2016 级《高等数学(A)II》期末试卷参考解答

一、选择和填空题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1~4. CCBB　　5. 0　　6. 4　　7~10. DDDD

二、完成下列各题（共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

1. $z\big|_{y=1}=\ln(1+e^x)$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(0,1)}=\dfrac{e^x}{1+e^x}\Big|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$.

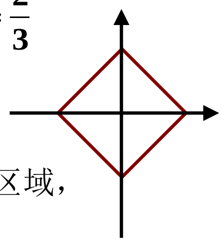
2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+f_2'\cdot y$, $\quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''\cdot x+f_{22}''\cdot x.y+f_2'\cdot 1=xf_{12}''+xyf_{22}''+f_2'$.

3. $\because \dfrac{1}{1+t}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n$, $\ |t|<1$; $\quad \ln(1+t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}t^n$, $\quad -1<t\le 1$;

$$\therefore f(x)=\frac{1}{1+(x-1)}+\ln[1+(x-1)]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)(x-1)^n,\ |x-1|<1$$

4. 由对称性 $V=4\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy=8\iint\limits_{D_1}x^2dxdy=8\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x^2dy=\dfrac{2}{3}$



注：（1）也可用三重积分 $V=\iiint\limits_{\Omega}dv=\iint\limits_{D}dxdy\int_0^{x^2+y^2}dz=\cdots=\dfrac{2}{3}$

（2）强烈建议要画出积分区域的图，D 是 $|x|+|y|=1$ 围成的区域，D_1 是 D 的第一象限部分。

5. 原式 $=\int_L\dfrac{(x+y)dx+(-x+y)dy}{a^2}=\dfrac{1}{a^2}\int_L(x+y)dx+(-x+y)dy$

$$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{D}(-1-1)d\sigma=-2\pi$$（先化简，再用格林公式）

注：也可以由参数方程求解 $L:\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\end{cases}$，$t:0\to 2\pi$ 原式 $=\int_0^{2\pi}(-1)dt=-2\pi$

三、完成下列各题（共 3 小题，每小题 10 分，共 30 分）

1. $\overrightarrow{OM}:\begin{cases}x=\xi t\\ y=\eta t,\ \ t:0\to 1\\ z=\zeta t\end{cases}$. 由第二类曲线积分得 $\vec{F}$ 所做功 W 为

$$W=\int_{\overline{OM}}yzdx+xzdy+xydz$$

$$=\int_0^1\eta t\cdot\zeta t d(\xi t)+\xi t\cdot\zeta t d(\eta t)+\xi t\cdot\eta t d(\zeta t)=\xi\eta\zeta\int_0^1 3t^2dt=\xi\eta\zeta.$$

约束条件：$\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0$

令 $L=W+\lambda\varphi(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\zeta+\lambda(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1)$

$$\begin{cases}F'_\xi=\eta\zeta+\lambda\frac{2\xi}{a^2}=0\\F'_\eta=\xi\zeta+\lambda\frac{2\eta}{b^2}=0\\F'_\xi=\xi\eta+\lambda\frac{2\varsigma}{c^2}=0\\\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\eta^2}{b^2}=\frac{\xi^2}{a^2}\\\frac{\zeta^2}{c^2}=\frac{\eta^2}{b^2}\\\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\xi=\frac{a}{\sqrt3}\\\eta=\frac{b}{\sqrt3}\\\zeta=\frac{c}{\sqrt3}\end{cases}$$

由于实际问题的最大值一定存在，又驻点$(\frac{a}{\sqrt3},\frac{b}{\sqrt3},\frac{c}{\sqrt3})$唯一，

故在该点处取得最大值，最大值为$W_{\max}=\frac{abc}{3\sqrt3}$.

2. 解：$P=2xye^{y^2}$，$Q=-e^{y^2}$，$R=z^2\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2z$，由高斯公式

$$\Phi=\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dV=\iiint_\Omega 2zdV=\iint_D\underline{\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}}2zdz\right)}dxdy\,.$$

$$=\iint_D[2-x^2-y^2-(x^2+y^2)]dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(1-r^2)\cdot rdr=\pi.$$

注：$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体在 xoy 面投影区域为 $x^2+y^2\le1$

3. 曲线上点$P(x,y)$处的法线方程$Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$，

令 Y=0 得 Q 点横坐标 $X_0=yy'+x$，由线段 PQ 被 y 轴平分得

$$X_0=-x,\quad 即\quad yy'+x=-x,$$

即所求微分方程为 $yy'+2x=0$ ，解得 $\frac{y^2}{2}+x^2=C$，

由曲线过点(1,0)得$C=1$，故所求积分曲线为 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$

注：$\because$线段 PQ 被 y 轴平分，$\therefore k_{法}=\frac{y-0}{x-(-x)}=\frac{y}{2x}$，

又$k_{法}=-\frac{1}{y'}$，$\therefore\frac{y}{2x}=-\frac{1}{y'}\Rightarrow yy'+2x=0$