石家庄铁道大学 2014-2015 学年第二学期

2014 级本科班期末考试试卷(A 卷)

参考答案与评分标准

一．选择题与填空题（共 10 题，每题 3 分，共 30 分）

1-6. DBABCC　7. $x+y$　8. $8\pi a^4$　9.收敛　10. 1

二、计算题（共 6 题，每题 5 分，共 30 分）

11. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(f_1')_y'+(f_2')_y'=f_{11}''+f_{12}''\cdot(-1)+f_{21}''+f_{22}''\cdot(-1)=f_{11}''-f_{22}''$$

反了

12. 原式$=\iint_D|x-y|\,d\sigma=2\iint_{D_1}(\cancel{y-x})d\sigma=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^1(r\sin\theta-r\cos\theta)rdr\right]d\theta$

$$=2\left[-\cos\theta-\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{3}=2(1\cancel{-\sqrt{2}}).$$

13. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}}{7^{\ln(n+1)}}\dfrac{7^{\ln n}}{2^n}=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7^{\ln n}}{7^{\ln(n+1)}}=2\lim\limits_{n\to\infty}7^{\ln\frac{n}{n+1}}=2>1$

级数发散.

14. $-\tan y\,dy=\dfrac{2xdx}{1+x^2}$,

$\ln|\cos y|=\ln(1+x^2)+\ln|C|$,　$\cos y=C(1+x^2)$.

由 $y(0)=0$ 得：$C=1$，得解

$$\cos y=1+x^2.$$

15. 法 1：$L:\begin{cases}x=a+a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$　$t:0\to 2\pi$.

$$\int_L xydx=\int_0^{\cancel{\pi}\,2\pi}a(1+\cos t)a\sin t\,d(a\sin t)$$
$$=0.$$

法 2：原式$=\int_L xydy=\iint\limits_D ydxdy$

$$=0.$$

16. $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{1+x}\right)=\dfrac{-1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{3}}+\dfrac{1}{1+x}\right)$

$$=\frac{-1}{4}\left(\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3})^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{4}\left[\frac{1}{3^{n+1}}+(-1)^n\right]x^n,\ |x|<1.$$

三、综合题（共 4 题，每题 10 分，共 40 分）

17. 设 $P(x,y,z)$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 上任一点，则

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|x+y-2z-2\right|.$$

令 $F(x,y,z)=(x+y-2z-2)^2+\lambda(z-x^2-y^2)$,

$$\begin{cases} F_x'=2(x+y-2z-2)-2\lambda x=0 \\ F_y'=2(x+y-2z-2)-2\lambda y=0 \\ F_z'=2(x+y-2z-2)(-2)+\lambda=0 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}.$$

解得唯一驻点 $(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{8})$.

根据题意，距离的最小值一定存在，且有唯一驻点，故

$$d_{\min}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-2\right|=\frac{7}{4\sqrt{6}}.$$

18. $P=2yf(x),\ Q=xf(x)-x^2,\quad \dfrac{\partial P}{\partial y}=2f(x),\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=f(x)+xf'(x)-2x.$

由在 $x>0$ 内与路径无关的充分必要条件是在 $x>0$ 内 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，即

$$f(x)+xf'(x)-2x=2f(x)\ （x>0）$$

得
$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=2.$$

解得
$$f(x)=e^{-\int\frac{-1}{x}dx}\left(\int 2e^{\int\frac{-1}{x}dx}dx+C\right)=x\left(2\ln x+C\right)$$

由 $f(1)=1$ 得 C=1，故

$$f(x)=x\left(2\ln x+1\right).$$

19. 补Σ_1： $z=0(x^2+y^2\le 1)$，下侧，记Ω为由Σ与Σ_1围成的空间闭区域，则

$$I=(\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1})x^2dydz+y^2dzdx+(z^2-1)dxdy.$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+2z)dxdydz-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy$$

$$=0+0+2\int_0^1 zdz\iint_{D_z}d6-\pi=2\int_0^1 z\cdot\pi(\sqrt{1-z})^2dz-\pi$$

$$=\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{2\pi}{3}$$

20. 证明题:

(1) $\mathrm{grad}f=0\Rightarrow f'_x=f'_y=0$.

由 f 可微得 $df(x,y)=0$

$\therefore f(x,y)=C$.

(2)在格林公式中取 $P=-\frac{\partial z}{\partial y},Q=\frac{\partial z}{\partial x}$，得

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_L-\frac{\partial z}{\partial y}dx+\frac{\partial z}{\partial x}dy$$

右边$=\int_L(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})\cdot(dy,-dx)=\int_L\mathrm{grad}z\cdot\vec{n}^0ds=\int_L\frac{\partial z}{\partial n}ds$ =左边

?