微分方程数值解计算实习课后作业 6

陈文宇

2023 年 12 月 30 日

目录

1 问题重述

- 画出数值解的图像
- 获取两类误差：

$$errL = (\int_\Omega (\mu_h(x) - \mu(x))^2 dxdy)^{1/2}$$

$$errH = (\int_\Omega (\mu_h(x) - \mu(x))^2 + (\partial_x \mu_h(x) - \partial_x \mu(x))^2 + (\partial_y \mu_h(x) - \partial_y \mu(x))^2 dxdy)^{1/2}$$

- 计算其关于网格长度的数值收敛阶
- 用 $loglog()$ 函数展示 $errL2, errH1, condA$ 的图像，

2 实验思路

二维线性 Lagrange 型有限元方法求解练习:

$$\begin{cases} -\mu'' + \dfrac{\pi^2}{4}\mu = \dfrac{\pi^2}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}x \quad 0 < x < 1 \\ \mu(0,y) = 0, \quad \mu(x,1) = 0 \\ \partial_x \mu(1,y) = y - \pi\cos(\pi x)\sin(\pi y) \quad (1,y) \in \partial\Omega \\ \partial_y \mu(x,1) = x - \pi\sin(\pi x)\cos(\pi y) \quad (x,1) \in \partial\Omega \end{cases}$$

下面我们构建单元刚度矩阵：

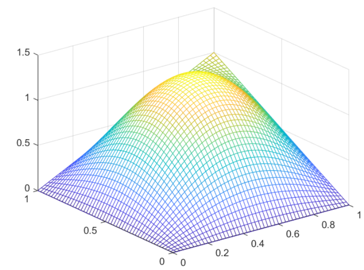
在矩形元 $I(i,j)$ 上, 有 $\mu_h(x,y) = u_{i-1,j-1} * N_0(\xi)N_0(\eta) + u_{i-1,j} * N_0(\xi)N_1(\eta) + u_{i,j-1} * N_1(\xi)N_0(\eta) + u_{ij} * N_1(\xi)N_1(\eta)$, 内积 $(-\delta\mu_h, \mu_h)$ 是关于 $(u_{i-1,j-1}, u_{i-1,j}, u_{i,j-1}, u_{i,j})$ 二次型，单元刚度矩阵是其对称矩阵。

确定单元刚度矩阵脚标和刚度矩阵脚标的对应关系后, 形成有限元方程后, 对其本质边界条件做处理 (此处对于左边界和下边界的处理是简单的, 对于右边界和上边界的处理可以在右端向量中完成), 刚度矩阵是大型稀疏矩阵, 可以通过 sparse 函数将其转化为稀疏矩阵的存储形式, 求解线性方程组 $Ax = b$ 即可获得基函数系数。对于条件数可以使用 matlab 命令 $cond(A, 2)$, 定义 errL 和 errH 后, 给出其在 I_{ij} 区间的函数值, 然后可以使用 Simpson 求积公式来求积分, 进而使用 $loglog$ 函数绘制图像即可。

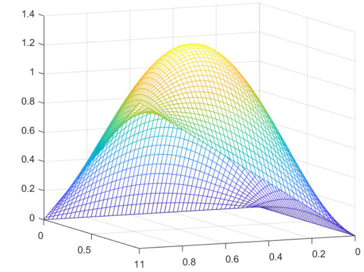
matlab 编程的具体操作详见 FEM_2D1P_L.m, 在代码结构上采用了实习课老师分享的代码。对于刚度矩阵，代码中仍旧先生成单元刚度矩阵，再扩建为整个刚度矩阵。

3 实验结果

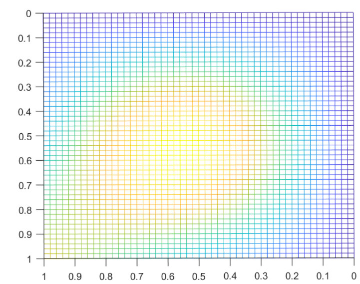
下图是数值解和精确解的图像：



(a) 正视图



(b) 后视图



(c) 俯视图

图 1: 数值解和精确解的图像

下图是 $(logh, log(errL))$ 的图像，同 $y = h^2$ 对比知，$errL$ 收敛阶为 2.

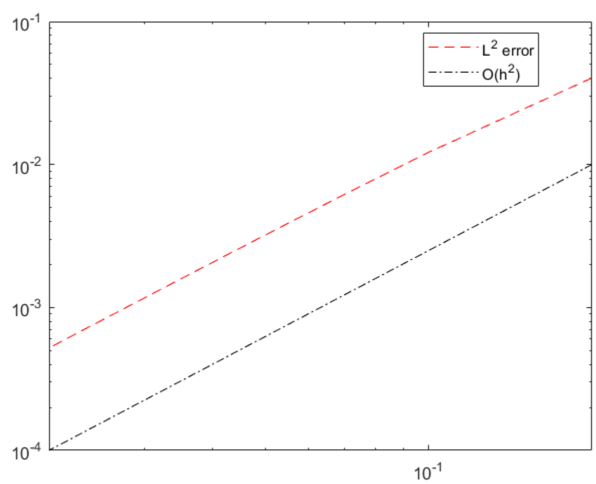


图 2: $L^2([0, 1])$ 误差的收敛阶

下图是 $(logh, log(errH))$ 的图像，根据线性基本拟合，知 $errH$ 收敛阶为 2.

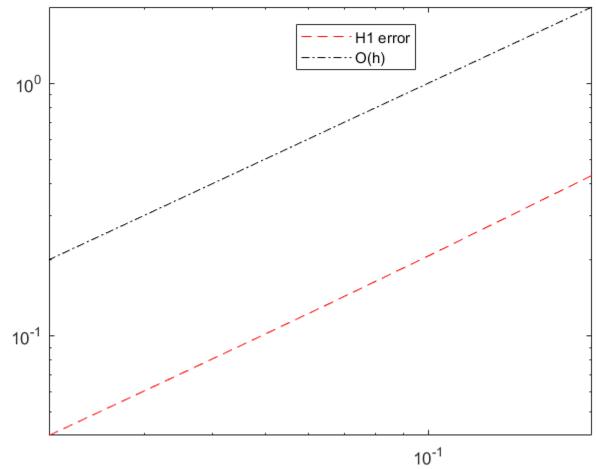


图 3: $H^1([0,1])$ 误差的收敛阶

用 $loglog()$ 函数展示矩阵 A 的条件数的变化。

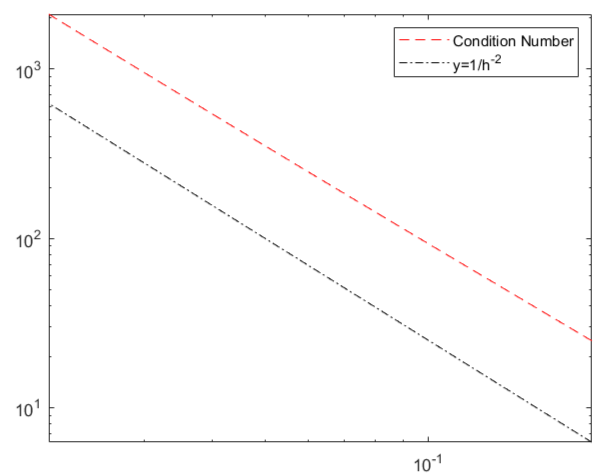


图 4: $CondA$

4 实验结果分析

对于本题,L2 误差的收敛阶为 2,H1 误差的和收敛阶为 1, 矩阵 A 条件数 $CondA$ 与同 h 成指数关系，且与 h^{-2} 同阶。