域 D 由曲线 $y=|x|, y=1$，则 $\iint\limits_D (x^5y+1)d\sigma=$【　　】.

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则【　　】.

   A. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛　　B. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散

   C. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 收敛　　D. 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2b_n^2$ 发散

5. 微分方程 $y''(y''-y)=0$ 的通解是【　　】.

   A. $y=C_1+C_2x+C_3e^x+C_4e^{-x}$　　B. $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3$

   C. $y=C_1e^x+C_2x+C_3$　　D. 以上都不对

6. 设 $f(x,y)=(y-\pi)y^{xy}+\cos(x+y)$，则 $f_x'(0,\pi)=$【　　】.

7. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} zdv=$【　　】.

8. 设曲线段 $L: y=\sqrt{1-x^2}\,(-1\le x\le 1)$，则 $\int_L xds=$【　　】.

9. 设 x 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $|x|<2$ 时收敛，当 $|x|>2$ 时发散，则 $(x-1)$ 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛区间为【　　】.

10. 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$【　　】.

二、计算下列各题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. 设函数 $f(u,v)$ 可微， $z=f(e^{xy},x^2+y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

2. 求曲面 $z=x^2-y^2+1$ 上点(1, 1, 1)处切平面的方程.

3. 求函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

4. 计算 $\int_0^1 xf(x)dx$, 其中 $f(x)=\int_{x^2}^1 \dfrac{\sin y}{y}dy$.

5．将函数 $\ln x$ 展开为 $x-1$ 的幂级数，并指出收敛域.

三、完成下列各题（共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

1. 设 L 是第一象限中从点(0,0)沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点(2,0),
再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点(0,2)的曲线段. 计算曲线积分

$$I=\int_L 3x^2ydx+(x^3-2y)dy.$$

2. 设曲面 Σ 是 $z=x^2+y^2\ (z\le 4)$ 的下侧，计算 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz+xdzdx+x^2dxdy$.

3. 将函数 $f(x)=2+|x|\,(-\pi<x\le\pi)$ 展开为周期为 2π 的傅立叶级数,
并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和.

石家庄铁道大学 2012 级《高等数学(A)II》期末试卷

一、完成下列各题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(x,y)=x^2e^{x(1-y)}+y^2$，求 $f_x'(x,1)$.

2. 设函数 $f(u,v)$ 可微， $z=f(x,xy^2)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ 上点 $M_0(1,-1,1)$ 处的法平面方程.

4. 计算二重积分 $\iint\limits_{D} e^{-x^2-y^2}d\sigma$，其中 $D: x^2+y^2\le 4$.

5. 解微分方程 $xf'(x)+f(x)=(x+1)e^x,\ f(1)=e.$

二、计算下列各题（共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

1. 设函数 $f(x,y)=xy$.

(1)讨论 $f(x,y)$ 是否存在极值;

(2)用拉格朗日乘数法求 $f(x,y)$ 在圆周 $x^2+y^2=2$ 上的最大值与最小值.

2.计算曲线积分 $I=\int_L \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}$, 其中 $L:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，逆时针方向.

3. 设 Σ: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧，计算 $\iint\limits_{\Sigma} xydydz+yzdzdx+(z+1)xdxdy.$

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n}$ 的和函数(给出收敛域), 并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 2^{n+1}}$ 的和.

三、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 设$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}, u=\frac{1}{r}$，则$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=$【　　　　　　】.

2. 设$D: x^2+y^2\le 2x$，则$\iint\limits_D (x+y)d\sigma=$【　　　　　　】.

3. 设Σ: $x^2+y^2+z^2=R^2$，则$\iint\limits_\Sigma (x^2+y^2+z^2)dS=$【　　　　　　】.

4. 设$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，则$f^{(2n)}(0)=$【　　　　　　】.

5. 设$f(x)$是以 4 为周期的函数，且$f(x)=\begin{cases} x^2 & -2<x\le 1 \\ \sqrt{2x} & 1<x\le 2 \end{cases}$，

则其傅立叶级数的和函数值$s(2)=$【　　　　　　】.

6. 已知函数$f(x,y)$在点(0, 0)的某邻域内有定义，且$f(0,0)=0$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则函数$f(x,y)$在点(0, 0)处【　　　　　　】.

A. 极限存在但不连续　　　　B. 连续但偏导数不存在

C. 偏导数存在但不可微　　　D. 可微

7. 函数$f(x,y)=xe^{x^2+y^2}$在点$(0,0)$处沿方向$\vec{l}=(6,8)$的方向导数是【　　】.

A. 0　　　B. $\frac{3}{5}$　　　C. $\frac{4}{5}$　　　D. 1

8. 二次积分$\int_0^1\left[\int_y^1 e^{-x^2}dx\right]dy=$【　　　】.

A. $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$　　　B. $\frac{1}{2}(1-e)$　　　C. $\frac{1}{2}(e^{-1}-1)$　　　D. $\frac{1}{2}(e-1)$

9. 下列级数中发散的是【　　　】.

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$　　B. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n^2})$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

10. 二阶常系数非齐次线性微分方程$y''-4y'+3y=4xe^{3x}$的通解为【　　】.

A. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+x(x-1)e^{3x}$　　B. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}+x(2x-1)e^{3x}$

C. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-3e^x$　　　　D. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+2e^{3x}$

石家庄铁道大学 2013 级《高等数学(A)II》期末试卷

一、完成下列各题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. $f(x,y)=x^3y^2+(x^2+1)\arctan a^{xy}$，求$f'_x(1,0)$.

2. 设$\varphi(x,y)=f(xy,\dfrac{y}{x}), f$ 可微，且 $f_1'(1,1)=a, f_2'(1,1)=b,$ 计算$\varphi_x'(1,1)$.

3. 设$x=x(y,z), y=y(z,x), z=z(x,y)$都是由方程$F(x,y,z)=0$所确定的具有连续偏导数的隐函数，证明：$\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$.

4. 计算二重积分$\iint\limits_D |y-x| d\sigma$，其中$D: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1$.

5. 设曲线上点$P(x,y)$处法线与x轴的交点为Q，PQ被y轴平分，求该曲线所满足的微分方程，并求该微分方程的解.

二、计算下列各题（共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

1. 用格林公式计算$I=\int_L (e^x\sin y-xy)dx+(e^x\cos y+xy)dy$，

   其中L为从$A(2,0)$沿$y=\sqrt{2x-x^2}$逆时针到$O(0,0)$的一段弧.

2. 设Σ：$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，取上侧，利用高斯公式计算

$$I=\iint\limits_\Sigma (x^2+y)dydz+(y^2+2z)dzdx+(z^2+3x)dxdy.$$

3. 设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$. 求：(1)收敛域；(2)和函数；(3)$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$的和.

4. 用拉格朗日乘数法求解：在周长为$2p$的一切三角形中，求其面积最大者的面积. 面积的计算公式为$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$.

三、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处连续，则【　　】.

   A. $z=f(x,y_0)$在$x=x_0$连续，$z=f(x_0,y)$在$y=y_0$连续；

   B. $z=f(x,y_0)$在$x=x_0$与$z=f(x_0,y)$在$y=y_0$不全连续；

   C. $z=f(x,y_0)$在$x=x_0$与$z=f(x_0,y)$在$y=y_0$全不连续；

   D. $z=f(x,kx)$在$x=x_0$连续.

2. 设f可微，$\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{2}$是曲面$z=f(x,y)$上点$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法线方程，且该点处位于平面$y=y_0$内的切线的斜率是 2，则函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的最大方向导数为【　　】.

   A. $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$　　B. $\sqrt{17}$　　C. $\dfrac{21}{2}$　　D. 21

3. 设$z=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，在(x_0,y_0)处具有平行于xOy坐标面的切平面，且$f''_{xx}(x_0,y_0)=a, f''_{xy}(x_0,y_0)=b, f''_{yy}(x_0,y_0)=c$，其中$x_0,y_0$是二次代数方程$ax^2+2bx+c=0$的两个不同的实根. 则$f(x_0,y_0)$【　　】

   A. 是极大值;　　B. 是极小值;　　C. 是极值;　　D. 不是极值.

4. 下列不正确的是【　　】.

A. $\iint\limits_{D}(x+y)d\sigma > \iint\limits_{D}(x+y)^2 d\sigma$，其中 D 由 x 轴，y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成；

B. $\iint\limits_{D}\ln(x+y)d\sigma > \iint\limits_{D}[\ln(x+y)]^2 d\sigma$，其中 D 是以(1, 0), (1, 1), (2, 0)为顶点的三角形区域；

C. $0<\iint\limits_{D}x(x+y)d\sigma<2$，其中 D 是以(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0,1)为顶点的正方形区域；

D．若函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上至少取得最大值与最小值各一次.

5. 下列结论正确的是【　　】.

A. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散；　　B. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$；

C. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 s_n 有界，则该级数发散；

D. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

6. 设 $0<a_n<\dfrac{\pi}{2}, 0<b_n<\dfrac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，则.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛；　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 发散；

C. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛；　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 发散.

7. 设 $\Omega: 0\le x\le 1, 0\le y\le 2, 0\le z\le 2$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dV=$【　　】.

8. 设球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2az$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS=$【　　】.

9. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，且 $f(x)=\begin{cases}0 & -\pi<x\le 0\\ x & 0<x\le\pi\end{cases}$，则函数展为傅立叶级数的系数

$b_2=$【　　】.

10. 设 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的三个特解是 $y_1=x, y_2=e^x, y_3=e^{2x}$，则此方程满足条件 $y(0)=2, y'(0)=1$ 的特解是【　　】.

石家庄铁道大学 2014 级《高等数学(A)II》期末试卷

一、选择题与填空题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案										

请将下列各题的答案填入上表内，否则不得分.

1. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $O(0,0)$ 处【*填入上表*】.

A. 存在极限　　B. 连续但偏导数不存在

C. 可微　　D. 偏导数存在，但不可微

2. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处沿任意方向的方向导数都存在，

则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的情况为【*填入上表*】.

A. 一定可微　　B. 不一定可微

C. 两个偏导数存在　　D. 连续，但不可微

3. 曲面 $z=x^2+2y^2$ 上点 $(1,1,3)$ 处的切平面方程是【*填入上表*】.

A. $2x+4y-z-3=0$　　B. $4x+2y-z-3=0$

C. $x+2y-z=0$　　D. $2x+3y-z-1=0$

4. 已知函数 $f(x,y)$ 在点(0,0)连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}=1$，则【*填入上表*】.

A. $f(0,0)$ 不是极值　　B. $f(0,0)$ 是极小值

C. $f(0,0)$ 是极大值　　D. 无法判断点 $f(0,0)$ 是否为极值

5. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1,R_2，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径 R 与 R_1,R_2 的关系是【*填入上表*】.

A. $R\le\max\{R_1,R_2\}$　　B. $R\le\min\{R_1,R_2\}$

C. $R\ge\min\{R_1,R_2\}$　　D. $R=\min\{R_1,R_2\}$

6. 设 $y_1=x,\ y_2=x+e^{2x},\ y_3=x(1+e^{2x})$ 是某二阶常系数非齐次线性方程的特解，则其通解表达式不正确的是【*填入上表*】.

A. $y=(C_1+C_2x)e^{2x}+x$　　B. $y=C_1(y_2-y_1)+C_2(y_3-y_1)+y_1$

C. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{2x}+x$　　D. $y=C_1(y_1-y_2)+C_2(y_2-y_3)+\dfrac{y_1+y_3}{2}$

7. 设 $f(x,y)$ 在 $D:0\le x,y\le1$ 上连续，且 $f(x,y)=y+x\iint_D f(x,y)d\sigma$，则 $f(x,y)=$【*填入上表*】.

8. 设 Σ: $x^2+y^2+z^2=a^2$，则 $\iint_S[(x-a)^2+y^2+z^2]dS=$【*填入上表*】.

9. 设数列 $\{a_n\}(a_n>0)$ 单减，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 发散，问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{1+a_n}\right)^n$ 是收敛还是发散？【*填入上表*】.

10. 设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\le x\le\pi)$，则 $a_2=$【*填入上表*】.

二、计算题（共 6 题，每小题 5 分，共 30 分）

11. 设 f 具有二阶连续偏导数，$z=f(x+y,x-y)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

12. 计算 $\iint_D \sqrt{(x-y)^2}d\sigma$，其中 D 是圆 $x^2+y^2\le 1$ 在第一象限的部分.

13. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{7^{\ln n}}$ 的敛散性.

14. 解方程 $2x\cos ydx+(1+x^2)\sin ydy=0,\ y(0)=0$.

15. 计算 $\oint_L xydy$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2$，逆时针方向.

16．将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-3}$ 展为 x 的幂级数，并给出收敛域

三、综合题（共 4 题，每题 10 分，共 40 分）

17. 利用点到平面的距离公式，求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

18. 设曲线积分 $\int_L 2yf(x)dx+[xf(x)-x^2]dy$ 在 $x>0$ 内与路径无关，其中 $f(x)$ 可导，$f(1)=1$，求 $f(x)$.

19. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz+y^2dzdx+(z^2-1)dxdy$，其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\ge 0)$ 的上侧.

20. (1)设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $\mathbf{grad}f=0$，证明：$f(x,y)\equiv C$.

(2) 设 $z=z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，D 由简单光滑闭曲线 L 所围成．证明：$\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_L\dfrac{\partial z}{\partial n}ds$，其中 $\vec{n}$ 是 D 的正向边界曲线 L 的外法线向量.

2015 级《高等数学(A)II》期末试卷

一、选择和填空题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

1. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,g(x))$，且 $g(x)$ 可导，若 $f_1'(1,1)=1$，又 $g(1)=1$ 是极值，则 $\left.\dfrac{dz}{dx}\right|_{x=1}=$【 】.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

2. 曲面 $z=x^2+y^2$ 上法向量平行于 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z+2}{-1}$ 的点是【 】.

A. (1, 1, 2)　　B.(1, 2, 5)　　C. $(1,2,-1)$　　D. $(2,4,-1)$

3. 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $dz=xdx+ydy$，则点 $(0,0)$【 】.

A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点　　B. 不是 $f(x,y)$ 的极值点

C. 是 $f(x,y)$ 的极小值点　　D. 是 $f(x,y)$ 的极大值点

4. 设曲线 $L:f(x,y)=1$（$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数),过第 II 象限内的点 M 和第 IV 象限内的点 N,T 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧,则下列小于零的是【】.

A. $\int_T f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy$　　B. $\int_T f(x,y)dx$

C. $\int_T f(x,y)ds$　　D. $\int_T f(x,y)dy$

5. 下列级数中，条件收敛的是【 】.

A. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\cos\frac{n\pi}{2})$ C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n^2}$ D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{n\pi}{2}$

6. 设 $L: x^2+\frac{y^2}{4}=1$，逆时针，则 $\int_L e^x y^2dx+(x+2e^x y)dy=$【 】.

7. 设曲面 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则沿该球面外侧的曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)^2dydz-2xydzdx+(2y+3)zdxdy=$【 】.

8. 对于下列常数项级数，说法正确的是【 】.

A. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2,\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

B. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2,\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 收敛

C. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(u_n>0)$ 发散，则 $u_n\ge\frac{1}{n}$

D. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $u_n\ge v_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛

9. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为【 】.

A. [0, 2) B. (0,2] C. $(-1,1]$ D. $[-1,1)$

10. $f(x)=|x-\pi|$，$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx$. 令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$，则 $s(\frac{3}{2}\pi)=$.

A. $-\frac{\pi}{2}$ B. 0 C. $\frac{\pi}{2}$ D. π

二、完成下列各题（共 8 题，每题 5 分，共 40 分）

1. 设 $z=e^{xy}+\frac{1}{4}x^2y^2$，计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设方程 $e^z+xyz=1$ 确定了隐函数 $z=z(x,y)$，计算偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

3. 计算 $\int_0^1dx\int_x^1e^{y^2}dy$.

4. 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2dxdy$，$D:\ x^2+y^2\le 4$.

5. 设 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=1, z=0, z=1$ 所围区域，计算 $\iiint\limits_{\Omega}z^2dV$.

6. 设曲面 $\Sigma: z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}zdS$.

7. 将 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数, 并给出收敛域.

8. 解微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$.

三、完成下列各题（共 3 题，每题 10 分，共 30 分）

1. 求二元函数 $f(x,y)=x^2+y\ln y$ 的极值

2. 设$\boldsymbol{\Sigma : z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \le z \le 1)}$，取下侧，计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{z} dxdy$.

3. 求二阶微分方程$y'' - 4y' + 3y = 2e^{2x}$的通解.