

数学物理反问题第三次作业

陈文字

2023 年 11 月 1 日

1 问题重述

利用 Nystrom 方法求解如下积分方程

$$\varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 (x+1)e^{-xy}\varphi(y)dy = e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-(x+1)}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

- 问题1: 给出Nystrom 方法的求解格式
- 问题2: 选择 20 点的矩形公式进行积分离散, 并给出 $\varphi(x)$ 在 $x = \frac{j}{20}, j = 0, 1, \dots, 19$ 处的取值

2 求解过程

1. 记 $K(x,y) = -\frac{1}{2}(x+1)e^{-xy}$, $\varphi(x) = \varphi(x)$, $F(x) = e^{-x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-(x+1)}$
且记 $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k f(x_k)$.
取 $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = 1$ 则
$$\varphi(x_i) + \sum_{k=1}^n w_k K(x_i, x_k) \varphi(x_k) = F(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

则有 $(I+A)C=F$
$$A = \begin{bmatrix} w_1 K(x_1, x_1) & w_2 K(x_1, x_2) & \dots & w_n K(x_1, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 K(x_n, x_1) & w_2 K(x_n, x_2) & \dots & w_n K(x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

$$F = (F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n))^T$$

2. 其中约定 $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^{20} h f(x_k)$, $(h = \frac{1}{20})$
$$A_{ij} = w_j K(x_i, x_j)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (x_i+1) e^{-x_i x_j}$$

$$F_i = F(x_i) = e^{-x_i} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-(x_i+1)}$$

上述使用 $[x_1, x_2, \dots, x_{20}]$, 可更换为 $[x_0, x_1, \dots, x_{19}]$ 即可

3 实验结果

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.024921	0.977183	0.931807	0.888677	0.847684	0.808724	0.771696	0.736507	0.703066	0.671289
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0.641093	0.612402	0.585142	0.559243	0.534638	0.511265	0.489064	0.467976	0.447947	0.428927