Lecture 12：抛物型方程的差分法I

2023 年 5 月 17 日

1 本次课程内容

- 最简差分格式
- 练习

2 最简差分格式

考虑如下初-边值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & 0 < t \le T \\ u(x,0) = \varphi(x) & 0 < x < l \end{cases}$$

以及两类边值条件

$$A : u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad 0 \le t \le T$$

$$B : \partial_x u(0,t) = \partial_x u(l,t) = 0 \qquad 0 \le t \le T$$

假设 $\varphi(x)$ 在求解区域光滑，并且在 $x = 0, l$ 与边值相容。取空间步长 $h = l/N$ 和时间步长 $\tau = T/M$。用两族平行线 $x = x_j = jh$ 和 $t = t_k = k\tau$ 将矩形域 $\overline{G} = \{0 \le x \le l; 0 \le t \le T\}$ 分割成矩形网格，网格节点为 (x_j, t_k)。以 G_h 表示网格内点集合，即位于开矩形 G 的网点集合；$\overline{G_h}$ 表示所有位于闭矩形 $\overline{G}$ 的网点集合；$\Gamma_h = \overline{G}_h - G_h$ 是网格界点集合。

记 u_j^k 表示定义在网点 (x_j, t_k) 的函数。

2.1 向前差分格式

- 初始条件：$u_j^0 = \varphi(x_j)$
- 内点处理：$1 \le j < N$

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a\frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + f(x_j, t_k)$$
$$\Rightarrow \quad u_j^{k+1} = ru_{j+1}^k + (1-2r)u_j^k + ru_{j-1}^k + \tau f(x_j, t_k)$$

其中 $r = a\tau/h^2$ 为网比

- 界点处理：

  A: 令 $u_0^{k+1}=u_N^{k+1}=0$ 即可

  B: 由中心差商 $u_{-1}^k=u_1^k, u_{N+1}^k=u_{N-1}^k$，即

$$
\begin{aligned}
u_0^{k+1} &= 2ru_1^k+(1-2r)u_0^k+\tau f(x_0,t_k)\\
u_N^{k+1} &= 2ru_{N-1}^k+(1-2r)u_N^k+\tau f(x_N,t_k)
\end{aligned}
$$

Theorem 2.1. 当网比 $r\le\frac{1}{2}$ 时，向前差分格式的解有收敛阶 $O(\tau+h^2)$.

2.2 向后差分格式

- 初始条件：$u_j^0=\varphi(x_j)$

- 内点处理：$1\le j<N$

$$
\begin{aligned}
&\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+f(x_j,t_{k+1})\\
\Rightarrow\quad &-ru_{j+1}^{k+1}+(1+2r)u_j^{k+1}-ru_{j-1}^{k+1}=u_j^k+\tau f(x_j,t_{k+1})
\end{aligned}
$$

  对应系数矩阵为

$$
A(j,j+1)=-r,\quad A(j,j)=1+2r,\quad A(j,j-1)=-r,\quad b(j)=u_j^k+\tau f(x_j,t_{k+1})
$$

- 界点处理：

  A: 三种处理技巧

  B: 由中心差商 $u_{-1}^{k+1}=u_1^{k+1},u_{N+1}^{k+1}=u_{N-1}^{k+1}$，即

$$
\begin{aligned}
-2ru_1^{k+1}+(1+2r)u_0^{k+1}&=u_0^k+\tau f(x_0,t_{k+1})\\
-2ru_{N-1}^{k+1}+(1+2r)u_N^{k+1}&=u_N^k+\tau f(x_N,t_{k+1})
\end{aligned}
$$

  对应的系数矩阵为

$$
\begin{cases}
A(0,1)=-2r,\quad A(0,0)=1+2r,\quad b(0)=u_0^k+\tau f(x_0,t_{k+1})\\
A(N,N-1)=-2r,\quad A(N,N)=1+2r,\quad b(N)=u_N^k+\tau f(x_N,t_{k+1})
\end{cases}
$$

Theorem 2.2. 对任何网比 $r>0$, 向后差分格式的解有收敛阶 $O\left(\tau+h^2\right)$.

2.3 六点对称格式(Crank-Nicolson)

- 初始条件：$u_j^0=\varphi(x_j)$

- 内点处理：$1 \le j < N$

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=\frac{a}{2}\left[\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+\frac{u_{j+1}^{k}-2u_j^{k}+u_{j-1}^{k}}{h^2}\right]+\frac{1}{2}\left(f(x_j,t_{k+1})+f(x_j,t_k)\right)$$
$$\Rightarrow\quad -\frac{r}{2}u_{j+1}^{k+1}+(1+r)u_j^{k+1}-\frac{r}{2}u_{j-1}^{k+1}=\frac{r}{2}u_{j+1}^{k}+(1-r)u_j^{k}+\frac{r}{2}u_{j-1}^{k}+\frac{\tau}{2}\left(f(x_j,t_{k+1})+f(x_j,t_k)\right)$$

对应系数矩阵为

$$A(j,j+1)=-\frac{r}{2},\quad A(j,j)=1+r,\quad A(j,j-1)=-\frac{r}{2}$$
$$b(j)=\frac{r}{2}u_{j+1}^{k}+(1-r)u_j^{k}+\frac{r}{2}u_{j-1}^{k}+\frac{\tau}{2}\left(f(x_j,t_{k+1})+f(x_j,t_k)\right)$$

- 界点处理：

A: 三种处理技巧

B: $u_{-1}^k+u_{-1}^{k+1}=u_1^k+u_1^{k+1},\quad u_{N+1}^k+u_{N+1}^{k+1}=u_{N-1}^k+u_{N-1}^{k+1}$ 对应的系数矩阵为

$$A(0,1)=-r,\quad A(0,0)=1+r,\quad b(0)=ru_1^k+(1-r)u_0^k+\frac{\tau}{2}\left(f(x_0,t_{k+1})+f(x_0,t_k)\right)$$
$$A(N,N-1)=-r,\quad A(N,N)=1+r,\quad b(N)=ru_{N-1}^k+(1-r)u_N^k+\frac{\tau}{2}\left(f(x_N,t_{k+1})+f(x_N,t_k)\right)$$

Theorem 2.3. *对任何网比 $r>0$，六点对称格式的解有收敛阶 $O\left(\tau^2+h^2\right)$.*

3 作业及练习（基础题目）

对如下题目编写向前差分，向后差分和六点对称差分进行求解，并给出相应算法在 $t=1$ 时刻关于 τ 和 h 的 0-范数收敛阶

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\sin(\pi x)+\pi^2 t\sin(\pi x), & 0<t\le 1\\ u(x,0)=\sin(\pi x) & 0<x<1\\ u(0,t)=u(1,t)=0 & 0\le t\le 1\end{cases}$$

真解 $u=e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x)+t\sin(\pi x)$。

Remark 3.1. *作业截止日期为 2023/05/24-2023/05/31，将程序代码和实验报告压缩为 .rar 文件，文件名为“姓名-微分方程数值解计算实习第12周作业.rar” 发送到邮箱 yuanxk@jlu.edu.cn，邮件名称为“姓名-微分方程数值解计算实习第12周作业”*