

微分方程数值解计算实习课后作业 8

陈文字

2023 年 5 月 4 日

目录

1 问题重述	2
2 实验思路	2
3 实验结果	3
4 实验结果分析	4

1 问题重述

- 画出数值解的图像
- 获取两类误差：

$$errL = (\int_{\Omega} (\mu_h(x) - \mu(x))^2 dx dy)^{\frac{1}{2}}$$

$$errH = (\int_{\Omega} (\mu_h(x) - \mu(x))^2 + (\partial_x \mu_h(x) - \partial_x \mu(x))^2 + (\partial_y \mu_h(x) - \partial_y \mu(x))^2 dx dy)^{\frac{1}{2}}$$

计算其关于网格长度的数值收敛阶

- 用 `loglog()` 函数展示 `errL2 errH1, condA` 的图像,

2 实验思路

二维三角 Lagrange 型有限元方法求解练习：

$$\begin{cases} -\mu'' + \frac{\pi^2}{4}\mu = \frac{\pi^2}{2} \sin \frac{\pi}{2}x & 0 < x < 1 \\ \mu(0, y) = 0, \quad \mu(x, 1) = 0 \\ \partial_x \mu(1, y) = y - \pi \cos(\pi x) \sin(\pi y) & (1, y) \in \partial\Omega \\ \partial_y \mu(x, 1) = x - \pi \sin(\pi x) \cos(\pi y) & (x, 1) \in \partial\Omega \end{cases}$$

下面我们构建单元刚度矩阵：

在矩形元 $I(i, j)$ 上, 有 $\mu_h(x, y) = u_{i-1, j-1} * N_0(\xi)N_0(\eta) + u_{i-1, j} * N_0(\xi)N_1(\eta) + u_{i, j-1} * N_1(\xi)N_0(\eta) + u_{i, j} * N_1(\xi)N_1(\eta)$, 内积 $(-\delta\mu_h, \mu_h)$ 是关于 $(u_{i-1, j-1}, u_{i-1, j}, u_{i, j-1}, u_{i, j})$ 二次型, 单元刚度矩阵是其对称矩阵。

确定单元刚度矩阵脚标和刚度矩阵脚标的对应关系后, 形成有限元方程后, 对其本质边界条件做处理 (此处对于左边界和下边界的处理是简单的, 对于右边界和上边界的处理可以在右端向量中完成), 刚度矩阵是大型稀疏矩阵, 可以通过 `sparse` 函数将其转化为稀疏矩阵的存储形式, 求解线性方程组 $Ax = b$ 即可获得基函数系数。对于条件数可以使用 `matlab` 命令 `condest(A)`, 定义 `errL` 和 `errH` 后, 给出其在相应区间的函数值, 然后可以使用三角元的 Gauss 四点求积公式来求积分, 进而使用 `loglog` 函数绘制图像即可。

`matlab` 编程的具体操作详见 `FEM_2D1PDelta_L.m`, 在代码结构上采用了实习课老师分享的代码。对于刚度矩阵, 代码中仍旧先生成单元刚度矩阵, 再扩建为整个刚度矩阵。

3 实验结果

下图是数值解和精确解的图像：

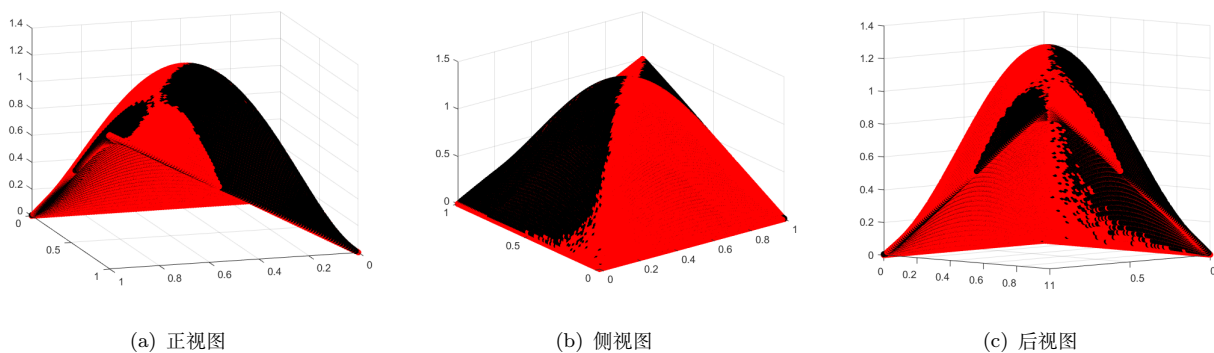


图 1: 数值解和精确解的图像

下图是 $(\log h, \log(\text{err}L))$ 的图像，同 $y = h^2$ 对比知， $\text{err}L$ 收敛阶为 2.

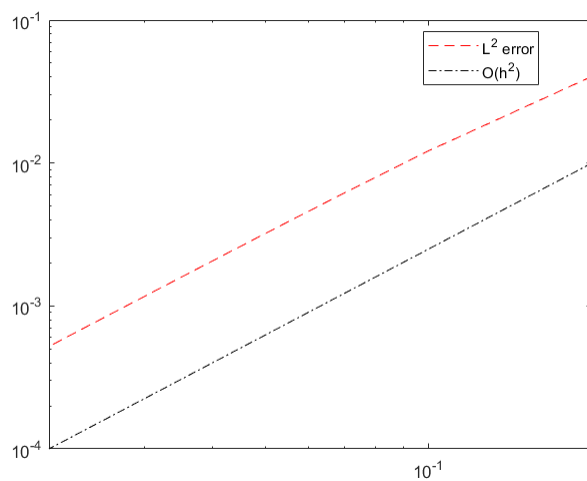


图 2: $L^2([0, 1])$ 误差的收敛阶

下图是 $(\log h, \log(\text{err}_H))$ 的图像，根据线性基本拟合，知 err_H 收敛阶为 1.

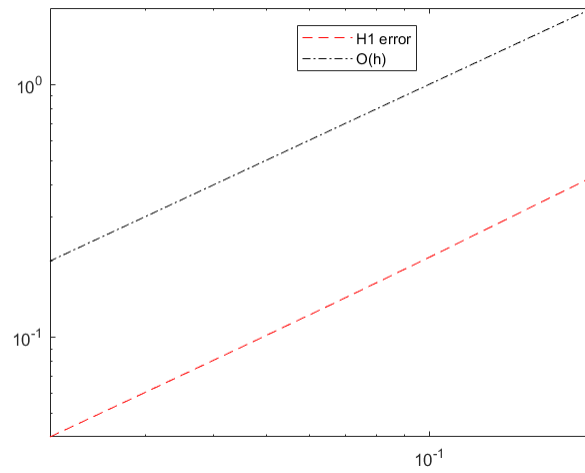


图 3: $H^1([0, 1])$ 误差的收敛阶

用 $\log\log()$ 函数展示矩阵 A 的条件数的变化。

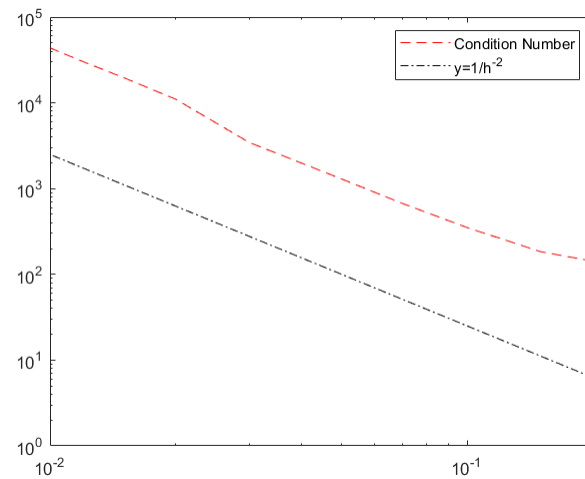


图 4: $\text{Cond}A$

4 实验结果分析

对于本题，L2 误差的收敛阶为 2, H1 误差的和收敛阶为 1，矩阵 A 条件数 $\text{Cond}A$ 与同 h 成指数关系，且与 h^{-2} 同阶。