第六章

曲线积分与曲面积分

积分学	定积分	二重积分	三重积分	曲线积分	曲面积分
积分域	区间域	平面域	空间域	曲线域	曲面域

曲线积分 $\begin{cases} \text{对弧长的曲线积分} \\ \text{对坐标的曲线积分} \end{cases}$

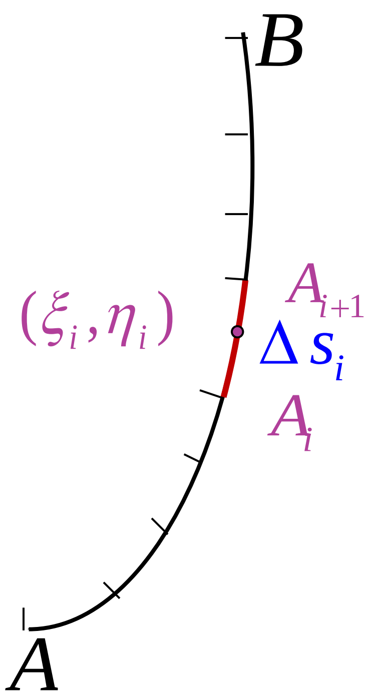
曲面积分 $\begin{cases} \text{对面积的曲面积分} \\ \text{对坐标的曲面积分} \end{cases}$

第一节　对弧长的曲线积分（第一类曲线积分）

1.1　对弧长的曲线积分的概念与性质

1. 引例：平面曲线形构件的质量

假设曲线形细长构件在空间所占弧段为$\overset{\frown}{AB}$，其线密度为 $\rho(x,y)$，计算此构件的质量.



"分割，近似，求和，取极限"

可得

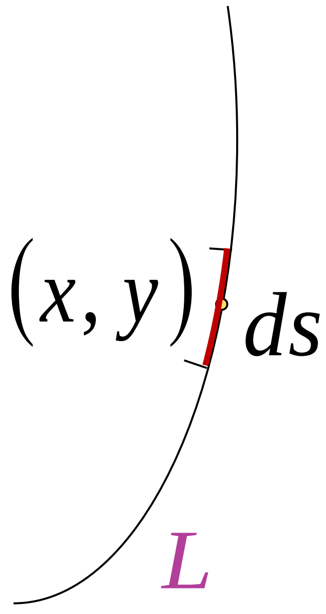
$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

元素法思想

$$\forall\, ds \subset L$$

$$dm = \rho(x, y) \cdot ds$$

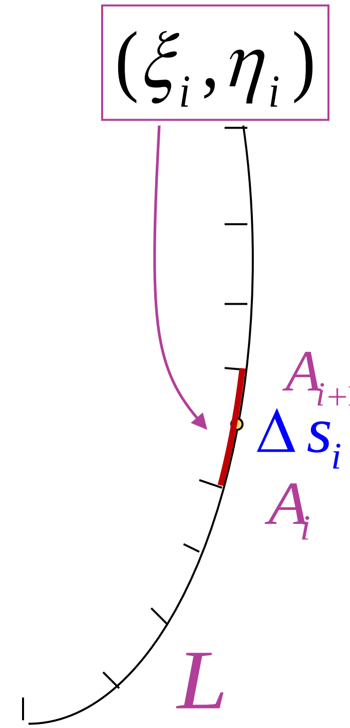
$$M = \int_L \rho(x, y)\, \mathrm{d}s$$



2. 定义

设 L 是平面上一条有限长的光滑曲线, $f(x, y)$是定义在 L上的一个有界函数, 若通过对L 的任意分割和对局部的任意取点, 下列 "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \overset{\text{记作}}{=\!=} \int_L f(x,y)\,ds$$



都存在, 则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L上对弧长的曲线积分, 或第一类曲线积分.

$f(x,y)$ 称为被积函数, L 称为积分曲线 .

注

1 曲线形构件的质量 $M=\int_L \rho(x,y)\mathrm{d}s$

2 若 L 是封闭曲线，则记为 $\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s.$

3 若 Γ 是空间中的曲线弧，则定义对弧长的曲线积分为

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

4 定积分是否可看作对弧长曲线积分的特例？

否！对弧长的曲线积分要求 $\mathrm{d}s\geq 0$，但定积分中 $\mathrm{d}x$ 可能为负.

3. 性质 线 性

(1) $$\int_L [f(x,y) \pm g(x,y)]\mathrm{d}s = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s \pm \int_L g(x,y)\mathrm{d}s$$

(2) $$\int_L k f(x,y)\mathrm{d}s = k\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$ **(*k* 为常数)**

积分区域可加性

(3) $$L = L_1 + L_2, \quad \int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s$$

(4) $$\int_L \mathrm{d}s = l$$ **(*l* 为曲线弧 *L* 的长度)**

(5) **对称性**

L无正负，f有正负和奇偶
且对f有偶双奇零

积分曲线L关于x轴(y)对称, L_1为L在x轴上部

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s, & 若 f(x,-y)=f(x,y)\\ 0, & 若 f(x,-y)=-f(x,y)\end{cases}$$

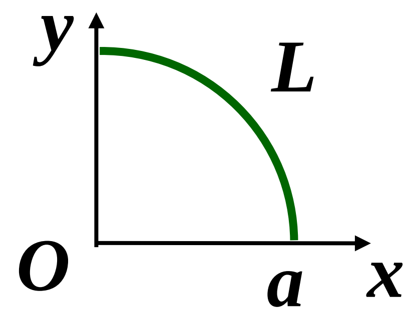
积分曲线L关于y轴(x)对称, L_1为L在y轴右部

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s, & 若 f(-x,y)=f(x,y)\\ 0, & 若 f(-x,y)=-f(x,y)\end{cases}$$

积分曲线L关于$y=x$对称（具有轮换对称性）

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_L f(y,x)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{2}\left(\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s+\int_L f(y,x)\,\mathrm{d}s\right)$$

1.2 对弧长的曲线积分的计算法



计算小技巧

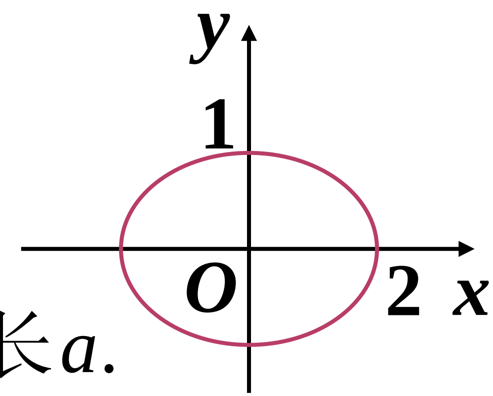
(1) $\int_L x^2 ds \qquad L: \dfrac{1}{4}$圆周$: x^2 + y^2 = a^2$

L关于*y*=*x*对称，因此 $I = \int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds$

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_L x^2 ds + \int_L y^2 ds\right) = \frac{1}{2}\int_L \left(x^2 + y^2\right) ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_L a^2\, ds = \frac{a^2}{2} l = \frac{a^2}{2}\frac{1}{4} 2\pi a = \frac{\pi a^3}{4}$$

1.2 对弧长的曲线积分的计算法



计算小技巧

(2) $\int_L (x\text{-}2y)^2 ds \quad L: \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$，周长$a$.

$$I = \int_L (x - 2y)^2 ds = \int_L \left(x^2 - 4xy + 4y^2\right) ds$$

$$= \int_L \left(x^2 + 4y^2\right) ds - \int_L (4xy) ds$$

利用对称性

固定一个x，对每一个x，都有两个相反的y抵消掉了

$$= 4\int_L ds$$

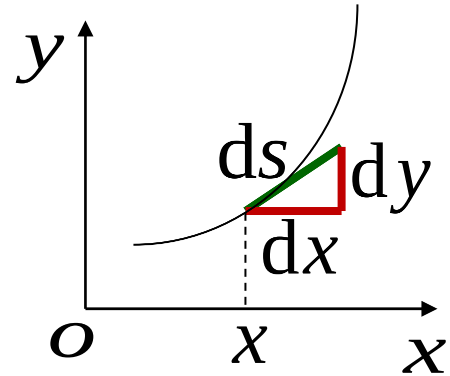
$$= 4a$$

1.2 对弧长的曲线积分的计算法

基本思路: 求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转 化}}$ 计算定积分

设 $f(x,y)$ 是定义在光滑曲线弧上的连续函数,

则曲线积分 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$ 存在,



1. L : $y=\psi(x)\ (a\le x\le b)$, 则有

$$\boxed{\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x}$$

例1. 计算 $\int_L x\,\mathrm{d}s$，其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上点 $O\ (0,0)$ 与点 $B\ (1,1)$ 之间的一段弧．

解: $\because L: y = x^2 \quad (0 \le x \le 1)$

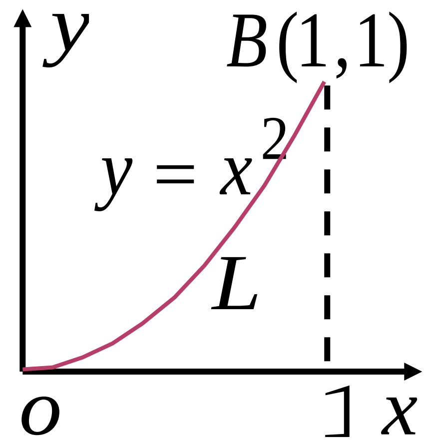
$$y' = 2x$$

$$\therefore \int_L x\,\mathrm{d}s = \int_0^1 x \cdot \sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$



1.2 对弧长的曲线积分的计算法

基本思路: 求曲线积分 $\xrightarrow{\text{转化}}$ 计算定积分

设 $f(x, y)$ 是定义在光滑曲线弧上的连续函数,

则曲线积分 $\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s$ 存在,

2. ***L*** **:** $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$, 则有

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

推广: 设空间曲线弧的参数方程为

$$L: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)\ (\alpha \le t \le \beta)$$

则 $\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t),\omega(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

计算方法: 把曲线的方程和弧长元素ds代入被积表达式, 从小参数值到大参数值积分.

3. 曲线方程为极坐标形式: $L: r=r(\theta)\ (\alpha \le \theta \le \beta)$,

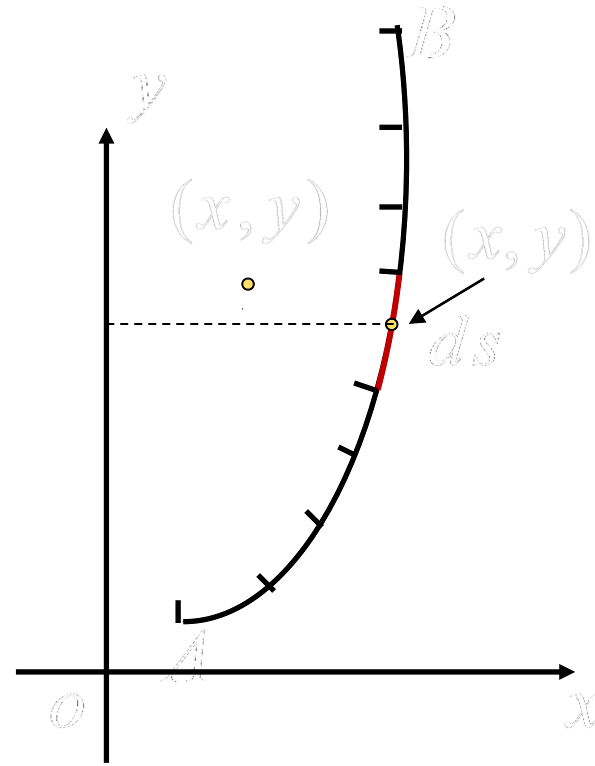
则 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$

$$=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

三、对弧长的曲线积分的应用

1. 曲线形构件的质量

$$m=\int_L \rho(x,y)\,\mathrm{d}s \qquad m=\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$



2. 曲线形构件的重心

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y)\,\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\,\mathrm{d}s} \qquad \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y)\,\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y)\,\mathrm{d}s}$$

$$\bar{x}=\frac{\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s} \qquad \bar{y}=\frac{\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s} \qquad z=\frac{\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}{\int_\Gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s}$$

形心

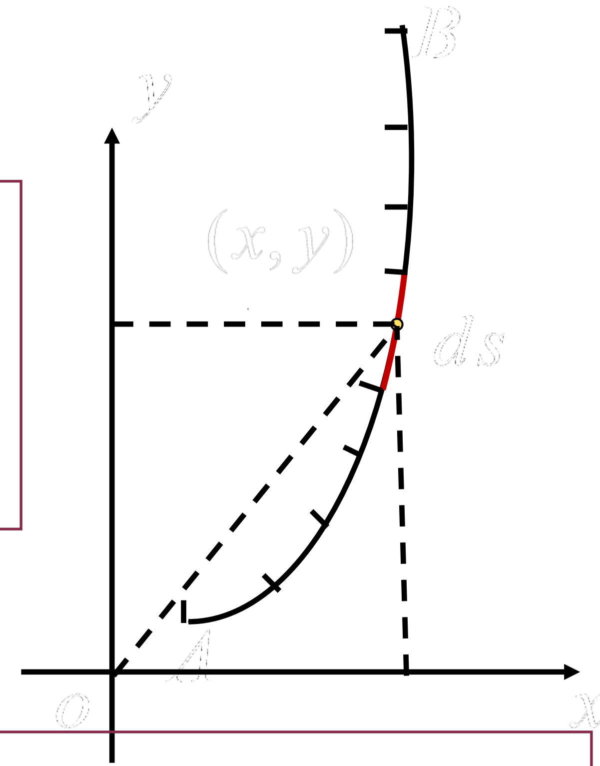
$$\bar{x}=\frac{\int_L x\,\mathrm{d}s}{\int_L \mathrm{d}s} \qquad \bar{y}=\frac{\int_L y\,\mathrm{d}s}{\int_L \mathrm{d}s}$$

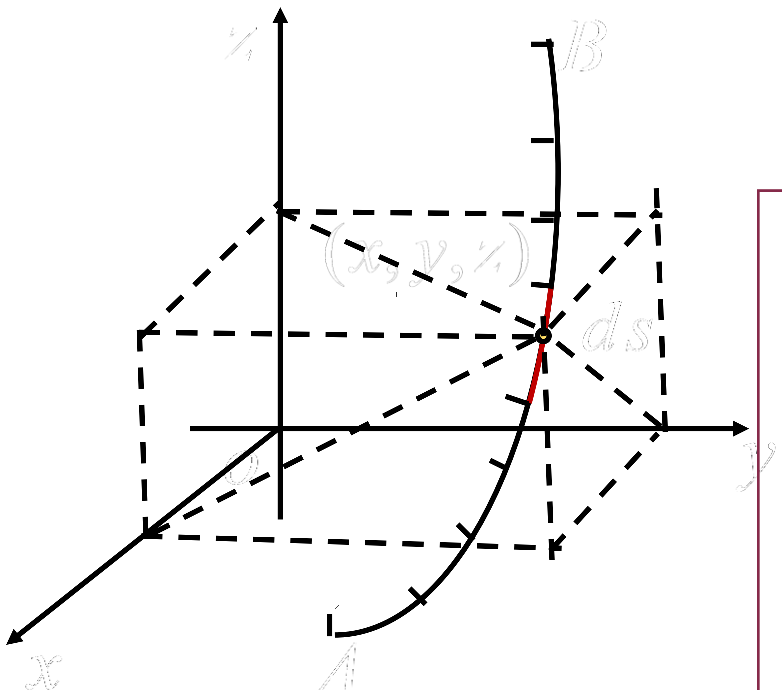
3. 曲线形构件的转动惯量

$$I_x = \int_L y^2 \rho(x,y)\,\mathrm{d}s \qquad I_y = \int_L x^2 \rho(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$I_o = \int_L (x^2 + y^2)\rho(x,y)\,\mathrm{d}s$$

可看做相加的
关系吗?





$$I_x = \iiint_\Gamma (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

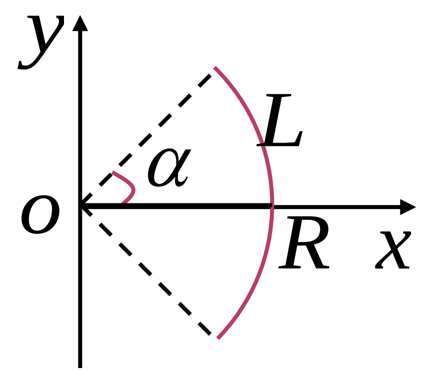
$$I_y = \iiint_\Gamma (x^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$I_z = \iiint_\Gamma (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$$I_O = \iiint_\Gamma (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

例2. 计算半径为 R ,中心角为2α的圆弧 L 对于它的对称轴x的转动惯量I (设线密度$\mu = 1$).

解：建立坐标系如图，则



$$I = \int_L y^2 \, \mathrm{d}s$$

$$L: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases} \quad (-\alpha \le \theta \le \alpha)$$

$$= \int_{-\alpha}^{\alpha} R^2 \sin^2\theta \sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2}\, \mathrm{d}\theta$$

$$= R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta = R^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= 2R^3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\alpha} = R^3 (\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$$

例3(1). 计算 $\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$ 其中Γ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周.

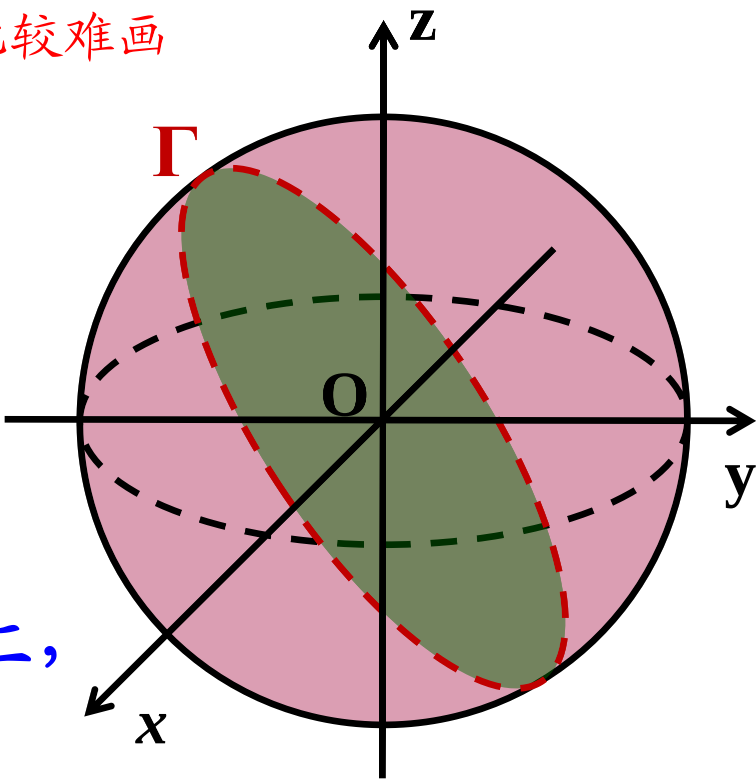
解:

平面比较难画

$$\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\oint_{\Gamma}a^2\,\mathrm{d}s=a^2\cdot 2\pi a$$

$$=2\pi a^3$$



注：由于被积函数定义在曲线Γ上，所以可先用Γ的方程把被积函数化简，然后再计算.

例3 (2). 计算 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$, 其中Γ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周.

解: 由对称性可知

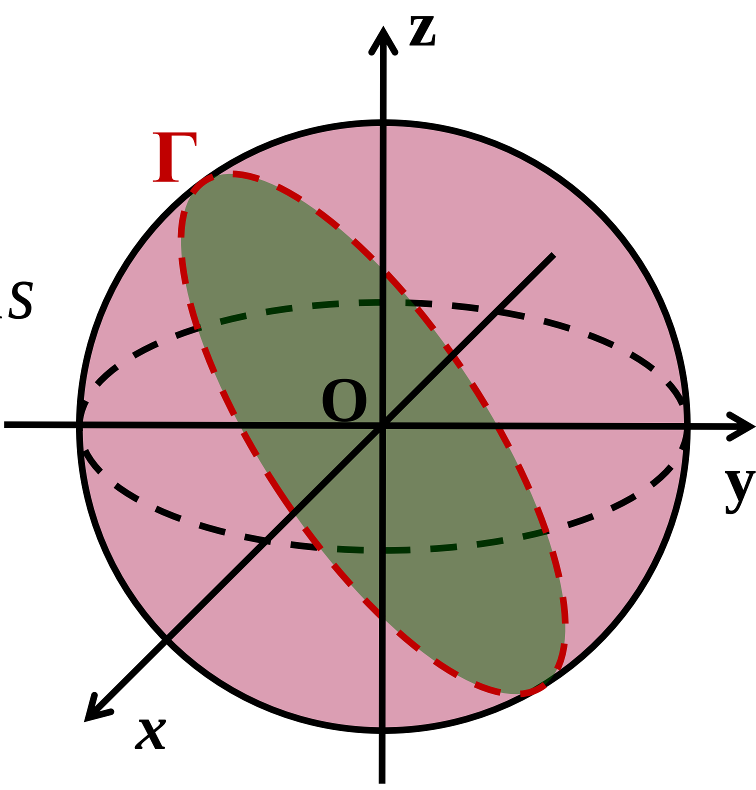
深刻理解轮换对称性

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s$$

$$\therefore\quad \oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{3}\oint_\Gamma a^2\,\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{3}a^2\cdot 2\pi a=\frac{2}{3}\pi a^3$$



例3 (3). 计算 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$, $\Gamma:\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$

解: 令 $\begin{cases}X=x-1\\ Y=y+1,\\ Z=z\end{cases}$ 则 $L:\begin{cases}X^2+Y^2+Z^2=a^2\\ X+Y+Z=0\end{cases}$

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma (X+1)^2\,\mathrm{d}s$$

$$=\oint_\Gamma X^2\,\mathrm{d}s+2\oint_\Gamma X\,\mathrm{d}s+\oint_\Gamma \mathrm{d}s$$

利用前结论

$$=\frac{2}{3}\pi a^3+\underline{2\cdot\overline{X}\cdot 2\pi a}+2\pi a$$

$$=2\pi a\left(\frac{1}{3}a^2+1\right)$$

圆L的形心在原点, 故 $\overline{X}=0$

例4. 计算曲线积分 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$**, 其中** Γ **为螺旋线** $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=kt\ (0\le t\le 2\pi)$ **的一段弧.**

解: $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$

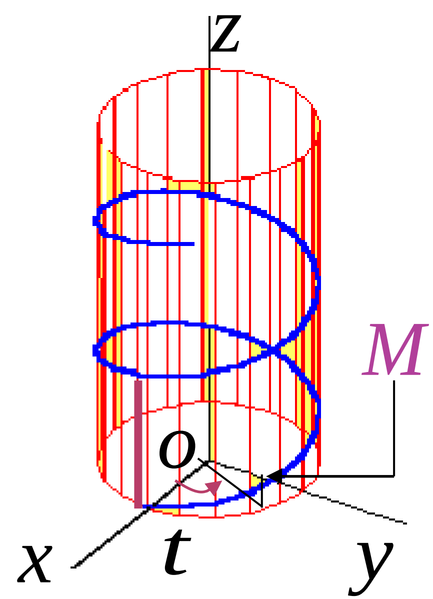
$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]$$

$$\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\int_0^{2\pi}[a^2+k^2t^2]\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+k^2}\,(3a^2+4\pi^2k^2)$$



例5. 计算 $I=\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$ **,其中Γ为球面** $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面 $x+z=1$ 的交线.

解: $I=\frac{9}{2}\oint_{\Gamma}\mathrm{d}s$ $\qquad x^2+y^2+(1-x)^2=\frac{9}{2}$ **配方**

$$\Gamma:\begin{cases}\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}y^2=1\\ x+z=1\end{cases},\quad \begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2\\ x+z=1\end{cases}$$

化为参数方程

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\\ y=2\sin\theta\\ z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}\qquad (0\le\theta\le 2\pi)$$

例5. 计算$I=\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$ **,其中Γ为球面** $x^2+y^2+z^2=\frac{9}{2}$ 与平面 $x+z=1$ 的交线.

解: $\Gamma:\begin{cases}\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}y^2=1\\ x+z=1\end{cases}$, **化为参数方程**

$$\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\\ y=2\sin\theta\\ z=\frac{1}{2}-\sqrt{2}\cos\theta\end{cases}\quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2+(\sqrt{2}\sin\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta=2\,\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore\quad I=\frac{9}{2}\int_0^{2\pi}2\,\mathrm{d}\theta=18\pi$$

内容小结

1. 定义 $\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta s_k$$

2. 性质

(1) $\int_\Gamma [\alpha\, f(x,y,z) + \beta\, g(x,y,z)]\,\mathrm{d}s$

$$= \alpha\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \beta\int_L g(x,y,z)\,\mathrm{d}s \quad (\alpha,\beta\text{ 为常数})$$

(2) $\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_{\Gamma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{\Gamma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$

(Γ 由 Γ_1,Γ_2 组成)

(3) $\int_\Gamma \mathrm{d}s = l$ (**l 曲线弧 Γ 的长度**)

3. 计算

参数方程

- 对光滑曲线弧 $L: x=\phi(t),\ y=\psi(t),\ (\alpha\le t\le\beta)$,

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

- 对光滑曲线弧 $L: y=\psi(x)\ \ (a\le x\le b)$, 显式方程

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\psi(x))\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

- 对光滑曲线弧 $L: r=r(\theta)\ \ (\alpha\le\theta\le\beta)$, 极坐标方程

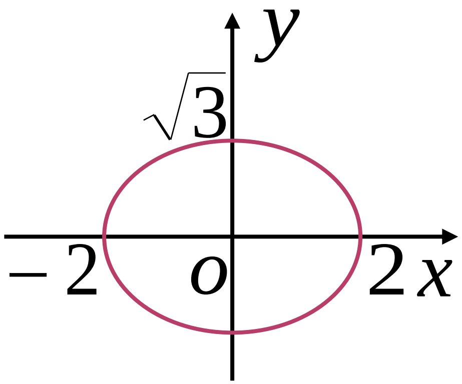
$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$$=\int_\alpha^\beta f(r(\theta)\cos\theta,\ r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

思考与练习

1. 已知椭圆 $L:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 周长为 a，求

$$\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s$$



提示: 利用对称性 $\oint_L 2xy\,\mathrm{d}s=0$

$$\text{原式}=12\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}s=12\oint_L \mathrm{d}s=12a$$

- 第16张