微分方程数值解计算实习课后作业 2

陈文宇

2023 年 3 月 11 日

目录

1 问题重述

测试不同基函数对求解的影响：例 1.4.1

$$\begin{cases} \mu'' + \mu = -x & 0 < x < 1 \\ \mu(0) = \mu(1) = 0 \end{cases}$$

取基函数为

$$\phi_i(x) = \sin(i\pi x) \;\; \phi_i(x) = (1-x)x^i, i = 1, 2, \ldots, N.$$

- 对比两组基函数对应的系数矩阵的条件数随着 N 增加产生的变化
- 画图对比两组基函数对应的数值解和精确解

$$\mu_*(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

之间的 $L^2\{[0,1]\}$ 误差:

$$err = (\int_0^1 (\mu_*(x) - \mu_n(x))^2)^{\frac{1}{2}}$$

随着 N 增加产生的变化

2 实验思路

使用 Ritz-Galerkin 方法,只需求解线性方程组 $Ax = b$, 对于条件数可以使用 matlab 命令 $cond(A, 2)$, err 的求解可以使用复化 Simpson 方法来求解，进而使用 plot 函数绘制图像即可。

具体的操作:

- 将 $A(i, j)$ 公式写成函数 Aijeqution.m 计算系数矩阵，使用命令 $cond(A, 2)$ 计算条件数
- 将 $b(i)$ 公式写成函数 bieqution.m 计算右端向量，使用 $x = A\backslash b'$ 求解线性方程，即可获取微分方程数值解
- 使用复化 Simpson 方法来求解误差 err, 并绘图，这些操作保存在 main.m 中

3 实验结果

下列表格是对基函数个数 N 与系数矩阵条件数 $condA$

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$conA$	1	4.34	9.9	17.69	27.71	39.95	54.41	71.1	90.02	111.16
N	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$conA$	134.53	160.12	187.94	217.99	250.25	284.75	321.47	360.42	401.59	444.99

表 1: 三角多项式基底下的条件数变化

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$conA$	1	10.17	161.10	3106.29	6.69E+04	1.55E+06	3.80E+07	9.66E+08	2.53E+10	6.8E+11

表 2: 代数多项式基底下的条件数变化

下列图像是基函数个数 N 与误差 err 的图像:

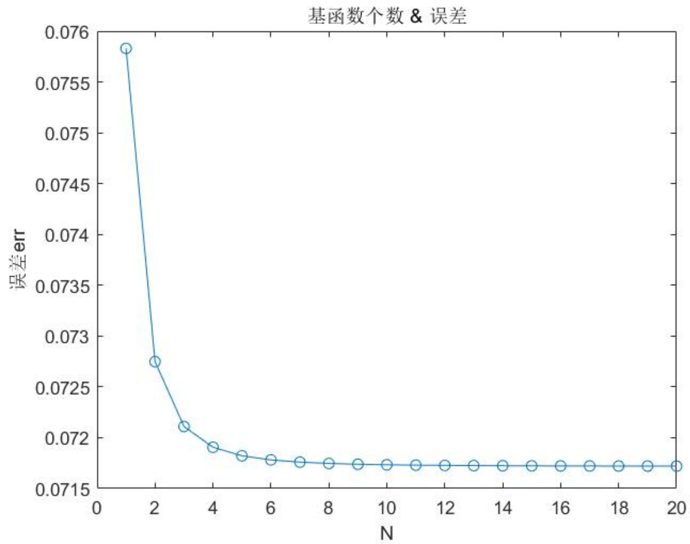

图 1: 三角多项式作为基函数

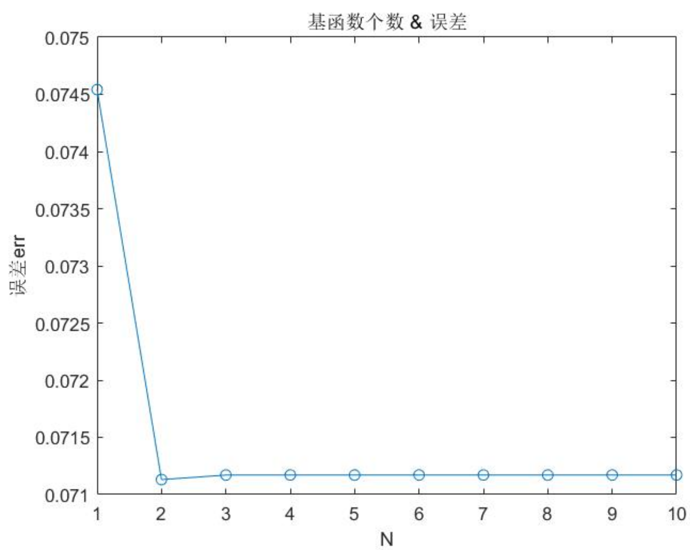

图 2: 代数多项式作为基函数

4 实验结果分析

随着基函数个数的增加，两类基底下系数矩阵的条件数都在逐渐增大。

对于三角多项式基底，我绘制了 N 与 $\sqrt{\|A\|}$ 的图像, 可以看出 $\|A\| = O(N^2)$。这是简单的，因为对角矩阵的条件数是最大奇异值和最小奇异值的比值, 即

$$condA = \frac{(N\pi)^2 - 1}{\pi^2 - 1}$$

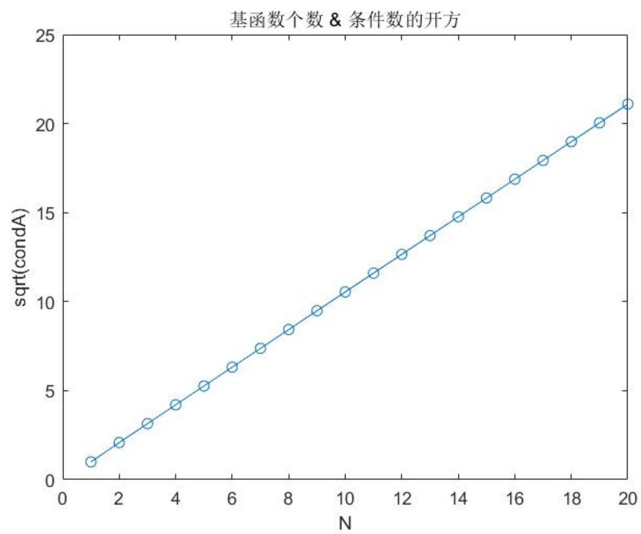

图 3: 三角多项式基底下,N 与 $\sqrt{\|A\|}$ 的图像关系图

对于代数多项式基底，我绘制了 N 与 $\log\|A\|$ 的图像, 可以看出 $\|A\| = O(e^N)$, 并且当 $N > 12$, 系数矩阵的条件数过大，matlab 报告“警告: 矩阵接近奇异值，或者缩放错误。结果可能不准确”.

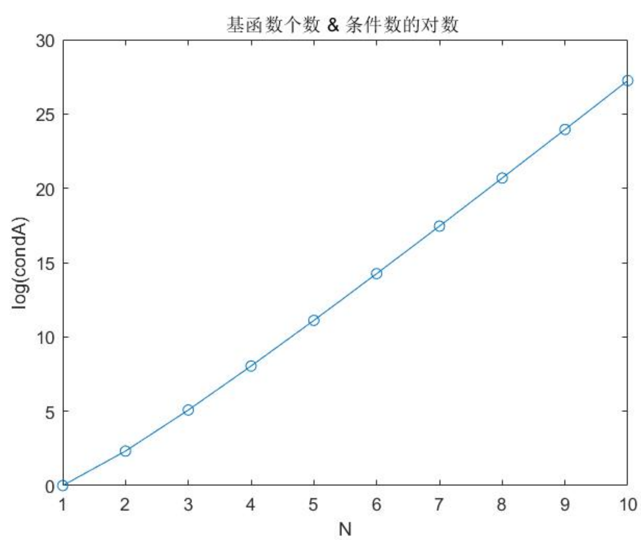

图 4: 代数多项式基底下,N 与 $\exp\|A\|_2$ 的图像关系图

随着基函数个数的增加，两类基底下误差都在逐渐减小。