第四节　　函数展开为幂级数

两类问题：在收敛域内

$$\text{幂级数} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{\text{展 开}}{\overset{\text{求 和}}{\rightleftarrows}} \text{和函数 } S(x)$$

本节内容:

4.1　泰勒 (Taylor) 级数

4.2　函数展开成幂级数

一、泰勒 (Taylor) 级数

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有 $\boldsymbol{n+1}$ 阶导数, 则在该邻域内有 :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

称为 $f(x)$ 的 n 阶泰勒公式, 其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$ (ξ 在 x 与 x_0 之间)

称为拉格朗日余项 .

若函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内具有任意阶导数,则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 $f(x)$ 的泰勒级数 .

当 $x_0=0$ 时, 泰勒级数又称为麦克劳林级数 .

待解决的问题 :

1) 对此级数, 它的收敛域是什么 ?

2) 在收敛域上 , 和函数是否为 $f(x)$?

定理1． 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $\bigcup(x_0)$ 内具有各阶导数, 则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数的充要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项满足: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

证明: $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\,, \quad x \in \bigcup(x_0)$$

令 $$S_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(x) = S_{n+1}(x) + R_n(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}\left[f(x) - S_{n+1}(x)\right] = 0\,, \quad x \in \bigcup(x_0)$$

定理2. 若 $f(x)$ 能展成 x 的幂级数, 则这种展开式是**唯一**的 , 且与它的麦克劳林级数相同.

证: 设 $f(x)$ 所展成的幂级数为

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots, \quad x \in (-R, R)$$

则

$$a_0 = f(0)$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots; \qquad a_1 = f'(0)$$

$$f''(x) = 2!a_2 + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots; \qquad a_2 = \frac{1}{2!} f''(0)$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \cdots; \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots$$

显然结论成立 .

二、函数展开成幂级数

展开方法 $\begin{cases} \text{直接展开法 — 利用泰勒公式} \\ \text{间接展开法 — 利用已知其级数展开式的函数展开} \end{cases}$

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知, 函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下：

第一步 求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值；

第二步 写出麦克劳林级数，并求出其收敛半径 R；

第三步 判别在收敛区间$(-R, R)$ 内$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$是否为 0.

例1. 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=1\ \ (n=0,1,\cdots)$,

故得级数 $1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$

其收敛半径为 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\Big/\frac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与x 之间)

故 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\qquad x\in(-\infty,+\infty)$

例2. 将 $f(x)=\sin x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

$$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=0,1,2\ldots)$$

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,$$

$$\therefore \sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

其收敛半径为 $=+\infty$ $\qquad x\in(-\infty,+\infty)$

对任何有限数 x, 其余项满足

$$|R_n(x)|=\left|\frac{\sin(\xi+(n+1)\frac{\pi}{2})}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

例3. 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数.

解: $f(0)=1, f'(0)=m, f''(0)=m(m-1), \quad f'''(0)=m(m-1)(m-2),$

$$f^{(n)}(0)=m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1), \ \cdots$$

于是得 级数 $1+mx+\dfrac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

由于 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{m-n}\right|=1 \quad (-1<x<1)$

说明

(1) 在 $x=\pm1$ 处的收敛性与 m 有关.

(2) 当 m 为正整数时, 级数为 x 的 m 次多项式, 上式

就是代数学中的二项式定理.

例3. 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数.

解: $$f(x)=(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

对应 $m=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},$ 的二项展开式分别为

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\cdots$$
$$(-1\le x\le 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots$$
$$(-1<x\le 1)$$

例3. 将函数 $f(x)=(1+x)^m$ 展开成 x 的幂级数.

解: $$f(x)=(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$(-1<x<1)$$

$m=-1$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$(-1<x<1)$$

常用函数的幂级数展开式

（1）$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$　　$x \in (-\infty, +\infty)$

（2）$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$　　$x \in (-\infty, +\infty)$

（3）$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$　　$x \in (-\infty, +\infty)$

（4）$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$　　$x \in (-1, 1)$

（5）$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$　　$x \in (-1, 1)$

2. 间接展开法

1. 公式，变量代换
2. 逐项求导
3. 逐项求积

2. 间接展开法

(1). 变量代换法

例4. 将函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解：因为

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n, \qquad (-1<x<1)$$

把 x 换成 x^2 ，得

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \qquad (-1<x<1)$$

2. 间接展开法 (2). 逐项求导法

例7. 将$f(x)=\cos x$展开成 x 的幂级数.

$$\because \quad \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

两边求导

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots$$

$$\cos x = \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n!} x^{2n}$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

2. 间接展开法 (2). 逐项求积法

例8. 将函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

解: $$f'(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (-1<x<1)$$

$$f(x)=f(x)-f(0)=\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f(x)=\ln(1+x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad -1<x\le 1$$

幂级数在 x =1 收敛， x =-1 发散 .

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \Longleftrightarrow -\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad -1\le x<1$$

例9. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解: $\dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+1)(x+3)}=\dfrac{1}{2(1+x)}-\dfrac{1}{2(3+x)}$

$$=\frac{1}{4\left(1+\frac{x-1}{2}\right)}-\frac{1}{8\left(1+\frac{x-1}{4}\right)}$$

$$\boxed{(\,|x-1|<2\,)}$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-\frac{x-1}{2}+\frac{(x-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n}+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{8}\left[1-\frac{x-1}{4}+\frac{(x-1)^2}{4^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(x-1)^n}{4^n}+\cdots\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+2}}-\frac{1}{2^{2n+3}}\right)(x-1)^n \quad (-1<x<3)$$

常用函数幂级数展开式

(1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$ $x \in (-\infty, +\infty)$

(2) $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $x \in (-\infty, +\infty)$

(3) $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ $x \in (-\infty, +\infty)$

(4) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $x \in (-1, 1)$

(5) $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n,$ $x \in (-1, 1)$

(6) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ $x \in (-1, +1]$

(7) $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $x \in [-1, +1)$

内容小结

1. 函数的幂级数展开法

(1) 直接展开法 — 利用泰勒公式 ;

(2) 间接展开法 — 利用幂级数的性质及已知展开式的函数 .

2. 常用函数的幂级数展开式

练习1. 将 $\ln\left(1+x-2x^2\right)$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

解: $\ln\left(1+x-2x^2\right) = \ln(1-x)+\ln(1+2x)$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \qquad (-1\le x<1)$$

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(2x)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{n}x^n \quad \left(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\right)$$

$$\ln\left(1+x-2x^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 2^n-1}{n}\right]x^n \quad \left(-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad -1\le x<1}$$

练习2. 将 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数

解: $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad x\in(-1,1)$

$\therefore\ f(x)-f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}\,x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$

$x=\pm 1$ 时, 此级数条件收敛, $f(0)=\frac{\pi}{4}$**, 因此**

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, \quad x\in[-1,1]$$

练习4. 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数.

解: $\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right)$$

$$(-\infty<x<+\infty)$$

5. 如何求 $y=\sin^2 x$ 的幂级数？

提示: $$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}(2x)^{2n}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad x\in(-\infty,+\infty)$$