

六 RLC 电路的谐振与暂态过程

【警告：注意高电压危险！】

在串联谐振时，如果设置不当，电感和电容两端将出现有危险的高电压（超过 36V）。为避免发生危险，请实验者务必做到：

（1）函数发生器输出总电压峰峰值不要超过 3V。

（2）连接电路前，不要让函数发生器输出电压。电路连接好后，不要用手或身体其它部位触碰金属部分，尤其是电感或电容的两端。这是做电学实验的基本要求。

【实验简介】

同时具有电感和电容两类元件的电路，在一定条件下会发生谐振现象。谐振时电路的阻抗、电压与电流以及它们之间的相位差、电路与外界之间的能量交换等均处于某种特殊状态，因而在实际中有着重要的应用，如在放大器、振荡器、滤波器电路中常用作选频等。本实验的第一部分，将通过 RLC 电路的相频特性、幅频特性的测量，着重研究 LC 电路的谐振现象。

在阶跃电压作用下，RLC 串联电路由一个平衡态跳变到另一个平衡态，这一转变过程称为暂态过程。在此期间电路中的电流及电容、电感上的电压呈现出规律性的变化，称为暂态特性。RLC 电路的暂态特性在实际工作中十分重要，例如在脉冲电路中经常遇到元件的开关特性和电容充放电的问题；在电子技术中常利用暂态特性来改善波形或者产生特定波形。但是在某些情况，暂态特性也会造成危害，例如在接通、切断电源的瞬间，暂态特性会引起电路中电流、电压过大，造成电器设备和元器件的损坏，这是需要防止的。本实验的第二部分是要观察和分析 RLC 串联电路暂态过程中电压及电流的变化规律。

【实验目的】

1. 研究 RLC 电路的谐振现象。
2. 了解 RLC 电路的相频特性和幅频特性。
3. 用数字存储示波器观察 RLC 串联电路的暂态过程，理解阻尼振动规律。

【实验仪器与用具】

标准电感，标准电容， 100Ω 标准电阻，电阻箱，电感箱，电容箱，函数发生器，示波器，数字多用表，导线等。

【实验原理】

1. 串联谐振

RLC 串联电路如图 1 所示。其总阻抗 $|Z|$ 、电压 u 与电流 i 之间的相位差 φ 、电流 i 分别为

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} \quad (1)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} \quad (2)$$

$$i = \frac{u}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (3)$$

式中 $\omega = 2\pi f$ 为角频率（ f 为频率）， $|Z|$ ， φ ， i 都是 f 的函数，当电路中其它元件参量取确定值的情况下，它们的特性完全取决于频率。

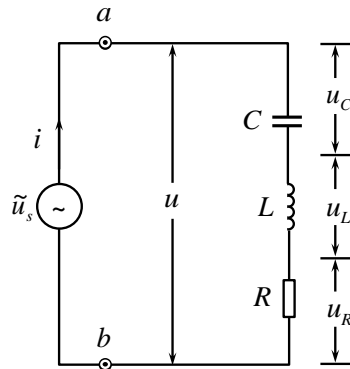


图 1 RLC 串联电路

图 2 (a)、(b)、(c) 分别为 RLC 串联电路的阻抗、相位差、电流随频率的变化曲线。其中图 2 (b) $\varphi - f$ 曲线称为相频特性曲线；图 2 (c) $i - f$ 曲线称为幅频特性曲线，它表示在总电压 u 保持不变的条件下 i 随 f 的变化曲线。相频特性曲线和幅频特性曲线有时统称为频率响应特性曲线。

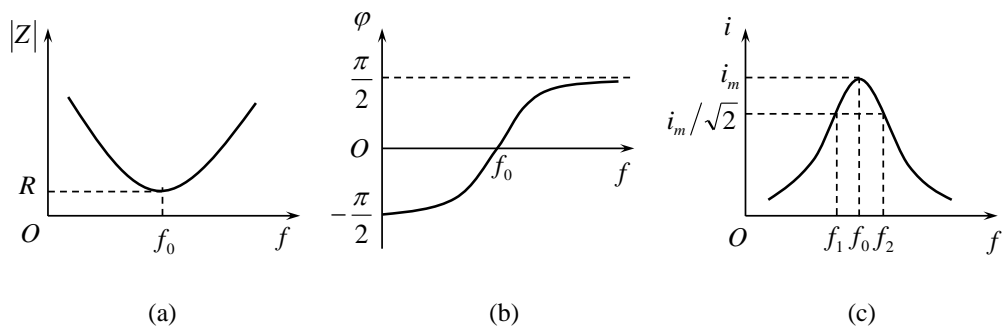


图 2 RLC 串联电路的频率特性 (a) 阻抗特性；(b) 相频特性；(c) 幅频特性

由曲线图可以看出，存在一个特殊的频率 f_0 ，特点为：

(1) 当 $f < f_0$ 时, $\varphi < 0$, 电流的相位超前于电压, 整个电路呈电容性, 且随 f 降低, φ 趋近于 $-\pi/2$; 而当 $f > f_0$ 时, $\varphi > 0$, 电流的相位落后于电压, 整个电路呈电感性, 且随 f 升高, φ 趋近于 $\pi/2$ 。

(2) 随 f 偏离 f_0 越远, 阻抗越大, 而电流越小。

(3) 当 $\omega L - 1/\omega C = 0$, 即

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{或} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4)$$

时, $\varphi = 0$, 电压与电流同相位, 整个电路呈纯电阻性, 总阻抗达到极小值 $Z_0 = R$, 而总电流达到极大值 $i_m = u/R$ 。这种特殊的状态称为串联谐振, 此时角频率 ω_0 (或频率 f_0) 称为谐振角频率 (或谐振频率)。在 f_0 处, $i-f$ 曲线有明显尖锐的峰显示其谐振状态, 因此, 有时称它为谐振曲线。谐振时, 有

$$u_L = i_m |Z_L| = \frac{\omega_0 L}{R} u, \quad \frac{u_L}{u} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

而

$$u_C = i_m |Z_C| = \frac{1}{R\omega_0 C} u, \quad \frac{u_C}{u} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

令

$$Q = \frac{u_L}{u} = \frac{u_C}{u} \quad \text{或} \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} \quad (5)$$

Q 称为谐振电路的品质因数, 简称 Q 值。它是由电路的固有特性决定的, 是标志和衡量谐振电路性能优劣的重要的参量。 Q 值标志着:

(1) 储耗能特性: Q 值越大, 相对[储能的]耗能越小, 储能效率越高 (可以证明 Q 值等于 LC 元件总储能与每周期内耗能之比的 2π 倍)。

(2) 电压分配特性: 谐振时 $u_L = u_C = Qu$, 电感、电容上的电压均为总电压的 Q 倍, 因此有时称串联谐振为电压谐振。利用电压谐振, 在某些传感器、信息接收中, 可显著提高灵敏度或效率, 但在某些应用场合, 它对系统与人员却具有一定不安全性, 故而在设计与操作中应予以注意。

(3) 频率选择性: 设 f_1 , f_2 为谐振峰两侧 $i = i_m/\sqrt{2}$ 处对应频率[如图 2 (c) 所示], 则 $\Delta f = f_2 - f_1$ 称为通频带宽度, 简称带宽。不难证明

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (6)$$

显然， Q 值越大，带宽越窄，峰越尖锐，频率选择性越好。 Q 值对于放大器、滤波器的选频特性的影响甚大，因而在有关电路设计中是一个很重要的参量。

2. 并联谐振

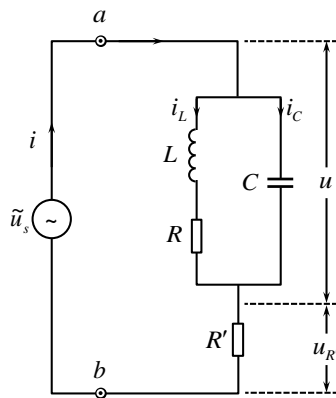


图3 RLC 并联电路

如图3所示电路，其总阻抗 $|Z_p|$ 、电压 u 与电流 i 之间的相位差 φ 、电压 u （或电流 i ）分别为

$$|Z_p| = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}} \quad (7)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \omega C[R^2 + (\omega L)^2]}{R} \quad (8)$$

$$u = i|Z_p| = \frac{u_{R'}}{R'}|Z_p| \quad (9)$$

显然，它们都是频率的函数。当 $\varphi=0$ 时，电流和电压同相位，整个电路呈纯电阻性，即发生谐振。由式（8）求得并联谐振的角频率 ω_p （或并联谐振频率 f_p ）为

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \quad (10)$$

式中， $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC}$ ， $Q = \omega_0 L/R = \sqrt{L/C}/R$ 。可见，并联谐振频率 f_p 与 f_0 稍有不同，当 $Q \gg 1$ 时， $\omega_p \approx \omega_0$ ， $f_p \approx f_0$ 。

图4(a)、(b)、(c)分别为RLC并联电路的阻抗、相位差、电流或电压随频率的变化曲线。由(b)图 $\varphi-f$ 曲线可见，在谐振频率 $f = f_p$ 两侧，当 $f < f_p$ 时， $\varphi > 0$ ，电流的相位落后于电压，整个电路呈电感性；当 $f > f_p$ 时， $\varphi < 0$ ，电流的相位超前于电压，整个电路呈电容性。

显然，在谐振频率两边区域，并联电路的电抗特性与串联电路时截然相反。由（a）图 $|Z_p| - f$ 曲线和（c）图 $i - f$ 曲线可见，在 $f = f'_p$ 处（注意： f'_p 与谐振频率 f_p 稍有不同）总阻抗达到极大值，总电流达到极小值，而在 f'_p 两侧，随 f 偏离 f'_p 越远，阻抗越小，电流越大。不言而喻，这种特性，与串联电路时完全相反。（c）图 $u - f$ 曲线为在总电流保持不变的条件下，电感（或电容）两端电压 u 随频率的变化曲线。

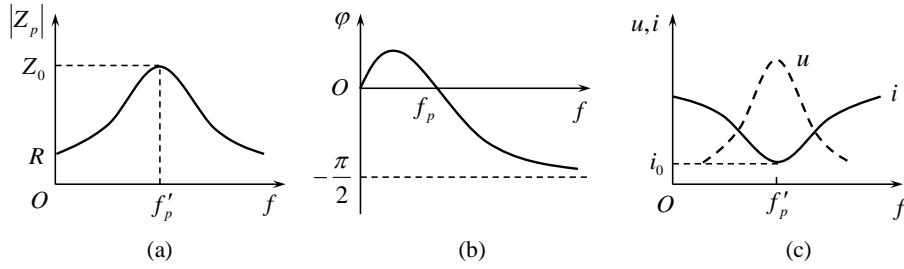


图4 RLC 并联电路的频率特性 (a) 阻抗特性；(b) 相频特性；(c) 幅频特性

与串联谐振类似，可用品质因数 Q ，即

$$Q_1 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C}, \quad Q_2 = \frac{i_C}{i} \approx \frac{i_L}{i}, \quad Q_3 = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (11)$$

标志并联谐振电路的性能优劣，其意义也类同。不过，此时 $i_L \approx i_C = iQ$ ，谐振支路中的电流为总电流的 Q 倍。因此，有时称并联谐振为电流谐振。

3. RLC 电路的暂态过程

电路如图5。先观察放电过程，即开关 S 先合向“1”使电容充电至 E ，然后把 S 倒向“2”，电容就在闭合的RLC电路中放电。电路方程为

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$$

又将 $i = Cdu_C/dt$ 代入得

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (12)$$

根据初始条件 $t = 0, u_C = E, \frac{du_C}{dt} = 0$ 解方程。方程的解分为3种情况：

① $R^2 < 4L/C$ 属于阻尼较小的情况。引入阻尼系数 $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ 后，对应于 $\zeta < 1$ 。此时方程(12)

的解为

$$u_C = \sqrt{\frac{4L}{4L - R^2 C}} E e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) \quad (13)$$

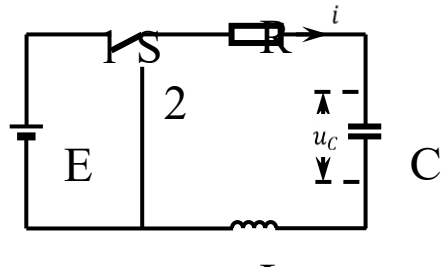


图5 RLC 暂态电路

其中时间常量为

$$\tau = 2L/R \quad (14)$$

衰减振动的角频率为

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}} \quad (15)$$

u_C 随时间变化的规律如图 6 中曲线 I 所示，即阻尼振动状态。此时振动的振幅呈指数衰减。 τ 的大小决定了振幅衰减的快慢， τ 越小，振幅衰减越迅速。

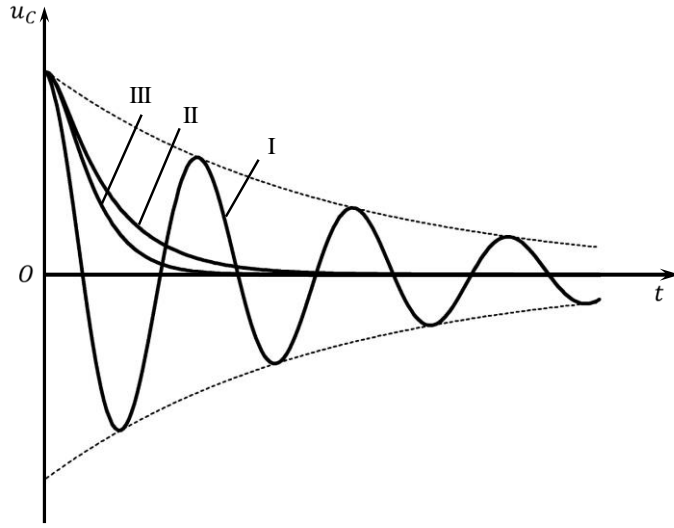


图 6 RLC 暂态过程中的三种阻尼曲线

如果 $R^2 \ll 4L/C$ ，通常是 R 很小的情况，振幅的衰减很缓慢，从式 (15) 可知

$$\omega \approx 1/\sqrt{LC} = \omega_0 \quad (16)$$

此时近似为 LC 电路地自由振动， ω_0 为 $R=0$ 时 LC 回路的固有频率。衰减振动的周期

$$T = 2\pi/\omega \approx 2\pi\sqrt{LC} \quad (17)$$

② $R^2 > 4L/C$ ，即阻尼系数 $\zeta > 1$ 。对应于过阻尼状态，其解为

$$u_C = \sqrt{\frac{4L}{R^2 C - 4L}} E e^{-\alpha t} \sinh(\beta t + \varphi) \quad (18)$$

式中：

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R^2 C}{4L} - 1}$$

(18) 式所表示的 $u_C - t$ 的关系曲线见图 6 中的曲线 II，它是以缓慢的方式逐渐回零。可以证明，若 L 和 C 固定，随电阻 R 的增长， u_C 衰减到零的过程更加缓慢。

③ $R^2 = 4L/C$ ，即阻尼系数 $\zeta = 1$ 。对应于临界阻尼状态，其解为

$$u_C = E \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \quad (19)$$

其中 $\tau = 2L/R$ 。它是从过阻尼到阻尼振动过渡的分界点， $u_C - t$ 的关系见图 6 中的曲线 III。

对于充电过程，即开关 S 先在位置“2”，待电容放电完毕，再把 S 倒向“1”，电源 E 将对电容充电，于是电路方程变为

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad (20)$$

初始条件为 $t = 0$ 时， $u_C = 0$ ， $du_C/dt = 0$ 。方程解为

$$R^2 < \frac{4L}{C}, \quad u_C = E \left[1 - \sqrt{\frac{4L}{4L - R^2 C}} e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) \right] \quad (21)$$

$$R^2 > \frac{4L}{C}, \quad u_C = E \left[1 - \sqrt{\frac{4L}{R^2 C - 4L}} e^{-\alpha t} \sinh(\beta t + \varphi) \right] \quad (22)$$

$$R^2 = \frac{4L}{C}, \quad u_C = E \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right] \quad (23)$$

可见，充电过程和放电过程十分类似，只是最后趋向的平衡位置不同。

【实验内容】

本实验中，电压波形的相位差使用示波器进行测量，因此要利用一个标准电阻，将电流波形的测量转换为电阻上电压波形的测量。而交流电压大小的确定，可以利用示波器测量其波形的峰峰值。测量前请先了解示波器的输入阻抗。

本实验中所用的函数发生器、示波器都是接地的（已通过其电源插头与大地连通）。示波器实际上测量的是通道中心线对地的电压，因此利用示波器测量某元件上的电压时，需要留意电路中共地点的位置。

1. 测 RLC 串联电路的相频特性和幅频特性曲线

测量电路如图 1 所示。取 $L=0.1 \text{ H}$ ， $C=0.05 \mu\text{F}$ ， $R=100 \Omega$ ，用示波器 CH1、CH2 通道分别观测 RLC 串联电路的总电压 u 和电阻两端电压 u_R 。（注意两个通道的输入线的地端在 b 点共地。）注意限制总电压峰峰值不超过 3.0 V（或有效值不超过 1.0 V），**防止串联谐振时产生有危险的高电压。**

（1）调谐振，改变函数发生器的输出频率，找到谐振频率 f_0 。在谐振时，用数字多用表测量 u ， u_L ， u_C 。利用式（5）计算 Q 值。

（2）测相频特性曲线和幅频特性曲线：在总电压 $u_{pp}=2.0 \text{ V}$ 保持不变的条件下，用示波器

(在双踪显示下)测出电压、电流间相位差 φ ，以及相应的 u_R 。信号频率在大约 1.50~3.30 kHz 范围内，选择相位差约 0° ， $\pm 15^\circ$ ， $\pm 30^\circ$ ， $\pm 45^\circ$ ， $\pm 60^\circ$ ， $\pm 72^\circ$ ， $\pm 80^\circ$ 所对应的频率进行测量。参考频率 (单位 kHz): 1.88、2.00、2.08、2.15、2.19、2.22、2.24、2.25、2.26、2.275、2.30、2.36、2.43、2.62、3.18。作 RLC 串联电路的 $\varphi-f$ 曲线和 $i-f$ 曲线。利用式 (6) 估算出 Q 值。分析讨论以上结果。

测量相位差的两种方法: (a) 利用示波器左侧 MENU 按键，右侧面板上的“Measure”按键和相应的按键选取“相位 1 \rightarrow 2”来测量相位差。打开显示屏右侧“统计功能”，读取相位差的平均值“Avg”即可。注意: 等待一会 (大于 10 秒)，让平均值稳定后再读数。当改变信号频率或幅度后，要先关闭“统计功能”，再打开，然后读取数据。(b) 利用光标 (示波器面板上“Cursor”按键) 功能来读取同相位点时间间隔 Δt (对应示波器上显示 Δx)。然后利用关系式:

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} \times 360^\circ = \frac{f}{1/\Delta t} \times 360^\circ \text{ 可计算出相位差。}$$

当改变频率而不改变函数发生器的输出电压时，外电路总电压会变小，尤其在谐振频率附近。这是由于函数发生器有 $50\ \Omega$ 内阻，而外部阻抗在谐振点附近时会明显减小。可通过适当增大函数发生器输出电压来保持总电压 $u_{pp}=2.0\text{ V}$ 。

用示波器读取电压时，可读取“幅度值”或者“顶端值”，不要读取“峰峰值”，因为“峰峰值”包含了高频噪音的成分，系统误差大。

2. 测 RLC 并联电路的相频特性和幅频特性曲线。

测量电路如图 3 所示，取 $L=0.1\text{ H}$ ， $C=0.05\ \mu\text{F}$ ， $R'=5\text{ k}\Omega$ (电阻 R' 是为监测总电流 i 而串入的)。为观测电感与电容并联部分的电压和相位，用 CH1 测量总电压，用 CH2 测量 R' 两端电压，(注意共地点在 b 点)，两通道测量电压值相减 CH1-CH2 就是并联部分的电压 u 。可通过示波器面板上的“MATH”键实现两通道波形相减。

(1) 调谐振。改变函数发生器的输出频率，观测并联部分的电压 u (CH1-CH2) 与总电流 (CH2) 的幅度和相位的变化。找到谐振频率 f_p 。

(2) 测相频特性曲线和幅频特性曲线: 固定总电压 ($u+u_{R'}$) 的峰峰值 2.0 V 保持不变，测量并联部分电压 u (CH1-CH2) 与总电流 (CH2) 的相位差以及二者的幅度值。可用光标 (Cursor) 功能读取电压值。频率范围大约在 $1.70 \sim 2.80\text{ kHz}$ 。参考频率 (单位 kHz): 2.05、2.15、2.20、2.231、2.24、2.247、2.25、2.253、2.256、2.265、2.275、2.32、2.40、2.60。作 RLC 并联电路的 $\varphi-f$ 曲线和 $u-f$ 、 $i-f$ 曲线。

3. 观测 RLC 串联电路的暂态过程。

实验电路如图 7 所示。由函数发生器产生方波。为便于观察，要求将方波的低电平调整与示波器的扫描基线一致。由低电平到高电平相当于充电，由高电平到低电平相当于放电。函数发生器各参数可设为：频率 50 Hz，电压峰峰值 $u_{pp}=2.0\text{ V}$ ，偏移 1V。示波器 CH1 通道用来测量总电压，CH2 用来测量电容两端电压 u_C ，注意两个通道必须共地。实验中 $L=0.1\text{ H}$ ， $C=0.2\text{ }\mu\text{F}$ 。

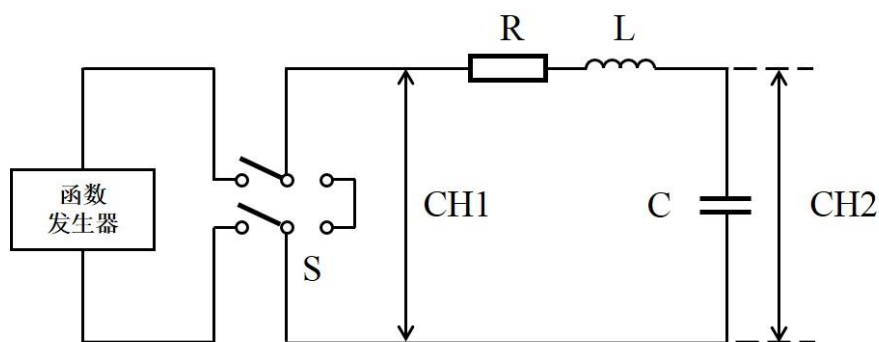


图 7 RLC 暂态过程实验电路

- (1) $R=0\text{ }\Omega$ ，测量 u_C 波形。
- (2) 调节 R 测得临界电阻 R_C ，并与理论值比较。
- (3) 记录 $R=2\text{ K}\Omega$ ， $20\text{ K}\Omega$ 的 u_C 波形。函数发生器频率可分别选为 250 Hz ($R=2\text{ K}\Omega$)，和 20 Hz ($R=20\text{ K}\Omega$)。

【参考文献】

- [1] 吕斯骅，段家祗，张朝晖。新编基础物理实验（第二版），北京：高等教育出版社，2013。