Lecture 9：两点边值问题的差分格式

2023 年 4 月 26 日

1 本次课程内容

- 示例程序
- 两点边值问题的差分格式和边界条件的处理
- 练习

2 两点边值问题的差分格式

2.1 差分法的基本框架

(1) 对求解区域做网格剖分

(2) 构造差分格式：直接差分化和有限体积法

(3) 形成差分方程组

(4) 差分方程组的求解

(5) 数值解的存在性、唯一性、稳定性及收敛性

2.2 网格剖分

将区间 $I=[a,b]$ 分成 N 个小区间，相应节点为

$$a=x_0<x_1<\cdots x_i<\cdots<x_N=b.$$

记 $h_i=x_i-x_{i-1}$ 为剖分步长，称 $h=\max\limits_i h_i$ 为网格最大步长。取相邻节点 x_{i-1},x_i 的中点 $x_{i-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(x_{i-1}+x_i\right),i=1,2,\cdots,N$ 为半整数点。这些点构成网格剖分的对偶剖分。

2.3 内点的差分格式

对两点边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\dfrac{d}{dx}\left(p\dfrac{du}{dx}\right) + r\dfrac{du}{dx} + qu = f, & a < x < b \\ u(a) = \alpha, \quad u'(b) = \beta_0 u(b) + \beta_1 \end{cases} \tag{2.1}$$

2.3.1 直接差分法

利用差商代替微商

$$\begin{aligned} \left[\frac{du}{dx}\right]_i &\approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h_i + h_{i+1}} \\ \left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)\right]_i &\approx \left(p_{i+\frac{1}{2}}\left[\frac{du}{dx}\right]_{i+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}}\left[\frac{du}{dx}\right]_{i-\frac{1}{2}}\right) / \frac{h_i + h_{i+1}}{2} \\ &\approx \frac{2}{h_i + h_{i+1}}\left(p_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}\right) \end{aligned}$$

带入(2.1) 中可得内点的差分公式

$$\begin{aligned} L_h u_i \equiv -\frac{2}{h_i + h_{i+1}}&\left[p_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}\right] \\ &+ \frac{r_i}{h_i + h_{i+1}}(u_{i+1} - u_{i-1}) + q_i u_i = f_i \end{aligned} \tag{2.2}$$

截断误差

$$R_i(u) = -(h_{i+1} - h_i)\left(\frac{1}{4}\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(p\frac{du}{dx}\right)\right]_i + \frac{1}{12}\left[p\frac{d^3u}{dx^3}\right]_i - \frac{1}{2}\left[r\frac{d^2u}{dx^2}\right]_i\right) + O(h^2)$$

在(2.2) 两端乘以 $\frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ 可得

$$-\left[p_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - p_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}\right] + \frac{r_i}{2}(u_{i+1} - u_{i-1}) + \frac{h_i + h_{i+1}}{2}q_i u_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}f_i \tag{2.3}$$

Remark 2.1. *差分格式(2.3)是否满足对称性?*

2.3.2 有限体积法

考虑积分守恒形式

$$\begin{aligned} &-\int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} \frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right)\mathrm{d}x + \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} qu\mathrm{d}x = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f\mathrm{d}x \\ &\Rightarrow W(x^{(1)}) - W(x^{(2)}) + \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} qu\mathrm{d}x = \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f\mathrm{d}x \end{aligned}$$

取 $[x^{(1)}, x^{(2)}]$ 为对偶单元 $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$。令 $\frac{du}{dx} = \frac{W(x)}{p(x)}$，再沿 $[x_{i-1}, x_i]$ 积分可得

$$u_i - u_{i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W(x)}{p(x)} \mathrm{d}x$$

利用中矩形公式

$$W_{i-\frac{1}{2}} \approx a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i}, \qquad a_i = \left[\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)} \right]^{-1}$$

对下式采用不同的求积公式

$$\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{p(x)}, \qquad \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} qu\mathrm{d}x, \qquad \int_{x^{(1)}}^{x^{(2)}} f\mathrm{d}x$$

即可得到内点的差分格式

$$-\left[a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h_{i+1}} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h_i} \right] + \frac{1}{2} \left(h_i + h_{i+1} \right) d_i u_i = \frac{1}{2} \left(h_i + h_{i+1} \right) \varphi_i \tag{2.4}$$

当数值积分公式选用中矩形公式：

$$a_i = p(x_{i-\frac{1}{2}}), \quad d_i = q(x_i), \quad \varphi_i = f(x_i)$$

当数值积分公式选用梯形公式：

$$a_i = \frac{2p_{i-1}p_i}{p_{i-1} + p_i}, \quad d_i = \frac{1}{2} \left(q_{i-\frac{1}{2}} + q_{i+\frac{1}{2}} \right), \quad \varphi_i = \frac{1}{2} \left(f_{i-\frac{1}{2}} + f_{i+\frac{1}{2}} \right)$$

2.3.3 待定系数法和变分-差分法

2.4 边界条件的处理

对于第三类边界条件

$$u'(b) = \beta_0 u(b) + \beta_1$$

可采用数值微商或有限体积法处理

- 数值微商的处理（向后差分）：

$$u'(b) \approx \frac{u_N - u_{N-1}}{h_N}$$

进而边界条件可近似为

$$u'(b) = \beta_0 u(b) + \beta_1 \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{h_N} - \beta_0 \right) u_N - \frac{1}{h_N} u_{N-1} \approx \beta_1$$

- 数值微商的处理（中心差分）：设虚拟点 x_{N+1} 使得 $x_{N+1}-x_N=x_N-x_{N_1}$, 在 x_N 点建立差分格式，如(2.2)

$$-\left[p_{N+\frac{1}{2}}\frac{u_{N+1}-u_N}{h_{N+1}}-p_{N-\frac{1}{2}}\frac{u_N-u_{N-1}}{h_N}\right]+\frac{r_N}{2}\left(u_{N+1}-u_{N-1}\right)+\frac{h_N+h_{N+1}}{2}q_Nu_N=\frac{h_N+h_{N+1}}{2}f_N$$

对边界条件利用中心差分离散

$$\beta_0u(b)+\beta_1=u'(b)\approx\frac{u_{N+1}-u_{N-1}}{2h_N}$$

联立消去虚拟点 u_{N+1}可得

$$\left(P_{N+1/2}+P_{N-1/2}\right)\frac{u_N-u_{N-1}}{2h_N}+\left(\frac{r_N\beta_0h_N}{2}-\beta_0P_{N+1/2}\right)u_N+\frac{q_Nh_N}{2}u_N=\frac{h_Nf_N}{2}-\frac{r_Nh_N\beta_1}{2}+\beta_1P_{N+1/2}.$$

当 $r=0$，为保证格式的对称性可取 $P_{N+1/2}=P_{N-1/2}$.

- 有限体积法的处理：将边界条件改写为

$$-p(b)u'(b)=\beta_0^{(1)}u(b)+\beta_1^{(1)};\qquad \beta_i^{(1)}=-p(b)\beta_i,\ i=0,1 \tag{2.5}$$

在 $[x^{(1)},x^{(2)}]=[x_{N-\frac{1}{2}},b]$ 上对微分方程做积分可得

$$W(x_{N-\frac{1}{2}})-W(b)+\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{b}qu\mathrm{d}x=\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{b}f\mathrm{d}x$$

将边界条件 (2.5) 带入可得

$$W(b)=p(x)\frac{du}{dx}\Big|_{x=b}=-\left(\beta_0^{(1)}u(b)+\beta_1^{(1)}\right)$$

对剩余部分在$[x_{N-1},b]$ 积分可得

$$W(N-\frac{1}{2})\approx a_N\frac{u_N-u_{N-1}}{h_N}$$

利用不同的数值积分公式可得边界条件

$$a_N\frac{u_N-u_{N-1}}{h_N}+\beta_0^{(1)}u_N+\frac{h_N}{2}d_Nu_N=\frac{h_N}{2}\varphi_N-\beta_n^{(1)}$$

当数值积分公式采用中矩形公式：

$$\begin{cases}a_N=p(x_{N-\frac{1}{2}})\\ d_N=\dfrac{2}{h_N}\displaystyle\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{b}q\mathrm{d}x\approx q(x_{N-\frac{1}{4}})\\ \varphi_N=\dfrac{2}{h_N}\displaystyle\int_{x_{N-\frac{1}{2}}}^{b}f\mathrm{d}x\approx f(x_{N-\frac{1}{4}})\end{cases}$$

当数值积分公式采用梯形公式：

$$\begin{cases} a_N = \dfrac{2p_{i-1}p_i}{p_{i-1}+p_i} \\ d_N = \dfrac{1}{2}\Big(q(x_{N-\frac{1}{2}}) + q(b)\Big) \\ \varphi_N = \dfrac{1}{2}\Big(f(x_{N-\frac{1}{2}}) + f(b)\Big) \end{cases}$$

3 作业及练习（基础题目）

P_{47} -练习 2.1.1：在均匀网格下求解边值问题(3.1)的数值解：

$$\begin{aligned} &-y'' + \frac{\pi^2}{4}y = \frac{\pi^2}{2}\sin\frac{\pi}{2}x, \quad 0 < x < 1 \\ &y(0) = 0, \qquad y'(1) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

要求：

- 对差分格式 (2.3) 生成内点矩阵
- 对边界条件分别采用向后差商，中心差商和基于有限体积法的中矩形公式
- 对[0, 1]区间均匀剖分 $N = 10, 20, 30, ..., 200$ 份，计算其和真解

  $$u^* = \sin\frac{\pi}{2}x$$

  的 $\|\cdot\|_C, \|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1$ 误差，计算其关于网格长度$h = 1/N$ 的数值收敛阶，并用 loglog() 函数作图表示。
- 作业截止日期为 2023-05-03/2023-05-10，将程序代码和实验报告压缩为缩为 .rar 文件，文件名为“姓名-微分方程数值解计算实习第十周作业.rar” 发送到邮箱 yuanxk@jlu.edu.cn, 邮件名称为“姓名-微分方程数值解计算实习第十周作业”。