微分方程数值解计算实习课后作业 5

陈文宇

2023 年 4 月 5 日

目录

1 问题重述

- 画出数值解的图像
- 获取两类误差：

$$errL = (\int_0^1 (\mu_*(x) - \mu_n(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

$$errH = (\int_0^1 (\mu_*(x) - \mu_n(x))^2 + (\mu_*'(x) - \mu_n'(x))^2 dx)^{\frac{1}{2}}$$

  计算其关于网格长度的数值收敛阶

- 用 $loglog()$ 函数展示 $errL$ $errH, condA$ 的图像，

2 实验思路

一维二次 Lagrange 型有限元方法求解：练习 2.1.1

$$\begin{cases} -\mu'' + \frac{\pi^2}{4}\mu = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}x & 0 < x < 1 \\ \mu(0) = 0, \quad \mu'(1) = 0 \end{cases}$$

对每个整结点和半结点构造基函数如下：对于 i=1 2 ... n-1

$$\phi_i(x) = \begin{cases} (2\frac{|x - x_i|}{h_i} - 1)((\frac{|x - x_i|}{h_i} - 1) & x_{i-1} < x < x_i \\ (2\frac{|x - x_i|}{h_{i+1}} - 1)((\frac{|x - x_i|}{h_{i+1}} - 1) & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 4\frac{|x - x_i|}{h_{i+1}}(1 - \frac{|x - x_i|}{h_{i+1}}) & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

考虑试探函数空间 $U_n = \{\phi_i\}_{i=1}^n$, 对任意 $u_h \in U_h$ 可以表示为：

$$u_n = \sum_{i=1}^n u_i\phi_i(x) + u_{i+\frac{1}{2}}\phi_{i+\frac{1}{2}(x)}$$

形成有限元方程后，对其本质边界条件做处理，以求解线性方程组 $Ax = b$ 即可获得基函数系数。对于条件数可以使用 matlab 命令 $cond(A, 2)$, 定义 errL 和 errH 后，给出其在 I_i 区间 Guass 结点的函数值，然后可以使用三点 Guass 求积公式来求积分，进而使用 $plot, loglog$ 函数绘制图像即可。

matlab 编程的具体操作详见 FEM_1D2P_L.m, 在代码结构上采用了实习课老师分享的代码。对于刚度矩阵，代码中仍旧先生成单元刚度矩阵，再扩建为整个刚度矩阵。

3 实验结果

下图是数值解和精确解的图像:

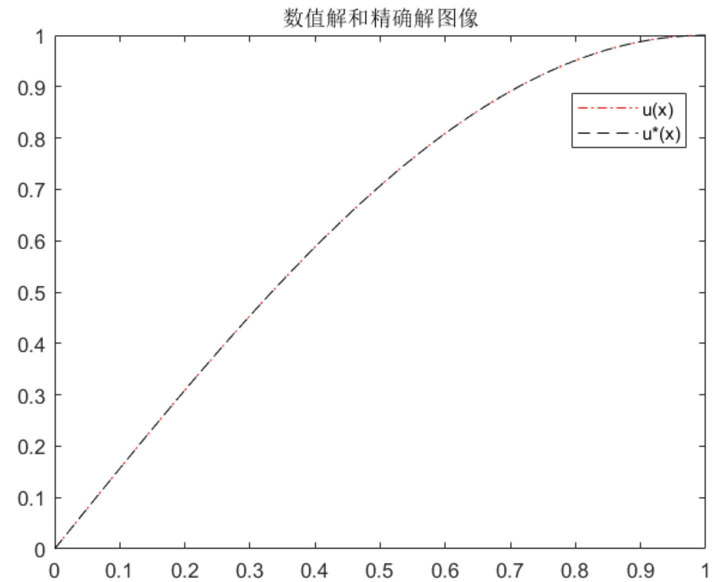

图 1: 数值解和精确解的图像

下图是 $(logh, log(errL))$ 的图像，同 $y = h^2$ 对比知，$errL$ 收敛阶为 2.

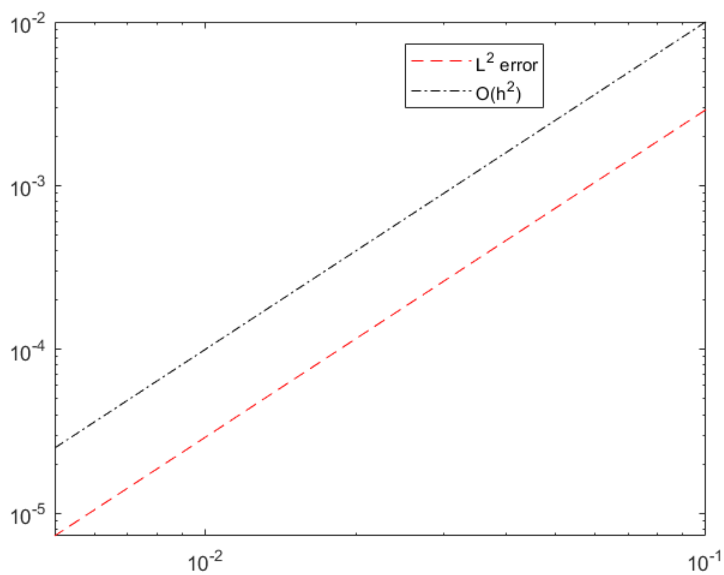

图 2: $L^2([0,1])$ 误差的收敛阶

下图是 $(logh, log(errH))$ 的图像，根据线性基本拟合，知 $errH$ 收敛阶为 2.

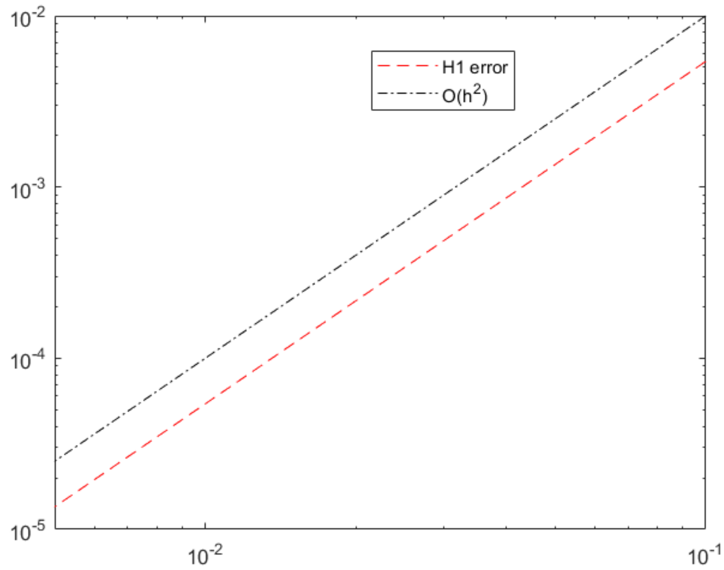

图 3: $H^1([0,1])$ 误差的收敛阶

用 $loglog()$ 函数展示矩阵 A 的条件数的变化。

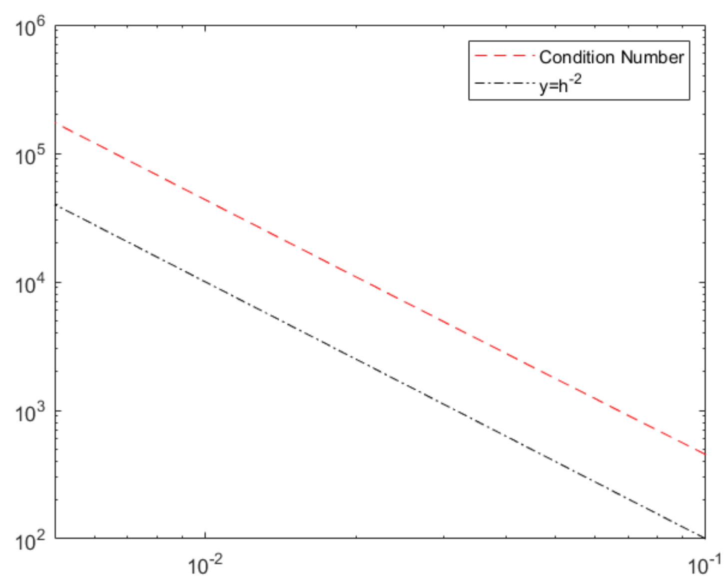

图 4: $CondA$

4 实验结果分析

对于本题，两类误差的收敛阶均为 2, 矩阵 A 条件数有以下性质 $CondA$ 与同 h 成指数关系，且与 h^{-2} 同阶。同一次有限元法做对比，errL 的收敛阶从 1 变为 2，收敛速度加快。

（二次有限元法已完成，三次有限元法程序编写存在问题，目前无法做出描述）