报童决策

报童每天清晨从报社购进报纸零售，晚上将没有卖掉的报纸退回。请你为报童筹划一下，他应如何确定购进报纸的数量，以获得最大的收入。

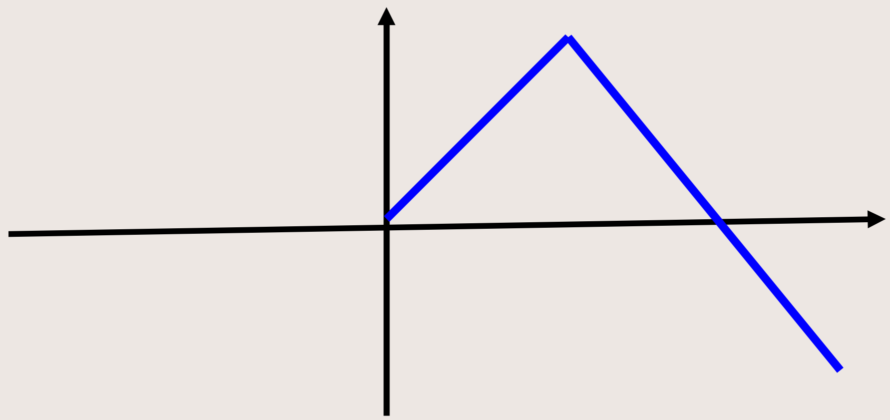
问题重述和假设

- 问题重述：报童每天清晨从报社购进报纸零售，晚上将没有卖掉的报纸退回。请你为报童筹划一下，他应如何确定购进报纸的数量，以获得最大的收入。
- 假设：设报纸每份的购进价为b，零售价为a，退回价为c，那么$a>b>c$的假设是合乎实际的。

建模

- 设需求量为 ***r***;
- 记报童每天购进***n***份报纸时的收入为***G***(***n***, ***r***).

$$G(n,r)=\begin{cases}(a-b)n, & 0<n\le r\\(a-b)r-(b-c)(n-r), & n>r\end{cases}$$



建模

- 实际上，需求量 r 往往为随机变量，因此以一天的收入 $G(n, r)$ 作为衡量标准就不对了，应该以一段时间的总收入，或说一天的平均收入（即期望，记为 $G(n)$）作为衡量标准！
- 假设：需求量为 r 份的概率为 $p(r)$

$$G(n) = \sum_{r=0}^{\infty} G(n,r)p(r)$$

$$= \sum_{r=0}^{n}[(a-c)r-(b-c)n]p(r) + \sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)np(r)$$

建模

如果需求量为连续型的, 设r的分布密度为$f(x)$

$$G(n)=\int_0^{+\infty}G(n,x)f(x)dx$$

$$=\int_0^n[(a-c)x-(b-c)n]f(x)dx+\int_n^{+\infty}(a-b)nf(x)dx$$

- 问题的模型为:

$$\max_n G(n)$$

求解

- 模型的求解：

$$\max_{n} G(n)$$

- 离散型的用初等的方法—比较大小；

$$G(n^*-1)<G(n^*)>G(n^*+1)$$

- 连续型的用高等数学求最值的方法—求驻点.

$$\left.\frac{dG(n)}{dn}\right|_{n=n^*}=0$$

求解

模型的求解： $\max_{n} G(n)$

离散型——枚举法或比较大小

$$G(n^*-1) < G(n^*) > G(n^*+1)$$

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n}[(a-c)r-(b-c)n]p(r)+\sum_{r=n+1}^{\infty}(a-b)np(r)$$

$$\sum_{r=0}^{n^*-1}p(r)<\frac{a-b}{a-c}<\sum_{r=0}^{n^*}p(r)$$

求解

连续型—求驻点 $\left.\frac{dG(n)}{dn}\right|_{n=n^*}=0$

$$G(n)=\int_0^n[(a-c)x-(b-c)n]f(x)dx+\int_n^{+\infty}(a-b)nf(x)dx$$

$$G'(n)=-(b-c)\int_0^n f(x)dx+(a-b)\int_n^{+\infty}f(x)dx$$

$$\frac{\int_0^{n^*}f(x)dx}{\int_{n^*}^{+\infty}f(x)dx}=\frac{a-b}{b-c}\quad or\quad \int_0^{n^*}f(x)dx=\frac{a-b}{a-c}$$

$$\begin{cases}\int_0^{n^*}f(x)dx=P\{r<n^*\}\\ \int_{n^*}^{+\infty}f(x)dx=P\{r>n^*\}\end{cases}$$

$$\frac{\text{卖不完的概率}}{\text{不够卖的概率}}=\frac{\text{一份赚的钱}}{\text{一份赔的钱}}$$

求解

值得思考的一点

$$G(n)=\int_0^n [(a-c)x-(b-c)n]f(x)dx+\int_n^{+\infty}(a-b)nf(x)dx$$

$$=(a-c)\int_0^n xf(x)dx-(b-c)n\int_0^n f(x)dx+(a-b)n\int_n^{+\infty} f(x)dx$$

$$=(a-c)\int_0^n xf(x)dx-(a-c)n\int_0^n f(x)dx+(a-b)n$$

$$G'(n)=-(a-c)\int_0^n f(x)dx+(a-b)=0$$

$$\int_0^{n^*} f(x)dx=\frac{a-b}{a-c}$$

数据验证

- （离散情况）已知每**100**份全部卖出可获利**7**元，退回（或削价处理）赔**4**元，求最佳进货量.

需求量 r（百份）	0	1	2	3	4	5
概率$P(r)$	0.05	0.1	0.25	0.35	0.15	0.1

数据验证

收入函数:

$$G(n,r)=\begin{cases}7n, & 0<n\le r,\\ 7r-4(n-r)=11r-4n, & r<n\le 5.\end{cases}$$

$$G(n)=\sum_{r=0}^{n}(11r-4n)p(r)+\sum_{r=n+1}^{5}7np(r)$$

分析知n的取值只能是：**1,2,3,4,5**

数据验证

$$n=1\Rightarrow G(1)=\sum_{r=0}^{1}(11r-4)p(r)+\sum_{r=2}^{5}7p(r)$$

$$=\sum_{r=0}^{1}11(r-1)p(r)+7$$

$$=11(0-1)\times 0.05+0+7=6.45$$

$$n=2\Rightarrow G(2)=\sum_{r=0}^{2}(11r-8)p(r)+\sum_{r=3}^{5}14p(r)$$

$$=\sum_{r=0}^{2}11(r-2)p(r)+14$$

$$=11.8$$

数据验证

$$n=3 \Rightarrow G(3)=\sum_{r=0}^{3}(11r-12)p(r)+\sum_{r=3}^{5}21p(r)=14.4$$

$$n=4 \Rightarrow G(4)=\sum_{r=0}^{4}(11r-16)p(r)+\sum_{r=4}^{5}28p(r)=13.15$$

$$n=5 \Rightarrow G(5)=\sum_{r=0}^{5}(11r-20)p(r)=10.25$$

结论：$n=3$，即进300份时，平均收益最大！

数据验证

需求量 r（百份）	0	1	2	3	4	5
概率 $p(r)$	0.05	0.1	0.25	0.35	0.15	0.1

用推导出来的公式计算如下：

$$a-b=7,a-c=7+4=11,\frac{a-b}{a-c}=\frac{7}{11}\approx 0.636$$

$$\sum_{r=0}^{n^*-1}p(r)<\frac{a-b}{a-c}<\sum_{r=0}^{n^*}p(r)\Rightarrow n^*=3$$

数据验证

- （连续情况）一煤炭供应部门煤的进价为**65**元/吨，零售价**70**元/吨，若当年卖不出去，则第二年削价**20%**处理掉，如供应短缺，有关部门每吨罚款**10**元，已知顾客对煤炭年需求量服从区间[**20000, 80000**]上的均匀分布。求该部门一年煤炭最优存储策略，即最大收益的进货量。

数据验证

收入函数：

$$G(n,r)=\begin{cases}5n-10(r-n), & 0<n\le r,\\ 5r-9(n-r), & n>r.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}15n-10r, & 0<n\le r,\\ 14r-9n, & n>r.\end{cases}$$

$$G(n)=\int_0^n(14x-9n)f(x)dx+\int_n^{+\infty}(15n-10x)f(x)dx$$

$$G'(n^*)=0\Rightarrow\int_0^{n^*}f(x)dx=0.625$$

数据验证

分析题目知，n^*的取值范围为[20000,80000]

$$\int_0^{n^*} f(x)dx = 0.625 \Rightarrow \frac{n^* - 20000}{60000} = 0.625$$

$$n^* = 57500$$

改进或扩展

本问题其实是存储论（库存论）中的随机存储论部分，引导学生去系统学习存储论的知识，为参加数学建模竞赛打下坚实的基础。