Lecture 3: Ritz-Galerkin 方法

2023 年 3 月 16 日

1 本次课程内容

- 示例程序
- 作业问题总结
- 边界条件的处理
- 配置法
- 小结

2 示例程序

测试不同基函数对求解的影响：例1.4.1

$$\begin{cases} u'' + u = -x, 0 < x < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

取基函数为

$$\varphi_i(x) = \sin(\mathrm{i}\,\pi x) \quad 以及 \quad \varphi_i = (1-x)x^i, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

1 对比两组基函数对应的系数矩阵的条件数随着 N 增加产生的变化 (Cond(A, 2))。

2 画图对比两组基函数对应的数值解和精确解

$$u_*(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x$$

之间的$L^2([0,1])$误差:

$$err = \left[\int_0^1 (u_*(x) - u_n(x))^2 \,\mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

随着 N 增加产生的变化。

Remark 2.1. L^2 误差可在充分小的步长下利用复化$Simpson$公式求解。

Remark 2.2. 系数矩阵和右端项为

$$A(i,j) = \int_0^1 \left[\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) - \varphi_i(x)\varphi_j(x)\right] \mathrm{d}x, \qquad b(i) = -\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}x.$$

当取第一种基底时：

$$A(i,j) = \frac{1}{2}\left[(i\pi)^2 - 1\right]\delta(i,j), \qquad b(i) = -\frac{1}{i\pi}\cos i\pi$$

当取第二种基底时：

$$\begin{cases} A(i,j) = \dfrac{ij}{i+j-1} - \dfrac{2ij+i+j}{i+j} + \dfrac{ij+i+j}{i+j+1} + \dfrac{2}{i+j+2} - \dfrac{1}{i+j+3} \\ b(i) = \dfrac{1}{i+2} - \dfrac{1}{i+3}. \end{cases}$$

Remark 2.3. 步骤：生成系数矩阵 A 和向量 b，生成近似解 u_N，计算矩阵条件数，计算与真解误差。

3 作业问题总结

- 鼓励同学间讨论交流，但是千万不要抄袭!!!!!!!!
- 函数文件中定义多个函数
- $integral$ 函数可以给出规定误差的积分，但是不确定收敛阶
- 利用复化Simpson公式生成作业中系数矩阵，误差较大的原因
- 程序纠错建议：运行小规模问题，比较矩阵系数

4 边界条件的处理

例如：

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = h(x), \qquad 0 < x < 1 \\ u(0) = g, \quad u'(1) + \alpha u(1) = f \end{cases} \tag{4.1}$$

- 方式一：选取任意 $u_0(x) \in C^2[0,1]$ 且 $u_0(0) = g$，考虑

$$\tilde{u}(x) = u(x) - u_0(x)$$

将其带入(4.1) 可得

$$\begin{cases} \tilde{u}''(x) + \tilde{u}(x) = h(x) - \left(u_0''(x) + u_0(x)\right), \qquad 0 < x < 1 \\ \tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{u}'(1) + \alpha\tilde{u}(1) = f - \left(u_0'(1) + \alpha u_0(1)\right) \end{cases} \tag{4.2}$$

记

$$\tilde{h}(x) = h(x) - \left(u_0''(x) + u_0(x)\right), \qquad \tilde{f} = f - \left(u_0'(1) + \alpha u_0(1)\right)$$

对(4.2)两端乘以检验函数v 使得 $v(0)=0$，由分部积分可得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tilde{h}(x)v(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left[\tilde{u}''(x)v(x) + \tilde{u}(x)v(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[-\tilde{u}'(x)v'(x) + \tilde{u}(x)v(x)\right]\mathrm{d}x + \tilde{u}'(1)v(1) - \tilde{u}'(0)v(0) \\
&= \int_0^1 \left[-\tilde{u}'(x)v'(x) + \tilde{u}(x)v(x)\right]\mathrm{d}x + (\tilde{f} - \alpha\tilde{u}(1))v(1)
\end{aligned}$$

则相应的变分问题为求$\tilde{u} \in H^1([0,1])$ 使得 $u(0)=0$ 满足

$$a(\tilde{u}, v) = \int_0^1 \tilde{h}(x)v(x)\mathrm{d}x - \tilde{f}v(1) \tag{4.3}$$

其中双线性形式

$$a(\tilde{u}, v) = \int_0^1 \left[-\tilde{u}'(x)v'(x) + \tilde{u}(x)v(x)\right]\mathrm{d}x - \alpha\tilde{u}(1)v(1).$$

取 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ 为 U_n 的一组基底且满足 $\varphi_i(0)=0$，则有

$$\sum_{i=0}^N a(\varphi_i, \varphi_j)c_i = \int_0^1 \tilde{h}(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x - \tilde{f}\varphi_j(1), \qquad j = 1, 2, \cdots, N. \tag{4.4}$$

则原问题(4.1)的Ritz-Galerkin方法解为

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i\varphi_i(x).$$

- 方式二：对 (4.4)中右端项$\tilde{h}$ 做分部积分

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^N a(\varphi_i, \varphi_j)c_i &= \int_0^1 h(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 u_0'(x)\varphi_k'(x) - u_0(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x - u_0'(1)\varphi_j(1) \\
&\quad -f\varphi_j(1) + \left(u_0'(1) + \alpha u_0(1)\right)\varphi_j(1) \\
&= \int_0^1 h(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x - f\varphi_j(1) - a(u_0, \varphi_j)
\end{aligned}$$

则原问题(4.1)的Ritz-Galerkin方法解为

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{i=1}^N c_i\varphi_i(x).$$

Remark 4.1. 如果问题定义在二维空间或者三维空间，能否找到 u_0 使其在边界上等于给定函数？

5 配置法（拟谱方法）

- 选定子空间 U_N，基底 $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$，以及配置节点 $\{x_i\}$，带入微分方程 $Lu_N = f$ 使其在配置点处相等 $Lu_N(x_i) = f(x_i)$。

- 以P36页为例，取基函数$\varphi_k = e^{\mathrm{i}\,\kappa x} - 1, k = \pm 1, \pm 2, ..., \pm N$，求

$$u_N = \sum_{k=-N,k\neq 0}^{N} c_k\varphi_k = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{\mathrm{i}\,kx}, \quad c_0 = -\sum_{k=-N,k\neq 0}^{N} c_k.$$

则

$$\frac{du_N}{dx} = \sum_{k=-N}^{N} c_k\,(\mathrm{i}\,k)\,e^{\mathrm{i}\,kx}, \qquad \frac{d^2u_N}{dx^2} = \sum_{k=-N}^{N} c_k\left(-k^2\right)e^{\mathrm{i}\,kx}.$$

- 取配置节点为 $x_m = \frac{m\pi}{N}, m = 1, ..., 2N$，使得 u_N 在配置点处满足方程，可得

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k k^2 e^{\mathrm{i}\,kx_m} + \lambda\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{\mathrm{i}\,kx_m} = f(x_m), \qquad m = 1, ..., 2N. \tag{5.1}$$

  - 该系数矩阵是否稠密？
  - 该系数矩阵是否可逆？

- 两端乘以 $e^{-ijx_m}, j = -N, ..., N$，并关于 $m = 1, ..., 2N$ 求和，左端为

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{2N} f(x_m)e^{-\mathrm{i}\,jx_m} &= \sum_{m=1}^{2N}\sum_{k=-N}^{N} c_k k^2 e^{\mathrm{i}\,kx_m}e^{-\mathrm{i}\,jx_m} + \lambda\sum_{m=1}^{2N}\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{\mathrm{i}\,kx_m}e^{-\mathrm{i}\,jx_m} \\
&= \sum_{k=-N}^{N} c_k k^2 \sum_{m=1}^{2N} e^{\mathrm{i}\,(k-j)x_m} + \lambda\sum_{k=-N}^{N} c_k \sum_{m=1}^{2N} e^{\mathrm{i}\,(k-j)x_m} \\
&= \begin{cases} 2N\left(\lambda + j^2\right)c_j, & j \neq \pm N \\ 2N\left(\lambda + N^2\right)(c_N + c_{-N}) & j = N, -N \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

联立

$$c_0 = -\sum_{k=-N,k\neq 0}^{N} c_k,$$

进行求解。

Remark 5.1. *方程 (5.2) 是否可解？若不可解的原因在哪里？应该如何修改？*

Remark 5.2. 等式 (5.2) 可视为 $-(u'', \varphi_j) + \lambda(u, \varphi_j)$ 的积分离散，也可以看做 $(u', \varphi_j') + \lambda(u, \varphi_j)$ 的积分离散。

6 小结

- Ritz-Galerkin 方法本质上是通过变分方法，利用有限维空间逼近无穷维解空间
- 子空间的选取不唯一，不同子空间选取会极大影响问题求解
- 当选取的基函数定义于整个空间时，通常情况下其系数矩阵是完全稠密的，且当问题定义于二维或以上时，边界条件不易处理。