
一 杨氏模量与微小量的测量

【实验简介】

杨氏模量实验是综合性大学和工科院校物理实验中必做的实验之一。杨氏模量是表征固体材料抵抗形变能力的重要物理量，是工程材料重要参数，它反映了材料弹性形变与内应力的关系，它只与材料性质有关，是工程技术中机械构件选材时的重要依据。

本次实验包括多种设备，通过本实验可以学习和掌握基本长度和微小位移量测量的方法和手段，提高学生的实验技能，并且体会到测量方法的多样性。

实验中，加力、微小位移测量是实验的核心内容。在“CCD 法测杨氏模量”实验中，我们通过砝码对金属丝进行施加作用力，借助 CCD 和显示屏测量金属丝微小伸长量，然后在“光杠杆法测杨氏模量”的多套设备中，可以见到更多种类的加力和测位移的方法。在“霍尔效应法测杨氏模量”实验中，引入了传感器技术来测量位移和加力大小，位移量与（磁场强度）的关系曲线经使用标准样品标定后再用于拉伸量的实测，是一种用电学方法测量非电物理量的较现代化的方法。

此外，实验中还将看到“动态法测杨氏模量”装置，它的基本原理还与将要进行弦上驻波实验有关联之处。

本堂实验讲义内容较多，不要求全部完成，注意指导老师的课堂任务要求。

【实验目的】

1. 理解各种静态方法测杨氏模量及其测量微小位移方法的原理及优缺点，了解动态法测杨氏模量的原理；
2. 熟悉霍尔位置传感器的特性，完成样品的测量和对霍尔位置传感器定标，理解传感器特定曲线对测量的意义；
3. 了解光杠杆法的放大原理和适用条件；
4. 学会读数望远镜、读数显微镜的调节；
5. 学习用逐差法、作图法和最小二乘法处理数据；
6. 学会计算各物理量的不确定度，并用不确定度正确表达实验结果。

(一) 拉伸法测定金属的杨氏模量

【实验仪器与用具】

CCD 杨氏弹性模量测量仪 (LB-YM1 型、YMC-2 型)、螺旋测微器、钢卷尺。

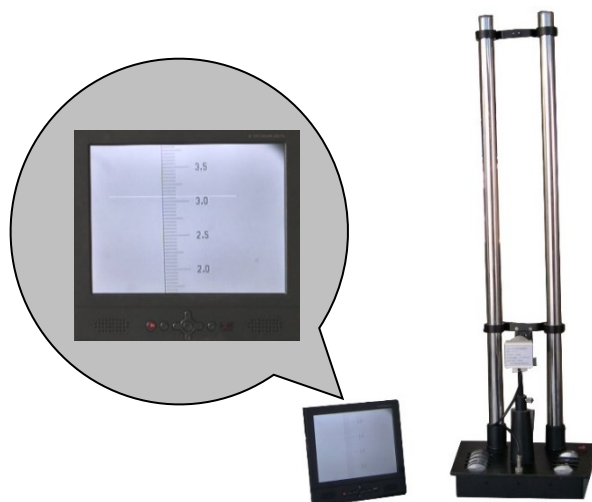


图 1 LB-YM1 型实验仪器示意图

LB-YM1 型 CCD 杨氏弹性模量测量仪主要技术指标如下：

- (1) 采用分化板+CCD 测量显微镜系统+彩色液晶监视器方案；
- (2) 立柱：不锈钢双柱高约 85cm；
- (3) 金属丝：钨丝或钢丝，长约 60cm，悬挂位置及长度可调节；
- (4) 监视器：彩色液晶监视器；
- (5) 分化板：刻度范围 4mm，分度值 0.05mm，设有限位槽，可防止来回摆动，采用 LED 照明；
- (6) CCD 测量显微镜系统：放大倍率 60 倍，内含电子刻度线，可二维调节，可卸下用于其他微位移测量场合，采用高级面阵 CCD，信噪比 $\geq 52\text{db}$ ，分辨率 480TVL，视频输出幅度：1.0V_{p-p}/75 Ω ；
- (7) 砝码组：10 个砝码，200 克 8 个及 100 克 2 个；
- (8) 底座沉稳，可进行水平调节，设有储藏格可贮存砝码组；
- (9) 测量相对不确定度： $<5\%$ ；

LB-YM1 型 CCD 杨氏弹性模量测量仪主要技术指标如下：

- (1) 读数显微镜：放大倍数 15 \times
- (2) 测量架：测量范围：0—4 mm
- (3) 下夹头：含有数字分划板，分划板数值：0.05 mm
- (4) CCD：12V 电源

-
- (5) 监视器：彩色液晶监视器（纯正品）
 - (6) 铜 丝：L=1000 $\Phi 0.18$
 - (7) 不锈钢丝：L=1000 $\Phi 0.30$
 - (8) 光学平台：精密铸造，台面含磁不锈钢板。尺寸：405 mm×308 mm×39 mm
 - (9) 二维磁力滑座：含有横向纵向及垂直精密移动装置
 - (10) 镀铬钢制砝码：重量：250g/个 数量：8 个
 - (11) 水准器： $\Phi 40$ mm

【实验原理】

任何物体在外力作用下都会发生形变，当形变不超过某一限度时，撤走外力之后，形变能随之消失，这种形变称为弹性形变。如果外力较大，当它的作用停止时，所引起的形变并不完全消失，而有剩余形变，称为塑性形变。发生弹性形变时，物体内部产生恢复原状的内应力。弹性模量是反映材料形变与内应力关系的物理量，是工程技术中常用的参数之一。

1. 杨氏模量

在形变中，最简单的形变是柱状物体受外力作用时的伸长或缩短形变。设柱状物体的长度为 L ，截面积为 S ，沿长度方向受外力 F 作用后伸长（或缩短）量为 ΔL ，单位横截面积上垂直作用力 F/S 称为正应力，物体的相对伸长 $\Delta L/L$ 称为线应变。实验结果证明，在弹性范围内，正应力与线应变成正比，即

$$\frac{F}{S} = Y \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

这个规律称为虎克定律。式中比例系数 Y 称为杨氏弹性模量。在国际单位制中，它的单位为 N/m^2 ，在厘米克秒制中为达因/厘米²。它是表征材料抗应变能力的一个固定参量，完全由材料的性质决定，与材料的几何形状无关。

本实验需要测量钢丝或铜丝的杨氏弹性模量，实验方法是将金属丝悬挂于支架上，上端固定，下端加砝码对金属丝施加力 F ，测出金属丝相应的伸长量 ΔL ，即可求出 Y 。金属丝长度 L 用钢卷尺测量，金属丝的横截面积 $S = \pi d^2/4$ ，直径 d 用螺旋测微器测出，力 F 由砝码的质量求出。由式（1）可得

$$Y = \frac{4FL}{\pi d^2 \Delta L} \quad (2)$$

2. 测量原理

在实际测量中，由于金属丝伸长量 ΔL 的值很小，约 $10^{-1} mm$ 数量级。因此这里 ΔL 的测量采用显微镜和 CCD 成像系统进行测量。如图 1 所示，在悬垂的金属丝下端连着十字叉丝板和砝码盘，当盘中加上质量为 M 的砝码时，金属丝受力增加了

$$F = Mg \quad (3)$$

十字叉丝随着金属丝的伸长同样下降了 ΔL ，而叉丝板通过显微镜的物镜成像在最小分度为

0.05mm 的分划板上，再被目镜放大，所以能够用眼睛通过显微镜对 ΔL 做直接测量。采用 CCD 系统代替眼睛更便于观测，并且能够减轻视疲劳：CCD 摄像机的镜头将显微镜的光学图像汇聚到 CCD (Charge Coupled Device, 电荷耦合器件) 上，再变成视频电信号，经视频电缆传送到显示器，即可供多人同时观测。

【实验内容】

1. 仪器调节

(本调节说明针对 LB-YM1 型测量仪，YMC-2 型测量仪调节说明见附录 4。)

支架的调节：为了使金属丝处于铅直状态，应检查两支柱是否铅直（工作台是否水平），否则应调节螺旋底角（支撑脚）。

在钩码上放置 2 个 100g 砝码（YMC-2 型配套砝码均为 250g/只）对金属丝拉直，检查金属丝上是否有弯曲、折弯等情况。如有，应更换金属丝。

调节下横梁高度，保证叉丝组放置在下横梁的槽内。调节 CCD 摄像正对叉丝组分划板。

CCD 摄像机的调节：将 CCD 摄像头放入固定座内，将 CCD 摄像头与分划板放置在同一水平面上，前后调节 CCD 摄像头观察监视器，直到可以观察到清晰的像，若分划板刻度尺像不在监视器的中心，则微调 CCD 摄像头位置使像处于中心位置。

3. 测量

(1) 在测量铝丝杨氏模量之前，先放砝码把金属丝拉直，保证分划板卡在下横梁的槽内，这样可以避免在拉直过程中分划板旋转。注意分划板刻度尺在监视器上位置不要过高，需低于 3mm。

(2) 记下待测细丝下的砝码盘未加砝码时屏幕上显示的毫米尺在横线上的读数 $l_0=0$ ，以后在砝码盘上每增加一个 $M=200\text{g}$ 的砝码，记下相应的叉丝读数 l_i ($i=1, 2, \dots, 8$)。然后逐一减掉砝码，再从屏上读取 l'_1, l'_2, \dots, l'_8 。

加减砝码时，动作要轻，防止因增减砝码时使砝码盘产生微小振动而造成读数起伏较大。

(3) 取同一负荷下叉丝读数的平均值 $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \dots, \bar{l}_8$ ，用逐差法求出铝丝荷重增减 4 个砝码时光标的平均偏移量 ΔL 。

(4) 用钢卷尺测量上、下夹头间的金属丝长度 L 。

(4) 用螺旋测微器测量金属丝直径 d ，由于铝丝直径可能不均匀，按工程要求应在上、中、下各部进行测量。每位置在相互垂直的方向各测一次。

(5) 将前述原理公式分解整理即得：

$$Y = \frac{4MgL}{\pi d^2 \Delta L} \quad (4)$$

式中， ΔL 与 M 有对应关系，如果 M 是 1 个砝码的质量， ΔL 应是荷重增（或减）1 个砝码所引起的光标偏移量；如果 ΔL 是荷重增（或减）4 个砝码所引起的光标偏移量， M 就应是 4 个砝码的质量。（铝丝的杨氏模量 Y 约为 $2.3 \times 10^{11} \text{N/m}^2$ ）。

【实验数据记录表】

1. 测量金属丝的微小伸长量，记录表如下 叉丝初始读数 $l_0 = \underline{\hspace{2cm}} mm$

序号 i	砝码质量 m/g	叉丝读数			叉丝偏移量/mm $\Delta L = \bar{l}_{i+4} - \bar{l}_i$
		增荷时 l_i	减荷时 l'_i	平均值 \bar{l}_i	
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

2. 测量金属丝直径记录表 $d_0 = \underline{\hspace{2cm}} mm$

测量部位	上 部		中 部		下 部		平均值
测量方向	纵 向	横 向	纵 向	横 向	纵 向	横 向	
d (mm)							

不确定度 $u(d) = \underline{\hspace{2cm}} mm$

测量结果 $d = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) mm$

3. 单次测 L 值:

因为 L 为单次测量值，我们给定一个误差 $\sigma L = 0.2cm$ （此值是根据量具生产规范给出的约定值）。

$$L = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) m ;$$

4. 将所得各量带入（4）式，计算出金属丝的杨氏弹性模量，按传递公式计算出不确定度，并将测量结果表示成标准式：

$$\text{不确定度} \quad E_Y = \frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{4\left(\frac{u(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{u(\Delta L)}{\Delta L}\right)^2}$$

$$\Delta Y = E_Y * Y$$

$$Y = \bar{Y} \pm \Delta \bar{Y} = (\underline{\hspace{2cm}} \pm \underline{\hspace{2cm}}) \times 10^{11} N / m^2。$$

5. 用作图法和最小二乘法处理数据

将 4 式写成如下形式：

$$M = \frac{\pi d^2 Y}{4gL} \Delta L \quad (5)$$

令 $K = \frac{\pi d^2 Y}{4gL}$ ，即（5）式转换成 $M = K \Delta L$ ；

在既定的实验条件下, M 为一个常数, 即产生 ΔL 所对应的砝码质量, 以 ΔL 为横坐标, M 为纵坐标, 做 $M-\Delta L$ 图, 该图应为一条直线, 其斜率为 K , 用最小二乘法求得 K 后即可得到杨氏模量:

$$Y = \frac{4gL}{\pi d^2 K} \quad (6)$$

【注意事项】

1. 使用 CCD 摄像机须知: CCD 器件不可正对太阳、激光或其他强光源。注意保护镜头, 防潮、防尘、防污染。非特别需要, 请勿随意卸下。
2. 金属丝**必须保持铅直形态**。测直径时要特别谨慎, 避免由于扭转、拉扯、牵挂导致细丝折弯变形。
3. 读数时一定要等到刻度值稳定之后才能进行。
4. 将砝码放置于砝码盘的时候一定要保证轻拿轻放, 防止铝丝突然受力而断裂。
5. 做完实验, 取下所有砝码放好。

【思考题】

1. 杨氏模量测量数据 N 若不用逐差法而用作图法, 如何处理?
2. 两根材料相同但粗细不同的金属丝, 它们的杨氏模量相同吗? 为什么?
3. 本实验使用了哪些测量长度的量具? 选择它们的依据是什么? 它们的仪器误差各是多少?
4. 在 CCD 法测定金属丝杨氏模量实验中, 为什么起始时要加一定数量的底码?
5. 加砝码后标示横线在屏幕上可能上下颤动不停, 不能够完全稳定时, 如何判定正确读数?
6. 金属丝存在折弯使测量结果如何变化?
7. 用螺旋测微器或游标卡尺测量时, 如果初始状态都不在零位因此需要读出值减初值, 对测量值的误差有何影响?

【参考文献】

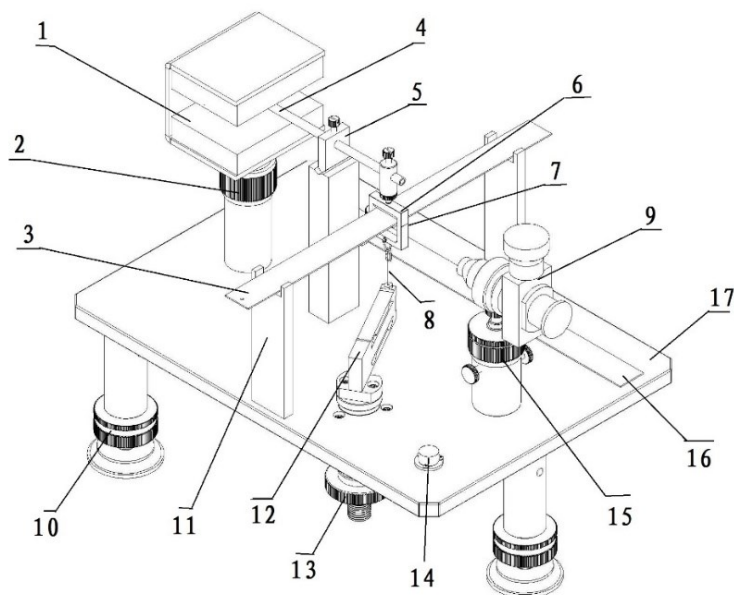
- [1] 吕斯骅, 段家祗. 新编基础物理实验. 北京: 高等教育出版社, 2006。
- [2] 沈韩. 基础物理实验. 北京: 科学出版社, 2015
- [3] 徐建强, 韩广兵. 大学物理实验 (第三版). 北京: 科学出版社, 2020
- [4] 厂家说明书

（二）使用霍尔传感器测杨氏模量（弯曲法）

【实验仪器与用具】

杭州大华 DHY-A 霍尔位置传感器法杨氏模量测定仪（底座固定箱、读数显微镜及调节机构、SS495A 型集成霍尔位置传感器、测试仪、磁体、支架、加力机构等），见图 1、图 2。

样品为黄铜条、铸铁条。



1. 磁体(磁铁对) 2. 磁体调节机构 3, 16 试样 4. 铜杠杆(顶端装有 SS495A 型集成霍尔传感器) 5. 杠杆支架 6. 铜刀口 7. 铜刀口上的基线 8. 拉力绳 9. 读数显微镜 10. 水平调节机脚 11. 立柱 12. 电子称传感器 13. 加力调节旋钮 14. 水平泡 15. 读数显微镜上下调节机构 17. 平台

图 1 实验装置说明

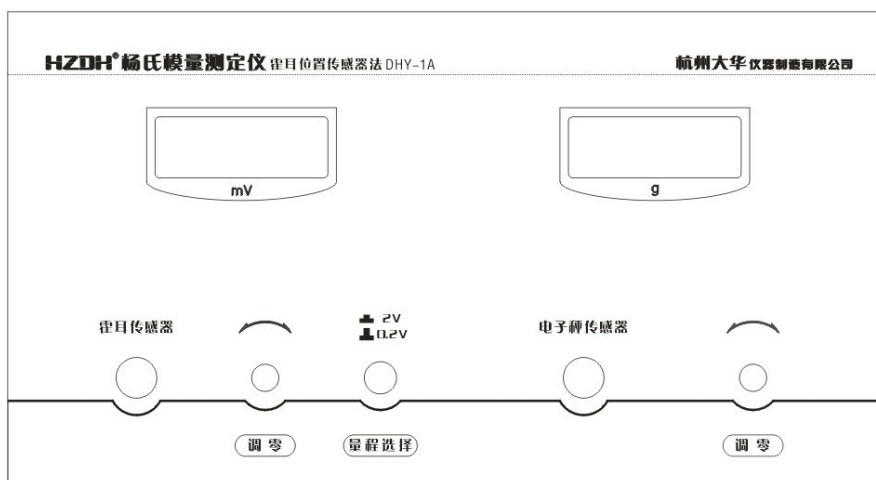


图 2 测试仪面板图

测试仪由霍尔电压测量系统和电子称加力系统构成，霍尔电压测试分为两个量程，带调零

功能：电子称加力系统测量范围 0~199.9g。

技术指标如下：

1. 读数显微镜

型号	JC-10 型
目镜放大率	10 倍
目镜测微鼓轮最小分度值	0.01mm
物镜放大率	2 倍
测量范围	0~6mm
鼓轮实际读数最小分辨率	0.01/2=0.005mm

2. 电子称传感器加力系统：0~199.9g 连续可调，三位半数显。

3. 霍尔电压表：量程 1：0~199.9mV，分辨率 0.1mV；

量程 2：0~1.999V，分辨率 1mV。

4. 霍尔位置传感器：灵敏度大于 250mV/mm，线性范围 0~2mm。

【实验原理】

1、霍尔元件置于磁感强度为 B 的磁场中，在垂直于磁场方向通以电流 I ，则与这二者垂直的方向上将产生霍尔电势差 U_H ：

$$U_H = K \cdot I \cdot B \quad (1)$$

(1) 式中 K 为元件的霍尔灵敏度。如果保持霍尔元件的电流 I 不变，而使其在一个均匀梯度的磁场中移动时，则输出的霍尔电势差变化量为：

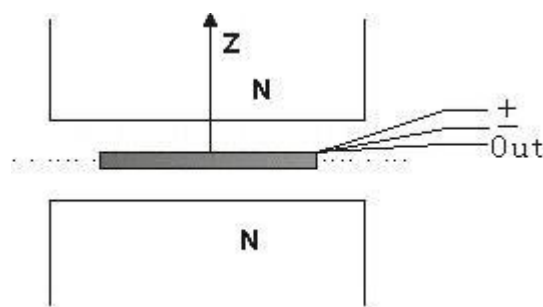


图 3 测量示意图

$$\Delta U_H = K \cdot I \cdot \frac{dB}{dZ} \cdot \Delta Z \quad (2)$$

(2) 式中 ΔZ 为位移量，此式说明若 $\frac{dB}{dZ}$ 为常数时， ΔU_H 与 ΔZ 成正比。

为实现均匀梯度的磁场，可以如图 3 所示两块相同的磁铁（磁铁截面积及表面感应强度相同）相对位置，即 N 极与 N 极相对，两磁铁之间留一等间距间隙，霍尔元件平行于磁铁放在该间隙的中轴上。间隙大小要根据测量范围和测量灵敏度要求而定，间隙越小，磁场梯度就越大，灵敏度就越高。磁铁截面要远大于霍尔元件，以尽可能的减小边缘效应的影响，提高测量精确度。

若磁铁间隙内中心截面处的磁感应强度为零，霍尔元件处于该处时，输出的霍尔电势差应该为零。当霍尔元件偏离中心沿 Z 轴发生位移时，由于磁感应强度不再为零，霍尔元件也就产生相应的电势差输出，其大小可以用数字电压表测量。由此可以将霍尔电势差为零时元件所处的位置作为位移参考零点。

霍尔电势差与位移量之间存在一一对应关系，当位移量较小（ $<2\text{mm}$ ），这一一对应关系具有良好的线性。

2. 在横梁弯曲的情况下，杨氏模量 E 可以用下式表示：

$$E = \frac{d^3 \cdot Mg}{4a^3 \cdot b \cdot \Delta Z} \quad (3)$$

其中： d 为两刀口之间的距离； M 为所加拉力对应的质量； a 为梁的厚度； b 为梁的宽度； ΔZ 为梁中心由于外力作用而下降的距离； g 为重力加速度。

【实验内容】

1、基本内容：

测量黄铜样品的杨氏模量和霍尔位置传感器的定标。

- (1) 调节使集成霍尔位置传感器探测元件处于磁铁中间的位置。
- (2) 用水平泡观察平台是否处于水平位置，若偏离时调节水平调节机脚。
- (3) 对霍尔位置传感器毫伏电压表调零。通过磁体调节结构上下移动磁铁，当毫伏表读数很小时，停止调节并固定螺丝，最后调节调零电位器使毫伏表读数为零。
- (4) 调节读数显微镜，使眼睛观察到清晰的十字线及分划板刻度线和数字。然后移动读数显微镜前后距离，直到清晰看到铜刀口上的黑色基线。使用适当的力锁紧加力旋钮旁边的锁紧螺钉，转动读数显微镜读数鼓轮使铜刀口上的基线与读数显微镜内十字刻度线吻合。
- (5) 在拉力绳不受力的情况下将电子称传感器加力系统进行调零。
- (6) 通过加力调节旋钮逐次增加拉力（每次增加 10g ），相应从读数显微镜上读出梁的弯曲位移 ΔZ_i 及霍尔数字电压表相应的读数值 U_i （单位 mV ）。以便计算杨氏模量和对霍尔位置传感器进行定标。
- (7) 实验完毕松开加力旋钮旁边的锁紧螺钉，松开加力旋钮，取下试样。
- (8) 多次测量并记录试样在两刀口间的长度 d 、不同位置横梁宽度 b 以及横梁厚度 a 。
- (9) 关闭电源，整理实验桌面，实验器材放置于实验初始位置。
- (10) 用逐差法求得黄铜材料的杨氏模量、计算黄铜杨氏模量的不确定度。并使用作图法、最小二乘法求出霍尔位置传感器的灵敏度 $\Delta U_i / \Delta Z_i$ 。
- (11) 把测量结果与公认值进行比较。

2、用霍尔位置传感器测量可锻铸铁的杨氏模量。

- (1) 通过加力系统逐次增加拉力（每次加力 20g ），相应读出霍尔数字电压表读数值。由霍尔传感器的灵敏度，计算出下降的距离 ΔZ_i 。
- (2) 多次测量不同位置横梁宽度 b 和横梁厚度 a ，用逐差法计算可锻铸铁的杨氏模量。

【数据处理】

1、逐差法计算黄铜或铸铁的杨氏模量，并计算各物理量的不确定度。

（黄铜材料特性标准数据 $E_0 = 10.55 \times 10^{10} \text{N/m}^2$ ；铸铁材料特性标准数据

$$E_0 = 18.15 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$$

2、最小二乘法及画图法对霍尔位置传感器定标。

【注意事项】

(1) 用千分尺待测样品厚度必须不同位置多点测量取平均值。测量黄铜样品时，因黄铜比钢软，旋紧千分尺时，用力适度，不宜过猛。

(2) 用读数显微镜测量铜刀口基线位置时，刀口不能晃动。

【思考题】

(1) 弯曲法测杨氏模量实验，主要测量误差有哪些？请估算各因素的不确定度。

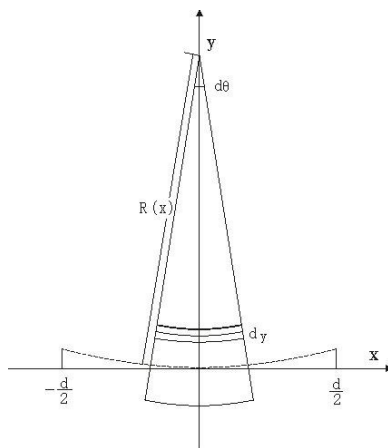
(2) 用霍尔位置传感器法测位移有什么优点？

【附】式(3)的具体推导

固体、液体及气体在受外力作用时，形状会发生或大或小的改变，这统称为形变。当外力不太大，因而引起的形变也不太大时，撤掉外力，形变就会消失，这种形变称之为弹性形变。弹性形变分为长变、切变和体变三种。

一段固体棒，在其两端沿轴方向施加大小相等、方向相反的外力 F ，其长度 l 发生改变 Δl ，以 S 表示横截面面积，称 $\frac{F}{S}$ 为应力，相对长变 $\frac{\Delta l}{l}$ 为应变。在弹性限度内，根据胡克定律有：

$$\frac{F}{S} = Y \cdot \frac{\Delta l}{l}$$



附图 1

如附图 1 所示，虚线表示弯曲梁的中性面，易知其既不拉伸也不压缩，取弯曲梁长为 dx 的一小段，设其曲率半径为 $R(x)$ ，所以对应的张角为 $d\theta$ ，再取中性面上部距为 y 厚为 dy 的一层面为研究对象，那么，梁弯曲后其长变为 $(R(x) - y) \cdot d\theta$ ，所以，变化量为：

$$(R(x) - y) \cdot d\theta - dx$$

又因为

$$d\theta = \frac{dx}{R(x)}$$

所以

$$(R(x) - y) \cdot d\theta - dx = (R(x) - y) \frac{dx}{R(x)} - dx = -\frac{y}{R(x)} dx$$

所以应变为:

$$\varepsilon = -\frac{y}{R(x)};$$

根据胡克定律有:

$$\frac{dF}{dS} = -Y \frac{y}{R(x)};$$

又因为 $dS = b \cdot dy$,

所以

$$dF(x) = -\frac{Y \cdot b \cdot y}{R(x)} dy;$$

对中性面的转矩为:

$$d\mu(x) = |dF| \cdot y = \frac{Y \cdot b}{R(x)} y^2 \cdot dy$$

积分得:

$$\mu(x) = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{Y \cdot b}{R(x)} y^2 \cdot dy = \frac{Y \cdot b \cdot a^3}{12 \cdot R(x)}; \quad (\text{附 1})$$

对梁上各点, 有:

$$\frac{1}{R(x)} = \frac{y''(x)}{[1 + y'(x)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

因梁的弯曲微小:

$$y'(x) = 0;$$

所以有:

$$R(x) = \frac{1}{y''(x)}; \quad (\text{附 2})$$

梁平衡时, 梁在 x 处的转矩应与梁右端支撑力 $\frac{Mg}{2}$ 对 x 处的力矩平衡,

所以有:

$$\mu(x) = \frac{Mg}{2} \left(\frac{d}{2} - x \right); \quad (\text{附 3})$$

根据 (附 1)、(附 2)、(附 3) 式可以得到:

$$y''(x) = \frac{6Mg}{Y \cdot b \cdot a^3} \left(\frac{d}{2} - x \right);$$

据所讨论问题的性质有边界条件:

$$y(0) = 0; y'(0) = 0;$$

解上面的微分方程得到:

$$y(x) = \frac{3Mg}{Y \cdot b \cdot a^3} \left(\frac{d}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right);$$

将 $x = \frac{d}{2}$ 代入上式，得右端点的 y 值：

$$y = \frac{Mg \cdot d^3}{4Y \cdot b \cdot a^3};$$

又因为 $y = \Delta Z$ ；

所以，杨氏模量为：

$$Y = \frac{d^3 \cdot Mg}{4a^3 \cdot b \cdot \Delta Z}$$

（三）动态悬挂法测杨氏模量

DHY-2A 型动态杨氏模量测试台，是利用动力学共振法原理，采用悬挂法来测量材料的杨氏模量。装置采用压电换能器 1 驱动金属棒振动，并使用压电换能器 2 比较振幅，通过驱动和共振的联系结合理论模型计算得到杨氏模量。

实验中要注意保护压电换能器，悬挂金属棒时注意悬线竖直。

一、实验目的

- 1、学会用动态悬挂法测量材料的杨氏模量；
- 2、学习用外延法测量，处理实验数据；
- 3、了解换能器的功能，熟悉测试仪器及示波器的使用；
- 4、培养学生综合运用知识和使用常用实验仪器的能力。

二、实验原理

根据棒的横振动方程

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{-\rho S \partial^2 y}{YJ \partial t^2} = 0 \quad (1)$$

式中： y 为棒振动的位移； Y 为棒的杨氏模量； S 为棒的横截面积； J 为棒的转动惯量； ρ 为棒的密度； x 为位置坐标； t 为时间变量。用分离变数法求解棒的横振动方程，令 $y(x, t) = X(x) T(t)$ 代入方程 (1-1) 得

$$\frac{1}{X} \frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{\rho S}{YJ} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

可以看出，上式两边分别是 x 和 t 的函数，这只有都等于一个任意常数时才有可能，若设这个常数为 K_4 ，得

$$\frac{d^4 X}{dx^4} - K^4 X = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{K^4 YJ}{\rho S} t = 0$$

解这两个线性常微分方程。得通解

$$y(x, t) = (A_1 \cosh K_x + A_2 \sinh K_x + B_1 \cos K_x + B_2 \sin K_x) \cos(\omega \cdot t + \varphi) \quad (2)$$

其中 $\omega = (K^4 YJ / \rho S)^{1/2}$ 称为频率公式。A1, A2, B1, B2, ϕ 是待定系数, 可由边界条件和初始条件确定。

我们只要用特定的边界条件定出常数 K , 并将其代入棒的转动惯量 J , 就可以得到具体条件下的计算公式了。对于长为 L , 两端自由的棒, 当悬线悬挂于棒的节点附近时, 其边界条件为: 自由端横向作用力为零, 弯矩亦为零。即

$$F = -\frac{\partial M}{\partial x} = -EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$$

$$\text{弯距} \quad M = EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$\text{即} \quad \left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^3 X}{dx^3} \right|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 X}{dx^2} \right|_{x=L} = 0$$

将边界条件代入通解得超越方程 $\cos KL \cdot \cosh KL = 1$, 用数值计算法得到方程的根依次是: $KL=0, 4.7300, 7.8532, 10.9956, 14.137, 14.279, 20.420 \dots$ 此数列逐渐趋于表达式 $K_n L = (n-1/2)\pi$ 的值。

上述第一个根“0”相应与静态值, 第二个根记为 $K_1 L = 4.7300$, 与此相应的共振频率称为基频(或称固有频率) $\omega_1 = 2\pi f_1$, 对于直径 d , 长为 L , 质量为 m 的圆形棒, 其转动惯量为 $J = Sd^2/16$, 在基频 f_1 下共振时, 得棒的杨氏弹性模量 Y 为

$$Y = 1.6067 \frac{L^3 m f_1^2}{d^4} \quad (3)$$

测试棒在作基频振动时存在两个节点, 它们的位置距离端面 $0.224L$ (距离另一端面为 $0.776L$) 处, 理论上, 悬挂点应取在节点处测试棒难于被激振和拾振, 为此可在节点两旁选不同点对称悬挂, 用外推法找出节点处的共振频率。

另外要明确的是, 物体的固有频率 f 固和共振频率 f 共是两个不同的概念, 它们之间的关系为

$$f_{\text{固}} = f_{\text{共}} \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \quad (1-4)$$

式中，Q 为测试的机械品质因素。对于悬挂法测量，一般 Q 的最小值约为 50，共振频率和固有频率相比只偏低 0.005%，本实验中只能测出测试的共振频率，由于两者相差很小。因此，固有频率可用共振频率代替。

三、仪器结构与连接

DHY-2A 型动态杨氏模量测试台的结构见下图：

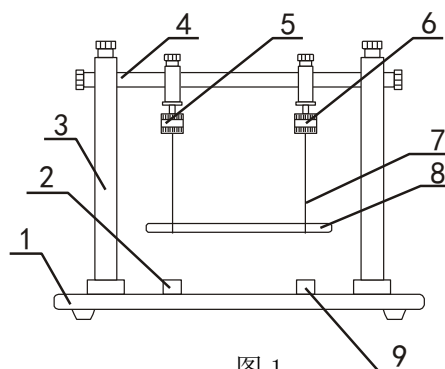


图 1

图中：(1) 底板 (2) 输入插口 (3) 立柱 (4) 横杆 (5) 激振器
(6) 共振器 (7) 悬线 (8) 测试棒 (9) 输出插口

由频率连续可调的音频信号源输出正弦电信号，经激振换能器转换为同频率的机械振动，再由悬线把机械振动传给测试棒，使测试棒作受迫横振动，测试棒另一端的悬线再把测试棒的机械振动传给拾振换能器，这时机械振动又转变成电信号，信号经选频放大器的滤波放大，再送至示波器显示。

当信号源频率不等于测试棒的固有频率时，测试棒不发生共振，示波器几乎没有电信号波形或波形很小。当信号源的频率等于测试棒的固有频率时，测试棒发生共振，这时示波器上的波形突然增大，这时频率显示窗口显示的频率就是测试在该温度下的共振频率，代入 (1-3) 式即可计算该温度下的杨氏模量。

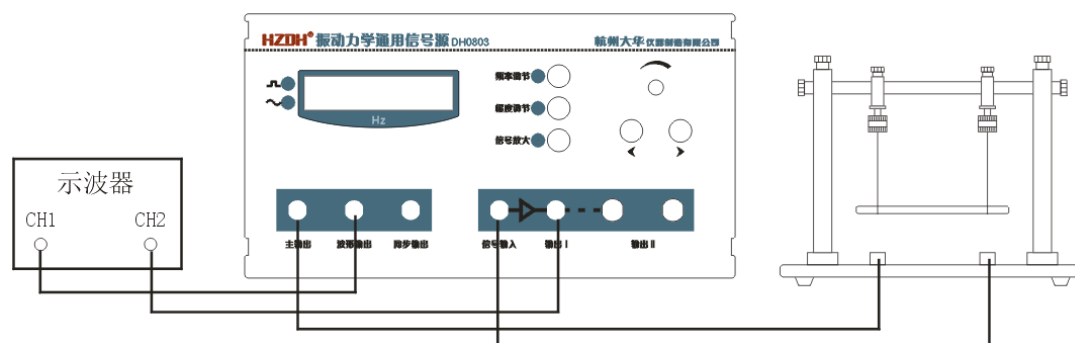


图 2 测量时的连接图

四、实验仪器

DHY-2A 动态杨氏模量测试台、DH0803 振动力学通用信号源，通用示波器、测试棒（铜、不锈钢）、悬线、专用连接导线、天平、游标卡尺、螺旋测微计等。

五、实验内容及要求

1、测量测试棒的长度 L ，直径 d ，质量 m （也可由实验室给出），为提高测量精度，要求以上量均测量 3—5 次。

2、测量测试棒在室温时的共振频率 f_1

（1）安装测试棒：如图 1 所示，将测试棒悬挂于两悬线之上，要求**测试棒横向水平，悬线与测试棒轴向垂直**（思考：为什么？），两悬线挂点到测试棒两端点的距离分别为 $0.0365L$ 和 $0.9635L$ 处，并处于静止状态。

（2）联机：按图 2 将测试台、信号源、示波器之间用专用导线连接。

（3）开机：分别打开示波器、信号源的电源开关，调整示波器处于正常工作状态。

（4）鉴频与测量：待测试棒稳定后，调节信号频率和幅度，寻找测试棒的共振频率 f_1 。当示波器荧光屏上出现共振现象时（正弦波振幅突然变大），再十分缓慢的微调频率调节细调旋钮，使波形振幅达到极大值。鉴频就是对测试共振模式及振动级次的鉴别，它是准确测量操作中的重要一步。在作频率扫描时，我们会发现测试棒不只在在一个频率处发生共振现象，而所用公式（1-3）只适用于基频共振的情况，所以要确认测试棒是在基频频率下共振。我们可用阻尼法来鉴别：若沿测试棒长度的方向轻触棒的不同部位，同时观察示波器，在波节处波幅不变化，而在波腹处，波幅会变小，并发现在测试棒上有两个波节时，这时的共振就是就是在基频频率下的共振，从频率显示屏上显示的频率值 f_1 。

在测量好 $0.0365L$ 和 $0.9635L$ 处后，再分别按 $0.099L$ 和 $0.901L$ 一组， $0.1615L$ 和 $0.8385L$ 一组， $0.224L$ 和 $0.776L$ 一组， $0.2865L$ 和 $0.7135L$ 一组， $0.349L$ 和 $0.651L$ 一组， $0.415L$ 和 $0.585L$ 一组进行测量，并记录在表 1 中。

注意：因为设备尺寸原因，部分设备在 $0.0365L$ 、 $0.9635L$ 处悬线不能竖直，此时该点要舍弃不测。

六、数据处理与分析

在实验上。由于悬线对测试棒的阻尼，所检测到的共振频率大小是随悬挂点的位置而变化的，由于换能器所拾取的是悬挂点的加速度共振信号，而不是振幅共振信号，并且所检测到的共振频率随悬线挂点到节点的距离增大而增大。若要测量测试棒的基频共振频率，只能将悬线挂在 $0.224L$ 和 $0.776L$ 节点处，但该节点处的振动幅度几乎为零，很难激振和检测，故采用外延测量法。所谓外延测量法。就是所需要的数据在测量数据范围之外，一般很难测量，为了求得这个值，采用作图外推求值的方法。即是先使用已测数据绘制出曲线，再将曲线按原规律延长

到待求值范围，在延长线部分求出所要的值。本实验中就是以悬挂点位置为横坐标，以相对应的共振频率为纵坐标作出关系曲线，求得曲线最低点（即节点）所对应的频率即为试棒的基频共振频率 f_1 。

表 1

序号	1	2	3	4	5	6	7
悬挂点位置 (mm)							
共振频率 f_1 (Hz)							

表 2

测试品材质	黄铜	铝	不锈钢
截面直径 d (mm)			
样品长度 L (mm)			
样品质量 m (g)			
基频共振频率 f_1 (Hz)			

将所测各物理量的数值代入公式 (1-3) 计算出该测试棒的杨氏模量 Y 。再利用不确定度传递估算相对不确定度 U_r 和不确定度 $U_p (= \bar{Y} \times U_r)$ 写出结果表达式。

附：黄铜测试棒的基频共振频率：500~710 Hz

$Y=0.8 \sim 1.10 \times 10^{11}$ 牛顿/米²

不锈钢测试棒的基频共振频率：800~1000Hz

$Y=1.5 \sim 2.0 \times 10^{11}$ 牛顿/米²

七、注意事项

- (1) 测试棒不可随处乱放，保持清洁，拿放时应特别小心。
- (2) 安装测试棒时，应先移动支架到既定位置，再悬挂测试棒。
- (3) 更换测试棒要细心，避免损坏激振，共振传感器。
- (4) 实验时，测试棒需稳定之后可以进行测量

八、思考题

- (1) 外延测量法有什么特点？使用时应注意什么问题？（外推法还将在“实验五. 气垫导轨实验”中见到）
- (2) 物体的固有频率和共振频率有什么不同？它们之间有何关系？

材料名称	$Y=10^{11}$ 牛顿/米 ²	材料名称	$Y=10^{11}$ 牛顿/米 ²
生铁	0.735~0.834	有机玻璃	0.02~0.03
碳钢	1.52	橡胶	78.5
玻璃	0.55	大理石	0.55

备注：因环境温度及测试棒材质不同等影响所提供的数据仅作参考。