自测题十二解答(2005)

一、在各题的下划线处填上正确的答案（每小题 4 分，共 40 分）

1．（－1，3）2．必要 3．$\dfrac{2x-1}{2}=\dfrac{2y-1}{0}=\dfrac{2z-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}$ 4．0 5．D 6．D 7．0

8．（－1，1） 9．$y^2-1=C(1+x^2)$ 10．$y''-2y'+10y=0$

二、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1．解：$\theta=0$ 对应点 $M_0(2,0)$，$\theta=\pi/2$ 对应点 $M_1(0,1)$

原式 $=\int_{(2,0)}^{(0,1)} d(\frac{x^3}{3}+xy^2)$

$=(x^3/3+xy^2)|_{(2,0)}^{(0,1)}=-8/3$

或 $P(x,y)=x^2+y^2 \quad Q(x,y)=2xy \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2y$

积分与路径无关，取 $\overrightarrow{M_0O}$ 与 $\overrightarrow{OM_1}$

原式 $=\int_2^0 x^2dx+0=-8/3$

2．解：$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{e^y}{2\sqrt{e^y+1}}f_1+\dfrac{1}{x}f_2+x^2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{e^y}{2\sqrt{e^y+1}}f_{11}+(\frac{1}{x}-\frac{ye^y}{2x^2\sqrt{e^y+1}})f_{12}-\frac{y}{x^3}f_{22}-\frac{f_2}{x^2}+2x$$

3．解：除 $x=\pm3,0$ 外均为连续点，由 Dirichlet 定理

$$\therefore s(x)=\begin{cases} x & -3<x<0 \\ 2-2x/3 & 0<x<3 \\ 1 & x=0 \\ -3/2 & x=\pm3 \end{cases}$$

4．解：特征方程 $r^2-1=0$，特征根 $r_1=1 \quad r_2=-1$

对应齐次方程通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{-x}$

设原方程特解为 $y^*=Axe^x+B$

代入解之得 $A=1/2 \quad B=-1$

原方程通解为 $y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{-x}+\dfrac{1}{2}xe^x-1$

5．解：由对称性，所求面积是 $z>0$ 部分 Σ 的 2 倍，在 Σ 上，

$ds=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy$，又 Σ 在面投影区域 $D: x^2+y^2\le\dfrac{a^2}{2}$

$$\therefore S=2\iint_{\Sigma}ds=2a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a/\sqrt{2}}\frac{rdr}{\sqrt{a^2-r^2}}=2(2-\sqrt{2})\pi a^2$$

三、解答下列各题（每小题 8 分，共 16 分）

1．解：由对称性，所求体积是第一卦限部分 8 倍

$$V=8\int_0^a dx\int_0^{a-x}dy\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dz$$

$$=8\int_0^a (a-x)\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=8a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin t)\cos^2 tdt$$

$$=a^3(2\pi-8/3)$$

2．解：由题意知，$\Sigma: z=1-x^2-y^2 \quad (x^2+y^2\le1)$

作 $\Sigma_1: z=0 \quad (x^2+y^2\le1)$，取下侧

则原式 $=\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y-z^2)dzdx+zdxdy-\iint_{\Sigma_1}(y-z^2)dzdx+zdxdy$

又 $\displaystyle\iint_{\Sigma_1}(y-z^2)dzdx+zdxdy=0$

所以原式 $=\displaystyle\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y-z^2)dzdx+zdxdy=\iiint_{\Omega}(1+1)dv=\pi$

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1．解：

$$\because 0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}y^2 \le y^2 \quad \therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

所以函数在点 $O(0,0)$ 处连续

又 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0 = f_x'(0,0) \quad \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0 = f_y'(0,0)$，

所以函数在点 $O(0,0)$ 处的偏导数存在

2．解：$\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\dfrac{(n+1)^2+1}{(n^2+1)(n+1)} = 0$，

所以 $R=+\infty$，收敛区间 $(-\infty,+\infty)$

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)+n+1}{n!}(\frac{x}{2})^n$$

$$=(\frac{x}{2})^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x}{2})^n+\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x}{2})^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{x}{2})^n$$

$$=(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}+1)e^{x/2}$$

自测题十三解答（2006）

一、在各题的下划线处填上正确的答案（每小题 3 分，共 36 分）

1．A　2．B 3．C　4．4π　5．B　6．$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_1^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)dz$　7．B.

8．$(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　9．$a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$　10．$\dfrac{1}{y}=-(x^2+x)+\dfrac{1}{2}$　11．D　12．D

二、解答下列各题（每小题 6 分，共 30 分）

1．解：曲线 L 的方程为 $|x|+|y|=1$　　所以 $\int_L\dfrac{dx+dy}{|x|+|y|}=\int_L dx+dy=\iint\limits_D(0-0)dxdy=0$

2．解：对函数 $f(x)$ 进行奇延拓，有

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

得 $f(x)$ 的正弦级数为 $f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{2}{n}\sin nx$

3．解：收敛域为[-1,1) 令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n+1}$，　当 $x=0$ 时，$s(x)=1$

当 $x\neq 0$ 时，$s(x)=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n dx=\dfrac{1}{x}\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n dx=\dfrac{1}{x}\int_0^x\dfrac{dx}{1-x}=-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$

4．解：原方程变形得 $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{1}{x}\cos x$

$$p(x)=\frac{1}{x},\quad q(x)=\frac{1}{x}\cos x\quad \int p(x)dx=\ln x,\quad \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx=\sin x$$

所以通解为 $y=e^{-\int p(x)dx}(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C)=\dfrac{1}{x}(\sin x+C)$

5．解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=f(\dfrac{y}{x})-\dfrac{y}{x}f'(\dfrac{y}{x})$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(\dfrac{y}{x})$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\dfrac{y}{x^2}f''(\dfrac{y}{x})$

三、解答下列各题（每小题 10 分，共 20 分）

1．解：上半球面方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$z_x=\dfrac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$z_y=\dfrac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

Σ 在 xoy 面的投影区域为 $D_{xy}:x^2+y^2\le ax$

则 $S=\iint\limits_{\Sigma}ds=2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{a\cos\theta}\dfrac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}rdr=2a^2(\pi-2)$

2．解：增加曲面 $\Sigma_1:z=0\,(x^2+y^2\le a^2)$，方向取上侧；$\Sigma_2:z=h\,(x^2+y^2\le a^2)$，方向取下侧

则 $\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2$ 构成一封闭曲面，方向为内侧

由高斯公式得 $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}xdydz+zdxdy=-\iiint\limits_{\Omega}(1+1)dxdydz=-2\pi a^2h$

又 $\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+zdxdy=0,\quad \iint\limits_{\Sigma_2}xdydz+zdxdy=-\pi a^2h$

所以原式 $=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}=-\pi a^2h$

四、解答下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 解：设 (x_0,y_0,z_0) 为椭球面在第一卦限部分上的点，则切平面为 $4x_0x+y_0y+z_0z=4$，所研究立体的体积 $V=\dfrac{8}{3x_0y_0z_0}-V_0$，$V_0$ 为椭球体 $4x^2+y^2+z^2\le 4$ 在第一卦限部分体积，为常数，

故只需求 $x_0y_0z_0$ 的最大值

令 $F(x,y,z)=xyz+\lambda(4x^2+y^2+z^2-4)$

$$\begin{cases}F_x=yz+8\lambda x=0\\F_y=xz+2\lambda y=0\\F_z=xy+2\lambda z=0\\4x^2+y^2+z^2=4\end{cases}\qquad \text{解得}\quad x=\frac{1}{\sqrt3},y=\frac{2}{\sqrt3},z=\frac{2}{\sqrt3},$$

由于最小值存在，故点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt3},\dfrac{2}{\sqrt3},\dfrac{2}{\sqrt3}\right)$ 即为所求。

2．证明：因为 $p_n=\dfrac{|a_n|+a_n}{2}$，$q_n=\dfrac{|a_n|-a_n}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 均收敛，

又 $p_n-q_n=a_n$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$

二 00 七级

一、在各题的下划线处填上正确的答案（每小题 3 分，共 30 分）

1．C　2．B 3．A　4．条件收敛 5．0　6．$4a$ 7．1/3．8．D 9．C 10．B

二、解答下列各题（每小题 8 分，共 40 分）

1．解：令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-50, G(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$

$F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z,\quad (F_x,F_y,F_z)|_{M_0}=(6,8,10)$

$G_x=2x,G_y=2y,G_z=-2z,\quad (G_x,G_y,G_z)|_{M_0}=(6,8,-10)$

$M_0(3,4,5)$ 处的切向量可取为 $(3,4,5)\times(3,4,-5)=(-40,30,0)$

$M_0(3,4,5)$ 处的切线方程为 $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y-4}{3}=\dfrac{z-5}{0}$

法平面方程为 $-4(x-3)+3(y-4)=0$ 即 $4x-3y=0 \quad or \quad -4x+3y=0$

2．解：原式 $=2\int_0^1 dx\int_0^1 \left|y-x^2\right|dy=2(\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 (y-x^2)dy+\int_0^1 dx\int_0^{x^2}(x^2-y)dy)$

$=\int_0^1(1-2x^2+x^4)dx+\int_0^1 x^4dx＝11/15$

3．解：原式 $=\dfrac{1}{12}\int_L xdy-ydx \qquad P=-y \quad Q=x \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=-1 \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=1$，

设 L 围成的区域为 D，由格林公式得

$\int_L xdy-ydx=\iint\limits_D(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})dxdy=2\iint\limits_D dxdy=2S_D$ ，所以，原式＝$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi$

4．解：因为 $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n \quad (-1<x<1)$

$f(x)=\dfrac{1}{x^2-7x+12}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-x/3}-\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1-x/4}$

所以 $f(x)=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{3}\right)^n-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x}{4}\right)^n \quad (-3<x<3)$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{3^{n+1}}-\dfrac{1}{4^{n+1}}\right)x^n \quad (-3<x<3)$

5．解：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'\times 0+f_2'\times(-1)+f_3'\times 1=-f_2'+f_3'$，

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=f_1'\times 1+f_2'\times 0+f_3'\times(-1)=f_1'-f_3'$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=(f_{11}''\times 0+f_{12}''\times(-1)+f_{13}''\times 1)-(f_{31}''\times 0+f_{32}''\times(-1)+f_{33}''\times 1)\quad =-f_{12}''+f_{13}''+f_{32}''-f_{33}''$$

三、解答下列各题（每小题 10 分，共 20 分）

1．解：

由$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0\end{cases}$得$\begin{cases}2xy(4-x-y)-x^2y=0\\ x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$

解之得$(0,y)\ (0\le y\le 6)$, $(4,0)$, $(2,1)$ 仅$(2,1)$在 D 内，$f(2,1)=4$

在边界$x=0$和$y=0$上，$f(0,y)=f(x,0)=0$

在边界$x+y=6\ (0\le x\le 6)$上，$f(x,y)=-2x^2(6-x)$有唯一驻点$(4,2)$，且$f(4,2)=-64$

所以最大值$f(2,1)=4$，最小值为$f(4,2)=-64$

2．解：增加曲面$\Sigma_1:z=1\ (x^2+y^2\le 1)$，方向取下侧；

则$\Sigma+\Sigma_1$构成一封闭曲面，方向为内侧 ,由高斯公式得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy=-\iiint_{\Omega}(-1-1-1)dxdydz=3\pi/2$$

又$\displaystyle\iint_{\Sigma_1}(y^2-x)dydz+(z^2-y)dzdx+(x^2-z)dxdy=\iint_{\Sigma_1}(x^2-1)dxdy=3\pi/4$

所以原式$\displaystyle=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}\quad-\iint_{\Sigma_1}\quad=3\pi/4$

四、（10 分）解：$P=(\ln x-f'(x))\dfrac{y}{x}$ $\quad Q=f'(x)\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=(\ln x-f'(x))\dfrac{1}{x}\quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}=f''(x)$

由已知得$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$即$(\ln x-f'(x))\dfrac{1}{x}=f''(x)$ ①

令$p=f'(x)$则$p'=f''(x)$，①式变为$p'+\dfrac{1}{x}p=\dfrac{1}{x}\ln x$

由一阶线性微分方程求解公式得$f'(x)=p=\ln x-1+\dfrac{C_1}{x}$

将$f'(1)=0$代入得$C_1=1$，则$f'(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$

所以$f(x)=x\ln x+\ln x-2x+C_2$

将$f(1)=0$代入得$C_2=2$，则$f(x)=x\ln x+\ln x-2x+2$

下面求$u(x,y)$

用曲线积分（注意初始点的选取不能为y轴及左边的点），凑微分和待定函数法均可

本题凑微分法最佳

将$f'(x)=\ln x-1+\dfrac{1}{x}$代入表达式$(\ln x-f'(x))\dfrac{y}{x}dx+f'(x)dy$得

$$(1-\frac{1}{x})\frac{y}{x}dx+(\ln x+\frac{1}{x}-1)dy=d((\ln x+\frac{1}{x}-1)y)$$

取 $u(x,y)=(\ln x+\frac{1}{x}-1)y$ 即可

二〇〇八级

一、在各题的下划线处填上正确的答案（每小题 3 分，共 36 分）

1．$\sqrt{89}$　2．<u>D</u>　3．<u>C</u>　4．<u>B</u>　5．<u>A</u>　6．<u>D</u>　7．<u>C</u>　8．<u>B</u>

9．$\underline{x^2y^2+\ln|xy|=C}$　10．$\underline{4\sqrt{2}}$　11. $\underline{4\pi R^4}$　12. $\underline{0}$

二、解答下列各题（每小题 8 分，共 40 分）

1．**解**：积分区域：$D_1:\begin{cases}0\le x\le \frac{R}{\sqrt{2}}\\ 0\le y\le x\end{cases}$，$D_2:\begin{cases}\frac{R}{\sqrt{2}}\le x\le R\\ 0\le y\le \sqrt{R^2-x^2}\end{cases}$ $\Rightarrow D:\begin{cases}0\le y\le \frac{R}{\sqrt{2}}\\ \sqrt{R^2-y^2}\le x\le y\end{cases}$

原式$=\int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}}dy\int_y^{\sqrt{R^2-y^2}}(x^2+y^2)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^R r^2\cdot rdr=\frac{\pi}{16}R^4$

2．**解**：$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'+yzf_3'$，$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf_3'$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=yf_3'+xy(f_{31}''+yf_{32}''+yzf_{33}'')$$

3．**解**：$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{3^n}(x-1)^n$，令 $t=\frac{x-1}{3}$，级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}t^n$

该级数的收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}/\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+2}}\right|=1$

当 $t=-1$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，显然发散

当 $t=1$ 时，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$，由莱布尼兹定理知其收敛

所以原级数的收敛域为 $-1<\frac{x-1}{3}\le 1 \quad\Rightarrow\quad -2<x\le 4$

4．**解**：作周期延拓，得到一连续函数 $F(x)$，满足收敛定理的条件，又易见它为偶函数，计算傅立叶系数如下：

$$b_n=0,(n=1,2,3,\cdots)\qquad a_0=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)dx=2\int_0^1(2+x)dx=5$$

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx=2\int_0^1(2+x)\cos(n\pi x)dx=2\int_0^1 x\cos(n\pi x)dx$$

$$=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}=\begin{cases}\frac{-4}{\pi^2n^2} & n=1,3,5,\cdots\\ 0 & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$$

所以傅立叶展开式如下：

$$f(x)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\cdots)\quad (|x|\le 1)$$

三、解答下列各题（每小题 9 分，共 18 分）

1．**解**：$P(x,y)=yf(x)\quad Q(x,y)=2xf(x)-x^2$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(x)\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2f(x)+2xf'(x)-2x$$

由于曲线积分$\int_L yf(x)dx+(2xf(x)-x^2)dy$在$x>0$内与路径无关

所以$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}\ \Rightarrow\ f(x)=2f(x)+2xf'(x)-2x$，即$f'(x)+\frac{1}{2x}f(x)=1$

解此一阶线性微分方程得$f(x)=e^{-\int\frac{1}{2x}dx}(\int 1\cdot e^{\int\frac{1}{2x}dx}dx+C)=x^{-1/2}(\frac{2}{3}x^{3/2}+C)$

将$f(1)=0$代入得$f(x)=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{\sqrt{x}})$

2．**解**：增加曲面$\Sigma_1: z=1\ (x^2+y^2\le 1)$方向取下侧，$\Sigma_2: z=2\ (x^2+y^2\le 4)$方向取上侧；则$\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2$构成一封闭曲面，方向为外侧

由高斯公式得$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} ydydz-xdzdx+z^2dxdy=\iiint\limits_{\Omega}2zdxdydz=\frac{15\pi}{2}$

又$\iint\limits_{\Sigma_1} ydydz-xdzdx+z^2dxdy=-\pi,\iint\limits_{\Sigma_2} ydydz-xdzdx+z^2dxdy=16\pi$

所以原式$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_2}=\frac{-15\pi}{2}$

四、解下列各题（第一小题 8 分，第二小题 6 分，共 14 分）

1．**解**：距离平方和$f(x,y,z)=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2$

$$=2x^2+2y^2+2z^2-6x-8y-10z+32$$

构造拉格朗日函数$L=2x^2+2y^2+2z^2-6x-8y-10z+32+\lambda(3x-2z)$

由$L_x=L_y=L_z=L_\lambda=0$得$\begin{cases}4x-6+3\lambda=0\\4y-8=0\\4z-10-2\lambda=0\\3x-2z=0\end{cases}$

解之得$x=\frac{21}{13},y=2,z=\frac{63}{26}$，由于驻点唯一，且本问题的最小值一定存在，故点$\left(\frac{21}{13},2,\frac{63}{26}\right)$即为所求

2．**证明**：

因为$\int_0^a dx\int_x^a f(x)f(y)dy=\int_0^a dy\int_0^y f(x)f(y)dx$（交换积分次序），

$\int_0^a dx\int_x^a f(x)f(y)dy=\int_0^a dx\int_0^x f(y)f(x)dy$（定积分与积分变量符号无关）

所以

$$\text{左边}=\int_0^a dx\int_x^a f(x)f(y)dy+\int_0^a dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^a dx\int_x^a f(x)f(y)dy+\int_0^a dx\int_0^x f(y)f(x)dy$$

$$=\int_0^a\left(\int_x^a f(x)f(y)dy+\int_0^x f(y)f(x)dy\right)dx=\int_0^a f(x)dx\int_0^a f(y)dy$$

$$\text{右边}=\int_0^a f(x)dx\int_0^a f(y)dy$$

左边＝右边，结论成立。

二〇〇九级

一、在各题的下划线处填上正确的答案（每小题 3 分，共 36 分）

1．C　2．B　3．A　4．D　5．0

6． $\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$

7． C　8．C　9． $-\ln(1-x)$　10． 0　11. $x^2+xy-y^2+y=C$　12. C

二、解答下列各题（每小题 8 分，共 32 分）

1．解：积分区域分为 $D_1: y=\pm x, y=-1$ 围成和 $D_2: y=\pm x, x=1$ 围成的两部分，注意对称性，原式

$$=\iint_{D_1}+\iint_{D_2}=\iint_{D_1}ydxdy+0=\int_{-1}^0 dy\int_y^{-y}ydx=-\frac{2}{3}$$

或 $\text{原式}=\int_{-1}^1 dy\int_y^1 y(1+xe^{\frac{x^2+y^2}{2}})dx=\int_{-1}^1[y(1-y)+ye^{\frac{1+y^2}{2}}-ye^{y^2})dy=-\int_{-1}^1 y^2dy=-\frac{2}{3}$

2．解： $\because \ln(1+t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n\quad t\in(-1,1]$

$$\therefore f(x)=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\int_0^x t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}$$

由级数在 $x=-1$ 处的收敛性和 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处的连续性得收敛域为[－1，1]

3．解：令 $L_1: y=0, C\to A$ ，则 $\int_{L_1}(e^x\sin y-y)dx+e^x\cos ydy=0$

$P(x,y)=e^x\sin y-y\quad Q(x,y)=e^x\cos y$， $\frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-1\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y$

由格林公式得 $\int_{L+L_1}(e^x\sin y-y)dx+e^x\cos ydy$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint_D dxdy=S_D=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

所以 $\int_L(e^x\sin y-y)dx+e^x\cos ydy=\int_{L+L_1}-\int_{L_1}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$，

4．解： $\frac{\partial z}{\partial y}=x^3(xf_1'+\frac{1}{x}f_2')=x^4f_1'+x^2f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=4x^3 f_1'+2xf_2'+x^4 yf_{11}''-yf_{22}''$$

三、解答下列各题（每小题 9 分，共 18 分）

1． 解：点 P 到平面的距离为 $d=\frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$

问题转化为求在 $z=x^2+y^2$ 条件下 $f(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2$ 的极值

构造拉格朗日函数 $L=(x+y-2z-2)^2+\lambda(x^2+y^2-z)$

$$由 L_x=L_y=L_z=L_\lambda=0 得 \begin{cases}2(x+y-2z-2)+2\lambda x=0\\2(x+y-2z-2)+2\lambda y=0\\-4(x+y-2z-2)-\lambda=0\\z=x^2+y^2\end{cases}$$

解之得 $x=y=\frac{1}{4},z=\frac{1}{8}$，由于驻点唯一，且本问题的最小值一定存在，

故点 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right)$ 即为所求

2．解：由高斯公式得，原式 $=\iiint\limits_{\Omega}(y+z+x)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\frac{1}{8}$

四、解下列各题（每小题 7 分，共 14 分）

1． 解：原方程变形得 $y'+\frac{-\alpha}{x+1}y=e^x(x+1)^\alpha$，是一阶线性微分方程

$P(x)=\frac{-\alpha}{x+1},\quad Q(x)=e^x(x+1)^\alpha$

$\int P(x)dx=\int\frac{-\alpha}{x+1}dx=-\alpha\ln(x+1),$

$\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx=\int e^x(x+1)^\alpha e^{-\alpha\ln(1+x)}dx=\int e^x dx=e^x$

通解为 $y=e^{-\int P(x)dx}(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C)=(x+1)^\alpha(e^x+C)$ ， C 为任意常数

2．证明：令 $F(x,y,z)=xyz-1$，则 $F_x'=yz,F_y'=xz,F_z'=xy$

设 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为曲面 $xyz=1$ 上任何一点，则 $x_0y_0z_0=1$，

该点处的切平面方程为 $y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$

即 $y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3x_0y_0z_0$，或 $\frac{x}{3x_0}+\frac{y}{3y_0}+\frac{z}{3z_0}=1$

截距之积为 $3x_0\cdot3y_0\cdot3z_0=27$，结论得证。

2010 级

一、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1.(1,1)　2.e　3.1　4．a.　5．$-dx-dy$　6-10.ABDDD

二、计算下列各题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

1. 设切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，由 $\vec{n}=(-2x_0,-y_0,1)$ 平行平面的法向量 $(2,2,-1)$，得

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-y_0}{2}=\frac{1}{-1}\Rightarrow x_0=1,y_0=2,z_0=3$$

平面方程 $2(x-1)+2(y-2)-(z-3)=0$ 或 $2x+2y-z=3$.

2. $$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_{11}''-f_{12}'')+(f_{21}''-f_{22}'')=f_{11}''-f_{22}''.$$

3. 原式 $=\iint\limits_D(2x-x)dxdy=0$

4. 补 $\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\le 4)$，取下侧，则得 Σ 与 Σ_1 所围区域 Ω. 于是

$$原式=\iiint\limits_\Omega(1+0+1)dv-\iint\limits_{\Sigma_1}xdydz+xzdzdx+zdxdy$$

$$=\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3-\iint\limits_{\Sigma_1}0dxdy=\frac{32}{3}\pi.$$

5．$$b_2=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}f(x)\sin\frac{2\pi}{1}xdx=\int_0^1 2\pi(x+1)\sin 2\pi xdx$$

$$=-\left[(x+1)\cos 2\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x\Big|_0^1\right]=-1.$$

6. $$I=\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}dxdy+0=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$$

三、完成下列各题（共 2 小题，每小题 15 分，共 30 分）

1. $L=d^2+\lambda\varphi=x^2+y^2+z^2+\lambda[(x-y)^2-z^2-4]$,

$$令\begin{cases}\left.\begin{array}{l}L_x'=2x+\lambda\cdot 2(x-y)=0\\ L_y'=2y+\lambda\cdot(-2)(x-y)=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=-y\\ \left.\begin{array}{l}L_z'=2z+\lambda\cdot(-2z)=0\quad\Rightarrow\quad z=0\\ (x-y)^2-z^2=4\end{array}\right\}\Rightarrow x-y=\pm 2\end{cases},得驻点 M_{1,2}(\pm1,\mp1,0)$$

由于最小距离一定存在，且两个驻点与原点距离相等，故 $d_{\min}=\sqrt{2}$.

2. $\ln x=\ln 2+\ln(1+\frac{x-2}{2})=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n$，$0<x\le 4$

$$\ln 1=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{n\cdot 2^n}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\ln 2$$

四、证明题（共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分）

1. 交换积分次序，得 $F(u)=\int_1^u dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^u f(x)(x-1)dx$

于是，$F'(t)=f(u)(u-1)$，从而有 $F'(2)=f(2)$.

2. 记 $D:\ 0\le x,y\le a$;　$D_1:\ x^2+y^2\le a^2$;　$D_2:\ x^2+y^2\le\sqrt{2}a^2$.

再记 $I_a=\int_0^a e^{-x^2}dx\ (a>0)$　则

$$I_a^2=\int_0^a e^{-x^2}dx\cdot\int_0^a e^{-y^2}dy=\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy\le I_a^2\le\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

由 $\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{2}(e^{-a^2}-1)=\frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$

$\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a} e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{2}(e^{-2a^2}-1)=\frac{\pi}{4}(1-e^{-2a^2})$

及 $\lim\limits_{a\to+\infty}\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}$，$\lim\limits_{a\to+\infty}\iint_{D_2} e^{-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi}{4}$，得

$\lim\limits_{a\to+\infty}I_a^2=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\lim\limits_{a\to+\infty}I_a=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，即 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

故 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

2011 级

一、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1-5. DDBCD　6. 0　7. 0　8. 0　9. $(-1,3)$　10. e^x

二、计算下列各题（共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^{xy}y+f_2'\cdot 2x$. ……………………………………**8 分**

2. $\vec{n}=(2x,-2y,-1)\big|_{(1,1)}=(2,-2,-1)$. …………………………………**4 分**

$2(x-1)-2(y-1)-(z-1)=0$，或 $2x-2y-z+1=0$…………**8 分**

3. 令 $\begin{cases}f_x'(x,y)=2x(2+y^2)=0\\ f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0\end{cases}$，得驻点 $\begin{cases}x=0\\ y=e^{-1}\end{cases}$. …………**4 分**

又 $A=f_{xx}''(0,e^{-1})=2(2+e^{-2}),B=f_{xy}''(0,e^{-1})=0,C=f_{yy}''(0,e^{-1})=e$.

$\Delta=B^2-AC<0,\ A>0,$

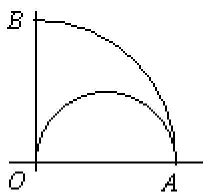
故有极小值 $f(0,e^{-1})=-e^{-1}$. …………………………………**8 分**

4. $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1\int_{x^2}^1 x(\frac{\sin y}{y}dy)dx=\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}x\frac{\sin y}{y}dx$ …………**4 分**

$=\int_0^1\frac{\sin y}{y}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{y}}dy=\frac{1}{2}\int_0^1\sin ydy=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$.…**8 分**

5. $\ln x=\ln[1+(x-1)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(x-1)^n$，$0<x\le 2$. ……………**8 分**

三、完成下列各题（共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）



1. 法 1：由 $\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2=\frac{\partial Q}{\partial y}$ 知积分与路径无关. ……**5 分**

$I=\int_{\overline{OB}}3x^2ydx+(x^2-2y)dy=\int_0^2(0-2y)dx$

$=-4$ ………………………………………**10 分**

法 2：$I=\int_{L+\overline{BO}}3x^2ydx+(x^3-2y)dy-\int_{\overline{BO}}3x^2ydx+(x^2-2y)dy$ ……**5 分**

$=\iint_D(3x^2-3x^2)d\sigma-\int_2^0(-2y)dx$

$=-4$ **……………………………………………………10 分**

2. 补曲面$\Sigma_1: z=4\ (x^2+y^2\le 4)$, 取上侧. 则

原式$=\iiint\limits_{\Omega}(y+0+0)dv-\iint\limits_{\Sigma_1}xydydz+xdzdx+x^2dxdy$ **………………5 分**

$$=0-\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}x^2dxdy=-\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(x^2+y^2)dxdy$$

$=-\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2\cdot rdr=-4\pi.$ **…………………………………………10 分**

3. 作周期延拓. **……………………………………………………1 分**

$b_n=0,\ n=1,2,\cdots$

$$a_n=\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}(x+2)d\sin nx=\frac{2}{n\pi}\left[(x+2)\sin nx\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin nxdx\right]$$

$$=\frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}\dfrac{-4}{n^2\pi},n=1,3,\cdots\\ 0,n=2,4,\cdots\end{cases}$$

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2+x)dx=\dfrac{1}{\pi}(2+x)^2\Big|_0^{\pi}=4+\pi.$ **…………………………5 分**

$\therefore f(x)=2+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,\quad -\pi<x\le\pi.$ **………7 分**

$$\therefore\ 2+0=2+\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$,

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{6}.$ **…………………………………10 分**

2012 级

一、完成下列各题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. $f(x,1)=x^2+1$, $\quad f_x'(x,1)=2x$

2. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f_2'\cdot 2xy$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{22}''\cdot 2xy\cdot 2xy+f_2'\cdot 2x=4x^2y^2f_{22}''+2xf_2'.$

3. $\vec{\tau}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2x&2y&2z\\1&1&1\end{vmatrix}_{(1,-1,1)}=-4(1,0,-1)$，平面方程$x-1-(z-1)=0\Rightarrow x-z=0$

4. $\iint\limits_{D}e^{-x^2-y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2 e^{-r^2}\cdot rdr\right]d\theta=-\pi e^{-r^2}\Big|_0^2=\pi(1-e^{-4})$

5. $f(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int(1+\dfrac{1}{x})e^x\cdot e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=\dfrac{1}{x}\left[\int(1+\dfrac{1}{x})e^x\cdot xdx+C\right]$

$$=\frac{1}{x}\left[\int(x+1)e^xdx+C\right]=\frac{1}{x}\left[xe^x+C\right]=e^x+\frac{C}{x}.$$

或$(xf(x))'=(xe^x)'\Rightarrow xf(x)=xe^x+C\Rightarrow f(x)=e^x+\dfrac{C}{x}.$

再由 $f(1)=e\Rightarrow C=0$，故 $f(x)=e^x$

二、计算下列各题（共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

1. (1) $\begin{cases} f_x'(x,y)=y \\ f_y'(x,y)=x \end{cases}$，唯一驻点 $(0,0)$.

$A=f_{xx}''(0,0)=0,\quad B=f_{xy}''(0,0)=1,\quad C=f_{yy}''(0,0)=0$. $\Delta=AC-B^2=-1<0$.

$f(x,y)$ 不存在极值.

(2) $L=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)=xy+\lambda(x^2+y^2-2)$

$$\begin{cases} L_x'=y+\lambda\cdot 2x=0 \\ L_y'=x+\lambda\cdot 2y=0 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{-\lambda\cdot 2x}{-\lambda\cdot 2y} \\ x^2+y^2=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2=y^2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases},\begin{cases} y=\pm x \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$x=\pm1, y=\pm1$

$$\max_{x^2+y^2=2}(f(x,y))=f(\pm1,\pm1)=1,\quad \min_{x^2+y^2=2}(f(x,y))=f(\pm1,\mp1)=-1$$

2. 法 1 $I=\int_L\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+4y^2}=\int_L\dfrac{-ydx+xdy}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\int_L -ydx+xdy=\dfrac{1}{2}A_D=\pi$

法 2 $L:\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$，$t:0\to 2\pi$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{-\sin t d(2\cos t)+2\cos t d\sin t}{(2\cos t)^2+4(\sin t)^2}=\int_0^{2\pi}\frac{dt}{2}=\pi$$

3. 补 Σ_0: $z=0\,(x^2+y^2\le a^2)$，取下侧，利用高斯公式得

$$\text{原式}=\iiint_\Omega(y+z+x)dV-\iint_{\Sigma_0}(z+1)xdxdy$$

$$=0+\iiint_\Omega zdV+0-\iint_D(0+1)x(-dxdy)=\iiint_\Omega zdV+0$$

$$=\int_0^a\left[z\iint_{D_z}dxdy\right]dz=\int_0^a z\cdot\pi(\sqrt{a^2-z^2})^2dz=\frac{\pi}{4}a^4$$

4. $f(x)=\sum_{n=1}^\infty\dfrac{x^n}{n},\quad f'(x)=\sum_{n=1}^\infty x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}\ \ (|x|<1)$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x)\ (-1\le x<1)$$

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{x^{n+1}}{n}=xf(x)=-x\ln(1-x)\ (-1\le x<1)$$

$$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n\cdot 2^{n+1}}=\sum_{n=1}^\infty\frac{(1/2)^{n+1}}{n}=-\frac{1}{2}\ln(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\ln 2$$

三、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. 0　2. π　3. $4\pi R^4$　4. $(-1)^n(2n)!$　5. 3

6~10. DBABA

2013 级

一、完成下列各题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. $f(x,0)=(x^2+1)\arctan 1$　　$f'_x(x,0)=2x\cdot\dfrac{\pi}{4},\ f'_x(1,0)=\dfrac{\pi}{2}$.

2. $\varphi'_x(x,y)=f'_1(xy,\dfrac{y}{x})y+f'_2(xy,\dfrac{y}{x})\dfrac{-y}{x^2}$

$\varphi'_x(1,1)=f'_1(1,1)-f'_2(1,1)=a-b.$

3. $\dfrac{\partial x}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_x}$，$\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{F_z}{F_y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}$

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1.$$

4. $\iint\limits_D|y-x|d\sigma=\iint\limits_{D_{下}}(x-y)d\sigma+\iint\limits_{D_{上}}(y-x)d\sigma$

$$=\int_0^1\left[\int_0^x(x-y)dy\right]dx+\int_0^1\left[\int_x^1(y-x)dy\right]dx=\frac{1}{3}$$

注：也可利用区域及被积函数的轮换对称性

5. 由 PQ 被 y 轴平分得 $Q(-x,0)$；由 $P(x,y)$ 处法线斜率 $k=-\dfrac{1}{y'}$，

法线方程为 $Y-y=-\dfrac{1}{y'}(X-x)$，令 $Y=0$ 得 $X_0=x+yy'$，

故 $Q(x+yy',0)$. 由此得到 $P(x,y)$ 满足的微分方程为

$-x=x+yy'$，即　$2x+yy'=0$.

解得曲线方程为　$x^2+\dfrac{y^2}{2}=C$.

二、计算下列各题（共 4 小题，每小题 10 分，共 40 分）

1. 补线 $L_1:\begin{cases}x=x\\ y=0\end{cases},\ x:0\to 2$，则有

$$I=\iint\limits_D(x+y)d\sigma-\int_{L_1}(e^x\sin y-xy)dx\ =\iint\limits_D xd\sigma+\iint\limits_D yd\sigma-\int_0^2(e^x\sin 0-x\cdot 0)dx$$

$$=\bar{x}S_D+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_0^{2\cos\theta}r\sin\theta\cdot rdr\right]d\theta=\frac{1}{2}\pi+\frac{2}{3}$$

2. 补面 Σ_0：$z=0\ (x^2+y^2\le a^2)$，取下侧. 则

$$I=2\iiint\limits_D(x+y+z)dV-\iint\limits_{\Sigma_0}(z^2+3x)dxdy$$

$$=2\iiint\limits_D xdV+2\iiint\limits_D ydV+2\iiint\limits_D zdV-\iint\limits_D(0^2+3x)(-dxdy)$$

$$=2\int_0^a z\cdot\pi(\sqrt{a^2-z^2})^2dz+0=\frac{\pi}{2}a^4$$

3. (1) $R=1, \quad [-1,1)$;

(2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x(\sum_{n=0}^{\infty}x^n)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x) \ [-1,1)$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\begin{cases}\frac{-1}{x}\ln(1-x) & [-1,0)\cup(0,1)\\ 1 & x=0\end{cases}$$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n+1}=\frac{-1}{x}\ln(1-x)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2\ln 2.$

4. 设三角形的三边长分别为 x,y,z，则 $2p=x+y+z$, 令

$L=p(p-x)(p-y)(p-z)+\lambda(x+y+z-2p)$，及

$$\begin{cases}L_x=p(p-y)(p-z)+\lambda=0\\ L_y=p(p-x)(p-z)+\lambda=0\\ L_z=p(p-x)(p-y)+\lambda=0\\ 2p=x+y+z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=z\\ 2p=x+y+z\end{cases}, \quad \therefore \quad x=y=z=\frac{2p}{3}.$$

$\because \quad p-x>0, p-y>0,(p-x)+(p-y)=z<p$，

故 S 为在该域上的最大值. 由于最大值在域上一定存在，驻点唯一，因此最大值在上述点处取得，为

$$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}=\sqrt{p\frac{p}{3}\frac{p}{3}\frac{p}{3}}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}.$$

三、选择题与填空题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	A	D	D	D	C	10	$8\pi a^4$	$-\frac{1}{2}$	$2e^x-x$

2014 级

一．选择题与填空题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

1-6. DBABCC 7. $x+y$ **8.** $8\pi a^4$ **9.收敛 10. 1**

二、计算题（共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

11. $\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_1')_y'+(f_2')_y'=f_{11}''+f_{12}''\cdot(-1)+f_{21}''+f_{22}''\cdot(-1)=f_{11}''-f_{22}''$$

12. 原式 $=\iint_D|x-y|d\sigma=2\iint_{D_1}(x-y)d\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^1(r\cos\theta-r\sin\theta)rdr\right]d\theta$

$$=2\left[\sin\theta+\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}(\sqrt{2}-1).$$

13. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{7^{\ln(n+1)}}\frac{7^{\ln n}}{2^n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7^{\ln n}}{7^{\ln(n+1)}}=2\lim\limits_{n\to\infty}7^{\ln\frac{n}{n+1}}=2>1$

级数发散.

14. $-\tan y dy=\dfrac{2xdx}{1+x^2}$,

$\ln|\cos y|=\ln(1+x^2)+\ln|C|,\quad \cos y=C(1+x^2).$

由 $y(0)=0$ 得：$C=1$，得解

$$\cos y=1+x^2.$$

15. 法 1：$L:\begin{cases}x=a+a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}\quad t:0\to 2\pi.$

$$\int_L xydx=\int_0^{2\pi}a(1+\cos t)a\sin t d(a\sin t)\quad=0.$$

法 2：原式 $=\int_L xydy=\iint\limits_D ydxdy=0.$

16. $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{1+x}\right)=\dfrac{-1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}+\dfrac{1}{1+x}\right)$

$$=\frac{-1}{4}\left(\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{4}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\right]x^n,\ |x|<1.$$

三、综合题（共 4 题，每题 10 分，共 40 分）

17. 设 $P(x,y,z)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点，则 $d=\dfrac{1}{\sqrt{6}}|x+y-2z-2|$.

令 $F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$,

$$\begin{cases}F_x'=2(x+y-2z-2)-2\lambda x=0\\ F_y'=2(x+y-2z-2)-2\lambda y=0\\ F_z'=2(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0\\ z=x^2+y^2\end{cases}.$$

解得唯一驻点 $(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8})$.

根据题意，距离的最小值一定存在，且有唯一驻点，故 $d_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\left|\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}-2\right|=\dfrac{7}{4\sqrt{6}}$.

18. $P=2yf(x),\ Q=xf(x)-x^2,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=2f(x),\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=f(x)+xf'(x)-2x.$

由在 $x>0$ 内与路径无关的充分必要条件是在 $x>0$ 内 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即

$$f(x)+xf'(x)-2x=2f(x)\ (\ x>0\ )$$

得
$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=2.$$

解得
$$f(x)=e^{-\int\frac{-1}{x}dx}\left(\int 2e^{\int\frac{-1}{x}dx}dx+C\right)=x\left(2\ln x+C\right)$$

由 $f(1)=1$ 得 C=1，故 $f(x)=x\left(2\ln x+1\right)$.

19. 补 Σ_1：$z=0(x^2+y^2\le 1)$，下侧，记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域，则

$$I=(\iint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1})x^2dydz+y^2dzdx+(z^2-1)dxdy.$$

$$=\iiint_{\Omega}(2x+2y+2z)dxdydz-\iint_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$

$$=0+0+2\int_0^1 zdz\iint_{D_z}d6-\pi=2\int_0^1 z\cdot\pi(\sqrt{1-z})^2dz-\pi$$

$$=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$$

20. 证明题:

(1) $\mathrm{grad}f=0\Rightarrow f_x'=f_y'=0$.

由 f 可微得　　$df(x,y)=0$

$\therefore f(x,y)=C$.

(2)在格林公式中取 $P=-\dfrac{\partial z}{\partial y},Q=\dfrac{\partial z}{\partial x}$，得

$$\iint_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_L-\frac{\partial z}{\partial y}dx+\frac{\partial z}{\partial x}dy$$

右边 $=\int_L(\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y})\cdot(dy,-dx)=\int_L \mathrm{grad}z\cdot\vec{n}^0ds=\int_L\dfrac{\partial z}{\partial n}ds$ =左边

2015 级《高等数学(A)II》期末试卷参考解答

一、选择和填空题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

1-5. BBCDD, 6. 2π, 7. 4π, 8-10. AAA

二、完成下列各题（共 8 题，每题 5 分，共 40 分）

1. 解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{xy}\cdot y+\dfrac{1}{2}xy^2$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{xy}\cdot xy+e^{xy}+xy$，$\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=2e+1$.

2. 解：记 $F(x,y,z)=e^z+xyz-1$，则 $F_x'=yz,\quad F_z'=e^z+xy$

所以 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x'}{F_z'}\ =-\dfrac{yz}{e^z+xy}$

3. 解：$\int_0^1dx\int_x^1e^{y^2}dy=\int_0^1dy\int_0^ye^{y^2}dx=\int_0^1ye^{y^2}dy=\left.\dfrac{1}{2}e^{y^2}\right|_0^1=\dfrac{e-1}{2}$

4. 解：$\iint_D x^2dxdy=\dfrac{1}{2}\iint_D(x^2+y^2)dxdy=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2r^2\cdot rdr=4\pi$.（轮换对称性）

或 $\iint_D x^2dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2r^2\cos^2\theta\cdot rdr=\int_0^{2\pi}\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta\int_0^2r^2\cdot rdr=4\pi$.

或 $\iint_D x^2dxdy=\int_{-1}^1x^2dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy=4\int_0^1x^2\sqrt{1-x^2}dx=4\pi$.（直角坐标然后三角换元）

5. 解：$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV = \int_0^1 z^2 dz \iint\limits_{D_z} d\sigma = \int_0^1 z^2 \cdot \pi \cdot 1^2 dz = \frac{\pi}{3}$. （先面后线）

或 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dV = \iint\limits_{D_z} d\sigma_{xy} \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3} \iint\limits_{D_z} d\sigma_{xy} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{3}$.（先线后面）

6. 解：$\iint\limits_{\Sigma} z dS = \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dxdy = a \iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} dxdy = \pi a^3$.

7. 解：$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, (|x|<1)$; $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} x^n, (|x|<1)$

$$f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1} x^{2k-1}, (|x|<1)$$

8. 解：令 $u = \frac{y}{x}$，则 $dy = udx + xdu$，$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$，原方程变为 $x\frac{du}{dx} = \tan u \Rightarrow \cot u du = \frac{dx}{x}$

解之得 $\sin u = Cx$，原方程通解为 $\sin\frac{y}{x} = Cx$.

三、完成下列各题（共 3 题，每题 10 分，共 30 分）

1. 解：由 $\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x = 0 \\ f'_y(x,y) = \ln y + 1 = 0 \end{cases}$ 得驻点 $(0, e^{-1})$

又 $A = f''_{xx}(0,e^{-1}) = 2, B = f''_{xy}(0,e^{-1}) = 0, C = f''_{yy}(0,e^{-1}) = e$.

$\Delta = B^2 - AC < 0$, 且 $A > 0$，故该点为极小值点，极小值为 $f(0,e^{-1}) = -e^{-1}$

2. 解：法 1 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{z} dxdy = \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-dxdy) = -\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^1 \frac{1}{r} \cdot r dr = -2\pi$.

法 2 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{z} dxdy = \iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{1}{z} dxdy - \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{1}{z} dxdy = \iiint\limits_{\Omega} \frac{-1}{z^2} dV - \iint\limits_{\Sigma_1} dxdy$

$$= -\int_0^1 \frac{1}{z} (\iint\limits_{D_z} dxdy) dz - \iint\limits_{D} dxdy = -\int_0^1 \frac{1}{z} \cdot \pi z^2 dz - \pi = -2\pi$$

3. 解：特征方程为 $r^2 - 4r + 3 = 0$，特征根为 $r_1 = 1, r_2 = 3$.

对应齐次线性微分方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$.

$f(x) = 2e^{2x}$，因为 $\lambda = 2$ 不是特征根，故特解可令为 $y^* = ae^{2x}$，

代入非齐次方程可得 $a = -2$.

故原方程通解为 $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - 2e^{2x}$.