

# 霍尔效应与应用设计

## 通电螺线管与亥姆霍兹线圈磁场分布

黄晨

华中科技大学物理学院

2019 年 11 月 16 日

# 目录

1 理论

2 实验

3 仿真

4 参考文献、致谢与附录



1 理论

2 实验

3 仿真

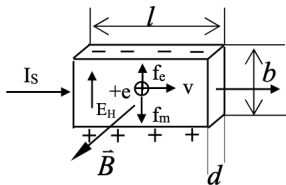
4 参考文献、致谢与附录



# 霍尔效应原理

霍尔效应从本质上讲是运动的带电粒子在磁场中受洛伦兹力作用而引起的偏转。当带电粒子(电子或空穴)被约束在固体材料中,这种偏转就导致在垂直电流和磁场的方向上产生正负电荷的聚积,从而形成附加的横向电场。载流子所受的横向电场力  $f_e = e\bar{v}H$  与洛伦兹力  $f_m = e\bar{v}B$  相等时,样品两侧电荷的积累就达到平衡,故有

$$eE_H = e\bar{v}B$$



# 霍尔效应原理

霍尔效应从本质上讲是运动的带电粒子在磁场中受洛伦兹力作用而引起的偏转。当带电粒子(电子或空穴)被约束在固体材料中,这种偏转就导致在垂直电流和磁场的方向上产生正负电荷的聚积,从而形成附加的横向电场。载流子所受的横电场力  $f_e = e\bar{v}H$  与洛伦兹力  $f_m = e\bar{v}B$  相等时,样品两侧电荷的积累就达到平衡,故有

$$eE_H = e\bar{v}B \quad (1)$$

$$I_S = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{n\Delta l b d e}{\Delta t} = ne\bar{v}bd \quad (2)$$



# 霍尔效应原理

霍尔效应从本质上讲是运动的带电粒子在磁场中受洛伦兹力作用而引起的偏转。当带电粒子(电子或空穴)被约束在固体材料中,这种偏转就导致在垂直电流和磁场的方向上产生正负电荷的聚积,从而形成附加的横向电场。载流子所受的横电场力  $f_e = e\bar{v}H$  与洛伦兹力  $f_m = e\bar{v}B$  相等时,样品两侧电荷的积累就达到平衡,故有

$$eE_H = e\bar{v}B \quad (1)$$

$$I_S = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{n\Delta l b d e}{\Delta t} = ne\bar{v}bd \quad (2)$$

由(1)(2)得

$$V_H = E_H b = R_H \frac{I_S B}{d} = K_H I_S B \quad (3)$$

其中  $R_H = \frac{1}{ne}$  为霍尔系数,  $K_H = \frac{R_H}{d}$  为霍尔灵敏度。



# 利用霍尔效应原理测磁场

由 (3)

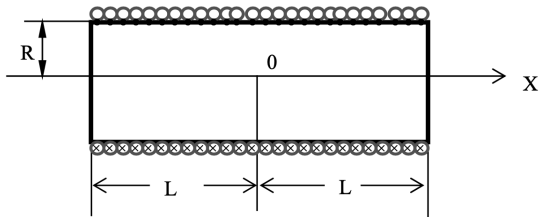
$$V_H = E_H b = K_H I_S B$$

得

$$B = \frac{V_H}{I_S K_H} \quad (4)$$

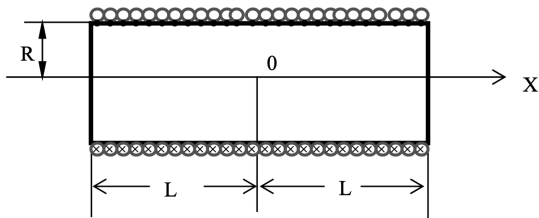


# 长直通电螺线管轴线上磁感应强度





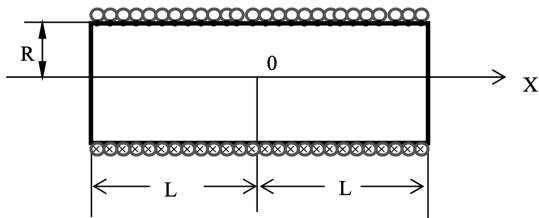
# 长直通电螺线管轴线上磁感应强度



第一性原理: Biot-Savart Law  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{I d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$



# 长直通电螺线管轴线上磁感应强度

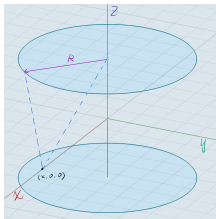


第一性原理: Biot-Savart Law  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_L \frac{Id\vec{l} \times \hat{r}}{r^2}$

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \left( \frac{x+L}{[R^2 + (x+L)^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{x-L}{[R^2 + (x-L)^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (5)$$



# 亥姆霍兹线圈磁感应强度

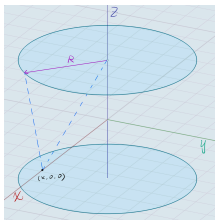


$(x, 0, 0)$  处磁场强度

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = \frac{\mu_0 n I R d}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d \phi}{[R^2 + x^2 + (\frac{d}{2})^2 - 2R x \sin \phi]^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6)$$



# 亥姆霍兹线圈磁感应强度



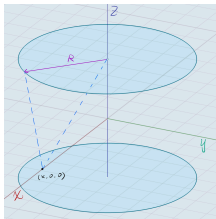
$(x, 0, 0)$  处磁场强度

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = \frac{\mu_0 n I R d}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d \phi}{[R^2 + x^2 + (\frac{d}{2})^2 - 2Rx \sin \phi]^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6)$$

关于  $B_z$  的积分，无法用初等函数表示。



# 亥姆霍兹线圈磁感应强度



$(x, 0, 0)$  处磁场强度

$$\begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = 0 \\ B_z = \frac{\mu_0 n I R d}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R d \phi}{[R^2 + x^2 + (\frac{d}{2})^2 - 2Rx \sin \phi]^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (6)$$

关于  $B_z$  的积分，无法用初等函数表示。

因此我将在第二部分在 MATLAB 使用数值积分 Integral 得出理论值，并在第三部分利用 COMSOL 建立关于亥姆霍兹线圈磁场的模型，通过磁矢势可视化直观地描述亥姆霍兹线圈空间磁场变化。



1 理论

2 实验

3 仿真

4 参考文献、致谢与附录



# 实验设计（误差及消除方法：对称测量法）

- 不等势电压  $V_O$
- Ettingshausen 效应：热电效应引起的附加电压  $V_E$
- Nernst 效应：热磁效应直接引起的附加电压  $V_N$
- Righi-Leduc 效应：热磁效应产生的温差引起的附加电压  $V_{RL}$



# 实验设计（误差及消除方法：对称测量法）

- 不等势电压  $V_O$
- Ettingshausen 效应：热电效应引起的附加电压  $V_E$
- Nernst 效应：热磁效应直接引起的附加电压  $V_N$
- Righi-Leduc 效应：热磁效应产生的温差引起的附加电压  $V_{RL}$

$$\begin{cases} V_1 = V_H + V_O + V_N + V_{RL} + V_E \\ V_2 = -V_H + V_O - V_N - V_{RL} - V_E \\ V_3 = V_H - V_O - V_N - V_{RL} + V_E \\ V_4 = -V_H - V_O + V_N + V_{RL} - V_E \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_H + V_E = \frac{1}{4}(V_1 - V_2 + V_3 - V_4)$$





# 实验设计（误差及消除方法：对称测量法）

- 不等势电压  $V_O$
- Ettingshausen 效应：热电效应引起的附加电压  $V_E$
- Nernst 效应：热磁效应直接引起的附加电压  $V_N$
- Righi-Leduc 效应：热磁效应产生的温差引起的附加电压  $V_{RL}$

$$\begin{cases} V_1 = V_H + V_O + V_N + V_{RL} + V_E \\ V_2 = -V_H + V_O - V_N - V_{RL} - V_E \\ V_3 = V_H - V_O - V_N - V_{RL} + V_E \\ V_4 = -V_H - V_O + V_N + V_{RL} - V_E \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_H + V_E = \frac{1}{4}(V_1 - V_2 + V_3 - V_4)$$

由  $V_H \gg V_E$

$$V_H = \frac{1}{4}(V_1 - V_2 + V_3 - V_4)$$



# 主要实验仪器参数

- DH4512 型霍尔效应螺线管实验架

螺线管: 线圈匝数 1800 匝; 有效长度 181cm; 等效半径 21mm

N 型砷化镓半导体: 厚度  $d = (0.200 \pm 0.004) \text{mm}$ ; 宽度

$b = (2.00 \pm 0.02) \text{mm}$ ; B、C 极间距  $l = (2.00 \pm 0.02) \text{mm}$



# 主要实验仪器参数

- DH4512 型霍尔效应螺线管实验架

螺线管: 线圈匝数 1800 匝; 有效长度 181cm; 等效半径 21mm

N 型砷化镓半导体: 厚度  $d = (0.200 \pm 0.004) \text{mm}$ ; 宽度  $b = (2.00 \pm 0.02) \text{mm}$ ; B、C 极间距  $l = (2.00 \pm 0.02) \text{mm}$

- DH4512 型霍尔效应实验架

二个励磁线圈: 线圈匝数 1400 匝 (单个); 有效直径 72mm; 二线圈中心间距 52mm

N 型砷化镓半导体: 厚度  $d = (0.200 \pm 0.004) \text{mm}$ ; 宽度  $b = (2.00 \pm 0.02) \text{mm}$ ; B、C 极间距  $l = (2.00 \pm 0.02) \text{mm}$



# 主要实验仪器参数

- DH4512 型霍尔效应螺线管实验架

螺线管: 线圈匝数 1800 匝; 有效长度 181cm; 等效半径 21mm

N 型砷化镓半导体: 厚度  $d = (0.200 \pm 0.004)mm$ ; 宽度

$b = (2.00 \pm 0.02)mm$ ; B、C 极间距  $l = (2.00 \pm 0.02)mm$

- DH4512 型霍尔效应实验架

二个励磁线圈: 线圈匝数 1400 匝 (单个); 有效直径 72mm; 二线圈中心间距 52mm

N 型砷化镓半导体: 厚度  $d = (0.200 \pm 0.004)mm$ ; 宽度

$b = (2.00 \pm 0.02)mm$ ; B、C 极间距  $l = (2.00 \pm 0.02)mm$

- DH4512 型霍尔效应测试仪

(a) 霍尔工作电流用恒流源  $I_S$ :

最大输出电流 3mA, 3 位半数字显示, 输出电流准确度为 0.5%。

(b) 磁场励磁电流用恒流源  $I_M$ :

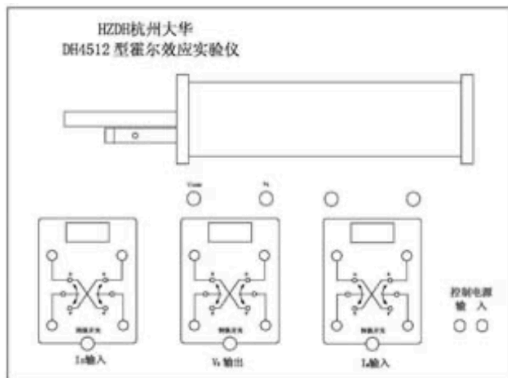
最大输出电流 0.5A, 3 位半数字显示, 输出电流准确度为 0.5%。

(c) 霍尔电压测量用直流电压表:

量程 19.99mV, 3 位半 LED 显示, 分辨率  $10\mu V$ , 测量准确度为 0.5%。



# 通电螺线管



DH4512 型霍尔效应螺线管实验架平面图



# 通电螺线管

$X(mm)$	$V_1(mV)$	$V_2(mV)$	$V_3(mV)$	$V_4(mV)$	$V_H(mV)$	$B(mT)$
0	0.54	-0.31	0.32	-0.54	0.43	0.814
10	0.92	-0.67	0.68	-0.90	0.79	1.51
20	1.57	-1.33	1.34	-1.56	1.45	2.76
30	2.34	-2.10	2.11	-2.32	2.22	4.22
40	2.82	-2.59	2.60	-2.81	2.71	5.15
50	3.06	-2.85	2.86	-3.05	2.96	5.63
60	3.19	-2.97	2.98	-3.17	3.08	5.86
70	3.24	-3.04	3.05	-3.23	3.14	5.98
80	3.28	-3.08	3.09	-3.27	3.18	6.06
90	3.30	-3.10	3.11	-3.28	3.20	6.09
100	3.30	-3.11	3.12	-3.29	3.21	6.10

表: 通电螺线管  $B - X$  实验数据记录表



$X(mm)$	$V_1(mV)$	$V_2(mV)$	$V_3(mV)$	$V_4(mV)$	$V_H(mV)$	$B(mT)$
110	3.31	-3.12	3.13	-3.30	3.22	6.12
120	3.31	-3.12	3.13	-3.30	3.22	6.12
130	3.30	-3.11	3.13	-3.29	3.21	6.11
140	3.28	-3.11	3.11	-3.28	3.20	6.09
150	3.26	-3.08	3.09	-3.25	3.17	6.04
160	3.21	-3.04	3.05	-3.21	3.13	5.96
170	3.14	-2.96	2.97	-3.14	3.05	5.81
180	3.00	-2.82	2.82	-2.99	2.91	5.54
190	2.70	-2.53	2.53	-2.70	2.62	4.98
200	2.15	-1.98	1.98	-2.16	2.07	3.94
210	1.40	-1.22	1.23	-1.41	1.32	2.50
220	0.81	-0.61	0.62	-0.82	0.72	1.36
230	0.51	-0.30	0.30	-0.51	0.41	0.771

表: 通电螺线管  $B-X$  实验数据记录表 (续表)



$$B = \frac{V_H \cdot d}{I_S \cdot R_H} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \Delta B &= \frac{\partial B}{\partial V_H} \Delta V_H + \frac{\partial B}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial B}{\partial I_S} \Delta I_S \\ &= \frac{d}{I_S \cdot R_H} \Delta V_H + \frac{V_H}{I_S \cdot R_H} \Delta d - \frac{V_H \cdot d}{I_S^2 \cdot R_H} \Delta I_S \end{aligned} \quad (8)$$

$d$  与  $I_S$  的测量值及其标准差:

$$d = 0.200\text{mm} \quad u_d = 0.004\text{mm}$$

$$I_S = 3.00\text{mA} \quad u_{I_S} = 0.015\text{mA}$$

直流电压表测  $V_H$  示值误差:  $u_{V_H} = 0.1\text{mV}$

位置移动随机误差:  $\sigma_x = 0.1\text{mm}$

测量结果总标准差:

$$e = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial V_H}\right)^2 u_{V_H}^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial d}\right)^2 u_d^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial I_S}\right)^2 u_{I_S}^2}$$





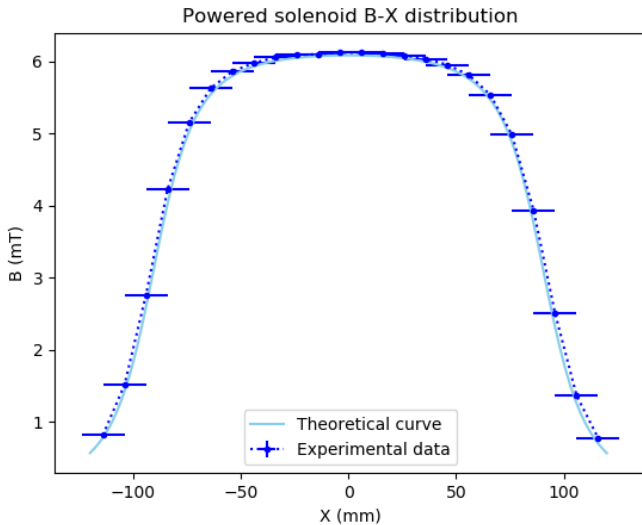


图: 通电螺线管轴向磁场分布

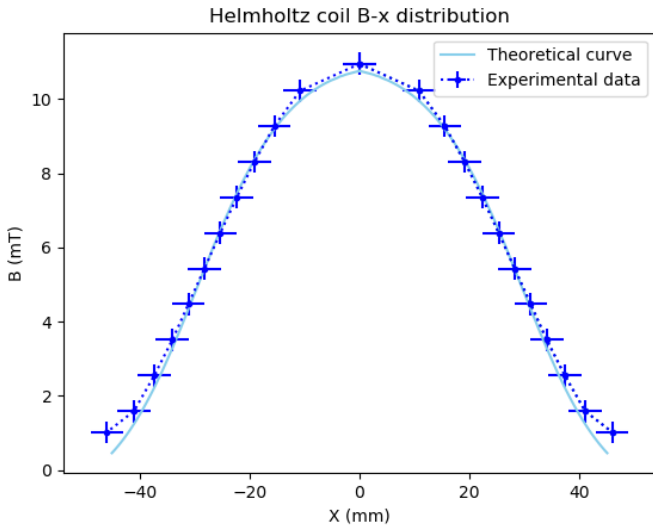


# 亥姆霍兹线圈

$X(mm)$	$V_1(mV)$	$V_2(mV)$	$V_3(mV)$	$V_4(mV)$	$V_H(mV)$	$B(mT)$
0	6.41	-5.21	5.21	-6.41	5.81	11.0
10.8	5.91	-4.70	4.71	-5.90	5.31	10.2
15.5	4.91	-3.71	3.71	-4.91	4.31	8.30
22.3	4.41	-3.22	3.22	-4.41	3.82	7.35
25.3	3.91	-2.72	2.72	-3.91	3.32	6.39
28.2	2.91	-1.73	1.72	-2.92	2.32	4.47
34.0	2.41	-1.23	1.23	-2.42	1.82	3.51
37.3	1.91	-0.73	0.73	-0.90	0.53	1.02
41.0	1.41	-0.23	0.23	-1.42	0.82	1.59
45.9	0.91	-0.16	0.15	-0.90	0.53	1.02

表: 亥姆霍兹线圈  $B-X$  实验数据记录表





图：亥姆霍兹线圈水平方向磁场分布



- 较难标定通电螺线管与亥姆霍兹线圈中心位置——改进实验装置，在移动尺上作标注
- 是否存在粗大误差？——由于实验只有一次，每个位置的数据都只经过一次测量，不排除有粗大误差存在的可能——重复实验
- 资料所给参数不准确？——待更多更精确的实验数据检验



1 理论

2 实验

3 仿真

4 参考文献、致谢与附录



在稳恒电流场中，由

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{H} &= \mu^{-1} \mathbf{B}\end{aligned}$$

磁矢势  $\mathbf{A}$  满足以下方程

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_e$$

在此模型中我们使用真空磁导率， $\mu = 4\pi \times 10^{-7} T \cdot m/A$



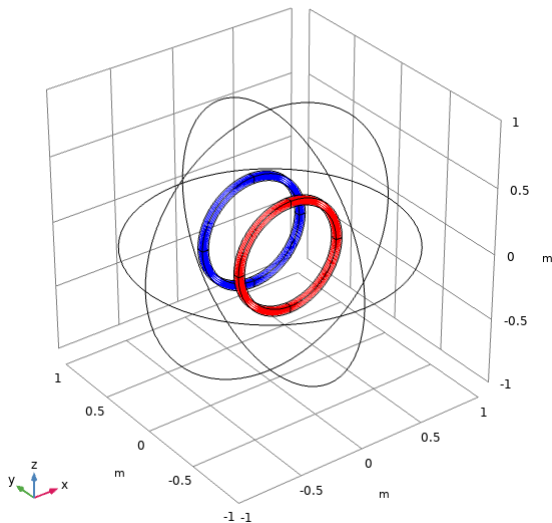


图: 亥姆霍兹线圈仿真图



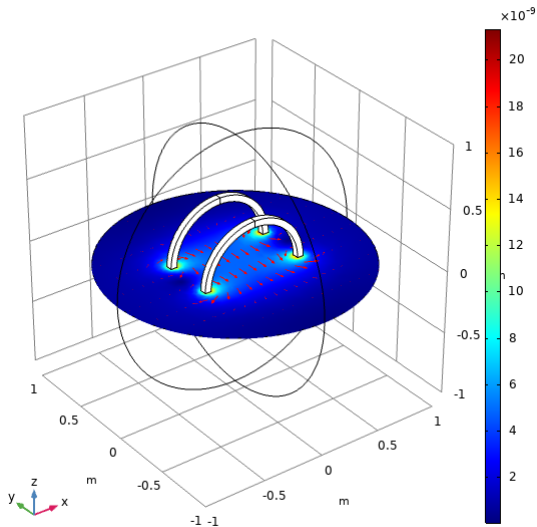


图: 亥姆霍兹线圈磁场仿真图





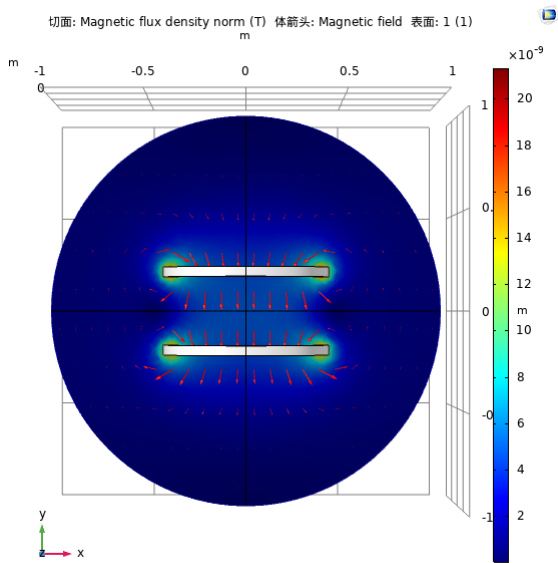


图: 亥姆霍兹线圈磁场仿真图



1 理论

2 实验

3 仿真

4 参考文献、致谢与附录



- 1 *Magnetic Field of a Helmholtz Coil*, COMSOL Documentation
- 2 *Introduction to Electrodynamics*, Griffiths
- 3 《误差理论与数据处理》，费业泰



# 致谢

- 感谢物理实验创新基地的学长们今年 4 月的时候教我们有限元分析以及 COMSOL;
- 感谢大一时在探究小组和 CUPT 集训队中得到的锻炼, 让我的实验能力、数据记录的规范性以及学术汇报的能力都得到了提升;
- 特别感谢杨明老师的辛勤指导以及小伙伴们的帮助;
- 感谢在座各位的聆听。



此实验数据使用 MATLAB 以及 Python 进行处理。  
由于时间原因，数据处理源代码未能放入 Beamer 中，如果对报告中数据或数据处理方式有疑问，随时欢迎询问。

