第七章　无穷级数

无穷级数
- 常数项级数
- 函数项级数
  - 幂级数
  - 傅里叶级数

无穷级数是研究函数的工具
- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

第28讲　常数项级数的概念和性质

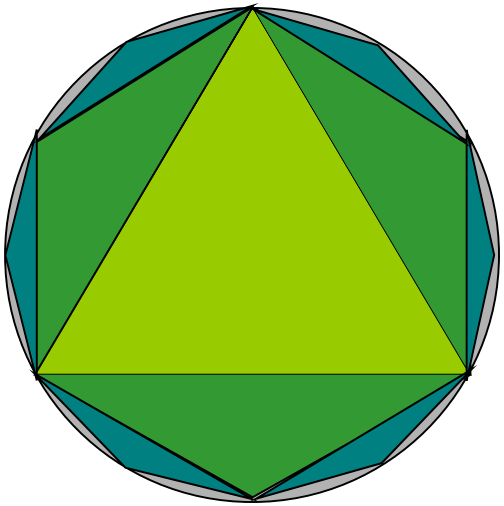
一、常数项级数的概念

二、无穷级数的基本性质

一、常数项级数的概念

引例1. 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正 3×2^n $(n=0,1,2,\cdots)$边形,设 $\boldsymbol{a_0}$ 表示内接正三角形面积, $\boldsymbol{a_k}$ 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正



3×2^n 边形面积为

$$a_0+a_1+a_2+\cdots\ +a_n$$

$n\to\infty$时, 这个和逼近于圆的面积 $\boldsymbol{A}$.

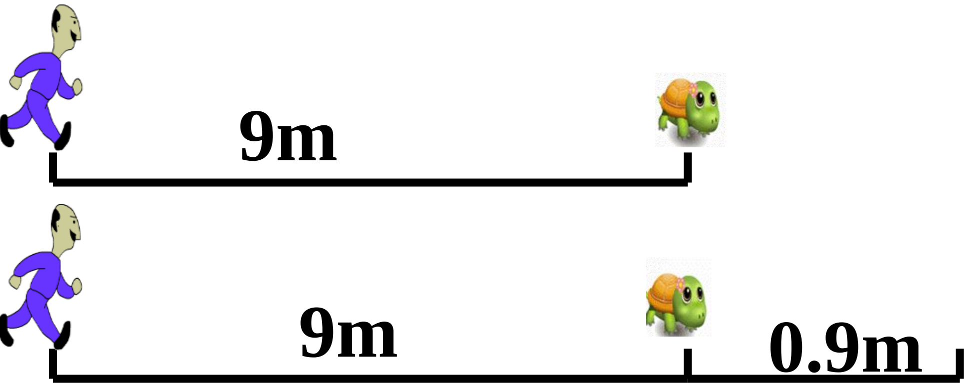
即

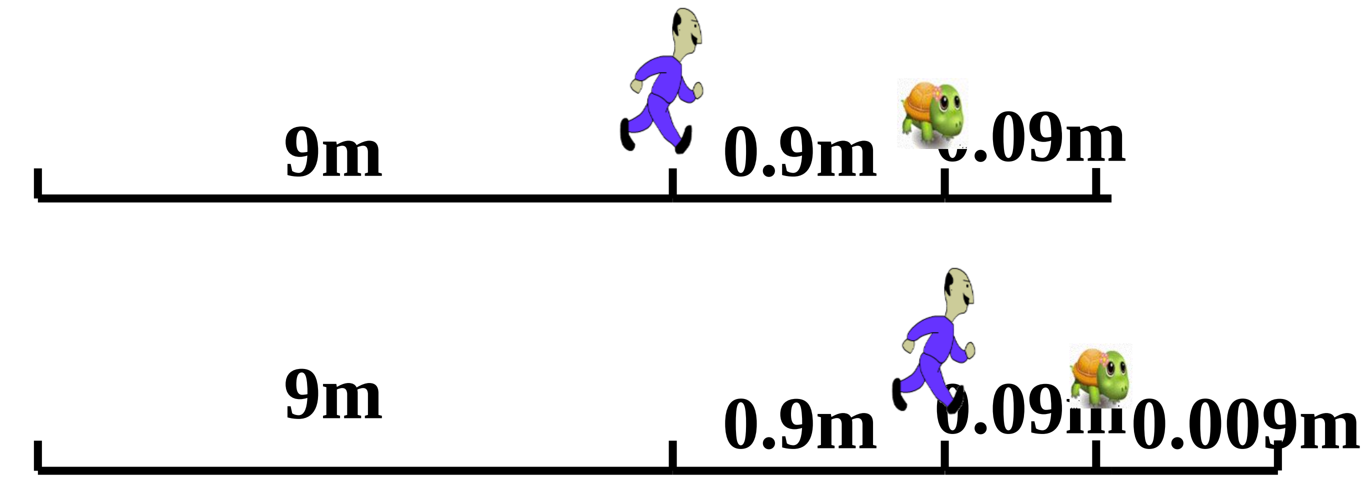
$$A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

引例2. 公元前4世纪古希腊哲学家芝诺提出一个 问题：

神话中的善跑勇士阿里奚斯 追不上他 前面的乌龟。

假设乌龟在他前面9米，阿里奚斯速度10米/秒,乌龟1米/秒。





……, 每当阿里奚斯追到他前面乌龟的出发点, 乌龟都向前跑一段, 所以阿里奚斯永远也追不上乌龟。

阿里奚斯追乌龟用的总时间

0.9+0.09+0.009+0.0009+0.00009+……

阿里奚斯追乌龟所用时间

$$t = 0.9 + 0.09 + 0.009 + \cdots$$

追过的路程

$$s = 9 + 0.9 + 0.09 + \cdots$$

这种把无穷多个数用加号连接起来的式子起名为无穷级数

无穷多个数相加怎么加？

1. 无穷级数 给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$

将各项依次相加, 简记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数.

2. 一般项其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项(通项).

3. 部分和 级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

称为级数的部分和.

1. 无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

2. 一般项其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项(通项).

3. 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

i. S_n 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不同

ii. $\lim_{n\to\infty} S_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 相同

3. 部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$

i. $\boldsymbol{S_n}$与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 不同

ii. $\lim_{n\to\infty} S_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 相同

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} =\boldsymbol{S}, & \text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \boldsymbol{S} \\ \text{不存在}, & \text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \end{cases}$$

4. 级数的收敛和发散

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, 则称无穷级数收敛,

并称 S 为级数的和, 记作 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在, 则称无穷级数发散 .

5. 级数的余项

当级数收敛时, 称差值 $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$

为级数的余项.

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

例1. 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q称为公比)的敛散性.

解: 当$q \neq 1$时,

$$S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$$

若$|q|<1$, $\because \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$

因此级数收敛 , 其和为 $\frac{a}{1-q}$;

若$|q|>1$, $\because \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$

因此级数发散.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

当 $q = -1$ 时,

$$S_n = a + a(-1) + a(-1)^2 + \cdots + a(-1)^{n-1} = \frac{a[1-(-1)^n]}{1-(-1)} = \frac{a[1-(-1)^n]}{2}$$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & \text{n为奇数} \\ 0, & \text{n为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n \to \infty} S_n$ 不存在, 因此级数发散.

2) 当 $q = 1$ 时, $S_n = n a \to \infty$, 因此级数发散;

综合 1)、2)可知, $|q| < 1$ 时, 等比级数收敛;

$|q| \geq 1$ 时, 等比级数发散.

阿里奚斯追乌龟所用时间

$$t=0.9+0.09+0.009+\cdots=\frac{0.9}{1-0.1}=1$$

追过的路程

$$\boldsymbol{s=9+0.9+0.09+\cdots=\frac{9}{1-0.1}=10}$$

例2. 判别下列级数的敛散性: (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

解: (1) $S_n=\underline{\frac{1}{1\cdot 2}}+\underline{\frac{1}{2\cdot 3}}+\underline{\frac{1}{3\cdot 4}}+\cdots+\underline{\frac{1}{n\cdot(n+1)}}$

$$=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (1) 收敛, 其和为 1 .

技巧:

利用 "拆项相消" 求和

例2. 判别下列级数的敛散性: (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n}$;

解: (2)

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}$$

$$=(\cancel{\ln 2}-\ln 1)+(\cancel{\ln 3}-\cancel{\ln 2})+\cancel{\cdots}+\left(\ln(n+1)-\cancel{\ln n}\right)$$

$$=\ln(n+1)\to\infty\quad(n\to\infty)$$

所以级数 (2) 发散 ;

技巧:

利用 “拆项相消” 求和

例3 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ **发散.**

证明：假设调和级数收敛于 S**, 则**

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=0$$

但 $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真.

二、无穷级数的基本性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，即 $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 也收敛，其和为 $c\,S$.

证：令 $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$，　$\lim_{n\to\infty} S_n = S$

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} c\,u_k = cu_1 + cu_2 + cu_3 + \cdots + cu_n = c\,S_n,$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = c\,S$$

$\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 收敛，其和为 $c\,S$.

说明：级数各项乘以非零常数后其敛散性不变.

性质2. 设有两个收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sigma=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$, $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}v_k$, 则

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty}v_n = S_n \pm \sigma_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n=\lim_{n\to\infty}\left(S_n \pm \sigma_n\right)=S\pm\sigma$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S\pm\sigma$.

说明: (1) 性质2 表明收敛级数可逐项相加或减 .

(2) 若两级数中一个收敛一个发散 , 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$必发散 .

(反证法) 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}[(u_n + v_n) - v_n]$ 收敛，矛盾！

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 发散.

但若两个级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散.

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$, 而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 在级数前面加上或去掉有限项, 不会影响级数的敛散性.

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$ 的部分和为

$$\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$$

由于 $n \to \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况 .

性质4. 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和. 加括号增加收敛性

证: 设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列 $S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列, 因此必有

$$\lim_{m\to\infty}\sigma_m=\lim_{n\to\infty}S_n=S$$

用反证法可证

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散.

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散.

例4.判断级数的敛散性:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}+\cdots$$

解: 考虑加括号后的级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}=\frac{2}{n-1}$$

$\therefore\quad \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，从而原级数发散.

三、级数收敛的必要条件

设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 则必有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证: $u_n=S_n-S_{n-1}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0$$

可见: 若级数的一般项不趋于**0**, 则级数必发散 .

注意: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 并非级数收敛的充分条件.

例如, 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

虽然 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, 但此级数发散 .

内容小结

1. 定义: 无穷级数、部分和、收敛、和、发散

2. 性质:线性、添去有限项、收敛级数加括号

3.级数收敛的必要条件