数值分析第九次作业

10200115 陈文宇

2022 年 10 月 21 日

1. 已知 $f(x) = a\cos(nx) + b\sin(nx), a^2 + b^2 \neq 0$, 求 $f(x)$ 的阶数不超过 $n-1$ 的最佳一致逼近三角多项式 $T_{n-1}^*(x)$ 和 $E_{n-1}^*(x)$。

根据三角函数公式

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(nx-\theta) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\,\cos n(x-\frac{\theta}{n}) \\ &\leq \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

其中 $\theta = \arctan(\frac{b}{a}) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

注意到 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上有 $2n+1$ 个交错取最大值和最小值的点，则

$$f(x_k) = (-1)^k\sqrt{a^2+b^2}$$

其中

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{k\pi}{n}, & \theta \geq 0, k = 0, 1, 2 \ldots 2n-1 \\ x_k = \dfrac{\theta}{n} + \dfrac{k\pi}{n}, & \theta < 0, k = 1, 2, 3 \ldots 2n \end{cases}$$

显然的是若 $T_{n-1}^*(x) = 0$, 则 $f(x) - T_{n-1}^*(x)$ 有 $2n$ 个交错点构成的交错点组，有定理 5.1 知，$T_{n-1}^*(x) = 0$ 是其最佳一致逼近三角多项式

2.$f(x) = x^3$, 求 $p_2^*(x) \in P_2(x)$, $s.t.$

$$||f(x) - p_2^*(x)||_\infty = \inf ||f(x) - p_2(x)||_\infty, x \in [-1, 1]$$

解: 由定理知

$$p_2(x) = f(x) - \frac{1}{4}T_3(x)$$

将 $T_3(x) = 4x_3 - 3x$ 代入上式得

$$p_2^*(x) = \frac{3}{4}(x)$$