第2讲 偏导数

目的: (1) 理解多元函数偏导数的概念;

(2) 掌握偏导数和高阶偏导数的求法;

(3) 了解混合偏导数与求导次序无关的充分条件.

重点: 偏导数和高阶偏导数的求法 .

难点: 用定义讨论偏导数的存在性 .

一元函数$y = f(x)$在x_0点的导数揭示的是函数在这一点的变化率, 它的大小反映了函数在 x_0点随自变量变化的快慢问题. 对于多元函数, 我们不能直接研究函数关于多个变量的变化率, 但是可以考虑函数关于某一个变量的变化率. 例如, 在热力学中, 理想气体的状态方程为:

$$V = \frac{RT}{P},$$

其中$\boldsymbol{R}$为常数, $\boldsymbol{P}$为压强, $\boldsymbol{T}$为温度, $\boldsymbol{V}$为体积. 我们可以在等温的条件下考虑体积关于压强的变化率, 或者在等压的条件下考虑体积关于温度的变化率.

研究多元函数关于一个变量的变化率, 即研究多元函数在其余变量都固定的条件下关于这个变量的变化率, 这即多元函数的偏导数的概念.

2.1 偏导数的概念及其计算

一元函数的导数

定义 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

注： 1． $f'(x_0)$存在 $\Leftrightarrow$ $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

2． $f'(x)$存在 $\Longrightarrow$ $f(x)$在点x_0处连续

定义1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内有定义，极限 $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$

存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x 的**偏导数**，记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $\left.z_x\right|_{(x_0,y_0)}$；

$f_x(x_0,y_0)$；

注：

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\Big|_{x=x_0}$$

同样可定义对 y 的偏导数

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}$$

若函数 $z = f(x, y)$ 在域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 或 y 偏导数存在，则该偏导数称为偏导函数，也简称为**偏导数**，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad f_x(x, y), \quad f_1'(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad z_y, \quad f_y(x, y), \quad f_2'(x, y)$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数.

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的偏导数定义为

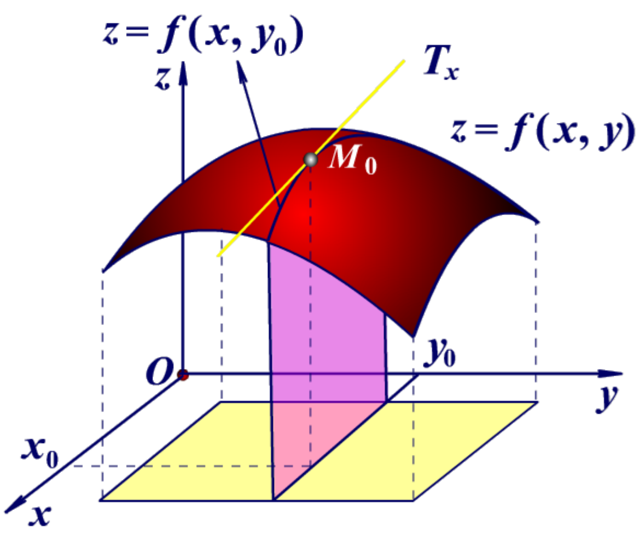
$$f_x(x, y, z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

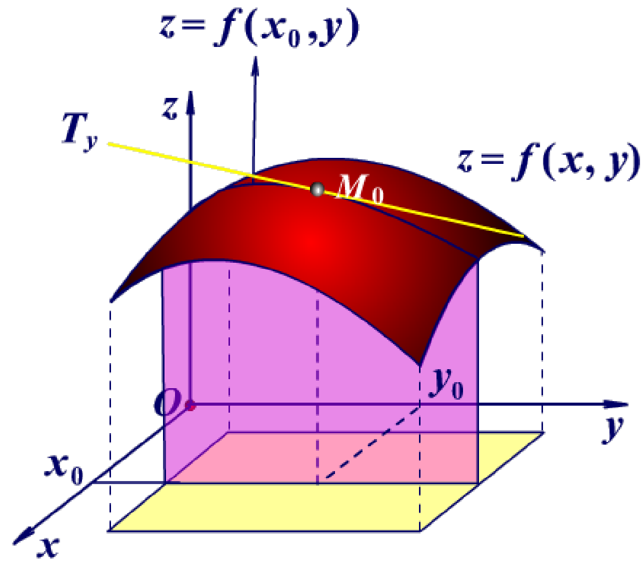
$$f_y(x, y, z) = ?$$

$$f_z(x, y, z) = ?$$

4. 偏导数的几何意义

设$M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$是曲面$z=f(x, y)$上一点, 由函数在点$(x_0, y_0)$偏导数定义可知, $f_x(x_0, y_0)$就是曲面被平面$y=y_0$所截得的曲线在点M_0处的切线M_0T_x对x轴的斜率; 偏导数$f_y(x_0, y_0)$就是曲面被平面$x=x_0$所截得的曲线在点M_0处的切线M_0T_y对y轴的斜率.





例1. 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点(1 , 2) 处的偏导数.

例1. 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点(1, 2) 处的偏导数.

解: 求$z_x(1, 2)$, $z_y(1, 2)$

法一

$$z'_x = 2x + 3y \Rightarrow z_x\Big|_{(1,2)} = 2\cdot 1 + 3\cdot 2 = 8$$

$$z'_y = 3x + 2y \Rightarrow z_y\Big|_{(1,2)} = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 = 7$$

法二

$$z\Big|_{y=2} = x^2 + 6x + 4 \Rightarrow z_x\Big|_{(1,2)} = (2x+6)\Big|_{x=1} = 8$$

$$z\Big|_{x=1} = 1 + 3y + y^2 \Rightarrow z_y\Big|_{(1,2)} = (3+2y)\Big|_{y=2} = 7$$

例2. 设 $z = x^y \ (x > 0, 且\ x \neq 1)$, 求证

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

例2. 设 $z = x^{y}\ (x > 0,$ 且 $x \neq 1)$, **求证**

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$$

证: $\because \quad \frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^{y}\ln x$

$$\therefore \quad \frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{y}yx^{y-1} + \frac{1}{\ln x}x^{y}\ln x$$

$$= x^{y} + x^{y} = 2x^{y} = 2z$$

例3. 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

例3. 求 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

解: $$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

注意：函数在某点各偏导数都存在 $\not\Rightarrow$ 连续.

例4. $$z = f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

在(0,0)点各偏导数都存在.

解： $$f_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{0 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f_y(0,0) = 0$$

在上节已证 $f(x, y)$ 在点(0 , 0)并不连续!

2.2 高阶偏导数

设 $z=f(x,y)$在域 D 内存在连续的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_x(x,y)\,,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f_y(x,y)$$

若这两个偏导数仍存在偏导数，则称它们是$z=f(x,y)$的二阶偏导数．按求导顺序不同，有下列四个二阶偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y);\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

类似可以定义更高阶的偏导数.

例如，$z = f(x, y)$ 关于 x 的三阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$$

$z = f(x, y)$ 关于 x 的 $n-1$ 阶偏导数，再关于 y 的一阶偏导数为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}$$

例5. 求函数 $z=e^{x+2y}$ 的二阶偏导数及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

例5. 求函数 $z = e^{x+2y}$ 的二阶偏导数及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

解： $\boxed{\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{x+2y}} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} \boxed{= \dfrac{\partial}{\partial x}(e^{x+2y})} = e^{x+2y}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(e^{x+2y}) = 2e^{x+2y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{x+2y} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \cdot 2e^{x+2y} = 4e^{x+2y}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2e^{x+2y}) = 2e^{x+2y}$$

注意:此处 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, 但这一结论并不总成立.

例6. 证明函数 $u=\frac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **满足拉普拉斯**

方程 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

例6. 证明函数 $u=\dfrac{1}{r}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ **满足拉普拉斯方程** $\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$

证： $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x}=-\dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{x}{r}=-\dfrac{x}{r^3}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1\cdot r^3-x\cdot 3r^2\cdot\frac{x}{r}}{r^6}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5},$$

利用对称性，有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3y^2}{r^5},\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\dfrac{1}{r^3}+\dfrac{3z^2}{r^5}$

$$\therefore\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(\underbrace{\boxed{x^2+y^2+z^2}}_{\boxed{=r^2}})}{r^5}=0$$

例7. 求函数二阶偏导数

$$z = x^3 y^2 - 3xy^3 - xy + 1$$

例7. 求函数二阶偏导数

$$z = x^3 y^2 - 3xy^3 - xy + 1$$

解：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 - 3y^3 - y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y - 9xy^2 - x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x^2 y - 9y^2 - 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x^2 y - 9y^2 - 1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3 - 18xy$$

定理. 若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在点 (x_0, y_0) 连续，则

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

本定理对 n 元函数的高阶混合导数也成立.

例如, 对三元函数 $u = f(x, y, z)$，当三阶混合偏导数在点 (x, y, z) 连续时，有

$$f_{xyz}(x, y, z) = f_{yzx}(x, y, z) = f_{zxy}(x, y, z)$$
$$= f_{xzy}(x, y, z) = f_{yxz}(x, y, z) = f_{zyx}(x, y, z)$$

说明: 因为初等函数的偏导数仍为初等函数，而初等函数在其定义区域内是连续的，故求初等函数的高阶导数可以选择方便的求导顺序.

例8. 求函数 $z = xy + \dfrac{e^y}{y^2+1}$ **二阶偏导数** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

解：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y) \ \mathbf{=1}$$

内容小结

1. 偏导数的概念及有关结论

- 定义; 记号; 几何意义
- 函数在一点偏导数存在 $\not\Longrightarrow$ 函数在此点连续
- 混合偏导数连续 $\Longrightarrow$ 与求导顺序无关

2. 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数的方法 $\left\{ \begin{array}{l} \text{先代后求} \\ \text{先求后代} \\ \text{利用定义} \end{array} \right.$
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次求导法

(与求导顺序无关时, 应选择方便的求导顺序)

附加题1

已知 $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 证明 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

证明:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

附加题2 设 $z=f(u)$, 方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\,dt$ 确定 u 是 x, y 的函数，其中 $f(u)$, $\varphi(u)$ 可微，$p(t)$, $\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+\underline{p(x)}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\underline{-p(y)}\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}\end{aligned}\right.$$

$$\therefore\ p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\left[\,p(y)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\frac{\partial u}{\partial y}\,\right]$$