微分方程数值解计算实习课后作业 3

陈文宇

2023 年 3 月 29 日

目录

1 问题重述

- 画出数值解的图像
- 获取两类误差：

$$errL = (\int_0^1 (\mu_*(x) - \mu_n(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$errH = (\int_0^1 (\mu_*(x) - \mu_n(x))^2 + (\mu_*'(x) - \mu_n'(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

  计算其关于网格长度的数值收敛阶

- 用 $loglog()$ 函数展示 $errL\ errH, condA$ 的图像，

2 实验思路

有限元方法求解：练习 2.1.1

$$\begin{cases} -\mu'' + \frac{\pi^2}{4}\mu = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}x & 0 < x < 1 \\ \mu(0) = 0, \quad \mu'(1) = 0 \end{cases}$$

对每个结点构造山形函数：对于 i=1 2 ... n-1

$$\phi_i(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x + x_i}{h_i} & x_{i-1} < x < x_i \\ 1 - \dfrac{x - x_i}{h_{i+1}} & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \phi_n(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x + x_n}{h_n} & x_{n-1} < x < x_n \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

考虑试探函数空间 $U_n = \{\phi_i\}_{i=1}^n$, 对任意 $u_h \in U_h$ 可以表示为：

$$u_n = \sum_{i=1}^n u_i\phi_i(x), u_i = u_h(x_i)$$

形成有限元方程后，求解线性方程组 $Ax = b$ 即可获得基函数系数。对于条件数可以使用 matlab 命令 $cond(A, 2)$, 定义 errL 和 errH 后，给出其离散点集，然后可以使用复化 Simpson 方法来求积分，进而使用 $plot, loglog$ 函数绘制图像即可。

matlab 编程的具体操作如下：

Step 1: 初始化矩阵和向量 $A = zeros(n,n), b = zeros(n,1)$

Step 2: 网格剖分，记录网格信息： $\boldsymbol{p}(i) = x_i, \quad I(:,i) = [i_1, i_2]$

Step 3: 构造基函数 $\{\varphi_i\}$，一维情形下为山形函数

Step 4: 形成有限元方程：

确定数值积分公式 $\int_0^1 f(\xi)\mathrm{d}\xi \approx \sum\limits_{k=1}^{m} w_k f(\xi_k)$

For $i = 1:1:n$

$x_{i_1} = \boldsymbol{p}(I(1,i)), \quad x_{i_2} = \boldsymbol{p}(I(2,i)), \quad h_i = x_{i_2} - x_{i_1}$

构造仿射变换: $N_0(\xi) = 1-\xi, \quad N_1(\xi) = \xi, \quad \xi = \frac{x - x_{i_1}}{h_i}$

/* 以 $a(u,v) = \int_a^b [pu'v' + quv]\,\mathrm{d}x$ 为例展示 */

$$a_1 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[-h_i^{-1} p(x_{i_1} + h_i\xi_k) + h_i q(x_{i_1} + h_i\xi_k)(1-\xi_k)\xi_k\right]$$

$$a_2 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[-h_i^{-1} p(x_{i_1} + h_i\xi_k) + h_i q(x_{i_1} + h_i\xi_k)(1-\xi_k)\xi_k\right]$$

$$a_3 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[h_i^{-1} p(x_{i_1} + h_i\xi_k) + h_i q(x_{i_1} + h_i\xi_k)\xi_k^2\right]$$

$$a_4 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[h_i^{-1} p(x_{i_1} + h_i\xi_k) + h_i q(x_{i_1} + h_i\xi_k)(1-\xi_k)^2\right]$$

$$b_1 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[h_i f(x_{i_1} + h_i\xi_k)(1-\xi_k)\right], \qquad b_2 \approx \sum_{k=1}^{m} w_k \left[h_i f(x_{i_1} + h_i\xi_k)\xi_k\right]$$

组装系数矩阵

$$\begin{aligned} A_{i_1i_2} &= A_{i_1i_2} + a_1, & A_{i_2i_1} &= A_{i_2i_1} + a_2, & b_{i_1} &= b_{i_1} + b_1 \\ A_{i_2i_2} &= A_{i_2i_2} + a_3, & A_{i_1i_1} &= A_{i_1i_1} + a_4, & b_{i_2} &= b_{i_2} + b_2 \end{aligned}$$

End

Step 5: 求解系数矩阵 $A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{u} = A\backslash\boldsymbol{b}$

Step 6: 求得有限元解 $u_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} \boldsymbol{u}(i)\varphi_i(x)$

3 实验结果

下图是数值解和精确解的图像：

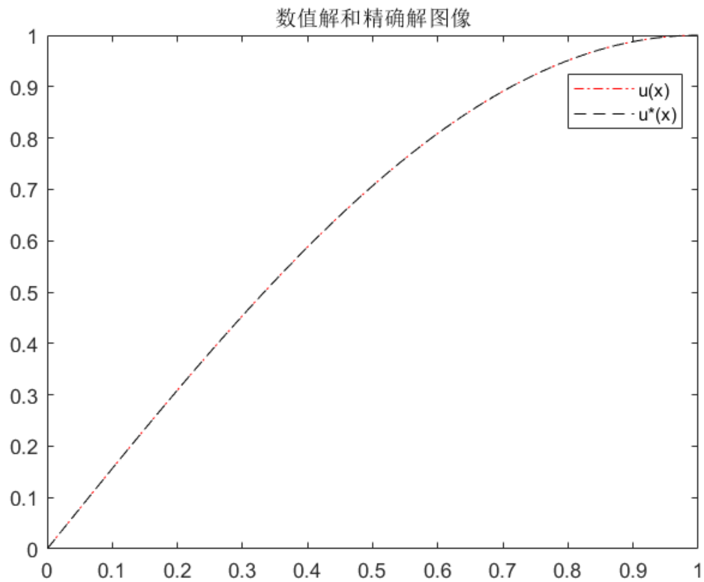

图 1: 数值解和精确解的图像

下图是 $(logh, log(errL))$ 的图像，根据线性基本拟合，知 $errL$ 收敛阶为 2.

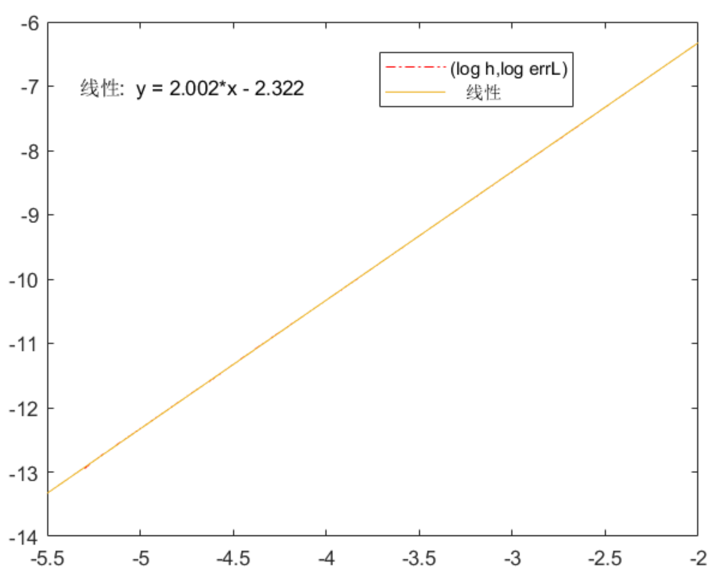

图 2: $L^2([0,1])$ 误差的收敛阶

下图是 $(logh, log(errH))$ 的图像，根据线性基本拟合，知 $errH$ 收敛阶为 1.

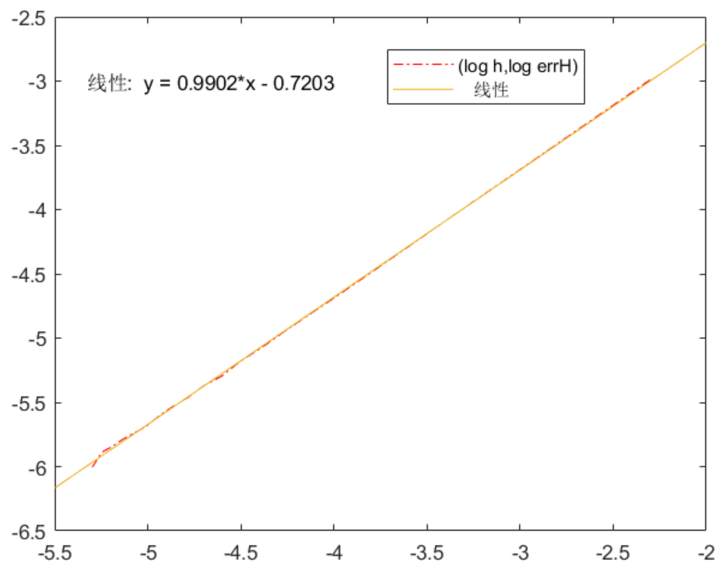

图 3: $H^1([0,1])$ 误差的收敛阶

下面用 $loglog()$ 函数展示 $(h, errL), (h, errH)$。

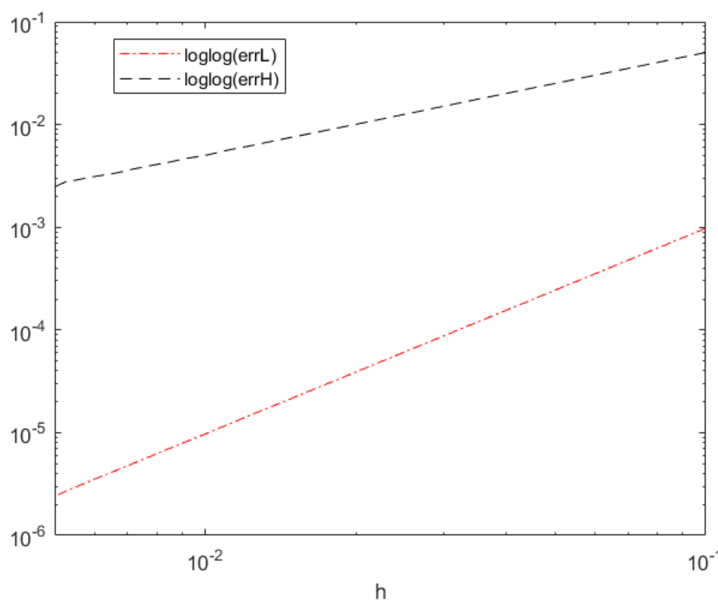

图 4: $loglog_err$ 图像

用 $loglog()$ 函数展示矩阵 A 的条件数的变化。

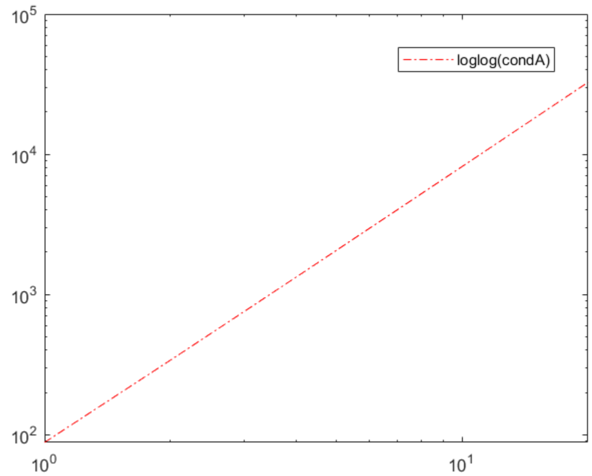

图 5: $loglog_condA$

4 实验结果分析

对于本题，$errL$ 误差的收敛阶均为 2，$errH$ 误差的收敛阶均为 1, 两类误差的收敛阶不同，可能是基函数为山形函数，其导数是阶梯函数，同原函数的导数误差较大造成的，不过可以猜测得到的是，随着区间剖分越来越细密，二者导数造成的误差会收敛于 0。

根据矩阵 A 的定义，矩阵 A 是严格对角占优的，故而矩阵 A 是非奇异的矩阵。但是随着基函数的增加，矩阵 A 的对角占优的性质越来越弱，它的影响需要更多的精力来分析了。对于 N=10:10:200，矩阵 A 的条件数增长，但并不趋向于极大，，求解方程 $Ax = b$ 是稳定的，由下列图象知，condA 随 h 指数级增长。

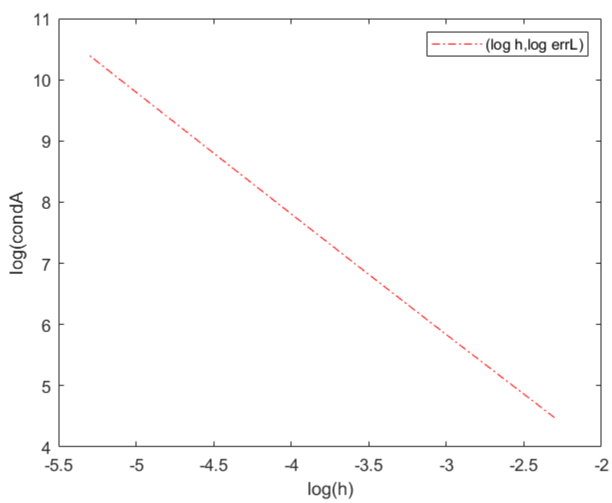

图 6: $logh_logcondA$