期末作业

陈文宇

2022 年 12 月 11 日

1 积分近似

问题重述：利用复化 Gauss 公式计算 $f(x) = e^{x^2+x}$ 在 $[-1, 1]$ 积分的近似值。
具体代码，详见附件 TheFirstQuestion.c。结果如下:

```
复化Gauss公式结果为 3.588774
```

2 拟合函数

问题重述：对于指定基函数，确定 $f(x) = e^{x^2+x}$ 在指定拟合点和拟合点函数值且使误差最小的拟合函数，并给出最小误差。

基函数 $1, x, x^2, sin(2x), cos(2x)$ 是线性无关的，且基函数个数小于拟合点个数，满足哈尔条件，故可以使用线性最小二乘法求解拟合函数。

具体代码，详见附件 TheSecondQuestion.c。结果如下:

```
拟合点为:
-1.000000 -0.800000 -0.600000 -0.400000 -0.200000 0.000000 0.200000 0.400000 0.600000 0.800000 1.000000
拟合点函数值为:
1.000000 0.852144 0.786628 0.786628 0.852144 1.000000 1.271249 1.750673 2.611696 4.220696 7.389056
拟合点函数为:
-2.796458 +5.307528 x +8.570241 x^2 -2.412594 sin(2x) +3.826679 cos(2x)
误差为:
0.313092
```

3 最佳平方逼近函数

问题重述: 对于指定基函数和积分法，确定 $f(x) = e^{x^2+x}$ 的最佳平方逼近函数。

基函数 $1, x, x^2, sin(2x), cos(2x)$ 是线性无关的，则 Gram 矩阵是可逆的。利用 Gauss 积分法可以求解 Gram 矩阵及右端列向量各个元素的近似值, 然后求解线性方程组即可。

具体代码，详见附件 TheThirdQuestion.c。结果如下:

```
最佳平方逼近函数为:
-2.476980 +4.873546 x +8.041588 x^2 -2.123263 sin(2x) +3.499051 cos(2x)
误差为:
0.100035
```

4 关于第三题的摄动分析

矩阵 A 的精确值为

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & -sin2 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & -cos2+\frac{1}{2}sin2 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & cos2+\frac{1}{2}sin2 \\ 0 & -cos2+\frac{1}{2}sin2 & 0 & 1-\frac{1}{4}sin4 & 0 \\ -sin2 & 0 & cos2+\frac{1}{2}sin2 & 0 & 1+\frac{1}{4}sin4 \end{pmatrix}$$

由摄动分析理论知，方程组的解对于误差的敏感程度取决于系数矩阵的条件数。由 matlab 简单函数 $cond()$ 可以计算出系数矩阵的条件数为 140.48，这不是一个很大的数。

另外，Gauss 积分公式在每一小区间上的积分余项为

$$R_n(f) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\int_a^b w^2(x)dx$$

利用均值不等式逐段的对 $w^2(x)$ 放缩，可以得到

$$w^2(x) \leqslant (\frac{h}{2})^4$$

从而可以估计整体的余项:

$$R(f) \leqslant \frac{\max\limits_{x\in[-1,1]} |f^{(4)}(x)|}{24} h^5$$

当 $f^{(4)}(x)$ 较小时, 整体的精度很高。显然，任意两个基函数的乘积函数的四阶导数值都较小。所以 Gram 矩阵每一元素的精度很高。从而对系数矩阵的扰动很微小，方程的解在这样的扰动下很稳定。所以第三问的结果是可以认可的。

参考文献

[1] 黄明游，冯果忱主编. 数值分析. 下册北京: 高等教育出版社, 2008.1.