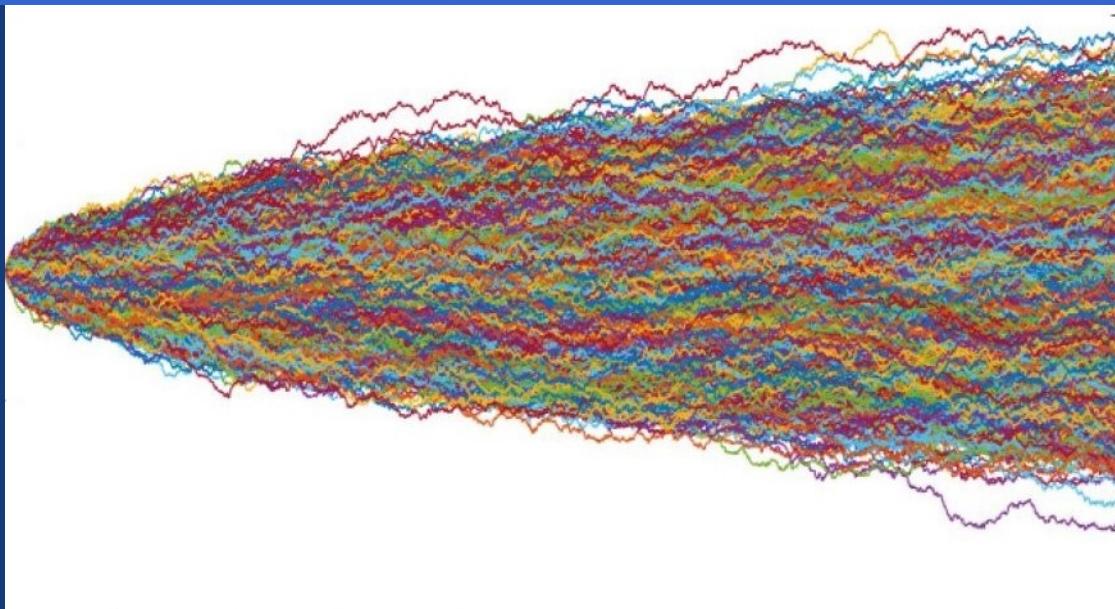




# Innovative Base of Physics Experiment Review Letters

May 25 2020 VOL 1 NO 1



- Cover: 1D random walk (By Geyu Qin)**  
**A Study on the Invisible Bottle**  
Quanshen Shen  
**A Study on the Friction of Pepper Pot**  
Yuchen Sun, Bo Jin, Qirui Sun  
**A Simple Study on the Phenomenon of Swinging Sound Tube**  
Lin Zhou, Zhengnan Jia, Qizhi Zhu  
**Automated Graphite Trace Drawing Using Arduino**  
Haobo Li  
**A Study on Chaotic Properties of Planar Double Pendulum System**  
Yuchen Sun  
.....



物理实验创新基地

**Editors:**

Chengyu Chen  
Chen Huang

# IBPE Review Letters 简介

**Yum Chan, Innovative Base of Physics Experiment, HUST**

本文介绍了IBPE Review Letters是什么，怎么来的，要到哪里去。

## 1 期刊宗旨

总所周知，IBPE平日里有非常多的阅读与探究活动。期间，群体智慧的碰撞产生了非常多令人称赞的成果。然而，由于总的原因，这些成果并没有被整理好。后续加入IBPE的成员也只能在口耳相传中获取到零散的信息。不出几届，前人的优秀项目成果便完全失传，这不得不说是一个非常大的遗憾。

此外，近些年，我们也看到了许多IBPE成员贡献了不少非常有意思的学术笔记，这些学术笔记对新生的科研入门确实是有不少帮助的。倘若，能够进一步地对其进行整理与规范，相信也能为许多新生的科研道路规划提供一定的启发。

因此，我们决定创立一份IBPE的内部学术期刊：IBPE Review Letters（缩写：IBPE Rev. Lett.，简称：IRL）用以刊发各种IBPE成员在日常活动中所产出的重要成果、IBPE学术年会文章，以及IBPE成员跨入科研领域后所撰写的各种前沿综述、学习笔记等内容。

本期刊短期内面向所有IBPE成员征稿，并且原则上仅在内部发行，仅供内部成员间的学习与交流。

## 2 运营模式

本期刊运营仿照一般的学术期刊来进行。

有意愿的投稿人可以将稿件发到投稿邮箱上。IRL编辑部在决定接收稿件后，将提供一定的修改建议。投稿人需按照修改建议对稿件进行修改。在经过多轮修改无问题后，IRL编辑部才会正式决定刊登该稿件。

其中，稿件的修改建议包含两部分：学术部分和格式部分。其中学术部分修改建议由IRL编辑部所安排的审稿人来提出。审稿人在审稿时无法获知稿件的作者，也无法获得其他审稿人的信息和修改意见。格式部分修改意见由IRL编辑部直接与投稿人提出。

倘若有兴趣加入到审稿或编辑工作中来，可以在本文的最后蓝色方框处找到相应的QQ群号申请加入。

目前，我们初步规划每个学期出一到两期IRL。稿件来源将覆盖多个年级。另外，由于

经费和总所周知的问题，短期内将只考虑发行电子版。

## 3 稿件类型与要求

目前IRL将接收如下三种类型的稿件：

1. Article
2. Review
3. Comment

其中Article指的是比较完整的，且原创性较强的长论文。实际上可以理解为通常意义上的探究报告，除了本篇文章外，本期的所有文章被归类为Article。Review则指的整理性质的文章，比如学习笔记，前沿综述等。尽管这类文章本身没有多少创新点，但基于不同人的视角所整理出来的结果也会带来许多意想不到的收获。Comment则是评述类文章，通常是针对某一次活动的总结，一般都由该活动的负责人在活动的结束后撰写。

## 4 写在最后的话

**IBPE Review Letters**因你们的投稿而闪耀。

**Yum Chan** is one of the chief editors of IBPE Rev. Lett.

**Address:** School of Physics, Huazhong University of Science and Technology

**投稿 Email:** IBPE007@outlook.com

**编辑与审稿小组QQ群:** 435665067

# 有关隐形的瓶子的探究

Quanshen Shen, Huazhong University of Science and Technology

本文主要研究气流经过柱体后的流速的分布情况，将蜡烛熄灭这个现象简单化为风速的影响。本文主要用射流模型和coanda效应来解释该现象，最后应用COMSOL进行了数值模拟并与实验结果比较，得到了柱体后面较为详细的流速分布。柱体后较近距离内空气流速较小，不能使蜡烛熄灭，而在中距离处会有一个流速的最大值，该处蜡烛熄灭最为容易，随后的气体流速呈现出递减的趋势，当流速小于某个阈值时蜡烛将不会熄灭。

## 1 引言

当人去吹位于瓶子后面的蜡烛时，在吹气力度足够大时蜡烛会被吹灭，就好像瓶子不存在一样。这是一个生活中比较常见的现象。这其中蕴含着丰富的物理原理，探究该现象有助于帮助我们理解流体的黏度这个物理性质。该物理现象可以抽象成一个绕流模型，绕流模型一直是流体力学中研究的重点与难点，这主要是因为描述流体运动的基本方程是一个非线性的方程，早期的研究只能建立在实验和几个特解上，而随着计算技术的发展，数值模拟的运用，使得人们研究的物体从规则的几何物体逐步到各种工业上的具体实例。绕流模型也很多的实际运用，例如风力发电机后的尾流，流水绕桥墩时产生的涡流等，该模型的研究解决了部分工程上的难题，具有一定的实际意义。

## 2 初步分析

从该现象的描述中可以先将气流经过圆柱的过程抽象为二维的圆柱绕流。圆柱绕流的一个特征参数为雷诺数。不同的雷诺数对应不同的尾流特征。为了估计该模型的雷诺数，由资料得[1]，人吹气时的最大风速在 $V = 10m/s$ 左右，室温下空气密度为 $\rho = 1.2kg/m^3$ ，粘性系数为 $u = 1.809 \times 10^{-5}Pa \cdot s$ ，实验中圆柱的特征长度约为 $L = 0.1m$ ，估算该条件下的雷诺数

$$Re = \frac{VL\rho}{u} = 3 \times 10^5 \quad (1)$$

这是一个雷诺数比较大的绕流模型。为此我们先建立最简单的理想化模型进行定性分析。

## 3 模型建立与分析

### 3.1 理想化模型

由于雷诺数较大，粘性力远小于惯性力，所以在该模型下我们采取如下假设

1. 理想流体假设，包括空气的不可压缩假设和空气无黏度的假设。
2. 风流速场定常假设。
3. 流速场无界假设。

由于在雷诺数较大的条件下，粘性力仅在圆柱附近有较大的影响，假设1在远场处是不错的近似，而实验的流速范围远小于0.3倍的声速，不可压缩假设有很大的实际意义。而假设2和假设3均是为了保证模型简单易算。在该条件下易得其流速场的分布，该分布由三个流速场叠加而成。其流势为[1]

$$W = v_\infty z + \frac{M}{2\pi z} + \frac{F \ln z}{2\pi i} \quad (2)$$

其中 $z$ 为复平面的坐标， $M$ 为偶极子的强度， $F$ 为环量。

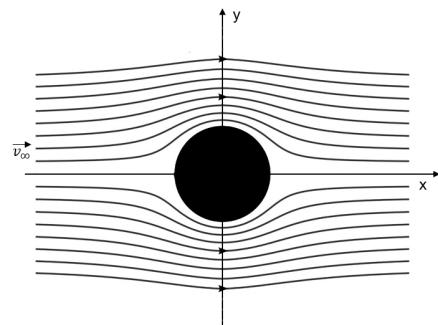


Figure 1. 理想化二维圆柱绕流

可以看到，在一个极度理想化的情况下，风并不是因圆柱阻挡而散开，而是对称地绕过圆柱。这个模型很好的解释了为什么柱体后面会有风，可见该模型大体上是对的，逐步去掉或者优化不合理的假设我们就可以得到更好的结果。

### 3.2 进一步细化的模型

#### 3.2.1 coanda效应

由于人嘴吹气引起的空气流动有限，因而可

以将嘴吹出的气流看出一股射流，考虑coanda效应即射流因粘性而带动周围流体介质时，当一侧被壁面阻隔之后，其带动作用同样存在但气体补充通道受限将在壁面产生负压，射流两侧压差使其偏转，越偏转压差就越大，最终附壁，这个效应可以很好的解释为什么射流会绕着圆柱流动[2]。

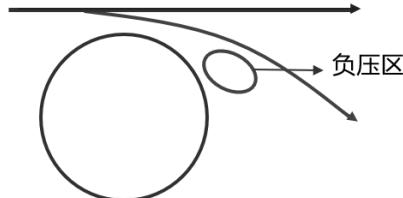


Figure 2. coanda effect

### 3.2.2 出风口射流模型

为了描述气流从人嘴到达圆柱过程中的行为，我们对出风口采用圆形的射流模型进行分析，由N-S方程得到普朗特边界层条件[3]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} = 0 \quad (3)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} (r \frac{\partial u}{\partial r}) \quad (4)$$

其解为

$$u = \frac{3K}{8\pi\nu x} \frac{1}{(1 + \frac{\epsilon^2}{4})^2} \quad (5)$$

$$v = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3K}{\pi x^2}} \frac{\epsilon - \frac{\epsilon^3}{4}}{(1 + \frac{\epsilon^2}{4})^2} \quad (6)$$

其中

$$\epsilon = \sqrt{\frac{3K}{16\pi\nu x}} \frac{r}{r} \quad (7)$$

$$K = \frac{J}{\rho} \quad (8)$$

其中 $J$ 为出口的动量， $\nu$ 为动力粘度， $u$ 为轴向速度， $v$ 为径向速度，其中

$$J = 2\pi\rho \int_0^\infty u^2 r dr \quad (9)$$

可以发现，虽然气流在逐渐分散，但分散的速度较慢，其气流中心还是有很大的流速。综上，风口足够大时，我们可以将其视为一个高雷诺数的绕流模型，在该模型下，由于雷诺数足够大，远场处的情况与第一个模型基本一致，近场处则采取边界层来分析。虽然我们不需要近场处的解，但近场的情况会一定程度上的影响远场。所以近场分析是必要的。

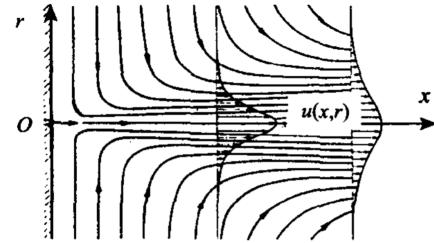


Figure 3. 圆形射流流动图案  
[3]

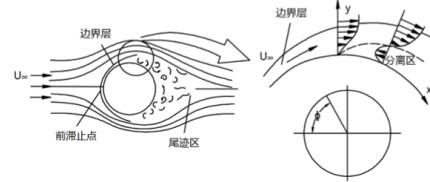


Figure 4. 边界层效应

## 4 数值模拟与实验设计

在进行了初步分析与模型建立后，基于理论模型方程解的复杂性，于此我们采用COMSOL来进行数值模拟[4][5]，数值模拟的参数如图6。从图5左图可以看到风速最大值主要集中在柱体与出风口的连线上。流速分布上在向两侧快速衰减，可以认为整个有风的区域宽度为10cm。这和射流模型给出的结果相差不大。而从图5右图中可以看到柱体后面有一个小范围内风速有极小值。

实验设计上用一个固定出风速度 $v = 10.0m/s$ 的鼓风机代替人吹气，在距离出风口20cm处放置一个直径为10.00cm的圆柱，随后用风速仪每隔2cm测量柱体后的风速。整个过程保证风速仪，出风口，以及柱体三者共线，出风口与风速仪等高，重复三次，最后得到实验结果。从实验中我们可以发现

1. 贴近圆柱表面时，空气流速会较低，这和第一个模型相符合。
2. 在远离柱体后，气流流速会出现一个最大值，这和数值模拟情况相吻合。
3. 越远这空气流速越低，这也与射流模型和粘性气体相符合。

但实验数据在距离柱体较近时与模拟值有较大差异，在分析理论过程与实验设计后，存在如下误差

1. 风速仪在靠近圆柱体时对流速场的影响较大

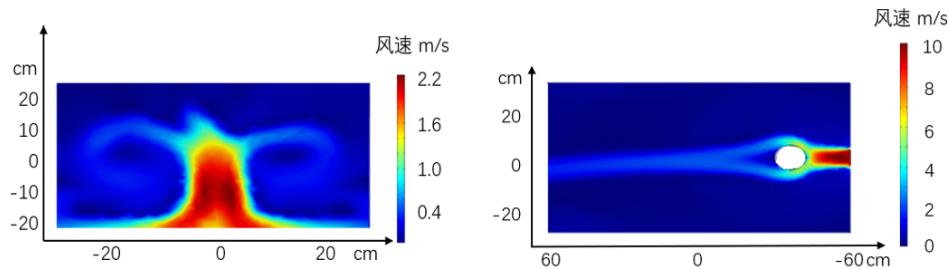


Figure 5. 模拟截面图

2. 风速仪测量的是一定范围内的平均风速，无法精确到点。
3. 未考虑蜡烛对流速场分布的影响。

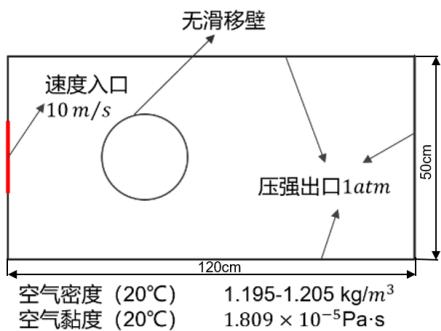


Figure 6. 模拟参数

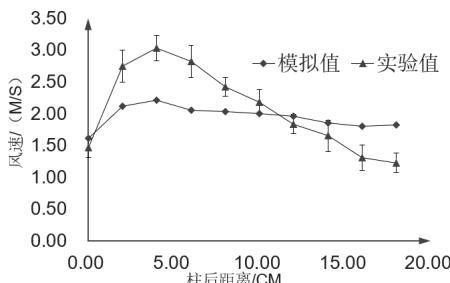


Figure 7. 实验值与模拟值比较

## 5 总结与展望

本文着重探究了风绕柱体后的流速场分布，得到气体在以较大流速通过柱体后还会有较大的流速。首先在贴近柱体时，气体流速会有一个较大的下降，随后增加在距离柱体约5cm处流速达到最大值，该处的蜡烛最容易熄灭。达到最大值以后气体流速缓慢下降，蜡烛熄灭的可能性下降。由于设备的限制，本文只讨论了一个主要方向的风速，而实际上柱体后面的气体会形成紊

流，速度大小方向并不稳定，这也是造成蜡烛熄灭的原因。该实验中测量风速的方法在一定程度上会改变流速场分布，对数据造成一定的影响。改进方法可以使用较小的探测仪来探测更加灵敏的流速分布，也可以采用可视化的方法来检测流速。在进一步研究蜡烛熄灭的条件后，也可以用高性能计算机模拟给出更详细的结果。

## 致谢

最后特别感谢四川大学的田柏汀同学与我合作，感谢王顺老师给予了我实验思路上的帮助，最后也谢谢基地各位小伙伴的协助。

**Address:** School of Physics, Huazhong University of Science and Technology  
**Email:** 203672296@qq.com

## 参考文献

- [1] 陈玉璞, 王惠民. 流体动力学 (第二版). 北京: 清华大学出版社, 2013 ISBN 9787302307341
- [2] 王晨旭. 近壁面圆柱绕流的漩涡脱落及水动力特性研究[D]. 黑龙江: 哈尔滨工程大学, 2016. DOI:10.7666/d.D01105332.
- [3] 董志勇. 射流力学. 北京: 科学出版社, 2005 ISBN 7-03-015075-9
- [4] 丁勇, 韩盼盼, 段菲等. 线性分层流中圆柱绕流数值模拟方法研究[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2016, 第37卷(9):1179-1183.
- [5] 王晓聪, 桂洪斌, 刘洋. 三维有限长圆柱绕流数值模拟 [J]. 中国舰船研究, 2018, 13 (2) : 27-34.  
WANGXC, GUIHB, LIUY

# 胡椒罐摩擦现象的探究

**Yuchen Sun**, School of Physics

**Bo Jin**, School of Physics

**Qirui Sun**, School of Physics

当使用物体在装有盐或胡椒等颗粒物的罐子底部摩擦时，颗粒物的流动速度明显快于普通的摇动，本文对此现象进行了基于连续介质力学与流体粘度的两种解释，通过计算机离散元模拟与初步实验，得到了盐在不同湿度下，流动速度与摩擦速度的关系。

## 1 背景介绍与初步分析

如果拿起装有盐或胡椒等颗粒物质的罐子，仅仅是摇动它，颗粒物质会相对较慢的流出。但是，如果用物体在罐子底部摩擦，颗粒物质流动的速度却会有一个明显的增加。

我们选取了不同的颗粒物与不同的罐形容器，对此现象进行复现。

对于较为潮湿的盐，在未施加摩擦时，盐粒会黏附在一起，难以流动。摩擦可使其恢复流动，所产生的效应相比于摇动更加显著，罐底快速的摩擦甚至可以使其流动速度达到近似于干燥的盐的程度。



**Figure 1.** 较潮湿盐未摩擦与摩擦时现象图

对于干燥的盐，在开孔不太小而不引起堵塞时，摩擦对于盐的流速产生的影响并不明显。



**Figure 2.** 干燥盐无摩擦时的快速流动

开孔较小时，颗粒物会在孔口处形成明显的堵塞现象，摩擦可使其恢复正常流动，在选取均一的小铜球作为颗粒物时，堵塞现象尤其明显。

用光滑物体摩擦容器罐底无明显现象，底部光滑的容器同样，这表明摩擦现象的产生与罐底部的防滑花纹有关。敲击罐底或侧壁，可导致与摩擦的类似现象。而盐更加潮湿时，较轻的摩擦几乎无法导致流动，一般的摇晃瓶子也是如此，在底部重击或快速摩擦可使其暂时流出。由于干燥颗粒的堵塞现象过于复杂，我们重点探究潮湿盐在摩擦后产生的现象。

初步分析，盐在潮湿时，盐粒间的粘附力阻止其流动，表现出一种“假塑性”，与某些非牛顿流体行为有类似性。普通的摇动无法打破盐粒之间的粘连，导致盐以一个整体与容器近乎同时运动，而剧烈的敲击可使颗粒物暂时恢复流速。推测摩擦流动现象是由于容器底部花纹摩擦后产生

较大震动导致——震动使得粘附在一起的盐粒松散，进而导致流动的恢复。这与某些高分子断裂而导致的剪切变稀有类似性。

## 2 幂律流体模型

幂律流体为一种常见的非牛顿流体黏度模型，由于盐在潮湿情况下显现处与某些非牛顿流体近似的现象，我们用这个模型对于此现象进行简单的解释，并获取摩擦速度与流动速度之间的关系。

虽然颗粒物质的流动与一般流体有差异，但这里近似认为它们的流动规律是一致的。而对于罐底的摩擦，我们认为，其影响与对黏性液体进行匀速的剪切是类似的。

由于我们主要探究流动较慢的情况，则假定流体黏度为均一的，且其变化完全由外部剪切带来的效应决定。

此时，流体的黏度可表述为：

$$\eta = k \left( \frac{d\gamma}{dt} \right)^{n-1} \quad (1)$$

其中 $\eta$ 为黏度， $\gamma$ 为剪切速率， $k$ 、 $n$ 为由流体确定的常数。

由于固体颗粒流的黏度难以直接测定，这里用获取黏度与流动速度之间的关系的方法，由流速得到黏度。

我们采取计算机多物理场模拟软件COMSOL进行仿真建模，来获得流速黏度关系。物理模型选取不可压缩层流，容器壁边界条件为无滑移，出口与入口边界条件设置为大气压。COMSOL流体模拟结果如图3所示，流体流速用颜色梯度表示。可以看出，流速在孔口处有一个显著的加快。

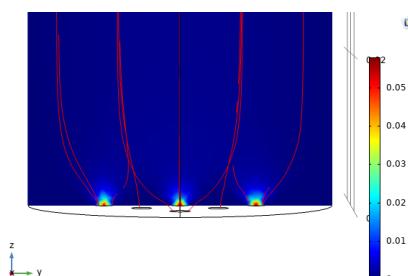


Figure 3.  $\eta = 10 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ 时，流体模拟示意图

改变容器高度进行多次计算，可以得到，固定黏度下容器高度与流速的平方近似成正比（图4）。这样，建模时选取的高度就不必与实际高度精确对应。

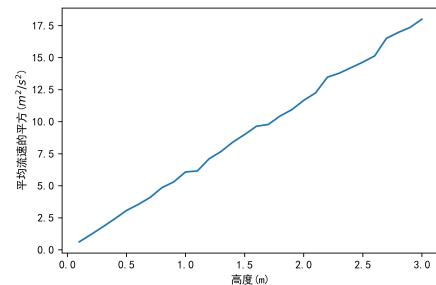


Figure 4. 高度与流速关系图

模型高度选取为0.08m，得到黏度与流速关系如图5，其数值计算公式为 $V = 0.193\eta^{-1}$ ，其中V为孔口的平均流速。

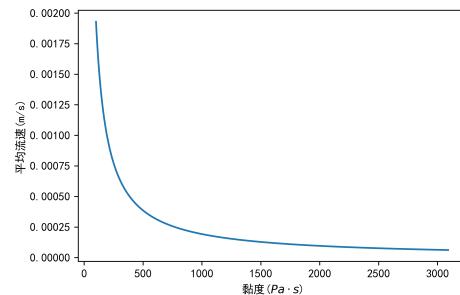


Figure 5. 通过计算机流体模拟得到的黏度与流速关系图

## 3 颗粒压强模型

颗粒物质的压强与一般流体不同，当高度非常小时，容器底部压强 $P$ 和高度 $h$ 近似成线性关系，但随着 $h$ 的上升， $P$ 趋于一个饱和压强，这便是颗粒物质的粮仓效应[1]。

Janssen在1895年对此现象做出了解释，他认为颗粒物质间与颗粒与容器间的摩擦力的存在，使得容器壁支撑了颗粒的一部分重量。

此处对这一压强公式做以推导，假定介质垂直压力在水平面均匀分布，内部任意一点（包括壁）所受水平压力与垂直压力成比例，流动与摩擦不改变内部压力分布，此时，即可用静态压强代替动压强。

静止时每一层微元的力学方程为:

$$\pi \frac{D^2}{4} dP + \alpha \mu \pi DP dh = \rho g dh \quad (2)$$

其中  $D$  为罐直径,  $P$  为垂直方向压强,  $\mu$  为侧壁摩擦系数,  $\rho$  为密度,  $g$  为重力加速度,  $\alpha$  为偏转系数,  $dh$  为层微元高度。

固体颗粒体系中, 垂直方向压强会被分担到水平方向, 偏转系数  $\alpha$  表征垂直方向压强与水平方向压强之比。

化简得:

$$\frac{dP}{dh} + \frac{4\mu\alpha}{D} P = \rho g \quad (3)$$

有约束条件  $h = 0$  时  $P = 0$ , 解微分方程得:

$$P = \frac{\rho g D}{4\mu\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{4\mu h}{D}\alpha\right)\right) \quad (4)$$

结合压强表达式对流速进行推导, 假定颗粒间耗散力不大, 取一流体微元, 沿着其流线  $l$  分析, 牛顿第二定律成立:

$$-\frac{dP}{dl} = \rho \frac{du}{dt} = \rho u \frac{du}{dl} \quad (5)$$

其中  $u$  为流体速度

所以有:

$$-\frac{dP}{dl} = \frac{d}{dl} \left(\frac{1}{2} \rho u^2\right) \quad (6)$$

即, 对于整条流线上:

$$\frac{d}{dl} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + P\right) = 0 \quad (7)$$

由于孔口远小于罐直径, 我们可以认为流体顶部的流速为0, 代入孔口处的压强, 又有  $h = 0$  时  $u = 0$ , 得到:

$$u = \sqrt{\frac{Dg}{2\mu\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{4\mu h}{D}\alpha\right)\right)} \quad (8)$$

由计算机模拟与实验现象可知, 颗粒物质的流动会随着摩擦速率的增大而变得容易。对于这个现象的解释, 我们认为容器壁所分担颗粒的压强随着摩擦速率的增大而减小。在计算机模拟中, 当摩擦速率非常大时, 颗粒的流动速度逐渐接近

理想流体。那么, 我们认为, 当摩擦速率趋于无穷时, 式(3)变为理想流体压强公式。

于是我们猜想偏转系数  $\alpha$  与摩擦速度  $\gamma$  间的关系为  $\alpha = \frac{C}{\gamma}$  ( $C$  为常数), 又由于较小摩擦几乎不流动, 加以偏移量修正, 可得到流速与摩擦速度的关系为:

$$v = C_1 \sqrt{\gamma \left(1 - \exp\left(-\frac{C_2}{\gamma}\right)\right)} + C_3 \quad (9)$$

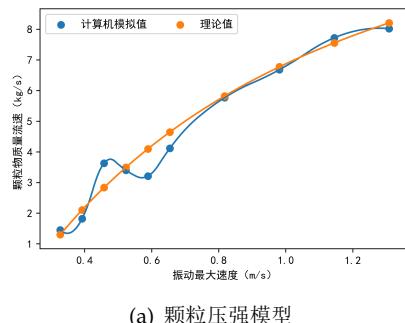
其中  $C_1, C_2, C_3$  均为常数,  $\gamma$  为摩擦速率。

## 4 计算机模拟

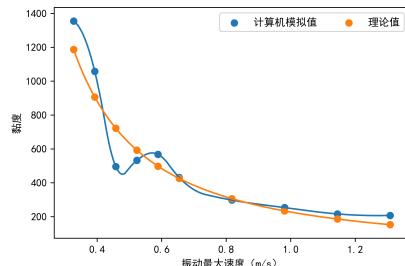
对于颗粒物质的复杂现象, 我们采用离散元方法进行模拟, 其基本思想是把整个介质看作由一系列离散的独立运动的粒子单元所组成, 单元的尺寸是微观的, 其只与相邻的单元作用, 其运动受经典运动方程控制, 整个介质的变形和演化由各个单元的运动和相互位置来描述。

选取EDEM进行离散元模拟, 颗粒近似为小球, 相互作用选取软球模型, 外部扰动近似为正弦振动。

模拟结果与理论值进行拟合比对, 结果如图6所示。



(a) 颗粒压强模型



(b) 流体粘度模型

Figure 6. 两种理论模型与模拟结果比对

我们可以看出，在模拟结果中，当振动最大速度处于 $0.4m/s$ 到 $0.7m/s$ 之间时，颗粒流动速度出现异常点，其产生原因需要进一步讨论。

## 5 实验

铁架台固定受摩擦罐子，用连接在往复电机上的另一罐子摩擦，两次用挡板限制移动范围。另有一数显PWM调速器调节电机转速，实验装置如图7。

### 实验步骤：

1. 固定受摩擦罐子，将摩擦器置于其上方；
2. 打开受摩擦罐子，用调速器调节电机转速，启动摩擦装置，开始计时；
3. 流出盐达到一定量后，关闭装置，停止计时，量取流出盐体积；
4. 重新罐装，测量3次取平均值。
5. 一组测完后，更换不同湿度的盐，再进行测试。

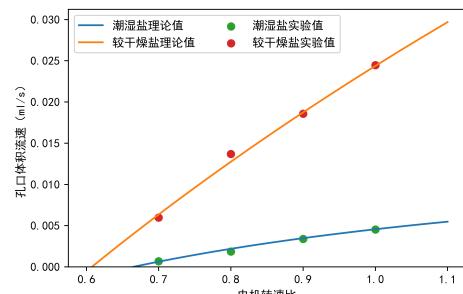


Figure 7. 实验装置图

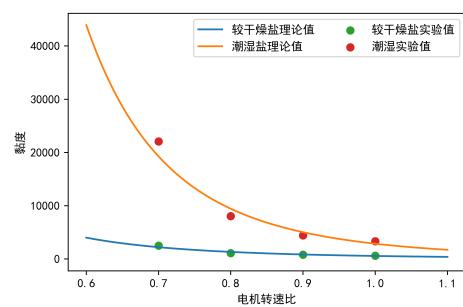
由于实时摩擦速度不便测量，我们采用电机当前转速与最大转速的比值来衡量摩擦快慢。实验结果与理论对比见图8。

### 实验结论：

盐的含水量对于实验现象有着显著的影响，完全干燥的盐在孔径较大的容器中可以迅速的流下，随着盐潮湿程度的增加，使其恢复流动的摩擦速度也在增加。



(a) 颗粒压强模型



(b) 流体粘度模型

Figure 8. 两种理论模型与实验结果比对

摩擦速度是流速的影响因素之一，随着摩擦速度的增大，颗粒物质的流出速度增大，且增大的程度随摩擦速度增大而减小，计算机模拟与实验结果基本符合颗粒压强模型，采用黏度概念描述时，结果大致符合幂律流体。

## 6 展望

限于实验条件，本次实验的测量范围与测量精度都很有限。进一步实验可以换用更快速的电机来提高测量范围，进行更多数据测量，或是选取更精确、更容易控制的实验方案，以摆脱难以控制的实际摩擦。

本次实验对于所采用的盐的湿度没有进行定量测定，盐在流动与填装过程中，湿度会有一定的改变，造成误差。进一步实验可对于盐的含水量进行定量控制，减小误差，并对盐的含水量带来的影响进行定量分析。

计算机模拟结果显示，在振动最大速度在 $0.4m/s$ 到 $0.7m/s$ 之间时，颗粒流动速度出现异常点，与现有理论不符，其产生原因需要进一步讨论。实验由于测量范围有限，并未得到类似现象，在进一步实验中值得关注。计算机模拟可以

加入类似颗粒破碎与黏连的机制来进一步贴近现实。

**Address:** School of Physics, Huazhong University of Science and Technology  
**Email:** sunyuchen@hust.edu.cn

## 致谢

感谢物理实验创新基地(IBPE)成员的协作与指导。

## 参考文献

- [1] 陈新,李维辉,张宏, 等.颗粒物质的压力屏蔽效应[C]. 第四届全国高等学校物理实验教学研讨会论文集,重庆大学, 2006, pp. 407-409.

## 附录

**Table 1.** 实验数据

电机相对速度	较干燥盐	
	所用时间 (t)	流出体积 (ml)
1.0	126	2.5
	119	3.4
	116	2.9
0.9	120	2.6
	105	2.0
	100	1.5
0.8	101	1.3
	117	1.7
0.7	183	1.2
	166	0.9
电机相对速度	较潮湿盐	
	所用时间 (t)	流出体积 (ml)
1.0	231	1.2
	166	0.7
	120	0.5
0.9	345	2.1
	172	0.5
	207	0.8
0.8	201	0.45
	235	0.35
0.7	573	0.4
	756	0.5

# 螺纹管转动发声现象简单探究

**Lin Zhou**, School of Physics, HUST

**Zhengnan Jia**, School of Physics, HUST

**Qizhi Zhu**, School of Physics, HUST

本文针对螺纹管转动时发声的问题展开了探究。通过调研与分析基本给出了发声的定性半定量模型。并根据实验，基本确定了螺纹管发声频率 $f$ 与螺纹管中风速 $v$ 和螺纹管长度 $L$ 之间存在近似关系式 $f = k \frac{v}{L} + f_0$ (其中 $f$ 声管发声频率, $v$ 螺纹管中的风速,  $L$ 为螺纹管的长度,  $f_0$ 为受多种因素影响的物理量,  $k$ 是一个与 $L$ 和 $v$ 无关的常数)。

## 1 引言

发声的管子、笛子、发声的木棍等等类似的东西被用作一种乐器来产生悦耳的音乐，它们也被制作成玩具供人们娱乐消遣，其中螺纹管发出的声音尤为独特，这就是为什么科学家们一直在理论上和实验上对螺纹管进行研究。



Figure 1. 螺纹管及内部结构

找到了一根螺纹管后，我们就按照前辈们的实验观察了一下螺纹管的发声特性，发现，如果我们手固定其一端，并使管的另一端转动(如图5，转动方向和)，发现这根螺纹管可以发出类似火车汽笛的呜呜声。



Figure 2. 转动声管的方式

而且声管转得越快，它发出的声音也就越尖，

然后我们又找了一根长度与内径相等的不带螺纹的声管，发现无论如何去转动它都不会发声，为什么转动越快发声频率越高呢？又为什么必须要有螺纹才能发声呢？本文针对转动声管的角速度、声管的长度、内径以及螺纹对声管发声特性的影响展开研究。

## 2 思路

### 2.1 参考资料

我们查阅了流体力学[1]、声学相关的资料[2][3]和论文[4]。我们发现其中原因比较复杂。转动的速度、管的直径、长度、材料、螺距等因素都可以影响声管发声特性。

### 2.2 发声原因分析

首先，通过浏览上述资料，我们了解到：声管发出的声音本质上是管内部的气流以一定的速率通过螺纹管时管内部的空气振动产生的声音。

所以声管的发声也是一种受迫振动，参考受迫振动的公式：

$$x = B \cos(\omega t - \phi) \quad (1)$$

$$B = \frac{\epsilon_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \quad (2)$$

(其中 $x$ 为振子振幅, $\omega$ 为振动角频率, $\phi$ 为初始相位, $\delta$ 为阻尼系数, $\omega_0$ 无外力下的简谐振动角频

率, $\epsilon_0$ 为外力)当内部气流的振动达到螺纹管的固有频率时[5],就会引起声管发声。

又根据伯努利方程,我们可以发现,声管转动导致管两端空气流速不一样,管两端压强不一样使得管内部有空气流动,而管两端的速度差的大小跟管本身的长度有关。此外,管的震动与一些阻力因素难免导致管内部风速的衰减,而管越长,其影响也就越大。所以我们首先推测,声管发声的频率与管长有关。

因为发声与管内部的空气振动有关,且管内空气流动的速度与和管的内径会影响管内形成的驻波的形状,我们又推测发生的频率和管的内径与管转动的速率有关。由于实验装置功率的限制,我们无法去证明转动声管等价于直接对着管口吹风,所以我们引用了论文中的结论[5]:声管转动导致的管内空气流动等价于直接往管里吹风。故前面的推测可以转化成:声管发声的频率还和声管本身的内径大小与吹风速率有关。

如上文所述,我们曾经尝试过转动一个没有螺纹的直管,发现它不会发声,于是我们遇到了一个大难题:前面我们推测的声管发声因素并不包括声管的螺纹,但是实验发现只有转动带螺纹的声管才可以发声,怎么才能建立螺纹与声管发声之间的关系呢?

音乐家们可以使用装有不同深度的水杯演绎出悦耳的音乐,思考了它的发声原理后,我们得到很大的启发:我们可以从声管内部如何产生驻波来分析螺纹的影响!

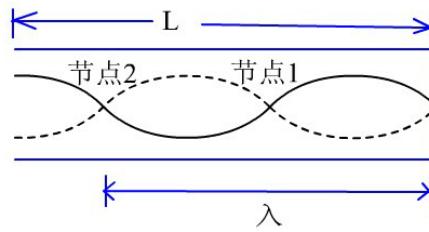


Figure 3. 一段半封口管中的驻波

通常情况下,在图3这样一段封闭的管中由于波的反射与叠加使得管内形成了驻波从而发声,参考公式:

$$L = \frac{n\lambda}{2}, v = \lambda \quad (3)$$

而我们在转动螺纹管的时候它是两端开口的,为什么也可以发声呢?

考虑到螺纹管与直管最直观的区别是多了螺纹,所以我们打算从螺纹下手。

我们查阅了一些资料后,发现了一个与螺纹管的结构很相似的模型——斯特劳哈尔模型(如下图):

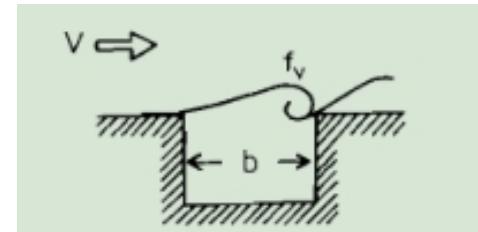


Figure 4. 斯特劳哈尔模型

它满足:

$$S_r = \frac{bf_v}{v} \quad (4)$$

(其中 $S_r$ 为常数,b为螺纹间距,v为层流风速, $f_v$ 为振动发声的频率)

在一个平面上稳定流动的流体突然遇到一个很大的拐角,此时流体流动不再稳定,这个过程使得流体流速增大,出现剪切流引发空气振动,同时声压会推动空气流持续前进。

类比斯特劳哈尔模型,我们知道:凹槽会导致空气流进凹槽内部,同时会使得空气流速加快。而对于凹槽,它是一个两端封闭的结构,于是我们根据一段半封闭管内形成驻波的原理想到:也许是空气流进入凹槽内部的时候在这个封闭结构中形成了驻波导致的发生!

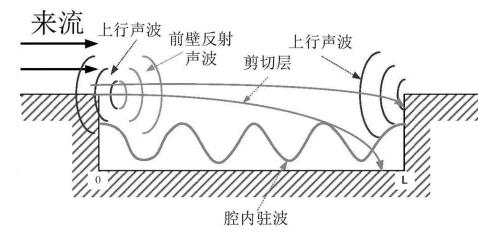


Figure 5. 构想模型

所以我们构想出如上图5的模型来解释声管发声的原理:

容易看出,根据我们假设的这个模型,螺纹管的螺距也是影响发声频率的因素,但是由于条件限制,我们暂时没有对该实验因素进行探究。

然后根据低流速、常温、常压的实验条件，我们提出两个合理假设：

1、气流通过管道时能量守恒，符合理想流体的伯努利方程

2、声的传播符合声学的波动方程

我们推想的发生原因是建立在这样的假设下的。

我们查阅了相关资料[6]，发现它与结构涡激振动类似，图4给出了说明流体声学不稳定性开始的框图。

所以与结构涡激振动，我们所考虑的系统由两个子系统组成：

固有频率等于 $n\xi_0$ ( $n = 1, 2, 3 \dots$ )的声学子系统和以剪切层频率 $f_v$ 为固有频率的流体子系统，这两个子系统是强耦合的。声学子系统受涡激压力的驱动，而流体子系统受声压的影响和控制。因此，波纹管中的声振荡应该是在这种流-声耦合系统中发生的自激振荡。

子系统一：由伯努利方程得：

$$p_s + \rho(\frac{1}{2}v_s^2 + \omega^2 s^2) = const \quad (5)$$

(其中 $v_s$ 为轴向空气流速， $\omega \times s$ 为管口旋转速度)在稳定状态下，压强差：

$$p = p_0 - p_s = \frac{1}{2}L^2\omega^2 \quad (6)$$

管内通过稳定流动的空气，空气流进入凹槽内部使得管凹槽内部的驻波持续存在，使声音持续产生。

子系统二：声场中的运动方程：

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla p \quad (7)$$

(其中 $\rho$ 是空气的密度， $p$ 是空气压力分布) 声压推动空气流持续向前流动。

这样两个子系统间的相互作用使得整个系统可以持续运作。

### 2.3 计算模拟

确定了可探究的实验变量后我们建立了相关的物理数字模型来验证我们的假设前提：我们采

用COMSOL进行数字建模，添加物理场帮助我们分析实验。

我们首先按照实验时使用的声管为模拟声管设定参数，其中包括声管内径和声管螺距(我们尽量将数据保持与实验时数据一致，但是由于计算机能力有限，只能拟合比较短的声管，所以没有真实模拟管长因素)。

建模结果如下：

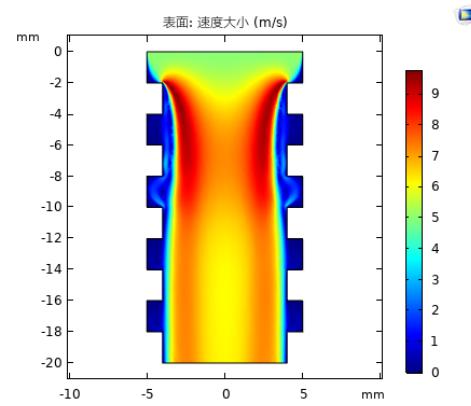


Figure 6. COMSOL仿真结果

虽然没能模拟出目标对象，但观察图6中气流在管内的流动走向，可以发现：在螺纹管的管槽内气流的流动方式与图4中的一致，即平稳的气流流入声管，经过一个个管槽的时候，气流变成了涡流，这可以说明我们假设的斯特劳哈尔模型是成立的，并且凹槽内部靠近底部的部分也类似驻波的形状。

此外，观察管内的模拟气流的速率可以发现，气流在管中间流动的时候风速变化近似均匀，这也与我们的假设相符合。

## 3 实验

### 3.1 预实验

目的：

- i. 确定声管甩动的角速度是否可以用管中的风速代替
- ii. 声管的弯曲是否存在影响

转速差可以使管内存在定向气流，满足子系统发声条件。据此我们得出结论：角速度等效于风速。

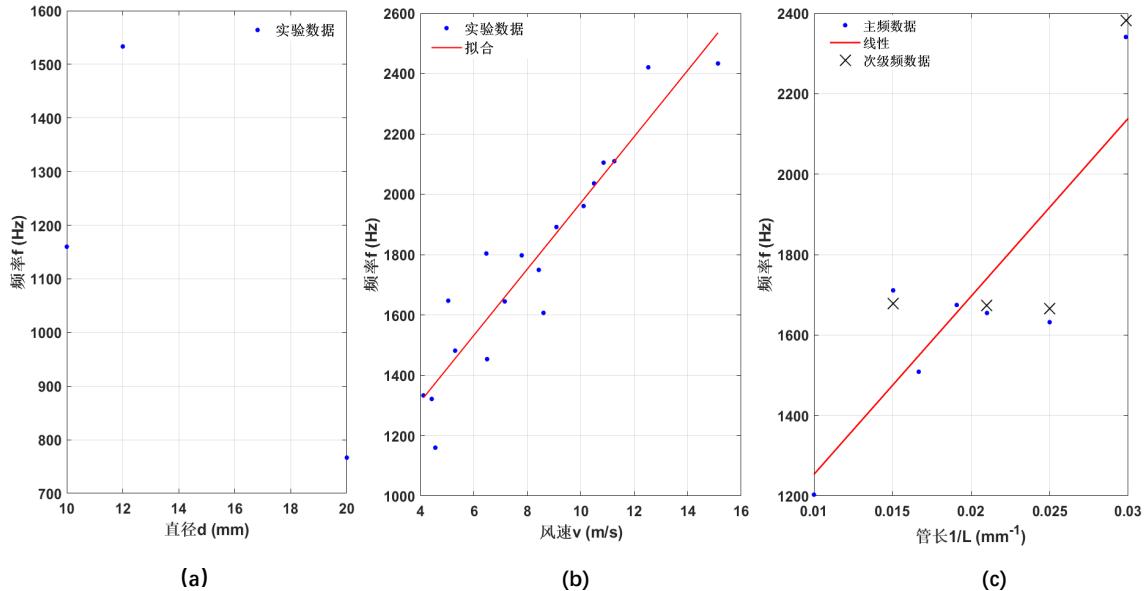


Figure 7. 实验结果

无论我们将另一端以任何角度弯曲，屏幕上显示的声音频谱没有发生明显变化。我们可以得出结论：声管的弯曲程度对声管发声特性无影响。

排除了一些无关变量和实验条件无法探究的影响因素后，我们推测：频率 $f$ 与风速 $v$ 、管口直径 $D$ 、管长 $L$ 存在一定的函数关系。

## 3.2 正式实验

搭建实验装置 根据上述思路并结合参考文献[7]，我们搭建的实验装置如下图：

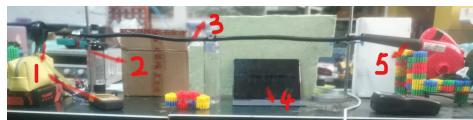


Figure 8. 实验装置

实验方法 利用上面的实验装置如图8，开始正式实验。

实验时采用控制变量法，多次试验，逐个研究变量和频率间的函数关系。为减小实验误差，每组实验做三次，每个变量做6次实验。将所得数据记录下来，经过后面数据处理，绘成图表。

## 3.3 数据处理

说明，为了使图像更加可视化，我们将风速数据均变成原来的50倍

实验过后，我们对音频进行了处理。对录制的声音进行频谱分析，通过对比大致排除了环境与鼓风机噪音的影响，并取其中强度最高的单一频率为此实验条件下管的激发频率，汇编成表。

再将表中的数据导入MATLAB，生成对应的图像。

结果如图7所示，可以看到：由于图(a)中内径数据过少，无法根据图表得出发声特性与管内径之间关系的有效结论；通过(b)表可以看出，在管内径为10mm，管长为1m的情况下，声管发声频率与风速 $v$ 呈线性关系，相关系数 $r = 0.9403$ ，可见线性关系比较强；通过图(c)可以看出，在风速为4.9m/s，内径10mm的情况下，声管发声频率与 $1/L$ 有一定的线性关系，相关系数 $r = 0.8513$ ，线性关系也比较强。可以大致说明线性关系的假设是对的。

在将两个有效图像之间的系数进行对比，利用风速组拟合图像对应的方程与管长组拟合图像对应的方程在各变量都一样的情况下，计算拟合方程的 $k$ ，得到两个 $k$ ，分别为： $k_1 = 10032.45, k_2 = 10988.45$ ，两个 $k$ 的计算值差别较

小，故实验结果可信度较高。

### 3.4 结果分析

实验结果基本印证了理论模型，说明理论模型大体上是正确。因变量 $f$ 与自变量 $v, L$ 之间存在较强线性关系，满足关系式：

$$f = k \frac{v}{L} + f_0 \quad (8)$$

(其中 $f_0$ 拟合得出的值为842Hz,  $v$ 为螺纹管中的风速,  $L$ 为螺纹管的长度,  $k$ 为受半径、螺距等因素影响的常数)

对于常数 $f_0$ , 我们推测其为声管振动的固有频率, 参考图5可以知道, 对于任何满足 $\frac{n\lambda}{2} = d$ 的空气流均可以在螺纹内部形成驻波, 又由于该过程为受迫振动, 管本身的振动项会在很短的时间内衰减为零, 我们记录数据时也是在数据基本稳定时记录的, 故在吹风过程中不同频率是由螺纹中不同的 $n$ 主导的, 逐渐减小风速时, 受迫振动的影响也会逐渐减小, 当风速减小到零时, 此时频率完全取决于声管的固有频率, 故分析 $f_0$ 应当是声管的固有频率。然而, 实验中有些实验组呈现出乎意料的次级频率。我们分析后认为: 由于湍流可以分解成一个平流和一个随机流, 可能在随机流流速变化过程中, 有一部分空气流的速度达到了可以激发更高的 $n$ 的速度, 从而产生了一部分的更高层级的频率, 而且容易看出, 与对应层级相距越近, 产生对应层级频率概率越大。

我们分析了数据处理过程中出现的那些很明显的次级频率, 将这些次级频率与原始数据中其它的数据对比(如图7), 发现这些次级频率与相邻层级的频率很接近, 说明次级频率确实是由于随机流的不确定性造成的, 而且很大概率会出现在相邻层级上。

为了将猜想定量化, 我们进行了简单的计算, 取常温下的声速为340m/s, 利用公式 $v = \lambda f$ 并代入前面拟合数据计算得出此时的波长为:  $\lambda = 0.4m$ , 我们使用的声管螺距为3.8mm, 发现此时的波长远大于螺距, 说明 $f_0$ 不是直接由螺距引起的量, 其中应该还有别的影响因素。

## 4 总结

### 4.1 实验感想

我们组是第一次进行相关实验的研究。实验设计、数学模拟、数据处理等等方面都显得有些幼稚笨拙, 也遇到了许多困难, 犯了从设计到数据分析几乎所有的错误, 但是我们都坚持下来了。我们认为我们在做实验中吸取的教训比实验本身的成功与否更重要更珍贵。我们得到的最大教训就是: 做实验一定要严谨, 严谨, 再严谨!

经过这次实验, 我们更加明白我们实验思维的不足。起初我们的实验方案漏洞百出, 但是经过不断的完善我们的想法并提高我们对知识和实验本身的认知, 我们的实验方案逐渐地完善, 我们也逐渐培养了更加严谨的实验思维, 增强了我们建模、处理实验数据和论写作文的能力, 也让我们对科研工作有了初步的了解。同时通过这次的实验过程我们也积累了很多的经验, 为日后的学习工作打下了一定的基础, 相信我们之后可以做得更好!

### 4.2 缺陷

我们的实验存在许多缺陷。比如: 预实验没有采集数据, 无法支撑我们的假设, 也没有探讨多普勒效应是否可以忽略; 正式实验的一些变量实验组数不够; 数据名称繁杂, 处理起来耗费精力; 风速仪读数变化过大, 变化范围从 $\pm 0.5m/s$ (精度:  $0.01m/s$ ), 不准确度过高; 同时由于知识储备问题, 进行试验过程中我们没有进行平行重复实验, 各种误差会导致实验精度降低。

测风速仪测量位置和角度因移动而有变动, 导致拟合曲线相关系数准确度降低; 实验结论只是在一定范围内( $1-20m/s$ )成立, 不一定适用于空气流速较大的情况; (根据我们的实验结果初步推测: 更大的风速时可能会出现形状类似双曲线的曲线)



# Automated Graphite Trace Drawing Using Arduino

**Haobo LI,** Functional Materials 1802, School of Materials Science and Engineering

*Pencil-drawn lines on paper are considerably conductive, but the performance can easily be affected by environmental factors. Research about pencil-drawn lines has led to breakthrough in sensor field, but it's still necessary to develop a low-cost device to apply graphite trace on paper. Simple device was used previously but with little success. A new device featuring a movable X-Y frame and multi-axial linear motion controlled by Arduino will solve the problems in motion control and stability. Pencils with flat tip and mechanical pencil holder is also used to optimize pressure application. Two groups of step motor and belts control different phases of the preparation. The sample will be fixed to the pressure sensor on the table. Real-time data of status (e.g. pressure) will also be collected.*

**Keywords** *Pencil-drawn lines on paper, multi-axial linear motion, Arduino, step motor, belt transmission.*

## 1 Introduction

### 1.1 Problem background

The conductive graphite trace has become a problem in both IYPT and CUPT 2020, in which physics lovers worldwide are taking part. The problem is as follows:

*A line drawn with a pencil on paper can be electrically conducting. Investigate the characteristics of the conducting line.<sup>[1]</sup>*

Pencil has been a popular writing tool whose history dates back to the 16th century.<sup>[2]</sup> Typical pencil lead is mainly made up of graphite, and sometimes contains tiny amounts of wax and clay to keep the cylindrical or cuboid shape on macro scale. The layered structure makes graphite an excellent electric conductor, and more importantly, an easy way to draw on rough surfaces.<sup>[3] [4]</sup> Depending on the proportion of graphite, pencils are graded in the HB scale. H is for hardness due to more amount of clay, while B stands for blackness caused by more graphite.<sup>[5]</sup>

Paper is an inexpensive and ideal writing material. Cellulose fibers, its main component, accounts for its porous and rough surface. Pencil trace on paper are derived from gentle mechanical abrasion. The trace even contains graphene, a wonderful material. Paper are classified according to its usages, which has strong relations with surface roughness. This difference results in dramatic changes on the conductivity of pencil traces. The trace is considerably conducting only on paper with sufficient roughness because graphite particles are connected and continuous. When the

paper is too rough, separated chunks of graphite occur i.e. the conductivity is weakened.<sup>[3] [4]</sup>

To investigate characteristics of the conducting line, electrical parameters (e.g. resistance rate) and morphological parameters (e.g. physical dimensions and density) must be considered. These properties can be visualized as resistance (vs length, width and thickness), pressure and repetitions during drawing.<sup>[6]</sup> Research on several environmental variables, include type of pencil or paper, are also of great significance.

### 1.2 Literature review

Drawing pencil trace on paper is solvent-free, time-saving and cost-friendly,<sup>[7]</sup> therefore it attracts keen interest from researchers. A number of pencil-on-paper devices have been developed in this simplest way, which paves shortcuts in the field of sensors. Conductivity changes with deformation, humidity and chemicals are used in these cases. Other applications include energy storage (e.g. batteries, supercapacitors)<sup>[8]</sup> and biomedics.

Liao et al.<sup>[9]</sup> fabricated a pencil-drawn strain sensor for human motion. The sensor can work at a voltage of only 3 V with fast response/relaxation times and high stability. They found that microcracks occur on the surface of the pencil-trace have a major influence on conductivity, hence the functions. Y. Zhang et al.<sup>[3]</sup> developed a facile humidity sensor using the pencil-drawing method that is also of good performance in sensitivity, linearity and stability. They reported that repetitions of drawing pencil-trace on ceramic substrate has a strong effect on the

Author	Pencil	Substrate	Size
Liao et al.	N/A	Xerox paper	40 mm × 5 mm
Park et al.	4B; Tombow	Cu foil	14 mm diameter
Zheng et al.	Graphite rods	Xerox paper	2 cm wide
J Zhang et al.	8B; Chung Hwa	Weighing paper	23.6 mm × 11.6 mm
Y Zhang et al.	HB, 4B, 8B; Chung Hwa	$Al_2O_3$ ceramic substrate	6.8 mm × 3 mm

**Table 1.** Pencil trace preparation methods (1)

Author	Method	Repetition	Remarks
Liao et al.	Ruler-guided; direct drawing	10	Linear I-V characteristics
Park et al.	Simple drawing	N/A	Grinded and polished foil
Zheng et al.	Ruler-guided; direct; orthogonal	3	Drawn along the fiber orientation
J Zhang et al.	Ruler-guided; direct; orthogonal	3	Drawn on Ag electrodes
Y Zhang et al.	Direct drawing; 0.5N pressure	1-5	Monitored with electronic balance

**Table 2.** Pencil trace preparation methods (2)

sensing layer conductivity that is related to humidity sensitivity. This is because of the large gap between neighboring graphite flakes when drawing for fewer times, and carriers are difficult to transfer. J. Zhang et al.<sup>[10]</sup> demonstrated a rapid  $NO_2$  sensor by drawing pencil trace on silver electrodes. They pointed out that the oxidizing analyte of  $NO_2$  withdraws electrons from the multilayered graphene sheets in the pencil trace, leading to a decrease in electrical resistance.

The pencil traces of these devices in these publications are mostly produced by directly drawing the pencil lead onto the paper, usually guided with a ruler and repeat for 3 times to form a uniform coating. Xerox paper and 8B pencils are frequently used owing to reasonable roughness, clear fiber orientation and high percentage of graphite. Size of samples differ, and few mentioned the pressure applied during drawing, see Table 1.<sup>[3] [9] [7] [10] [11]</sup>

Although drawing by hand is of least difficulty, it remains a challenge to ensure the pencil trace is electrical continuous i.e. the graphite flakes are not too far to conduct electricity. Moreover, nobody can guarantee the same performance be obtained again, given the roughness and porosity of paper. Hence, its unrealistic to manually apply pencil lead onto paper or other substrates when it comes to industrial manufacturing. While there are breakthrough of depositing carbon nanotubes by thermal evaporation,<sup>[12]</sup> the technology is unaffordable for undergraduate laboratory explorations. Thus, a cost friendly device to accurately and uniformly apply graphite trace on paper is in strong need.

## 2 Earlier exploration

### 2.1 Attempt

During earlier exploration from November to December 2019, a line drawing instrument was developed to control the speed and pressure. The instrument was based on an idle micro vehicle once used for Arduino engineering projects. The wheels connected to motors were changed into paper rollers spinning in the opposite direction to pull the paper, see Fig.1 (a). Cashier paper was adopted, because its width fits the roller well. More importantly, it is as rough as office paper on the one side, and is smooth on the other one, which largely reduces unnecessary friction. Pressure sensor and ADC module were introduced to collect pressure data. The motors and sensor were connected to an Arduino Uno, which is controlled by serial port command from the computer. I-U characteristics of the samples was tested, as Fig. 1 (b). Pencil drawn lines and traces with larger area ("tablets") are shown in Fig. 1 (c) and (d).

### 2.2 Problems

The instrument was not working as expected due to a shortage of time, and exposed problems as follows. Some of them seriously affected the exploration result.

- 1. No automatic pencil holder to apply pressure.** Group members had to hold the pencil throughout the experiment.
- 2. Paper not fastened.** The device could draw pencil lines only. Traces with larger area (i.e. tablets) were drawn manually.



**Figure 1.** Earlier Explorations. (a) Experiment device used. (b) I-U characteristics of the samples was tested. The DC I-U relation is linear, and AC I-U relation suggested properties of resistor. (c) Pencil lines drawn by the device. (d) Pencil traces with larger area ("tablets"), drawn by hand.



**Figure 2.** Digital camera image of rough (a), smooth (b) surfaces of the samples and a grayscale sensor (c).

3. **No convenient input devices (e.g. joysticks).** Only computer could control and collect data. Typing commands could not control the instrument in time. Sometimes paper got jammed because the roller stopped late.
4. **Rolling speed too fast.** The rolling speed was 1-2 cm/s. Paper broke if applied pressure was over 2N. Whats worse, the speed was constant.

Reproducibility of the samples produced was poor either. Surface appearance, and corresponding resistance rate, varied much between some samples of the same experiment group, suggesting significant uneven distribution of graphite on the paper. In Fig. 2 (a) and (b), both samples were drawn with 2B pencils. However, the surface of (a) is rougher than (b) (and the dark points seem more sparse), which can be judged through the light reflection. G. Zheng et al. [7] suggested this could be fraying of the paper surface caused by drawing against the fiber orientation, but it is more likely that the drawing path was arbitrary and the pressure was unevenly applied.

### 3 The solution

#### 3.1 Overview

To optimize the control procedure, as well as to minimize the influence of uneven pressure and

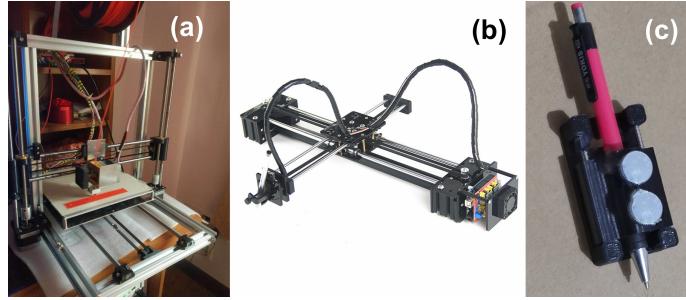
surface, a device ensuring automatic linear motion and pressure application will be developed. Based on the previously used device, major modifications are made in the mechanical part, as is in 3.2.1. Arduino is still adopted as the controller, but is connected to a more variety of sensors, see 3.2.2. Information about machines with multi-axial linear motion (e.g. 3D printer,<sup>[13]</sup> laser engraving machine,<sup>[14]</sup> handwriting robot) are collected from publications and online shopping site (taobao.com). Typical pictures of the devices are shown in Fig. 3.

The paper (hopefully still cashier paper but may change) is fixed on the surface of pressure sensor with the rough side up. The area size for pencil graphite trace drawing is 40 mm × 5 mm, with drawing repetitions ranging from 5 to 15 and pressure ranging from 0.5N to 2N. The surface should be smooth, similar to Fig. 2(b). The 2B pencil to be used, with a flat tip, is specially designed for multiple-choice filling on answer sheets. Cuboid shape of the pencil lead allows the user to barely estimate the volume of graphite used, i.e. the volume of the newly drawn trace. 4B and 8B pencils sharpen to flat tips will also be used later.

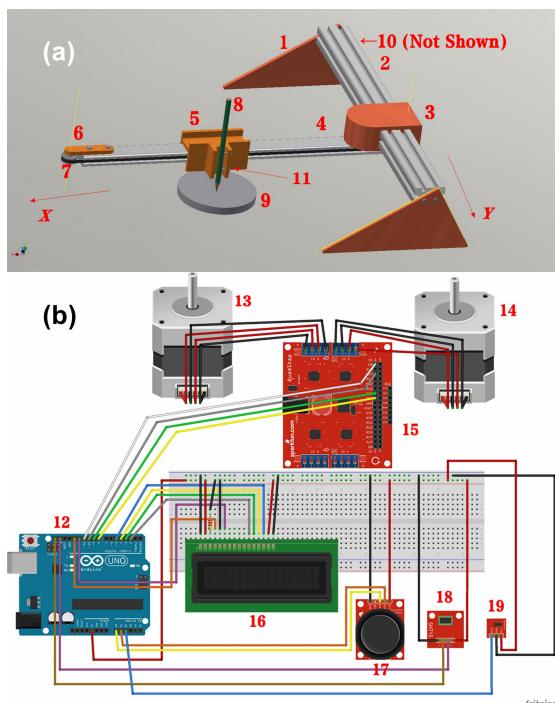
#### 3.2 Details

##### 3.2.1 Mechanical part

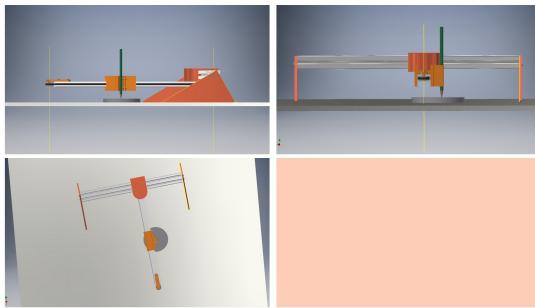
A major part of the new device for graphite trace preparation is the movable X-Y frame. Illus-



**Figure 3.** Devices inspired the design. (a) A 3D printer. (b) A handwriting robot. (c) A pen holder.



**Figure 4.** Schematic picture of the new experiment device. (a) 3D view of the mechanical part, created with Autodesk (R) Inventor (TM) 2016. (b) Control circuit of the new experiment device, created with Fritzing 0.92. Arduino Uno is used as the controller.



**Figure 5.** Three views of the new device

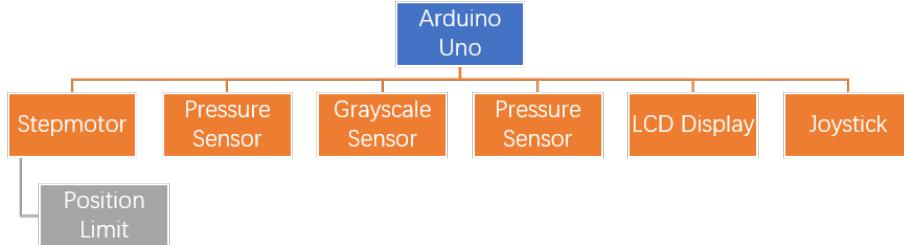
tration of the model is shown in Fig. 4 (a), and Fig. 5 is the three views. [15] This part was designed with reference to a product on [taobao.com](#) named Frame for laser engraving machine or mapper. The model was created with Autodesk(R) Inventor (TM) 2016.

A pair of supports (1) is attached to the frame. Consider the right-handed cartesian coordinate system, assume the axis (2) with double triangular supports is Y-axis, and the other (4) is X-axis, respectively. Two step motors are introduced to increase accuracy, and they are embedded in the slider (3) on Y-axis (2). Also embedded are power module and motor driver board. The X-axis (4) is fastened with slider (3), and one end of the belt (7) is connected to X-axis (4) via connector (6). Both axes are driven by belt transmission (7) (10) which are driven by step motors. [16] Assume that the sample size is 50 mm × 10 mm, and paper for preparation is pasted on top of the pressure sensor (9). The pressure sensor (9) then transmits real-time pressure data to computer or special storage.

The pencil (8) with a flat tip starts from one side of the sample. Once the program starts, the X step motor tracts belt (7) and moves slider (5). The pencil (8), fastened with slider (5) by two bolts (11), moves to the other side slowly. The pressure can be adjusted by moving the pencil (8) up and down, and by adjusting the bolts (11). It goes the opposite direction once reaching the other side. Therefore, the relation between the number of repetition  $n_r$  and the time the pencil reaches the other side  $n_o$  is as follows:

$$n_r = n_o + 1$$

When  $n_r$  reaches an assigned value, the Y step motor tracts belt (10) and moves slider (3) as well as every object connected to X-axis (4) forward. The drawing process is repeated, until the whole sample is applied with pencil trace.



**Figure 6.** Organization chart of the hardware

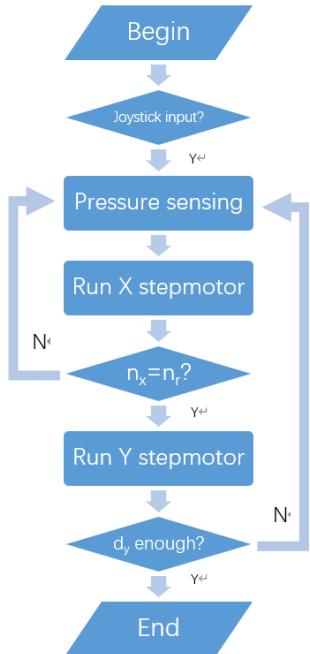
### 3.2.2 Control part

The Arduino Uno is an open-source microcontroller board developed by *arduino.cc*. The board is equipped with sets of digital and analog input/output (I/O) pins that may be interfaced to various expansion boards (shields) and circuits (usually sensor modules).<sup>[17]</sup> Using Dupont lines to connect I/O pins and expansion devices saves time for circuit construction. It is also programmable with the Arduino IDE (Integrated Development Environment), and the programming language has a similar syntax structure with C++. A USB cable serves as power and data transmission. Arduino is chosen as controller here both for its compatibility for different sensor modules and its ease of use.

Circuit diagram of the control part is shown in Fig. 4 (b). The control part is based on previously designed Arduino Uno controller (12) that offers several wire sockets for convenient plugs. Arduino is compatible with various sensors, input/output devices and motors. The control program is still under development, however, organization chart for the hardware and workflow of the program is described as Fig. 6 and 7, respectively. (13) (14) are step motors, and (15) is the motor driver board.<sup>[18]</sup> The circuit diagram was created with Fritzing 0.92, and some modules may differ from what in the actual device. Here, we move the joystick (17) to start or stop the program. Here, the time  $t$  to change the direction is decided by speed  $v$  and the length of the sample  $l$ :

$$t = \frac{l}{v}$$

The LCD display (16)<sup>[19]</sup> indicates current repetition number and pressure collected from sensor (18). The grayscale sensor (19) will be used after the fabrication finished to do qualitative analysis on graphite density, i.e. to judge if the surface is "dark enough" and if the trace is uniformly prepared. See Fig. 2 (c) for a typical grayscale sensor.<sup>[20] [21]</sup>



**Figure 7.** Workflow of the control program

## 4 Summary and prospect

Pencil lead is mainly made up of graphite. The layered structure of graphite makes it an conductive and easy to draw conductive traces (or lines) on rough surfaces like paper. However, in exploration with the previously designed device, their conductivity greatly depended on the hands of the user, which affected drawing pressure, and fiber orientation. To optimize the control procedure and minimize the influence of human, a

new device controlled by Arduino that ensures automatic linear motion and pressure application is being developed. The type, lead shape and nipping manner of the pencil is optimized. Manner for Trace drawing and paper fixing are also modified. Finally, hope the coronavirus outbreak cease soon, so that students are allowed to return to HUST and enjoy sunshine and flowers. It will also enable the author to test the new device, as well as to continue exploration about the structure of graphite on paper and its influencing factors.

## Acknowledgement

This work is part of the 2020 winter vacation task of HUST Innovation Base of Physics Experiment (IBPE). The author thanks HUST for its off-campus online resource access during the special vacation. Mental and material support from the authors family is gratefully acknowledged. The author also acknowledges the fellow members of IBPE, whose strong peer pressure pushed the author forward.

**Haobo LI** is the New Year Scroll Writing Engineer and Household IT Consultant of The Lees. He is also an Undergraduate Brick Mover working for Huazhong University of Science and Technology (HUST).

**Address 1:** The Lees, Fuzhou 350004, Fujian, PR of China

**Address 2:** School of Materials Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology (HUST), Wuhan 430074, Hubei, PR of China

**Email:** haberlee@hust.edu.cn

## References

- [1] Problems for the 33rd IYPT 2020. [http://iypt.org/wp-content/uploads/2019/07/IYPT\\_2020\\_Problems.pdf](http://iypt.org/wp-content/uploads/2019/07/IYPT_2020_Problems.pdf). Accessed February 20, 2020.
- [2] D. Harper. Pencil. Online Etymology Dictionary. Retrieved June 27, 2012.
- [3] Yong Zhang et al. Drawn a facile sensor: A fast response humidity sensor based on pencil-trace. *Sensors and Actuators B*, 261:345–353, 2018.
- [4] Narendra Kurra and Giridhar U. Kulkarni. Pencil-on-paper: electronic devices. *Lab Chip*, 13:2866, 2013.
- [5] Graphite Grading Scale Explained — Pencils.com. <https://p6Hdls.com/pages/hb-graphite-grading-scale>. Accessed November 9, 2019.
- [6] IYPT 2020 problem 10: Conducting lines (in Chinese). <https://www.bilibili.com/video/av65447558>. Accessed February 20, 2020.
- [7] Guangyuan Zheng et al. Paper supercapacitors by a solvent-free drawing method. *Energy Environ. Sci.*, 4:3368, 2011.
- [8] Cheng-Wei Lin et al. Pencil drawn strain gauges and chemiresistors on paper. *Scientific Reports*, 4:3812.
- [9] Xinqin Liao et al. Flexible and highly sensitive strain sensors fabricated by pencil drawn for wearable monitor. *Adv. Funct. Mater.*, 25:23952401, 2015.
- [10] Jiankun Zhang et al. Pencil-trace on printed silver interdigitated electrodes for paper-based NO<sub>2</sub> gas sensors. *Appl. Phys. Lett.*, 106:143101, 2015.
- [11] Hyean-Yeol Park et al. Fabrication of binder-free pencil-trace electrode for lithium-ion battery: Simplicity and high performance. *Langmuir*, 32:44154423, 2016.
- [12] K. A. Mirica et al. *Angew. Chem., Int. Ed.*, 51:10740, 2012.
- [13] Yupeng Guo. Study on the overall design and forming technology of FDM desktop 3D printer (in Chinese). *North University of China*, 2017.
- [14] Xiaoli Yang. Research of the structure and control system of laser engraving machine (in Chinese). *Changchun University of Science and Technology*, 2018.
- [15] Gaohong Yang. Research on H-section steel column surface rust remover based on Solidworks (in Chinese). *China Southern Agricultural Machinery*, 50(20):141–142, 2019.
- [16] [Experience] Operate step motor with driver board via UNO (in Chinese). <https://www.arduino.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=83597&highlight=%E6%AD%A5%E8%BF%9B%E7%94%B5%E6%9C%BA%2B%E9%A9%B1%E5%8A%A8>. Accessed February 20, 2020.
- [17] Arduino Uno. [https://en.wikipedia.org/wiki/Arduino\\_Uno/](https://en.wikipedia.org/wiki/Arduino_Uno/). Accessed March 6, 2020.
- [18] DMOS microstepping driver with translator. <http://dlnmh9ip6v2uc.cloudfront.net/datasheets/Widgets/A4983SETTR-T-Allegro-datasheet-123643.pdf>. Accessed February 20, 2020.

- [19] Arduino: LCD1602 Liquid Crystal Display (in Chinese). <https://www.arduino.cn/forum.php?mod=viewthread&tid=76294&highlight=LCD1602>. Accessed February 20, 2020.
- [20] Weiguang Jiang. Photo-electric conversion technique for OMR (in Chinese). *Modern Scientific Instruments*, 6:31–32, 1999.
- [21] Yongyong Liang. OMR marking principle and information card filling (in Chinese). *Today Science & Technology*, 5:45–47, 2006.

# 平面双摆系统混沌性的探究

**Yuchen Sun, School of Physics**

本文利用李雅普诺夫指数，对平面双摆系统的混沌性进行了初步的探究，文中介绍了李雅普诺夫指数的定义。并使用Wolf提出的GSR方法[1][3]，应用Python编写了数值计算李雅普诺夫指数的程序。在无阻尼和有阻尼两种情况下，绘制了不同初始角度下的李雅普诺夫指数谱图，并对于双摆的周期运动及混沌区间进行了分析。

## 引言

混沌是一种发生在确定性系统之中复杂的不规则运动，对于初始条件及其敏感，混沌理论表明，即使系统初始状态条件的细微差别，系统演化也可能导致显著差异，因而对混沌系统的长期演化结果是不可预测的。而平面双摆系统，正是一个简单的混沌系统。

虽然对于混沌的研究，已经有了半个多世纪的历史，然而，对于什么是混沌，至今依然没有一致的严格定义。不过，人们在对其的不断研究之中，找到了几个可以定量分析混沌系统的量，如：李雅普诺夫指数、分维数、自相似维、柯尔莫洛夫熵等。在本文中，对平面双摆系统的李雅普诺夫指数进行了数值计算与分析。

李雅普诺夫指数定量阐述了混沌最为本质的特性——对于初始值的高度敏感性，它反映了经长时间演化后，系统相邻轨迹的分离程度。对于李雅普诺夫指数的计算，有定义法，*Jacobian*方法、以及奇异值分解法等等，本文利用Python实现了定义法的数值计算。

## 1 保守双摆系统的动力学模型

平面双摆系统是典型的二自由度系统。设内球的质量为 $m_1$ ，外球质量为 $m_2$ ，内球与铰链、内球与外球间的连接均为无重量刚性杆，杆长分别为 $l_1$ 、 $l_2$ ，各杆与铅锤线方向的夹角分别为 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ ，并假设空气阻力可忽略不计。取 $\theta_1$ 、 $\theta_2$ 为广义坐标，可表示为 $\theta_1(t)$ 、 $\theta_2(t)$ 。

以铰链为原点，建立直角坐标系，对于内

球 $m_1$ ，有：

$$\begin{cases} x_1 = l_1 \sin \theta_1 \\ y_1 = l_1 \cos \theta_1 \end{cases} \quad (1)$$

对于外球 $m_2$ ，有：

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 \\ y_2 = -l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 \end{cases} \quad (2)$$

系统的动能为：

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \quad (3)$$

其中 $\dot{\theta}$ 为 $\theta$ 关于时间 $t$ 的导数。

以原点 $O$ 为零势能点，系统的势能为：

$$V = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 - m_2gl_2 \cos \theta_2 \quad (4)$$

则系统的拉格朗日量为：

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 \\ &\quad + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ &\quad + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \theta_1 + m_2gl_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad (5)$$

由欧拉—拉格朗日方程得：

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

将拉格朗日量代入上式，得到系统的运动微

$$\begin{cases} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2l_1l_2\dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0 \\ l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2) + g\sin\theta_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

分方程 (式 7)。

观察式 7, 方程存在  $\theta_1(t)$ 、 $\theta_2(t)$  的一阶导数的平方项, 以及关于  $\theta_1(t)$ 、 $\theta_2(t)$  的三角函数等非线性函数, 因而, 式 7 是一个非线性微分方程组, 我们采用数值解的方法探究其动力学特性, Python 的代码实现见附录 5.1。

## 2 双摆系统的李雅普诺夫指数计算

混沌系统最为重要的特征之一是对于初值的敏感性, 即两个极为靠近的初值产生的轨道, 随着时间的推移, 将以指数的方式分离, 最终演化为两种截然不同的情形, 李雅普诺夫指数正是对于这种敏感性的量化, 它表征了系统在相空间中相邻轨道间收敛或发散的平均指教率。通过判断最大李雅普诺夫指数是否大于 0, 可以直观的判断一个动力学系统是否存在混沌: 一个正的李雅普诺夫指数, 意味着在相空间中, 无论一开始两条轨迹有多么接近, 它们的差别会随着时间的推移, 成指数的增加到一个无法预测的程度, 这就是混沌现象。

### 2.1 李雅普诺夫指数的定义

由于我们的研究对象双摆为高维系统, 这里采用 Wolf 的定义 [1], 表述为: 对一个  $N$  维的连续动力系统  $\dot{x} = F(x(t))$ , 其中  $x$  表示一个  $N$  维矢量, 考虑一个以初始状态  $x_0$  为球心,  $\epsilon(x_0)$  为半径的  $N$  维无穷小超球面的演化行为。随着时间推移, 超球面会逐步演化为一个超椭球面, 将椭球的所有主轴按其长度顺序排列, 那么根据第  $i$  个主轴的长度  $\epsilon_i(t)$  的增加速率, 可定义第  $i$  个李雅普诺夫指数:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon_i(0)} \right) \quad (8)$$

可以看出, 李雅普诺夫指数是与相空间之中的轨道收缩或扩张的性质相关联的, 当某个方向上, 李雅普诺夫指数小于零, 轨道收缩, 运动稳

定, 对初值不敏感; 而当某个方向上, 李雅普诺夫指数为正, 轨道迅速分离, 对初值敏感。

根据李雅普诺夫指数的符号, 我们可以定性的了解动力系统的特性。

对于一维情形, 吸引子只可能是不动点, 此时  $\lambda$  是负的, 当  $\lambda$  为正时, 系统呈现混沌状态。

对于二维情形,  $(\lambda_1, \lambda_2) = (-, -)$ , 吸引子是不动点,  $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, -)$ , 吸引子是极限环。

对于三维情形:  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-, -, -)$ : 稳定不动点;

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, -, -)$ : 极限环;

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0, 0, -)$ : 二维环面;

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, +, 0)$ : 不稳极限环;

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, 0)$ : 不稳二维环面;

$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (+, 0, -)$ : 奇异吸引子。

对于四维情形, 以下指数谱对应着奇异吸引子:  $(+, +, 0, -)$ ,  $(+, 0, 0, -)$ ,  $(+, 0, -, -)$  [2]。

### 2.2 李雅普诺夫指数的计算

这里采用定义法进行计算, 第  $i$  个李雅普诺夫指数的定义式为:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left( \frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon_i(0)} \right) \quad (9)$$

在实际计算中, 常取  $\|\epsilon(x_0, 0)\|$  为  $d$  ( $d$  为常数), 以  $x_0$  为球心, 欧几里得范数为  $d$  的正交矢量集  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  为初始球。由动力系统的微分方程可以演化出点  $x_0, x_0 + e_1, x_0 + e_2, \dots, x_0 + e_n$  经过  $t$  时间后演化轨迹, 设其终了点为  $x_{00}, x_{01}, \dots, x_{0n}$ , 则令  $\delta x_1^{(1)} = x_{01} - x_{00}, \delta x_2^{(1)} = x_{02} - x_{00}, \dots, \delta x_n^{(1)} = x_{0n} - x_{00}$ , 则可得到新的矢量集  $\{\delta x_1^{(1)}, \delta x_2^{(1)}, \dots, \delta x_n^{(1)}\}$ 。

由于各个矢量在演化过程中会向着最大的李指数方向靠拢, 因此需要通过 Schmidt 正交化不断的对新矢量进行替换, 即 Wolf 提出的 GSR 方法

[3], 表述如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^{(1)} = \delta x_1^{(1)} \\ u_1^{(1)} = v_1^{(1)} / \|v_1^{(1)}\| \\ v_2^{(1)} = \delta x_2^{(1)} - <\delta x_2^{(1)}, u_1^{(1)}> u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} = v_2^{(1)} / \|v_2^{(1)}\| \\ \dots \\ v_n^{(1)} = \delta x_n^{(1)} - <\delta x_n^{(1)}, u_{n-1}^{(1)}> u_{n-1}^{(1)} - \dots \\ \quad - <\delta x_n^{(1)}, u_1^{(1)}> u_1^{(1)} \\ u_n^{(1)} = v_n^{(1)} / \|v_n^{(1)}\| \end{array} \right. \quad (10)$$

在每次演化后, 将原矢量集正交化成新的矢量集 $\{du_1^{(1)}, du_2^{(1)}, \dots, du_n^{(1)}\}$ 并以正交化后的新矢量集演化, 设演化到地N步时, 得到矢量集 $\{V_1^{(n)}, V_2^{(n)}, \dots, V_n^{(n)}\}$ , 且N足够大, 可得到李雅普诺夫指数的近似计算公式:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -\frac{\ln d}{T} + \frac{1}{NT} \sum_{k=1}^n \ln \|V_1^{(k)}\| \\ \dots \\ \lambda_1 = -\frac{\ln d}{T} + \frac{1}{NT} \sum_{k=1}^n \ln \|V_1^{(k)}\| \end{array} \right. \quad (11)$$

其中T为演化的时间步长, 在实际计算时, 常取单位正交的初始矢量集( $d = 1$ ) [3]。

### 2.3 保守双摆系统的李雅普诺夫指数的Python实现

定义演化向量矩阵

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 & x_5 & x_9 & x_{13} \\ x_2 & x_6 & x_{10} & x_{14} \\ x_3 & x_7 & x_{11} & x_{15} \\ x_4 & x_8 & x_{12} & x_{16} \end{bmatrix} \quad (12)$$

表征相空间里球的演化。

双摆系统的动力学方程可写为:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\theta}_1 = -(\frac{\dot{\theta}_1^2 l_1 m_2 \sin(2\theta_1 - 2\theta_2)}{2} + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \quad + g m_1 \sin(\theta_1) + \frac{g m_2 \sin(\theta_1)}{2} + \frac{g m_2 \sin(\theta_1 - 2\theta_2)}{2}) \\ \quad / (l_1 (m_1 - m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) + m_2)) \\ \dot{\theta}_2 = ((-m_1 - m_2) (\dot{\theta}_1^2 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \quad - g \sin(\theta_2)) - (\dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \quad + g m_1 \sin(\theta_1) + g m_2 \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\ \quad / (l_2 (-m_1 + m_2 \cos^2(\theta_1 - \theta_2) - m_2)) \end{array} \right. \quad (13)$$

双摆系统的Jacobi矩阵为:

$$Jaco = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \dot{\theta}_2} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \dot{\theta}_2}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

求解得:

$$Jaco = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中 $J_{31}, J_{32}, J_{33}, J_{34}, J_{41}, J_{42}, J_{43}, J_{44}$ 见附录式\*。

其演化微分方程变为:

$$\dot{Y} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_5 & \dot{x}_9 & \dot{x}_{13} \\ \dot{x}_2 & \dot{x}_6 & \dot{x}_{10} & \dot{x}_{14} \\ \dot{x}_3 & \dot{x}_7 & \dot{x}_{11} & \dot{x}_{15} \\ \dot{x}_4 & \dot{x}_8 & \dot{x}_{12} & \dot{x}_{16} \end{bmatrix} = Jaco \cdot Y \quad (16)$$

然后进行演化与正交化, N步之后取得李雅普诺夫指数。

求解双摆系统的李雅普诺夫指数数值计算的Python流程图见图 1, 具体核心代码见附录 5.2。计算中调用的库有numpy与scipy的odeint。

以 $\theta_1=1, \theta_2=1$ 时为例, 李雅普诺夫指数计算时的收敛情况如图 2所示。

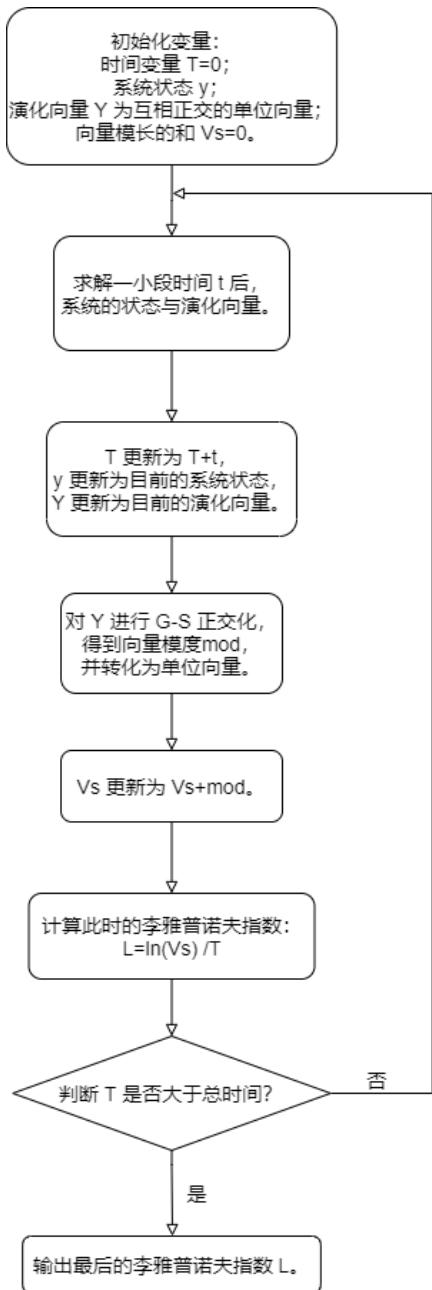
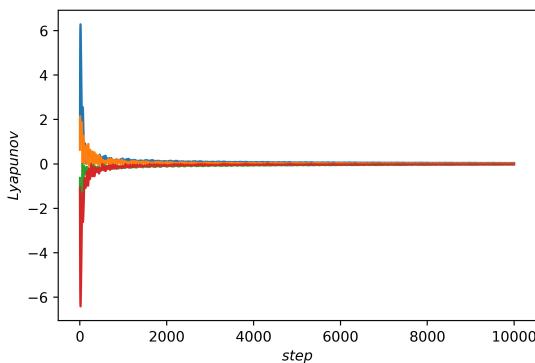


Figure 1. 李雅普诺夫指数计算流程图

Figure 2.  $\theta_1=1$ ,  $\theta_2=1$ 时, 李雅普诺夫指数收敛图

### 3 保守双摆系统的李雅普诺夫指数谱分析

图 3 是保守双摆系统的最大李雅普诺夫指数随初始条件  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  变化而得到的图谱。可以看出, 初始能量较低的位置, 系统的运动较为稳定, 初始能量越高, 系统的运动越趋于混沌。

在  $\theta_1$  与  $\theta_2$  都较小时, 系统基本呈现稳定状态, 当初始能量继续增大后, 系统基本呈现混沌状态。不过, 在  $1.6 \leq \theta_1 \leq 2$ ,  $\theta_2 = 1.4$  这个初始角度较大的位置, 出现了较为稳定的状态。

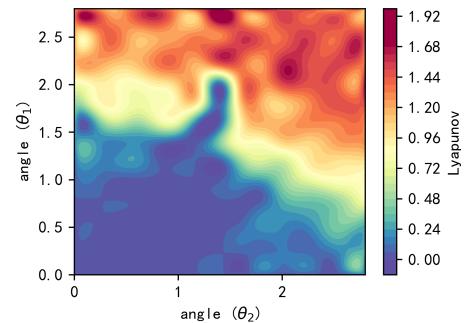
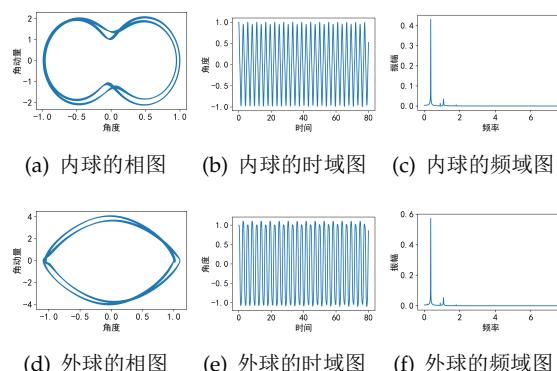


Figure 3. 保守双摆的最大李雅普诺夫指数谱

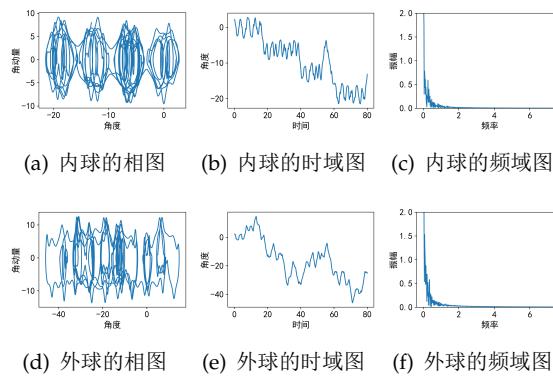
接下来, 我们对于几种不同初始条件下, 系统的运动进行简单分析。

对于  $\theta_1=1$ ,  $\theta_2=1$  较低能量的初始状态, 系统呈现稳定的周期运动, 利用快速傅里叶变换, 可以得到两小球的频域图像 (图 4)。

Figure 4.  $\theta_1=2.2$ ,  $\theta_2=2.2$ 时, 两小球的相图及时域、频域图像

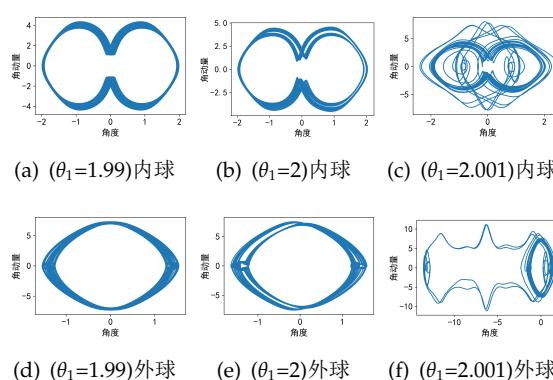
对于  $\theta_1=2.2$ ,  $\theta_2=2.2$  的高能量的初始状态, 系统呈现混沌状态, 频域图像连续 (图 5)。

对于  $\theta_1=2$ ,  $\theta_2=1.4$  的初始状态, 系统呈现拟



**Figure 5.**  $\theta_1=2.2$ ,  $\theta_2=2.2$ 时, 两小球的相图及时域、频域图像

周期运动, 当 $\theta_1$ 增加为2.001时, 系统呈现混沌, 可以得知, 此处为混沌的临界点之一(图6)。



**Figure 6.**  $\theta_1=2$ ,  $\theta_2=1.4$ 附近, 两小球相图

#### 4 阻尼双摆系统的李雅普诺夫指数谱

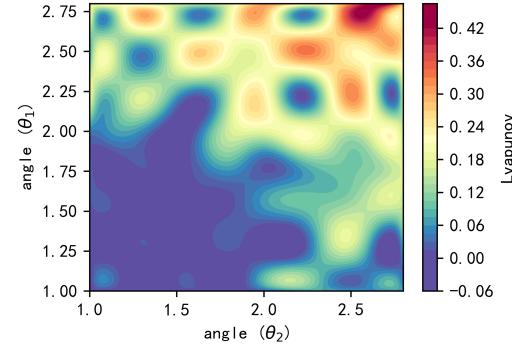
我们在保守双摆系统中加入一个与 $\dot{\theta}$ 呈线性关系的阻尼项, 其微分方程见式17。

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = \dot{\theta}_1 c - b\dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 = \dot{\theta}_2 c - b\dot{\theta}_2 \end{cases} \quad (17)$$

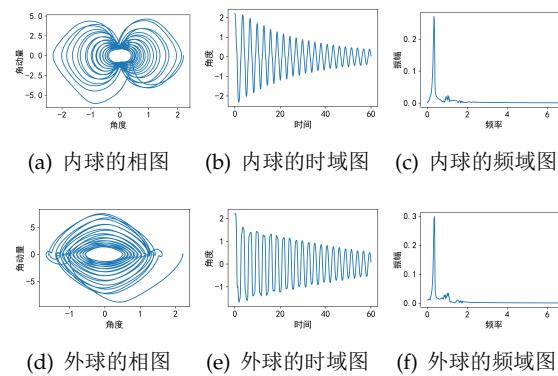
其中 $b$ 为阻尼系数,  $\dot{\theta}_c$ 为保守系统中的角加速度(见式13)。

图7是带阻尼双摆系统在 $b$ 取值为0.05时, 最大李雅普诺夫指数随初始条件 $\theta_1$ ,  $\theta_2$ 变化而得到的图谱。可以看出, 由于阻尼的加入, 混沌运动的范围缩小, 无阻尼系统中在 $\theta_1=2$ ,  $\theta_2=1.4$ 附近

的稳定运动区域也有所扩展, 同时, 如 $\theta_1=2.2$ ,  $\theta_2=2.2$ 等部分初始高能量处, 出现较稳定的运动(图8)。



**Figure 7.** 阻尼双摆的最大李雅普诺夫指数谱



**Figure 8.**  $\theta_1=2.2$ ,  $\theta_2=2.2$ , 有阻尼双摆系统两小球的相图及时域、频域图像

#### 5 结论

本文使用了定义法, 利用Schmidt正交化方法对双摆系统的李雅普诺夫指数进行了求解, 得到了较好的结果, 并获得了不同初始条件 $\theta_1$ ,  $\theta_2$ 下的李雅普诺夫指数谱, 并对双摆系统的混沌区间与其周期运动区间进行了分析。然而, 由于迭代步长, 计算精度等方面的原因, 计算李雅普诺夫指数存在着一定的误差, 但在很大程度上我们已经可以找出其混沌区间与其周期运动区间。

#### 附录

##### 5.1 双摆系统数值解的Python实现

采用numpy库中的微分方程求解器, 调

用RK-4算法计算。

```

1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 g=9.8
6 theta1=0.5
7 om1=0
8 l1=1
9 m1=1
10 theta2=3.0
11 om2=0
12 l2=1
13 m2=1
14
15 def df(w,t,p):
16     th1,th2,om1,om2=w
17     l1,l2,m1,m2=p
18     dth1=om1
19     dth2=om2
20     #equation1
21     a=(m1+m2)*l1      #parameter of

```

```

om1
22 b=m2*l2*np.cos(th1-th2)    #
parameter of om2
23 c=(m2*l2*np.sin(th1-th2)*dth2*
dth2+(m1+m2)*g*np.sin(th1)
)
#equation2
25 d=l1*np.cos(th1-th2)    #
parameter of om1
26 e=l2    #parameter of om2
27 f=-l1*np.sin(th1-th2)*dth1*
dth1+g*np.sin(th2)
#linearization
29 dom1, dom2 = np.linalg.solve
([ [a,b], [d,e] ], [-c,-f])
30 return np.array([dth1, dth2,
dom1, dom2])
31
32 dt=0.01
33 t=np.arange(0,40,dt)
34 track=odeint(df, (theta1,theta2,om1
,om2),t,args=((l1,l2,m1,m2),))

```

$$\begin{aligned}
J_{31} &= -\frac{2m_2(-\frac{\dot{\theta}_1^2 l_1 m_2 \sin(2\theta_1-2\theta_2)}{2} - \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2) - gm_1 \sin(\theta_1) - \frac{gm_2 \sin(\theta_1)}{2} - \frac{gm_2 \sin(\theta_1-2\theta_2)}{2}) \sin(\theta_1-\theta_2) \cos(\theta_1-\theta_2)}{l_1(m_1-m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)+m_2)^2} \\
&\quad + \frac{-\dot{\theta}_1^2 l_1 m_2 \cos(2\theta_1-2\theta_2) - \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2) - gm_1 \cos(\theta_1) - \frac{gm_2 \cos(\theta_1)}{2} - \frac{gm_2 \cos(\theta_1-2\theta_2)}{2}}{l_1(m_1-m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)+m_2)} \\
J_{32} &= \frac{2m_2(-\frac{\dot{\theta}_1^2 l_1 m_2 \sin(2\theta_1-2\theta_2)}{2} - \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2) - gm_1 \sin(\theta_1) - \frac{gm_2 \sin(\theta_1)}{2} - \frac{gm_2 \sin(\theta_1-2\theta_2)}{2}) \sin(\theta_1-\theta_2) \cos(\theta_1-\theta_2)}{l_1(m_1-m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)+m_2)^2} \\
&\quad + \frac{\dot{\theta}_1^2 l_1 m_2 \cos(2\theta_1-2\theta_2) + \dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2) + gm_2 \cos(\theta_1-2\theta_2)}{l_1(m_1-m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)+m_2)} \\
J_{33} &= -\frac{\dot{\theta}_1 m_2 \sin(2\theta_1-2\theta_2)}{m_1-m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)+m_2} \\
J_{34} &= -\frac{2\dot{\theta}_2 l_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2)}{l_1(m_1-m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)+m_2)} \\
J_{41} &= \frac{2m_2((-m_1-m_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1 \sin(\theta_1-\theta_2)-g \sin(\theta_2))-(\dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2)+gm_1 \sin(\theta_1)+gm_2 \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1-\theta_2)) \sin(\theta_1-\theta_2) \cos(\theta_1-\theta_2)}{l_2(-m_1+m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)-m_2)^2} \\
&\quad + \frac{\dot{\theta}_1^2 l_1 (-m_1-m_2) \cos(\theta_1-\theta_2) - (\dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2)-gm_1 \sin(\theta_1)-gm_2 \sin(\theta_1)) \sin(\theta_1-\theta_2) + (-\dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2)-gm_1 \cos(\theta_1)-gm_2 \cos(\theta_1)) \cos(\theta_1-\theta_2)}{l_2(-m_1+m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)-m_2)} \\
J_{42} &= -\frac{2m_2((-m_1-m_2)(\dot{\theta}_1^2 l_1 \sin(\theta_1-\theta_2)-g \sin(\theta_2))-(\dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2)+gm_1 \sin(\theta_1)+gm_2 \sin(\theta_1)) \cos(\theta_1-\theta_2)) \sin(\theta_1-\theta_2) \cos(\theta_1-\theta_2)}{l_2(-m_1+m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)-m_2)^2} \\
&\quad + \frac{\dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2) + (-m_1-m_2)(-\dot{\theta}_1^2 l_1 \cos(\theta_1-\theta_2)-g \cos(\theta_2)) + (-\dot{\theta}_2^2 l_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2)-gm_1 \sin(\theta_1)-gm_2 \sin(\theta_1)) \sin(\theta_1-\theta_2)}{l_2(-m_1+m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)-m_2)} \\
J_{43} &= \frac{2\dot{\theta}_1 l_1 (-m_1-m_2) \sin(\theta_1-\theta_2)}{l_2(-m_1+m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)-m_2)} \\
J_{43} &= -\frac{2\dot{\theta}_2 m_2 \sin(\theta_1-\theta_2) \cos(\theta_1-\theta_2)}{-m_1+m_2 \cos^2(\theta_1-\theta_2)-m_2}
\end{aligned}$$

(\*)

```

35 theta1_array, theta2_array=track
36 [:,0],track[:,1]
37 omega1_array, omega2_array=track
38 [:,2],track[:,3]

```

## 5.2 李雅普诺夫指数计算程序

程序中pendulum equation函数为演化微分方程组，由于过于冗长，此处不予给出。

```

1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3
4 g=9.8
5
6 #G-S Orthogonalization
7 def fourGS(V): #4*4 matrix
8     v1 = V[:,0]
9     v2 = V[:,1]
10    v3 = V[:,2]
11    v4 = V[:,3]
12    a1 = v1
13    a2 = v2 - (np.dot(a1.T,v2)/np.
14                  dot(a1.T,a1))*a1
15    a3 = v3 - (np.dot(a1.T,v3)/np.
16                  dot(a1.T,a1))*a1- (np.dot(
17                  a2.T,v3)/np.dot(a2.T,a2))*a2
18    a4 = v4 - (np.dot(a1.T,v4)/np.
19                  dot(a1.T,a1))*a1- (np.dot(
20                  a2.T,v4)/np.dot(a2.T,a2))*a2-
21                  (np.dot(a3.T,v4)/np.
22                  dot(a3.T,a3))*a3
23    A = np.array([a1,a2,a3,a4])
24    return A
25
26 m1,m2,l1,l2=1,1,1,1
27 #initial values
28 y = np.array([1,1,0,0,1,0,0,0,
29                 0,1,0,0,
30                 0,0,1,0,
31                 0,0,0,1])

```

```

25 tstart = 0
26 #time steps
27 tstep = 1e-3
28 #total time
29 wholetimes = 1e5
30 #evolution steps
31 steps = 10
32
33 #total times of evolution
34 iteratetimes = wholetimes/steps
35
36 mod = np.zeros((4,1))
37 lp = np.zeros((4,1))
38 #initialize Lyapunov exponents
39 Lyapunov1 = np.zeros((
40     int(iteratetimes),1))
40 Lyapunov2 = np.zeros((
41     int(iteratetimes),1))
41 Lyapunov3 = np.zeros((
42     int(iteratetimes),1))
42 Lyapunov4 = np.zeros((
43     int(iteratetimes),1))
44 for i in np.arange(0,iteratetimes):
45     tspan = np.arange(tstart,
46                         tstart+tstep*(steps+1),
47                         tstep)
48 Y = odeint(pendulum_equation,y
49             .T,tspan,args=(m1,m2,l1,l2
50             ))
51 #value of the last time
52 y = Y[(np.size(Y,0)-1),:]
53 #update time
54 tstart = tstart + tstep*steps
55 y0 = np.array([[y[4],y[8],y
56                 [12],y[16]], [y[5],y[9],y
57                 [13],y[17]], [y[6],y[10],y
58                 [14],y[18]], [y[7],y[11],y
59                 [15],y[19]]])
52 #Orthogonalize
53 y0=fourGS(y0).T
54 #modulo operation
55 mod[0] = np.sqrt(np.dot((y0

```

```

        [:,0].T),y0[:,0]))
56 mod[1] = np.sqrt(np.dot( (y0
        [:,1].T),y0[:,1]))
57 mod[2] = np.sqrt(np.dot( (y0
        [:,2].T),y0[:,2]))
58 mod[3] = np.sqrt(np.dot( (y0
        [:,3].T),y0[:,3]))
59 y0[:,0] = y0[:,0]/mod[0]
60 y0[:,1] = y0[:,1]/mod[1]
61 y0[:,2] = y0[:,2]/mod[2]
62 y0[:,3] = y0[:,3]/mod[3]
63 lp = lp + np.log(np. abs(mod) )
64 #compute Lyapunov exponents
65 Lyapunov1[
    int(i)] = lp[0]/tstart
66 Lyapunov2[
    int(i)] = lp[1]/tstart
67 Lyapunov3[
    int(i)] = lp[2]/tstart
68 Lyapunov4[
    int(i)] = lp[3]/tstart
69 #reset initial values
70 y[4:20] = np.reshape(np.
    transpose(y0), (np.size(y0
    ,0)*np.size(y0,1)))

```

**Address:** School of Physics, Huazhong University of Science and Technology  
**Email:** sunyuchen@hust.edu.cn

## 参考文献

- [1] Wolf, Alan.,Quantifying Chaos With Lyapunov Exponents, *Nonlinear Science: Theory and Applications*,1986.
- [2] 罗利军, 李银山, 李彤, et al.,李雅普诺夫指数谱的研究与仿真[J], 计算机仿真, 2005, 22(12):285-288.
- [3] 刘秉正.,非线性动力学[M], 高等教育出版社,2004.

# Simulation of Foucault Pendulum and Vibration

Kaiwen He, School of Physics, HUST

*By simulating Foucault Pendulum, we can get a beautiful picture reflecting the Earth's rotation.  
By simulating vibration, we can find how amplitude changes with time.*

## 1 Introduction

French physicist Foucault once made a successful swing experiment in 1851, which effectively proved that the earth is rotating. Besides, any vibration process inevitably has resistance, so it will stop gradually. Nowadays it is wastefull to build a large experimental device or find a spring vibrator to repeat physical experimements. Instead I do vector analysis and use Mathematica, a powerful mathematical computation program, to do numerical simulation. Mathematica can record their movements.

## 2 Foucault Pendulum

Foucault pendulum proved the rotation of the earth in a very simple and intuitive way. According to the experience of daily life, this huge pendulum should draw a unique track on the sand table. But people are surprised to find that once the pendulum vibrates a period, the trajectory drawn on the sand table will deviate from the original trajectory (to be exact, at the edge of this 6-meter-diameter sand table, the difference between the two tracks is about 3 mm). Although such deviation is obvious in real life, it takes a long time.

Thus for the convenience of observing the overall trajectory, I changed some parameters here in simulation. For example, increase the angular velocity of earth. In this way, the trajectory of a long period can be obtained by calculation in a short time. But the tracks are less dense than in real world,shown as the following Figure.

To analyse, we need to use the rotation coordinate system theory of mechanics.[1] The position of the selected coordinate system O-xyz on the ground rotates with observers and the earth. The z-axis of the coordinate system passes through the center of the earth and points outwards. The x-axis is tangent to the meridian and points to the equator. The y-axis is tangent to the latitude line

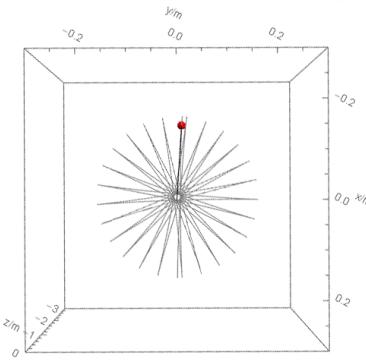


Figure 1. Image from top

in the same direction as the earth's rotation.  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  are respectively unit vectors of  $x, y, z$ .  $\mathbf{T}$  represents the force exerted on the ball by the sling.  $\theta$  is latitude. Coordinates of the sphere is  $(x, y, z)$  in rectangular coordinates. Original equation is as follow:

$$mr''(\mathbf{t}) = \mathbf{F} - 2m\mathbf{w} \times \mathbf{r}'(\mathbf{t}) + m\mathbf{R}\mathbf{w}^2 \quad (1)$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (2)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{T} \quad (3)$$

Gravity and its centripetal force can be vectorized into local gravity

$$\mathbf{G} + m\mathbf{R}\mathbf{w}^2 = -mg\mathbf{k} \quad (4)$$

The rotation speed of the northern hemisphere can be expressed as

$$\mathbf{w} = -\omega \cos(\theta)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \omega \sin(\theta)\mathbf{k} \quad (5)$$

Combining things above, we can get three formulas:

$$x''(t) = 2\omega \sin(\theta)y'(t) - \frac{Tx(t)}{l} \quad (6)$$

$$y''(t) = \frac{Ty(t)}{l} - 2\omega \sin(\theta)x'(t) - 2\omega \cos(\theta)z'(t) \quad (7)$$

$$z''(t) = -mg - \frac{Tz(t)}{l} + 2\omega \cos(\theta)y'(t) \quad (8)$$

MMA can solve equations. The shape of Foucault pendulum is simulated on Mathematica.1

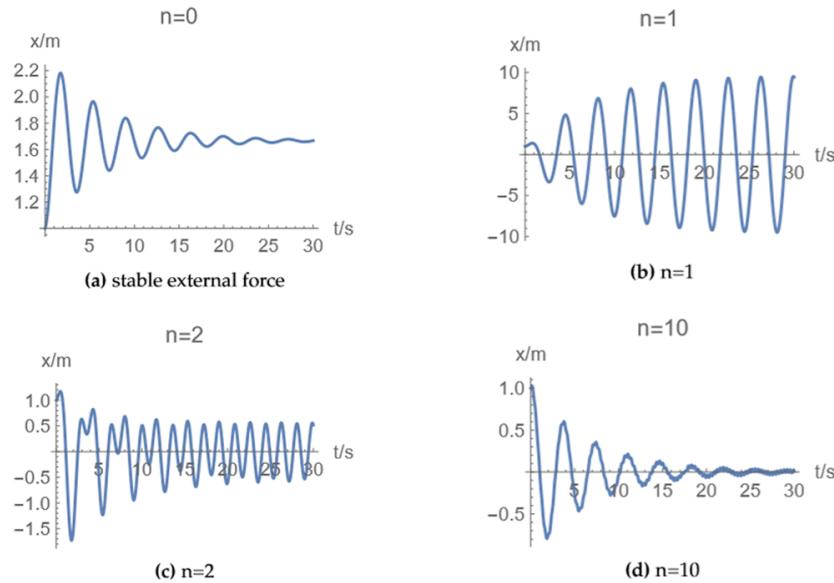


Figure 2. Various situations after changing n

### 3 Vibration

#### 3.1 Damped vibration

A one-dimensional spring oscillator is studied here.  $k$  is the elastic coefficient. Resistance is proportional to the velocity of the mass.  $\eta$  is called the damping coefficient. The change of amplitude can be recorded by a paper tape moving at a constant speed perpendicular to the direction of vibration in real world, while the relationship between time and amplitude was generated by MMA simulation. As shown in the figure.3

$$mx''(t) = -kx(t) - \eta x'(t) \quad (9)$$

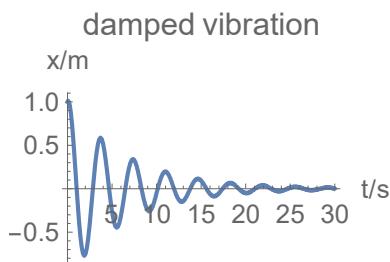


Figure 3. Damped vibration

#### 3.2 Forced vibration

Add another force to the damped vibration. Note the ratio of the angular frequency of the force to the initial angular frequency  $\omega_0$  ( $\omega_0$  equals to

$\sqrt{k/m}$ ) as n. Namely,  $\omega = n\omega_0$ . By changing the ratio n, we can get some different results.

You will find that when n equals 10, the change of vibration amplitude is almost the same as that without external force. Moreover, when the frequency of external force is the same as that of the initial vibration, amplitude will increase continuously. As shown in the figure.2

$$mx''(t) = f \cos(\omega t) - kx(t) - \eta x'(t) \quad (10)$$

### 4 Conclusion

The derivation process is not very complicated, especially the vibration part. The forced vibration I studied is only in phase. My hardship is that I do not know how to visualize the interaction changes in MMA through unchangeable text, let alone animation. Finally, I decided to use pictures of special cases to show their changes.

**He Kaiwen** is a freshman at HUST, Wuhan, China, whose study interests include Physics.  
**Address:** College of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan, China.  
**Email:** U201910153@hust.edu.cn

### References

- [1] DongJian. *Mathematica and College Physics computing*. 2013.

# MATLAB在求解振动力学与随机游走问题中的应用

Geyu Qin, BJ1901, School of Physics, HUST

本文提出了一个三原子振动模型来近似CO<sub>2</sub>分子的振动，并使用MATLAB软件对其振动情况进行模拟，成功地得出与观测结果相近的两个振动频率。此外还对随机游走问题问题进行探究，得到了质点距原点距离与质点行走步数之间的数学关系，以及一维随机行走中质点返回原点的频率关于步数的变化关系。

## 1 简介

在求解物体的运动，或是某种现象所满足的规律时，大多数情况都可以归为各种微分方程，从而计算出其所满足的关系。通过“微分方程”这个媒介，或者说是“变化率”，将一个对象此刻的状态与之后的状态联系起来，从而决定了之后的走向。

比如在求解振动时，通常会列出振子所满足的微分方程，比如 $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2x = f(t)$ 然后通过数学方法解出运动方程 $x = x(t)$ 。

但是有些情况下，所列出的方程非常复杂，以至于根本不想计算。这时，计算机就可以为我们提供强力的支持，通过计算数值解来辅助我们的研究。

在本文中，我利用计算机强大的计算能力，通过微元的思想来计算对象的状态变化，通过合理近似，模拟出了CO<sub>2</sub>分子振动的频率，得出的结果也较为符合观测值。并尝试编写程序模拟了多种情况下的振动以及1~3维随机游走(Random Walk)，通过对随机行走的模拟，得出各个维度中位移绝对值相对步数的期望。此外还探究了一维随机行走中回归原点概率随步数改变关系。

MATLAB软件也使得在我们模拟的同时可以通过图像来直观地观察规律

## 2 CO<sub>2</sub>分子振动模拟

### 2.1 分析问题与建模思路

在郑永令的《力学》[1, p389-390]中提到：可以将CO<sub>2</sub>分子简单的当做一个有着3个自由度的振动系统，将碳原子和氧原子之间的作用力

等效为弹簧。<sup>1</sup>

关于如何将事物在自然界中发生的过程在MATLAB上用计算机语言实现，我的想法很简单，也很朴素。就是运用了微积分的思想，将时间划分为一个个极小的 $dt$ ，然后计算出每一个物理量在这一个 $dt$ 中的变化，将其累加，不断地进行重复这一过程直到我们所希望的时候。我们取的 $dt$ 越小，其结果就越接近真实。适当的 $dt$ 可以使我们在不耗费太多算力的同时达到我们所需要的精确度。为了便于画图，我们可将每个物理量在经历一轮计算之后存储进对应的数组之中，这样就自然地记录下了每过一个 $dt$ 之后各个物理量的值。

在这里上，我们所使用的语法也是最基础的，用 $x, v, a$ 记录当时的位移、速度、加速度，用数组 $X, V, A$ 记录下其变化过程。使用for循环来控制总时间 $T$ 和 $dt$ 。之后通过方程组建立各个物理量之间关系。

比如：

$$\begin{cases} a &= f(x, v, t) / m \\ v &= v + a \times dt \\ x &= x + v \times dt \end{cases} \quad (1)$$

### 2.2 建模尝试与可行性验证

先从最简单的简谐振动开始。振动方程为：

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (2)$$

<sup>1</sup>因为碳氧原子的振幅极小，故可以将作用力泰勒展开到一阶从而等效为一个弹簧

很容易得到  $\omega^2 = \frac{k}{m}$  以及  $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ , 而振幅A和初相位 $\varphi$ 由初始的x和v(能量)决定。

这次模拟首先验证这个思路的可行性。设置  $k = \pi^2, m = 1$ , <sup>2</sup> 由理论计算得出函数

$$X = A \sin(\pi t + \varphi) \quad (3)$$

周期为  $T_0 = 2s$ 。取总时间  $T = 10s, dt = 0.01s$ 。

设置初始状态  $x = 0, v = 10$ 。一共能得到1001个数据，在MATLAB上运行脚本用plot等函数绘制后得到图1。

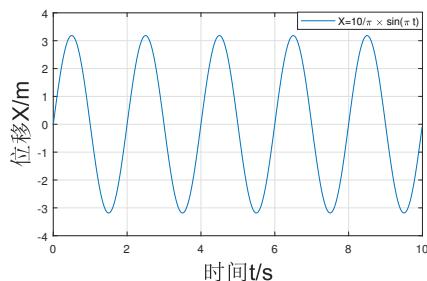


Figure 1. 对振动 $\ddot{x} + \pi^2 x = 0$ 的模拟

由图像可以清楚地看出周期  $T = 2$ , 振幅  $A = 10/\pi \approx 3.183$ 。其他各项参数也与理论计算相符合。2.1所述方法可行。

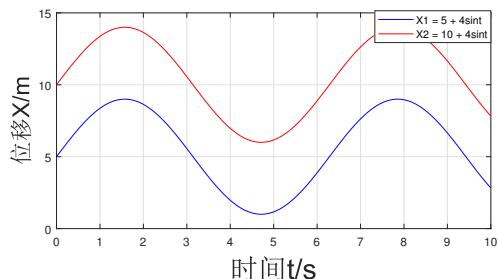


Figure 2. 耦合振动的模拟

之后模拟耦合振子的振动。模拟两个振子同相位的情况。

设计耦合振子。两个振子处于  $x_1 = 5, x_2 = 10$  的位置， $x = 0$  和  $x = 15$  是墙。振子之间用劲度系数  $K = 2$ , 原长为5的弹簧连接；振子和墙之间用劲度系数  $k = 1$ , 原长为5的弹簧连接。设定  $v_1 = v_2 = 4$ .<sup>3</sup> 经过计算可得周期  $T = 2\pi$ , 振

<sup>2</sup>默认使用国际标准单位制

<sup>3</sup>两振子初始状态相同保证相位相同

幅  $A = 4$ 。

在模拟时需要将方程列为

$$\begin{cases} a_1 = K(x_2 - x_1 - 5) - k(x_1 - 5); \\ a_2 = k(x_0 - x_2 - 5) - K(x_2 - x_1 - 5); \end{cases} \quad (4)$$

运行脚本后得到图2, 依旧完美的吻合了理论的预测。

以上两例说明用MATLAB模拟多自由度振动的方法可行。

## 2.3 问题求解与结果分析

现在来进行CO<sub>2</sub>分子震动情况的模拟。查阅资料[2], 得到数据:

Table 1. CO<sub>2</sub>分子相关系数

项目	数值
氧原子质量 $m_o$	$2.657 \times 10^{-26} kg$
碳原子质量 $m_c$	$1.993 \times 10^{-26} kg$
碳氧键长1	116.2 pm
碳氧间弹簧弹性系数k	$1.6 \times 10^3 N/m$
红外吸收光谱波数	$1352 cm^{-1}, 2349 cm^{-1}$

首先进行运动模式的分析, 分析得出CO<sub>2</sub>分子有两种震动模式, 分别对应

1. 两个氧分子相反相位振动, 碳原子静止不动;
2. 两个氧分子和碳原子一起振动;

因为周期很小, 在皮秒的量级, 所以设置一个时间微小量为  $dt = 10^{-17}$ 。总时间  $T = 10^{-12}$ 。

代码较为简单, 就不再赘述。

### 先探究振动模式一

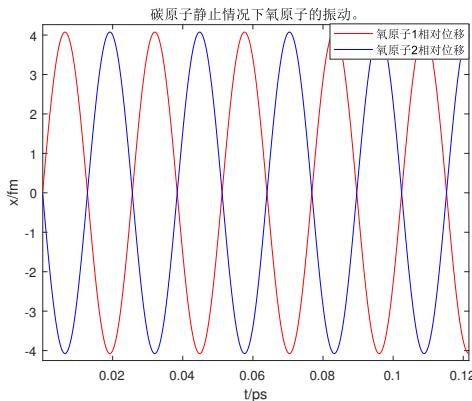
设置  $v_1 = -v_2 = 1, v_0 = 0, x_1 = 0, x_c = l, x_2 = 2l$ .<sup>4</sup> 运行结果如图3。

从图中可以得到, 周期为25.6(fs); 波数为波长的倒数, 计算得  $1302.8 cm^{-1}$ , 和一个实验测量结果  $1350 cm^{-1}$ 很接近。

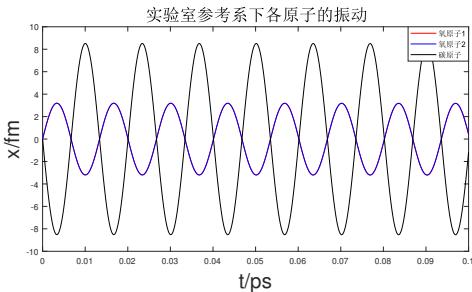
### 之后探究振动模式二

为了方便, 计算总动量为0以保持质心不动。设置  $V_1 = 1.5, V_2 = 1.5, V_0 = -4$ 。得到结果如图4

<sup>4</sup>相位相反

Figure 3.  $\text{CO}_2$  分子振动模式1

图中右半部分为质心系中两个氧原子的位移(m)-时间(s)图,左半分别为三个原子在实验室参考系中的位移。左一为放大后图像。

Figure 4.  $\text{CO}_2$  分子振动模式2

由图中得到:碳原子振动两个波峰分别为 $t_1=0.333 \times 10^{-13}\text{s}$ ,  $t_2=1.668 \times 10^{-13}\text{s}$ , 周期 $T$ 为 $1.335 \times 10^{-14}\text{s}$ , 波数为 $2496.9\text{cm}^{-1}$ 与测量结果 $2349\text{cm}^{-1}$ 很接近。

而其他情况下的振动, 则可分解为这两种振动模式的叠加。

### 3 随机游走 (Random Walk)

#### 3.1 问题分析与建模思路

关于随机游走的研究, 历史上有很多人进行研究, 也得出了很多的结论, 比如一维随机游走中, 质点距离原点的距离 $X$ 与步数 $t$ 满足: “ $X$ 的期望为 $\sqrt{t}$ ”。[3]本文中, 主要对使用MATLAB模拟得到的数据进行分析, 来验证一维随机行走相关的结论, 并推导出其他情况的结论。

本文中主要研究三种随机游走, 也就是三个

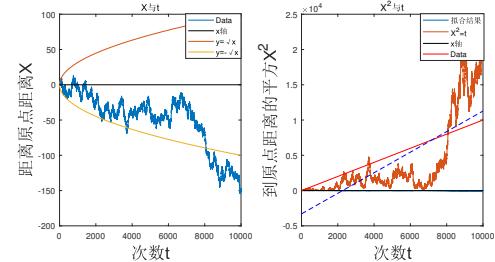


Figure 5. 一维随机行走位移图

维度的随机游走——一维, 二维, 三维——中到原点距离 $X$ 与步数 $t$ 的关系, 以及一维随机行走中回归原点的概率。

一维随机游走中, 质点只有前进和后退两种情况, 固定每次的位移为“1”, 程序中可以用“随机数生成”和“if条件判定”来实现。

二维随机游走中, 质点在二维平面中随机移动, 随机的是移动的角度 $\theta$ 。每次移动时随机生成一个 $\theta$ , 然后 $x = x + \cos \theta, y = y + \sin \theta, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 。鉴于我们研究的主要对象为质点到原点的距离 $\rho$ , 所以每次移动只记录变量 $\rho$ 。

三维随机游走中, 质点在三维平面中随机移动, 如果依旧只设置一个变量 $\rho$ 的话, 会产生许多不便。于是直接设出直角坐标系中坐标 $x, y, z$ , 每次移动时随机生成两个方向角, 代码如下:

```

rvals = 2*rand() - 1;
phi    = asin(rvals);
theta  = 2*pi*rand();
[a,b,c] = sph2cart(theta,phi,1);
x = x + a;
y = y + b;
z = z + c;

```

通过 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 来得到距离。

#### 3.2 结果分析

在进行了多次实验后发现虽然 $X, t$ 大致遵循 $X = \sqrt{t}$ , 但是很不稳定, 于是将 $X^2$ 与 $t$ 进行线性拟合, 然后多次重复, 记录斜率 $k$ 的变化。得到结果如图6(d)。

由图中可以看出, 虽然每次随机行走拟合后的斜率有所起伏, 但是斜率 $k$ 的均值是1, 并且95%的斜率集中在 $-1 \sim 3$ 之间可以得出结论,

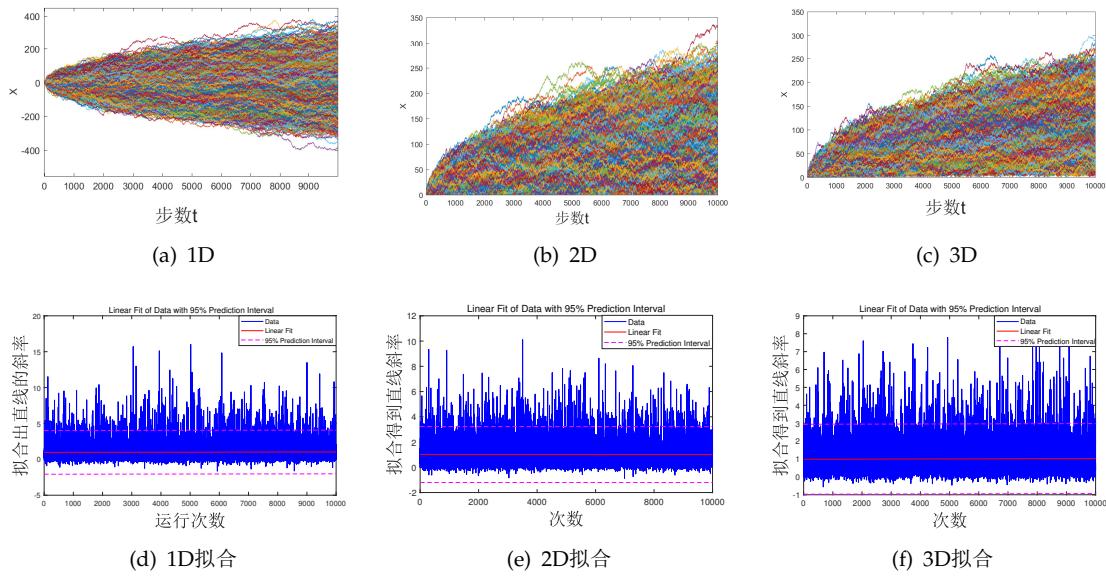


Figure 6. 随机游走(1w次1w步)

$X$ 的期望为 $\sqrt{t}$ 。

对二维与三维的随机游走进行同样操作后得到极其相似的图形。故能得出结论 1、2、3维随机游走中，质点到原点的距离 $X$ 的期望均为 $\sqrt{t}$ 。

### 3.3 对一维随机游走中质点回归原点的概率的探究

相信大家都曾或多或少地听过这个结论“一维的随机游走中，如果走无限多步，则一定能回到初始的位置。而更高的维度里，这个几率无限接近于0”。而笔者在进行有关的尝试时发现，随着总步数的增加，回到原点的次数占总步数的比例在减少。于是对其间的规律产生兴趣，并准备利用MATLAB探究结论。

首先在之前的程序里新增一个变量b记录每次模拟时回到原点的次数，并计算出频率P。再增加一个循环来循环运行步数分别为 $1k \sim 2w$ 的一维随机游走，得到不同步数下的频率分布。

由于不知道频率与步数之间关系的形式，假设频率 $p$ 和步数 $t$ 之间满足幂函数关系

$$p = kt^n \quad (k, n \text{ 为常数}) \quad (5)$$

等式两边取自然对数则有：

$$\ln(p) = n \times \ln(t) + \ln(k) \quad (6)$$

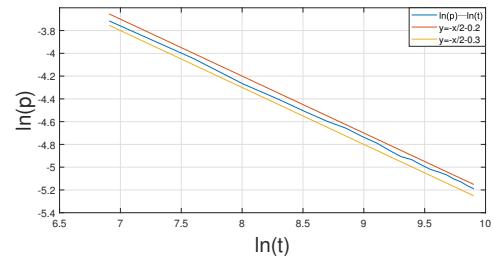


Figure 7. 回归频率——步数函数图(对数坐标)

将数据绘制成图像，得到图7。由图像得：

$$p = \frac{e^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{t}} \quad (7)$$

## 4 总结

本文简单介绍了使用MATLAB研究问题的思路以及几个实例。成功地模拟了 $CO_2$ 分子振动的两种模式，模拟了三个维度的随机游走，得出：1、2、3维随机游走中，质点到原点的距离 $X$ 的期望均为 $\sqrt{t}$ 。并且得出在一维随机游走中，质点回归原点的概率与步数成平方根反比关系。

但是在探究过程中仍有一些不足

1. 模拟CO<sub>2</sub>分子振动模式一与模式二得到的结果，与观测值仍有差距，说明这个模型仍只是个近似，还有改进的空间。
2. 在随机游走问题中，对随机的不同定义导致了不同的结果，例如在二维随机游走中，如果使用极坐标，将会导出 $E(X) = \sqrt{\frac{t}{2}}$ 这样不同的结论，在这里上仍可再加讨论。

总的来说，MATLAB是一个非常好用的，进行模拟并绘图的软件。仍有很多的功能等待着我们的发掘、利用。

## 致谢

感谢IBPE的学长学姐在程序、软件的安装、使用等方面提供的帮助及建议。

**Qin Geyu** is the author of this article.

**Address:** School of Physics, Huazhong University of Science and Technology

**Email:** 945334489@qq.com

## 参考文献

- [1] 郑永令, 贾起民. 普通物理学教程丛书·力学[M]. 1989.
- [2] Gershikov A G, Spiridonov V P. Anharmonic force field of CO<sub>2</sub> as determined by a gas-phase electron diffraction study[J]. Journal of Molecular Structure, 1983, 96(1-2): 141-149.
- [3] 理查德, 费曼. 费曼物理学讲义 (第 1 卷)[M]. 1983.

# 基于Mathematica模拟的傅科摆力学模型探究

Jing Yu, Tianjuan 1901, School of Physics

考察历史上验证地球自转的著名实验——傅科摆，应用矢量力学建立傅科摆的运动学方程。本文使用Mathematica软件对所得动力学方程进行数值求解并计算相关数据，据此与1851年傅科摆实验数据进行了对比，进而讨论了惯性离心力对傅科摆相关计算的影响，并通过计算验证了被普遍接受的傅科摆旋转周期计算公式 $T = 24 h / \sin \varphi$ (其中 $\varphi$ 为纬度)的正确性。

## 1 引言

1851年，傅科在巴黎成功进行了傅科摆实验，证明了地球的自转。但是在如今的力学教科书中鲜有进一步推导其运动学方程者，大多都是将其附在推导科里奥利力后作为一个例子。本文将使用矢量力学给出傅科摆的运动学方程并用Mathematica对其进行数值求解，进而使用计算得出的各项数值与历史数据进行对比，检验所得模型的正确性；除此之外本文也将探究惯性离心力在计算中的影响，并通过计算验证被普遍接受的傅科摆旋转周期计算公式 $T = 24 h / \sin \varphi$ (其中 $\varphi$ 为纬度)。

## 2 傅科摆的动力学推导

我们知道，地球不仅有自转，也有公转，甚至太阳也不能完全考察为惯性系。但是在考察傅科摆时，由于公转等其它因素相较于自转影响非常小，可以忽略不计。一个简单的计算便能说明：当地球自转一周时，平均公转不足 $1^\circ$ ，太阳系相对于银河系的公转等其它旋转则影响程度更低。因此，在这里本文认为不公转的地球为惯性系，并依此进行推导。

基于上述近似处理，地球参考系此时成为一个相对于惯性系以恒定速率旋转的参考系，那么其中的质点运动学方程由下式给出

$$m\ddot{\mathbf{r}}_{\text{非}} = \mathbf{F} + m\omega^2 \mathbf{R} + 2m\dot{\mathbf{r}}_{\text{非}} \times \boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

如图1<sup>1</sup>，傅科摆参考系如此取定：悬挂点取为坐标原点O，取由地心指向摆悬挂点为z轴，x轴为沿着悬挂点所处经线的切线，方向由高纬度指向低纬度，y轴随之确定。现以此为基础对式(1)作一定的解释：其中 $\mathbf{r}_{\text{非}}$ 为所取参考系中摆球的位矢，而 $\mathbf{R}$ 则是地轴指向摆球的矢量，在傅科摆实验条件下可近似取作地轴指向原点O的矢量； $\boldsymbol{\omega}$ 即是地球自转的角速度； $\mathbf{F}$ 即是摆球所受真实力，惯性离心力与科里奥利力分别为 $m\omega^2 \mathbf{R}$ 和 $2m\dot{\mathbf{r}}_{\text{非}} \times \boldsymbol{\omega}$ 。

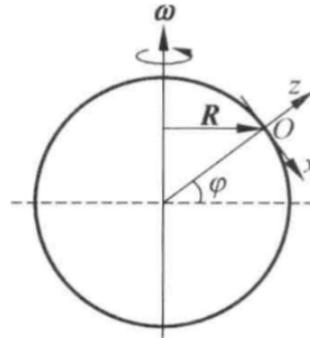


Figure 1. 坐标系参照图

现进行正式推导。真实力 $\mathbf{F}$ 为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{T} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{F}_G, \mathbf{T}$ 分别为摆球所受万有引力与绳子拉力。考虑到摆的运动范围相较于地球体积很小，因此可以认为 $\mathbf{F}_G$ 仅有z方向的分量，且可直接取地球半径作为距离。设地球质量和半径分别为 $M, R_0$ ，重力常数为 $G$ ，则有

<sup>1</sup>该图引自 [1, p106]

$$\mathbf{F}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -G \frac{Mm}{R_0^2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

设摆长为 $l$ , 将 $\mathbf{T}$ 沿各坐标轴分解为

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = -\frac{T}{l} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 $x, y, z$ 即是摆球的各坐标。最终将真实力表为

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_G + \mathbf{T} = - \begin{bmatrix} T \frac{x}{l} \\ T \frac{y}{l} \\ T \frac{z}{l} + G \frac{Mm}{R_0^2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

取纬度为 $\varphi$ , 将离心力 $m\omega^2 \mathbf{R}$ 表为

$$m\omega^2 \mathbf{R} = m\omega^2 R_0 \cos \varphi \begin{bmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (6)$$

在北半球,  $\boldsymbol{\omega}$ 表为

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \begin{bmatrix} -\cos \varphi \\ 0 \\ \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (7)$$

而将摆在参考系中的速度 $\dot{\mathbf{r}}_{\text{非}}$ 写作分量式即可得到科氏力为

$$\begin{aligned} 2m\dot{\mathbf{r}}_{\text{非}} \times \boldsymbol{\omega} &= 2m\omega \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ -\cos \varphi & 0 & \sin \varphi \end{vmatrix} \\ &= 2m\omega \begin{bmatrix} \dot{y} \sin \varphi \\ -(\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi) \\ \dot{y} \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (8) \end{aligned}$$

综上所述, 最终将式(1)表为

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T \frac{x}{l} + m\omega^2 R_0 \cos \varphi \sin \varphi + 2m\omega \dot{y} \sin \varphi \\ -T \frac{y}{l} - 2m\omega (\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi) \\ -T \frac{z}{l} - G \frac{Mm}{R_0^2} + m\omega^2 R_0 \cos^2 \varphi + 2m\omega \dot{y} \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (9)$$

由于含有未知函数 $T = T(t)$ , 该式需要加上绳长约束构成微分方程组才能进行求解, 也即

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \frac{x}{l} + m\omega^2 R_0 \cos \varphi \sin \varphi + 2m\omega \dot{y} \sin \varphi \\ m\ddot{y} = -T \frac{y}{l} - 2m\omega (\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi) \\ m\ddot{z} = -T \frac{z}{l} - G \frac{Mm}{R_0^2} + m\omega^2 R_0 \cos^2 \varphi + 2m\omega \dot{y} \cos \varphi \\ l^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \quad (10)$$

考虑到在南半球, 式(7)中需要将 $z$ 方向分量取为负值, 因此规定在南半球取纬度值时取对应的负值以保持一致性。在上述条件下, 式(10)即是傅科摆所满足的微分方程组。若忽略惯性离心力(6), 即有

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \frac{x}{l} + 2m\omega \dot{y} \sin \varphi \\ m\ddot{y} = -T \frac{y}{l} - 2m\omega (\dot{x} \sin \varphi + \dot{z} \cos \varphi) \\ m\ddot{z} = -T \frac{z}{l} - G \frac{Mm}{R_0^2} + 2m\omega \dot{y} \cos \varphi \\ l^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \quad (11)$$

### 3 Mathematica模拟

本文采用12.0版本的Mathematica软件进行模拟, 数值求解式(10), (11)。求解时, 所取常量值如表1所示。

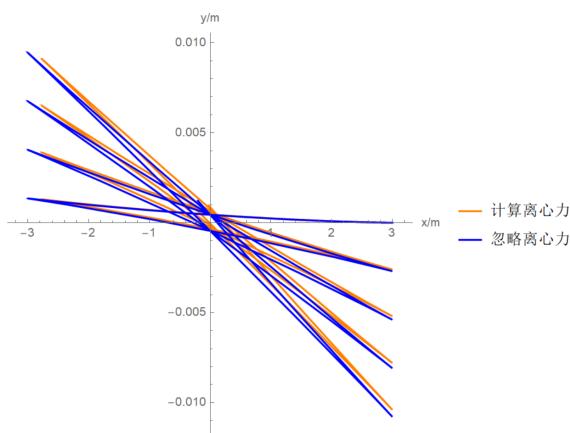
首先验证1851年傅科摆实验所观察到的直接现象: 傅科摆每经过一个周期的往返, 其轨迹都会偏离前一个轨迹大约3毫米。

编写代码并运行, 得到结果如图2所示。可以清晰地看出, 计算结果符合预期。同时二者也开始显现它们之间的细微差异: 计算离心力时的图像相对于忽略离心力时整体向x轴正向压缩。其实这正是由离心力导致的, 因为离心力始终有

常数	值	单位
重力常数	$6.67 \times 10^{-11}$	$\text{m}^3/\text{kg}\cdot\text{s}^2$
地球自转角速度大小	$\pi/43200$	$\text{rad}/\text{s}$
地球质量	$5.965 \times 10^{24}$	$\text{kg}$
地球半径	6371000	$\text{m}$
所处纬度	48.85	°
摆长	67	$\text{m}$
摆球质量	28	$\text{kg}$
初始摆角	$\arcsin(3/67)$	$\text{rad}$

**Table 1.** 常量值表

沿x轴正向的分量。

**Figure 2.** 宽高比以1: 1绘制, 计算相邻y的差值即可得到结果。

接下来计算傅科摆的旋转周期。基于之前的结果 (图2), 可以通过寻求下式的零点来得出周期。

$$f(t) = x(t) - x(0) \quad (12)$$

通过绘出整个过程 $f$ 的图像并计算

$$T_0 = 24 \text{ h} / \sin \varphi \quad (13)$$

可以得知我们所寻求的零点确实处于由式(13)所给出的周期附近, 因此我们使用FindRoot函数求得周期如表2所示。与式(13)所得结果作对比不难发现三者差距不大, 尤其是在以小时为单位的情况下。

引入参数

$$\lambda = T \sin \varphi \quad (14)$$

	时间单位	
	s	h
计入离心力	114736	31.871
忽略离心力	114767	31.880
公式(13)	114743	31.873

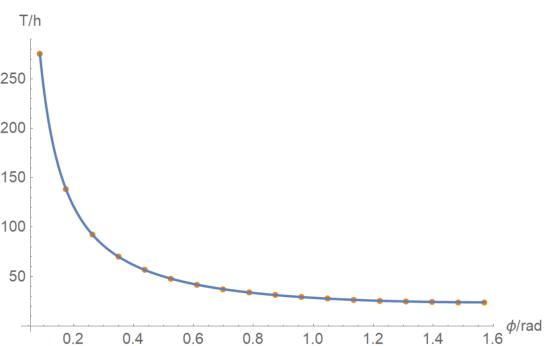
**Table 2.** 计算所得周期

其中 $T$ 是由求解式(10), (11)所给出的周期。基于之前求解周期的思路, 本文使用Do循环求出纬度由5°到90°之间间隔5°的每一组周期进行拟合求解参数 $\lambda$ , 最终结果如表3与图3, 4所示。

	$\lambda$
计入离心力	24.0002
忽略离心力	24.0000

**Table 3.** 拟合所得参数

由此不难看出公式(13)确实与由式(10), (11)数值求解得出的周期符合的很好。

**Figure 3.** 计入离心力的拟合情况

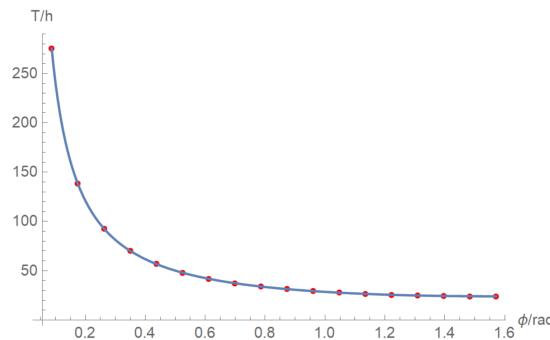


Figure 4. 忽略离心力的拟合情况

由于坐标系是随地球自转而时刻发生改变的，即使始终有离心力的影响，但是离心力在整个过程所做总功为零，并不会影响周期的计算；但若取整个周期中的一部分进行考察，离心力确实会对所求解的小球各项坐标有一定程度的影响。例如取函数

$$r(t) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (15)$$

它的实际意义是小球在XOY平面内到原点O的距离。绘制其0到70秒内的图像如图5所示。

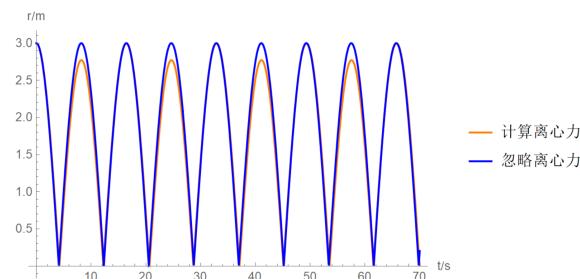


Figure 5. 前70秒的 $r = r(t)$ 图像

由图不难看出在 $r = r(t)$ 前70秒的图像上二者有所差异：当摆球摆至x轴负向时，考虑离心力则会出现 $r$ 的极限值总是少于忽略离心力时的极限值3m的情况。并且可以推测，当绘制整个过程的图像时，计算离心力的 $r$ 的极大值将会在一定的大范围时间区间里相较于3m有所减少，但忽略离心力则不会。绘制整个过程的 $r = r(t)$ 图像并进行粗略统计，所得结果为：计算离心力时 $r$ 的极大值大约在时间区间(0s,30ks)与(60ks,90ks)中持续下降，(30ks,60ks)与(90ks,120ks)中持续上升，并且其取值区间大致为[2.77m,3m]；忽略离心力时 $r$ 的极大值则未发生改变。

因此，即使惯性离心力相较于摆球所受真实力来说量级非常小，但是通过计算可以得知，在纬度较低且初始摆角较小时，离心力的量级其实与科氏力相近甚至比其更大，因此才会出现两种计算结果差异较大的情况。例如计算纬度为45°处x方向的惯性离心加速度与科氏加速度大小，绘制整个过程y方向的速度图像可知其最大值不超过1.2 m/s，取之为1.2 m/s进行计算。计算所得结果如表4所示。

计算值	计算结果
惯性离心加速度	0.017 m/s <sup>2</sup>
科氏加速度	0.00012 m/s <sup>2</sup>

Table 4. 加速度大小对比

不难得出离心力此时确实比科氏力量级大得多，而由此造成的影响在上文已有所展示。但是若只需演示计算傅科摆的周期，为了节省计算成本便可直接采用式(11)。

## 4 总结

本文推导了傅科摆的动力学方程并利用Mathematica软件的计算验证了式(13)的正确性，除此之外本文也通过举例讨论了考虑较短时间情况下离心力对傅科摆所求解数据的影响。若只是为计算傅科摆的周期值，式(13)足以满足需求；若需要考察局部短时间内傅科摆的各项数值，那么求解式(10)则是必要的。

**Yu Jing** is the author of this paper and a member of IBPE

**Address:** School of Physics, Huazhong University of Science and Technology

**Email:** u201910212@hust.edu.cn

## 参考文献

- [1] 董键. Mathematica 与大学物理计算[M]. 清华大学出版社. 2013. pp.105–113.

# 基于Mathematica的移动摆、傅科摆和磁单极子场仿真

Zezhi Yu, Huazhong University of Science and Technology

*Mathematica*是一款科学计算软件，科研中常用其对物理模型进行模拟。本文利用该软件模拟了移动摆、傅科摆及磁单极子形成的磁场中带电粒子的运动。通过分析移动摆模型，本文猜想并证明了在质心系中移动摆运动轨迹为椭圆。同时，通过模拟，本文验证了傅科摆的进动情况。另外，通过观察和参考文献，本文发现磁单极子形成的磁场中带电粒子运动轨迹为圆锥面上的测地线。

## 1 移动摆

### 1.1 对移动摆轨迹的探索

移动摆是一个由滑块与球体通过不可伸长的轻质细绳连接组成的摆。其中滑块在水平桌面上运动，除与轻绳连接外对球体不加任何约束。移动摆通常以Figure 1所示方式运动。最开始，笔者随意取初值得到Figure 2所示的移动轨迹。

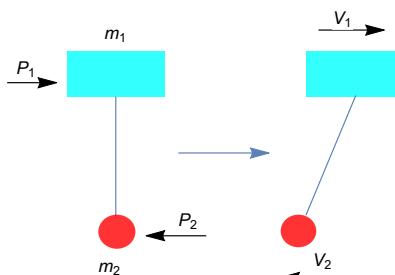


Figure 1. 普通的移动摆

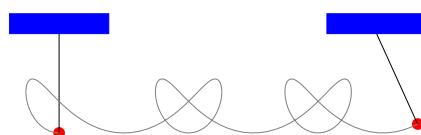


Figure 2. 一般情况下移动摆的轨迹

从图Figure 2我们很难看出球的运动规律，笔者又从质心参考系观察此物体运动。由质心系中系统总动量为0可得 $m_1v_1 = m_2v_2$ ，按此关系取初值得到如图Figure 3所示轨迹。我们看到该轨迹形似椭圆，因此笔者猜想：

在质心系中移动摆的轨迹在椭圆上。

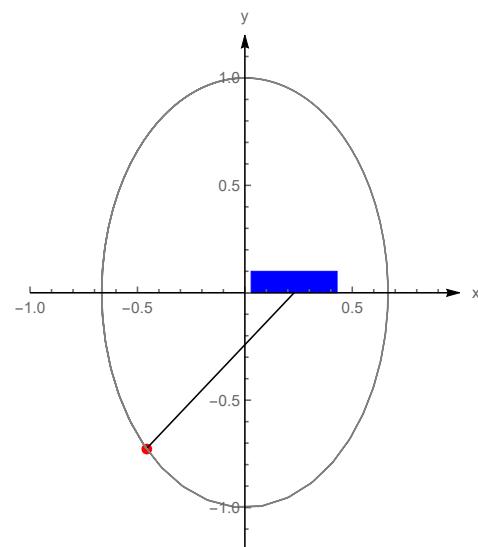


Figure 3. 质心系中的移动摆

### 1.2 对猜想的证明

按图设滑块横坐标为 $x_1$ ，质量为 $m_1$ ，速度为 $v_1$ ，球体坐标为 $(x_2, y_2)$ ，质量为 $m_2$ ，速度为 $(v_x, v_y)$ ，由水平动量为零可得： $m_1v_1 + m_2v_x = 0$ ，方程两边对时间积分并取初值 $t = 0$ 时 $x_1 = x_2 = 0$ 可得：

$$m_1x_1 + m_2x_2 = 0 \quad (1)$$

设滑块与球体连线与水平方向的夹角为 $\theta$ ，连线长为 $l$ ，且在运动过程中连线未松弛，则有 $y_2 = l \sin \theta, x_1 - x_2 = l \cos \theta$ ，联立方程(1)可得：

$$x_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}l \cos \theta, y_2 = l \sin \theta \quad (2)$$

联立两方程可得：

$$\left( \frac{m_1 + m_2}{m_1} x_2 \right)^2 + y_2^2 = l^2 \quad (3)$$

即质心系中移动摆的球体的运动轨迹在椭圆上。

综上所述，我们得知，在质心系中，移动摆的运动轨迹在椭圆上，但若要完全解析其实际轨迹，球相对质心系的速度还有待探究。

## 2 傅科摆

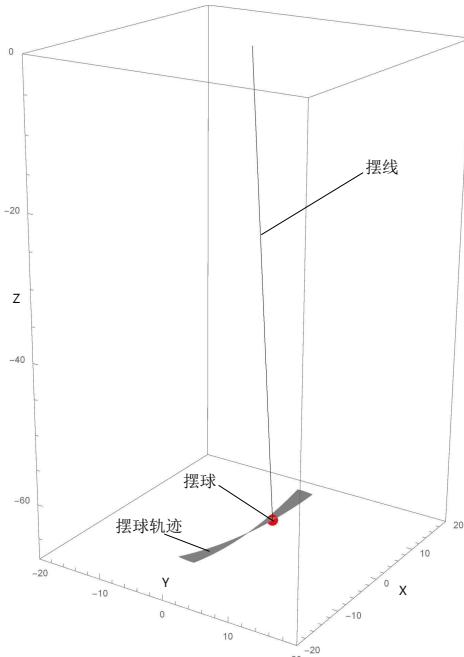


Figure 4. 傅科摆

由于地球的自转，身处地球上的我们在相对地面运动的时候会受到科里奥利力的作用。比如，我们常说：在北半球时，人无论向哪个方向运动都会受到向右的力。傅科摆(Foucault pendulum)也利用了这一原理。在惯性系中的一个单摆，摆球是在同一平面运动的。但我们的地面系并不是惯性系，由于地球的自转，单摆会因受到科里奥利力的作用而产生进动，具体表现为摆球运动的平面发生了旋转，这就是傅科摆。笔者对傅科摆进行了数值模拟。根据理论，傅科摆每小时会产生 $15 \sin \phi$ 度的进动，式中 $\phi$ 为实验所在纬度。笔者取与傅科所做实验时相同的数值，即在北纬48.8度，摆长为67m。在此条件下，傅科摆应

每小时进动11.3度[1]。笔者绘制了其运动1h的轨迹，其结果如图Figure 4。由于在此图中我们难以测出傅科摆的进动角度，笔者同时绘制了其在地面上的投影的运动轨迹，如图Figure 5。通过对球的坐标进行计算，我们得到一个小时后摆的进动角度为11.04度，和理论较为符合。其与理论之间的差距猜测为模拟时引入了自转产生的离心力所致。

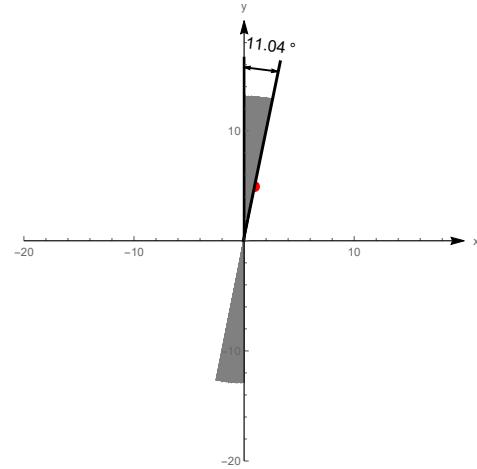


Figure 5. 傅科摆的地面上的投影

## 3 磁单极子场中带电粒子的运动

大一统理论，弦论等近代物理理论给出了磁单极子(Magnetic Monopoles)的拓扑解释[2]。但笔者这里不着重介绍这点。这里重点介绍在磁单极子所形成的有散磁场中带电粒子的运动。建立模型：在坐标系原点处有一磁单极子 $q_m$ ，有一电荷量为 $q_e$ ，质量为 $m$ 的带电粒子以初速 $\vec{v}$ 在此坐标系中运动，已知磁单极子产生的磁场为：

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (4)$$

式中 $\mu_0$ 为真空磁导率， $\hat{r}$ 为粒子相对原点的位矢所在方向的单位矢量。那么在此磁场中带电粒子会如何运动呢，乍一看可能无从下手，不妨让我们先看看模拟的结果。

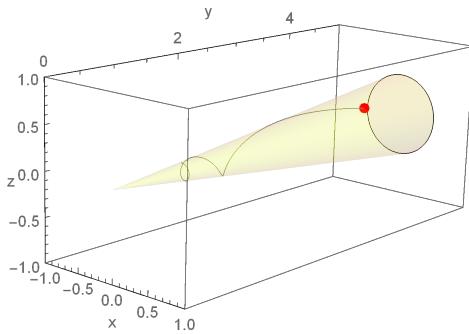


Figure 6. 带电粒子在磁场中的运动轨迹

模拟结果如图Figure 6, 从图中我们可以很清楚地看到带电粒子在圆锥面上运动。经过研究, 我们惊人地发现在此问题中的隆格楞次矢量(Laplace-Runge-Lenz Vector):

$$\vec{Q} = m(\vec{r} \times \vec{v}) - \frac{\mu_0 q_e q_m}{4\pi} \hat{r} \quad (5)$$

为恒定矢量。其大小为  $|\vec{Q}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{|q_e q_m|}{\cos \alpha}$  式中  $\alpha$  为圆锥的半顶角, 读者可以自行验证此矢量在粒子运动时恒定不变, 笔者也对自己所建模型中的  $\vec{Q}$  矢量随时间的变化做了统计, 统计结果如图Figure 7, 说明其确实为守恒量。而根据此矢量的性质我们可证明磁单极子形成的磁场中, 带电粒子的运动轨迹为圆锥面上的测地线 (该表面上两点之间距离最短的路径)[3, 4]

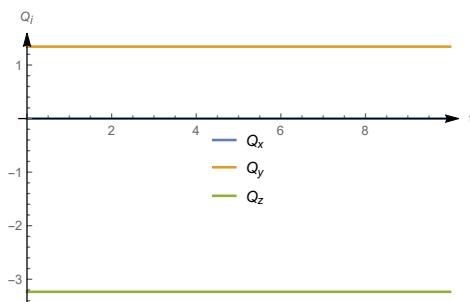


Figure 7. 矢量  $\vec{Q}$  沿坐标轴投影与时间  $t$  的关系

## 致谢

感谢华中科技大学物理学院黄晨学姐, 祝天擎学长, 王笑宇, 屈湛璐同学以及北京大学物理学院戴映松同学对本文的支持和帮助。

**Yu Zezhi** is a freshman in Huazhong University of Science and Technology

**Address:** School of Physics, Huazhong University of Science and Technology

**Email:** U201910177@hust.edu.cn

## 参考文献

- [1] Joël Sommeria, Foucault and the rotation of the Earth *C. R. Physique* 18 (2017) 520–525.
- [2] Preskill J., Magnetic Monopoles, *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 34, 1984, issue 1, pp. 461-530.
- [3] H. Poincaré *Comptes rendus de l' Academie des Sciences* 123, 530 (1896).
- [4] B.Rossi and S. Olbert, *Introduction to the Physics of Space*(New York: McGraw-Hill, 1970).

## 4 总结

有些时候, 一些模型看起来过于高深, 但是通过数学软件对其进行模拟可以一定程度上简化问题, 理解其中更为深层的物理涵义, 并通过模拟找到解决问题的突破口。

# 弦振动的MATLAB仿真与可视化

Zhong Zhang, School of Physic, HUST

弦振动是一个经典的模型，本文中展示了两种matlab模拟了弦振动过程，并使结果可见化的方法。

## 1 引言

现在有一根两端固定的柔软的弦，如Figure 1所示：

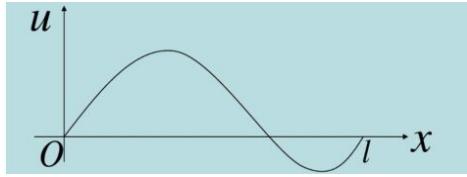


Figure 1. 模型

其中l为右端固定点的位置，并设 $\lambda$ 为柔弦的线密度。如果我们假设在初始时刻有一力作用于弦的中点，并且弦处在平衡状态， $t = 0$ 时撤去力。

对于这个问题，可以求解出u后将具体数值代入matlab，画出具体弦振动的过程；也可以用其自带的pdetool工具直接求数值解。

## 2 运动方程

一维弦振动的运动方程是：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

$$(a^2 = \frac{T}{\lambda})$$

接下来是边界条件。首先，弦的两端固定，所以有：

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0 \quad (2)$$

其次，根据题意，在折点有F和张力T平衡，于是可以得出在t=0时有：

$$F_0 = T2\sin\alpha = T2\tan\alpha = 4Tu|_{x=\frac{l}{2}} \quad (3)$$

于是可以再得边界条件：

$$u|_{t=0} \begin{cases} \frac{F_0 x}{2T_0} & (0 \leq x \leq l/2) \\ \frac{F_0(l-x)}{2T_0} & (l/2 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (4)$$

$$u'|_{t=0} = 0 \quad (5)$$

先求出方程特解，设特解具有 $u(x, t) = X(x)T(t)$ 的形式。代入，进行变换，可得

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (6)$$

左端与x无关，右边与t无关，因此两端共同等于一个常数，设为c。于是有

$$\begin{cases} T''(t) + ca^2 T(t) \\ X''(x) + cX(x) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

同时，根据边界条件，还可以得到

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0 \quad (8)$$

$X(n)$ 的方程的通解是

$$X(x) = A\sin\sqrt{c}x + B\cos\sqrt{c}x \quad (9)$$

根据边界条件，可得

$$B = 0, \quad A\sin\sqrt{c}l = 0, \quad A \neq 0$$

由 $A\sin\sqrt{c}l = 0, A \neq 0$ 得出

$$c_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (10)$$

所以有

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (11)$$

根据(7)和初始条件，每一个n会有对应的 $T_n$

$$T_n(t) = D_n \cos\frac{n\pi t}{l} \quad (12)$$

为满足初始条件，仍要有

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi x}{l} = u|_{t=0} \quad (13)$$

在(10)式两端同乘 $\sin\frac{m\pi x}{l} dx$ ，并逐项积分，得到：

$$\begin{aligned} \int_0^l \phi(x) \sin\frac{m\pi x}{l} dx &= \int_0^l \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l D_n \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{m\pi x}{l} dx = D_m \frac{l}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$D_n = \frac{2}{l} \int_0^l u(x)|_{t=0} \sin \frac{n\pi}{l} x dx \quad (15)$$

解出  $D_n$

$$D_n = \frac{2F_0}{T_0 n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16)$$

通解为:

$$(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$$

$$u_n(x, t) = D_n \cos(\frac{n\pi}{l} at) \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (17)$$

$$D_n = \frac{2F_0}{T_0 n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}, \quad n = 1, 2,$$

[1][2]

### 3 利用matlab模拟

接下来要做的就是利用matlab算出前n项的级数和作为  $u(x, t)$  的结果并画图。Figure 2 为以  $F=0.1$ ,  $T=1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $L=2$  为例取前50项的级数的结果:

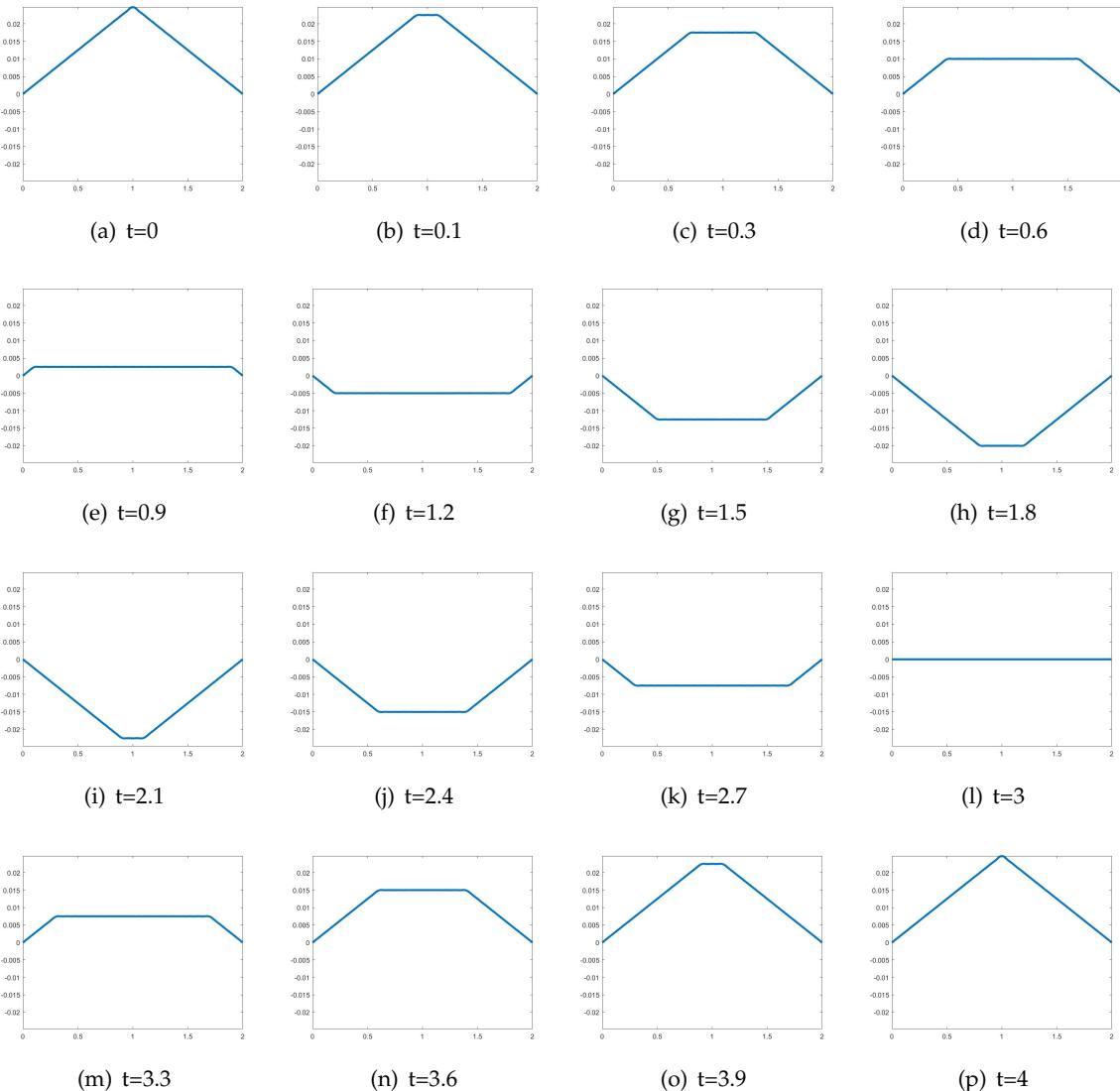


Figure 2. 模拟

## 4 用pdetool求数值解

matlab提供了求解空间二维偏微分方程问题的工具——pdetool。

我们将一维弦振动拓宽到二维的一个平面的振动上。运动方程可以化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

的形式。在PDE栏中的PDE Specification 中选择Hyperbolic(双曲型)，并且根据运动方程将参数设为 $c = 1, a = 0, f = 0, d = 1$ 。

在Options-Axis limits中确定坐标轴范围，将x, y轴坐标范围均改成[-3 3]。

借助Draw 中画出一个左下角坐标为(-2, -2)，长宽均为4的矩形代表薄膜的范围。

接下来输入边界条件，将矩形的四条边在B

oundary Mode中选中，之后在Specify Boundary Condition中设为Dirichlet, h为1, r为0。

在Solve Parameters中的 $u'(t0)$ 输入初始速度0。u(t0)中输入初始位移，以 $0.5 * (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) * (x^2 + y^2 <= 1) + 0. * (x^2 + y^2 > 1)$ 为例

t改为 $0 : 0.1 : 16$ ，以便观看整个过程，其他数值均不变。

接下来划分区域，在mesh栏中选择Initialize Mesh。为了计算精度再选择Refine Mesh进一步

划分。最后在plot栏中勾选Color, Height, Animation让其输出动画，使结果直观。下面的Figure 3即为所得结果：

对于一维弦振动，只需要将矩形上下两条边设为Neumann形，g为0, q为0，构造出一个侧面不受力的窄带，之后输入新的初始条件即可。

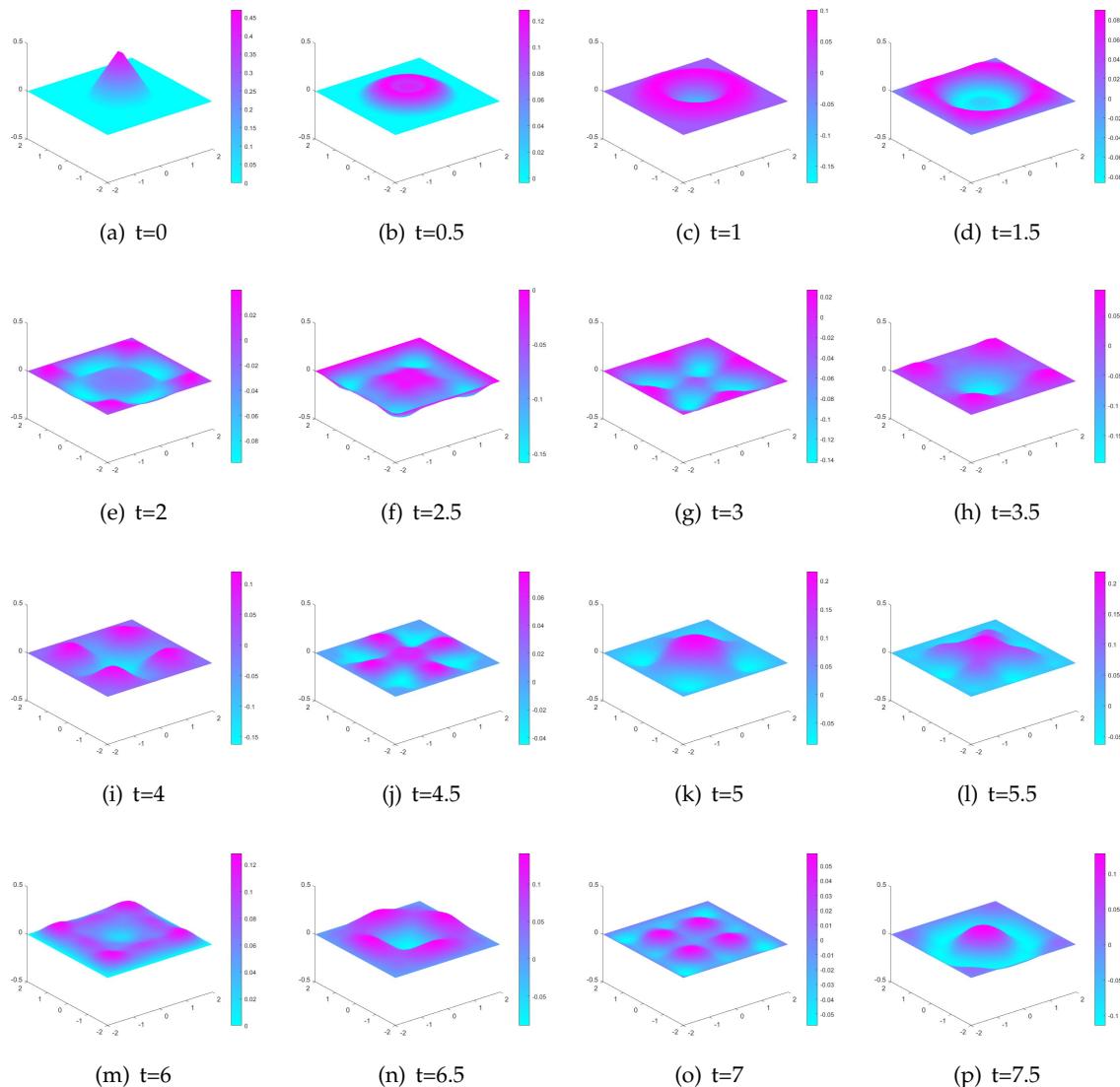


Figure 3.pdetool模拟

## 5 总结

对于一根柔软的两端固定的有初位移的无初速的弦的振动，在写出其形如（1）的运动方程后对初始条件为（2）（4）（5）的情况进行了求解，得到结果（17）。将具体数值代入到matlab中，取前50项级数进行计算并画图。最后得到了弦振动的模拟动图。另外，用pdetool还模拟了拓展到二维的问题。

## 致谢

感谢IBPE中提供大量帮助的同学、学长、学姐。

**Zhang Zhong**

**Address:** School of Physics, Huazhong University of Science and Technology

**Email:** qwelili0102@163.com

## 附录

第三节所使用的matlab代码：

```

1 function jxj
2 N=50;
3 t=0:0.005:4;
4 x=0:0.001:2;
5 ww=wfun(N,0);
6 ymax=max(abs(ww));
7 h=plot(x,ww,'linewidth',3);
8 axis([0 2 -ymax ymax])
9 sy=[];
10 for n=2:length(t)
11     ww=wfun(N,t(n));
12     set(h,'ydata',ww);
13     drawnow;
14     sy=[sy,sum(ww)];
15 end
16 end
17 function u=wfun(N,t)
18 x=0:0.001:2;u=0;
19 F=0.1;T=1;lambd=1;
20 a=sqrt(T/lambd);
21 for I=1:N
22     u=u+2*F/(T*(I^2)*(pi^2))...
23     *sin(I*pi/2)...
24     *cos(I*pi*a*t/2).*sin(I*pi*x/2);
25 end
26 end

```

## 参考文献

- [1] 梁昆淼.数学物理方法[M].高等教育出版社:北京,2010:109.
- [2] 顾樵.数学物理方法[M].科学出版社,2012:291-302.

# Simulink仿真模拟与振动

Weibin Liu, Class 1902, School of Physics, HUST

Simulink是MATLAB的一种可视化仿真工具，只需要运用环境中的各种模块即可构造复杂模型，然后将该模型沿时间运行即可得到数据。本文主要利用Simulink建模，通过对一维振子进行数据处理得到运动方程的图像来形象理解振子运动趋势，并学习Simulink的一些基本方法。

## 1 简介

在MATLAB中，对于具有解析形式的方程，我们可以利用符号方程来求得精确解，但是在生活实践中，我们大部分获得的数据都是离散的，并不能获得准确的函数关系，只能采用数值解法，而自己去编写脚本也未免有些复杂。现在我们可以利用Simulink仿真来建立一个模型，对数据进行处理，它会为我们提供数值积分的模块。下面我们利用Simulink仿真模拟来解决一些物理中的振动问题，包括有对时间连续或者离散的力，来观察振动中系统状态的变化。

## 2 问题分析

不妨以一维阻尼振动为例观察该振子分别在无动力、正弦动力 $\sin\omega t$ 以及另一个给定的外力这三种外力下的运行情况，而每一动力条件下将振子的状态分为无阻尼、欠阻尼、临界阻尼与过阻尼4种类别进行观察。振动的动力学方程为：

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (1)$$

整理得：

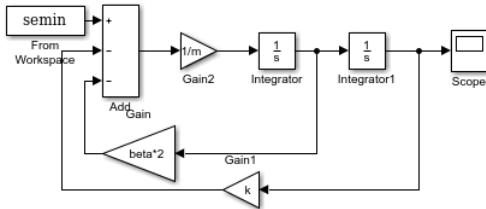
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}(F(t) - 2\beta \frac{dx}{dt} - kx) \quad (2)$$

在建模窗口中我们可以打开上面的Library Browser，找到我们需要的Add加法器模块、

$$X = \begin{cases} e^{-\delta t}(C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}) & \delta < \omega_0, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ (C_1 x_1 + C_2) e^{-\delta t} & \delta = \omega_0 \\ e^{-\delta t}(C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) & \delta > \omega_0, \omega = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{cases} \quad (4)$$

Gain倍乘模块、Integrator积分模块、Scope示波器模块、以及From Workspace输入模块（在有具体函数时也可运用具体的数学函数模块输入，如下文的SineWave模块），并将其拖拽复制到构建模型的区域中，然后在模块的输入输出端口间长按左键拖动形成连线即可构成模型。然后点击模块就可设置该模块的值或者变量，其中变量由工作区输入。另外我们也可以用Out模块将仿真的数据输出到工作区保存以便于进行统一显示。

总体模型的框架如Figure 1所示：



**Figure 1.** 总体模型  
图中semin为力和时间构成的输入矩阵,beta =  $\beta$

## 3 问题求解

### 3.1 无动力

无动力时 $F \equiv 0$ , 动力学方程为:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3)$$

易得通解为:

$$\begin{aligned} \delta < \omega_0, \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ \delta = \omega_0 & \\ \delta > \omega_0, \omega &= \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \end{aligned} \quad (4)$$

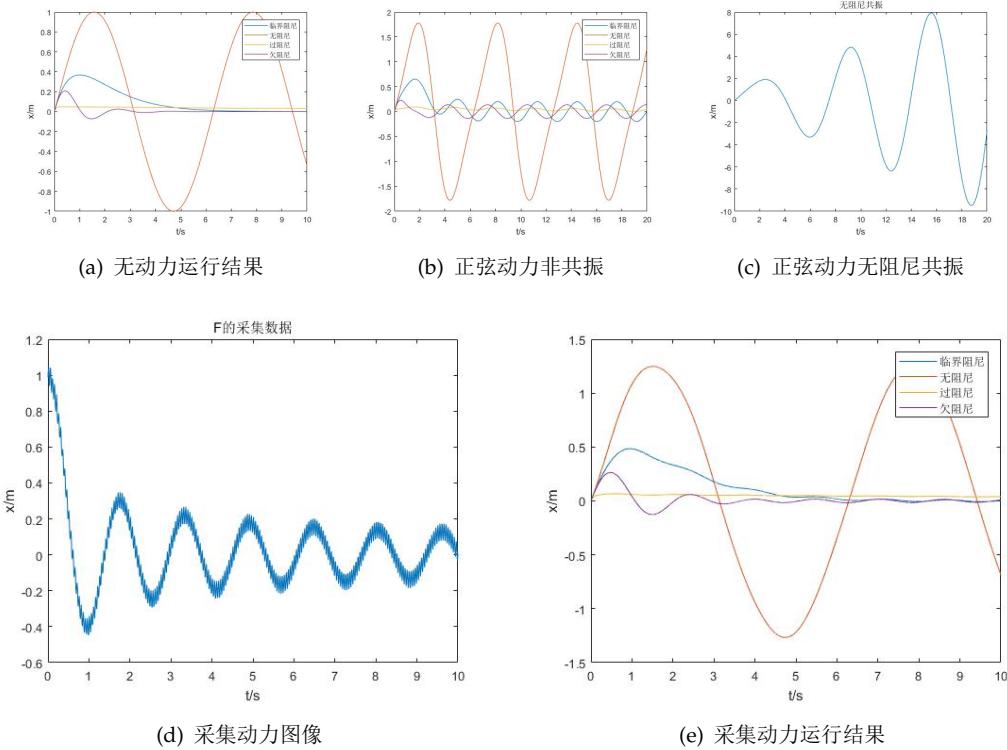


Figure 2. 模型运行结果

在仿真模拟中,  $m=1$ ,  $v(0)=1$ ,  $x(0)=0$ 。

其他参数设置为: 过阻尼,  $\beta=10$ ,  $k=1$ ; 临界阻尼,  $\beta=k=1$ ; 欠阻尼,  $\beta=1$ ,  $k=10$ ; 无阻尼,  $\beta=0$ ,  $k=1$ 。

仿真结果如Figure 2-(a)所示。可以看出当过阻尼和临界阻尼时, 物体不会再次越过平衡位置, 而是逐渐逼近; 当欠阻尼时, 物体的运动是振幅随时间指数缩小的三角函数; 而无阻尼时呈现的是三角函数。结果符合解出的方程的特点。

### 3.2 正弦动力

易得运动方程为:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + kx = \sin \omega t \quad (5)$$

该方程为二阶非齐次常系数微分方程, 其通解为:

$$x = X + x* \quad (6)$$

$$x* = t^k (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t) \quad (7)$$

$$k = \begin{cases} 0 & \omega i \neq \delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \\ 1 & \omega i = \delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \end{cases} \quad (8)$$

运行结果如Figure 2-(bc)所示, 可以看出, 除了无阻尼共振时振幅会随着时间线性增加外, 其余的情况下会趋于一个稳定的三角函数。结合通解来看, 无阻尼共振时,  $x = X + t[\sin(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t)]$ , 总体上振幅随时间线性增长; 无阻尼不共振的解  $x = X + \sin(\omega t) + \cos(\omega t)$  符合图像; 有阻尼时易知其解为振幅恒定的振动与振幅衰减的振动的叠加, 符合方程的解。

### 3.3 采集动力

仿真结果如Figure 2-(de)所示。由于该图像由离散点连接而成, 故不能得出振动的解析解。但是在模型中MATLAB会根据输入的值进行数据插值, 再进行数值积分, 给出模拟的结果。当采集的数据足够多时, 仿真的结果就越准确。该数据的时间间隔大约为0.01s, 系统的可变步长仿真的结果并不光滑, 因此我们可以自定义一个0.001s的定步长, 来充分利用数据, 得到更精确的结果。于是在 Configuration Parameters 选项中我们可以选择定步长 Fixed-step, 并设置步

长 Fixed-step size=0.001。这样我们的结果就更为光滑了。

## 4 总结

MATLAB的确是一款功能强大的处理软件，利用好Simulink建模，可以很方便的帮助我们将离散的数据进行插值处理，从而反映系统状态的连续的动态变化，让我们可以对其作出一定的预测。而且 Simulink中模块众多，能够以类似于拼图的方式构建复杂系统，实现许多功能。同时它也有S函数让我们自定义自己的模块，满足自己的需求。

## 致谢

这次MATLAB以及L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X学习我主要是在互联网上寻找视频以及文字教程进行学习，非常感谢b站上面有很多免费的教学内容，让我掌握基本的知识与技能，另外还有百度等搜索引擎提供解决问题的知识。另外IBPE的学长学姐们也指出了我思路上以及排版上的不足，让我了解了论文的基本结构。

**Address:** School of Physics, Huazhong University of Science and Technology

**Email:** 3083823170@qq.com

# 量子密码中的光子数分束攻击与时移攻击

Boxuan Sun, 1902, School of Physics, HUST

量子保密通信技术的飞速发展，展现了量子密码在通信领域巨大的应用潜力。量子密码利用量子的物理属性来保证通信的无条件安全，然而在实际通信中，光源等一些设备具备不完美性。针对使用非理想光源的量子密钥分发系统，本文将结合相关文献介绍光子数分束(*photon-number-splitting, PNS*)攻击原理和实现过程，即通过截取分束Alice发送的光子脉冲展开的攻击；针对单光子探测器效率不匹配的QKD系统，本文也结合文献介绍了两种时移攻击原理和实现过程，分析了具体步骤，并比较了两种攻击异同。我们得出实际过程的量子密钥通信系统并非绝对安全，存在一定的安全隐患。

## 1 简介

当下，由于量子力学和密码学的结合，量子保密通信技术得到蓬勃发展，基于测不准原理和不可克隆原理等原理的无条件安全性，其打破很多传统通信的壁垒，展现了巨大的发展潜力。然而在实际通信中，由于存在设备和技术层面的不成熟之处，其可能存在一定的安全隐患。随着研究的不断深入，量子保密通信的攻防技术涌现了很多经典的方案。

2000年Brassard等人提出针对光源非完美性的分束(*photon-number-splitting, PNS*)攻击[1]，PNS攻击是一种利用光源的非理想的缺陷展开的攻击。2006年Makarov等人提出了第一个时移攻击技术的方案(后文称为M型时移攻击方法)[2]，在其之后，2007年BING QI等人在此基础上进行了改进，并于2008年进行了实验测试(后文称为Q型时移攻击方法)[3]，时移攻击是一种针对量子密钥分发系统利用测量设备的非精确性进行的一种量子攻击。

基于此，本文首先介绍BB84协议，然后结合上述文献介绍并详细讨论两种攻击的实现原理和具体过程，表明实际量子通信并非绝对安全，具有一定安全隐患。

## 2 基于BB84的QKD系统

1984年，第一个量子密钥分配方案由Bennett和Brassard提出，这一方案也被称为BB84协议[4]。BB84协议结合单量子态不可克

隆定理以及不确定性原理，完成了理论上被证明无条件安全的协议。在量子力学中，我们可以用Hilbert空间的一个矢量 $|\psi\rangle$ 来描述一个物理对象。二维Hilbert空间的矢量我们可以用一组单位正交基叠加表示：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

其中 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 是正交的， $\alpha$ 和 $\beta$ 是一个复数，满足 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ 。为了引入正交的概念，我们需要引入内积。内积就是一个线性映射，它能将一个矢量映射成一个数，这种线性映射我们称之为矢量的对偶，它存在于对偶空间中。Hilbert空间中矢量的对偶定义为其Hermite共轭，对于上面的(1)而言，其对偶可以记为(\*表示复共轭)：

$$\langle\psi| = \alpha^* \langle 0 | + \beta^* \langle 1 | \quad (2)$$

这样一来，由基矢的正交性 $\langle 0 | 1 \rangle = 0$ 以及量子态归一化的假定 $\langle i | i \rangle = 1, (i = 0, 1)$ ，我们便可以得到两个矢量内积的计算方法，若态： $|\phi\rangle = \gamma^*|0\rangle + \delta^*|1\rangle$ 则有： $\langle\phi|\psi\rangle = \gamma^*\alpha + \delta^*\beta$

接下来，量子力学假定，对于 $|\phi\rangle$ 态，观测到其塌缩到 $|\psi\rangle$ 方向的概率为 $|\langle\psi|\phi\rangle|^2$ 。

我们选取Pauli-z算符 $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的两个本征态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 作为基底，称之为Z方向的基矢。由于基底的选取是任意的，我们当然也可以选取

另一组基底, 记为(称之为X方向的基矢)

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (3)$$

$$|\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (4)$$

我们可以在Z方向对 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 进行测量, 结果为 $|0\rangle, |1\rangle$ 的概率各为 $1/2$ 。我们可以在X方向对 $|0\rangle, |1\rangle$ 进行测量, 结果为 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 的概率各为 $1/2$ 。我们可以在X方向对 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 进行测量, 测量结果是确定的(1或0)。同样的在Z方向测量 $|0\rangle, |1\rangle$ 也是确定的(1或0)。

事实上, 我们可以用 $|0\rangle, |1\rangle$ 表示光子的水平与竖直偏振方向的状态,  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 表示光子的+45和-45度偏振方向的状态。

为了编码比特0和1, 我们可以选取两种方向X(代表斜基)与Z(代表直角基)作为测量方向, 具体编码方法见表格。

**Table 1.** BB84协议编码规则

测量方向 \ 编码	0	1
Z	$ 0\rangle$	$ 1\rangle$
X	$ \downarrow\rangle$	$ \uparrow\rangle$

BB84协议的基本流程如下, 其中设定Alice为发送端Bob为接收端:

(1) Alice生成一组随机序列 $a_n$ 及生成与 $a_n$ 长度相同的编码基矢选择序列 $b_n$ 。我们可以假设该随机序列 $a_n$ 为: 10111001。测量方向选择序列 $b_n$ 为: XXZZXZXX。

(2) Alice依照表(1)所示对发送信息 $a_n$ 进行编码, 即为:  $|1\rangle|0\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|1\rangle|\downarrow\rangle|0\rangle|1\rangle$ 。Alice将偏振态光子序列发送给Bob。

(3) Bob随机选择测量方向X,Z对Alice发过来的每一个脉冲进行测量, Bob记录下测量方向序列 $c_n$ , 且长度与 $a_n$ 相等。不妨假设Bob选择的测量方向序列为: ZXZZZZXX。Bob对Alice发送的脉冲进行测量, 得到信息序列 $d_n$ , 这里假设Bob得到如下结果: 01010001。

(4) Bob通过经典信道告知Alice自己使用了哪些测量方向, 随后Alice通过经典信道告知Bob选用的哪些测量方向是正确的, 双方筛选出正确的

比特信息, 并将错误的丢弃。Bob得知正确的测量方向为: //Z/ZXX。Bob剔除错误信息后得到的正确信息为: //1/001。

(5) Bob从正确的密钥数据随机选取一部分, 通过经典通信信道将数据及位置发送给Alice。Alice把Bob发送的信息和自己同位置信息对比, 如果错误率大于一定设定值, 则认为窃听者存在, 丢弃本轮密钥, 否则判断没有窃听者存在, Alice将安全性告知Bob, 双方将剩余密钥储存。

(6) 对上一步的密钥数据进行数据协调和密性放大, 产生最终密钥。

### 3 PNS攻击

PNS主要利用实际QKD系统无法实现单光子源的这一缺陷进行攻击, 攻击者通过对光脉冲截断和分离来进行攻击。

#### 3.1 攻击原理

在实际的QKD系统中, 当前技术无法低成本完美实现标准单光子源, 所以通常系统中弱相干光来进行代替单光子光源, 存在着多光子脉冲的概率, 衰减后的光子数服从Poisson分布[5]:

$$P(n) = e^{-\mu} \frac{\mu^n}{n!} \quad (5)$$

若考虑到光纤的损耗, 若光纤的传输效率为 $\eta$ , 那么Bob探测到每脉冲n个光子的概率为:

$$P(n\eta) = e^{-\mu\eta} \frac{(\mu\eta)^n}{n!} \quad (6)$$

式中 $\mu$ 为每脉冲的平均光子数,  $P(n)$ 为探测到脉冲中n个光子的概率。容易看见, 当 $n = 0$ 为空脉冲, 得到空脉冲的概率为 $P(n = 0) = e^{-\mu}$ , 单光子脉冲概率为 $P(n = 1) = \mu e^{-\mu}$ , 多光子脉冲的概率为 $P(n > 1) = 1 - \mu e^{-\mu} - e^{-\mu}$ 。其中, 在 $\mu$ 取不同值时, 多光子脉冲和单光子脉冲所占比差距很大。[6]

#### 3.2 攻击前提

窃听者Eve实现攻击需具备三个基本条件:

(1)她能建立一条任意长度衰减更小的透明通道,补偿自己操作带来的光强衰减。

(2)她能进行量子非破坏性测量,也就是她可以分辨出脉冲信号的光子数却不会影响到光子的量子态本身。

(3)她拥有量子储存,以便把分离的信号进行保存。

### 3.3 具体实现

Eve在信道中对光脉冲信号进行非破坏性测量,判断脉冲所含的光子数。根据测量结果,进行如下过程:

- (1)当测量的为空脉冲,则不做处理。
- (2)当测量的为单光子脉冲,则屏蔽单光子脉冲使其无效。
- (3)当测量为多光子脉冲,则对多光子脉冲进行分束,保留其中的一个光子在量子储存器中,而其他光子则通过透明信道发送给Bob。

当Alice和Bob在公开信道对基时,Eve可测量自己分离出来的光子获取完全的密钥信息。

其中,光子的量子态没有被干扰,不会增加额外的误码率;而且,透明信道也保持了Bob端计数率的稳定,解决了截断光子过程的高损耗问题。Lütkenhaus的文章[7]已证明当进行PNS攻击时,光子数的Poisson分布仍一直保持,不会导致Bob端发生误码率变化,使得无法发现窃听者Eve的存在。

攻击过程如图所示:

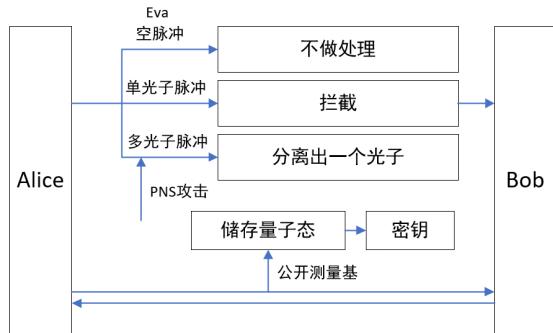


Figure 1. PNS攻击示意图

## 4 时移攻击

时移攻击是主要利用不同量子探测器探测效率不匹配进行的攻击。

### 4.1 攻击原理

当前,在大多数的实际的光纤量子密钥系统中,单光子探测器(SPD)具备特定缺陷,即不同量子探测器之间探测效率的不匹配。许多实用的QKD系统使用光通信光纤作为其量子通道,并采用1550nm或1310nm波长的光源。在这些波长下的单光子检测通常由封闭的雪崩光电二极管(APD)。单光子探测器只对很短的时间的光子(被称为探测窗口)敏感,且在探测窗口之外的效率几乎为零。为了使探测器探测的暗计数最少,这种探测器在一种门模式下工作,仅在信号上升时激活一个很窄的时间窗[3]。

对于采用相位编码、使用双探测器的量子密钥分配系统,两个探测器必须同时打开窗口。由于电路变化、制造工艺等原因,探测“0”、“1”探测器头总会存在微小差别,随着光子信号到达探测头时间的不同,探测装置的探测效率会随之发生变化。因而,导致其探测效率曲线并非随着时间完全吻合。时移攻击即利用探测效率上的微小差别进行攻击。

Bob使用两个单独的单光子探测器(SPD)为 $SPD_0$ 和 $SPD_1$ 分别检测“0”和“1”位。

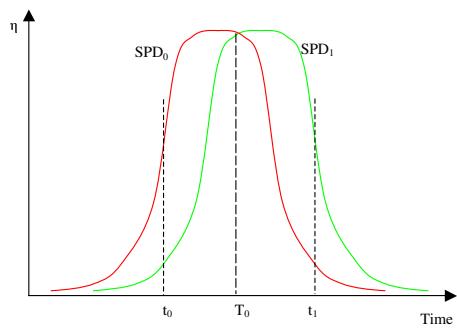


Figure 2. SPDs探测效率随时间变化图像[3]。

图中显示探测结果为“0”与“1”效率随时间变化的两条曲线,左边曲线表示探测结果为“0”,右边曲线表示为探测结果为“1”的时间效

率图像。对于图(1), 可知, 在时刻 $t_0$ 时,  $SPD_0$ 对于探测到达的光子比 $SPD_1$ 更敏感; 而在时刻 $t_1$ , 相反的,  $SPD_1$ 对于探测到达的光子, 比 $SPD_0$ 更敏感。为方便研究, 简化曲线, 做一个对称的假设, 定义:

$$r = \frac{\eta_1(t_0)}{\eta_0(t_0)} = \frac{\eta_0(t_1)}{\eta_1(t_1)} \quad (7)$$

考虑一个基于BB84的协议的QKD系统中, 对于Eva如何清楚Bob的探测器效率的不匹配, Eva可采取以下方法:

Eva可以随意阻止Alice发送给Bob脉冲的一小部分, 并用伪造的脉冲重新发送给Bob(Eva仅仅拦截一小部分, 所以误码率不会显著改变), 其中, Eva可以调节发送的延迟时间。而且, Eva可以在经典信道上知晓Bob选择的测量方向, 在当他们选择相同测量方向的情况下, Eva确切知道对应的SPD计数。若在一段长时间实验阶段两个SPD的性质未改变, 在这种情况下, 给定足够长时间, Eva可以通过重复她的攻击, 从而收集到足够的统计数据而确定SPD不同延迟时间下的效率。

## 4.2 M型时移攻击

攻击实现[2]:

(1) Eva截断Alice发送给Bob的脉冲, 并随机选择X,Z测量方向进行测量。

(2) 根据Eva的测量结果, Eva测量时选择不同的测量方向, 并发送与测量比特相反的比特(如果她选择Z方向测量并获得位“0”标记为Z0, 然后以在X方向准备位“1”, 标记为X1)。

(3) 根据她的测量结果, Eva控制发送时间, 它在时间 $t_0$ 到达Bob的SPD (对应于她的测量结果“0”) 或 $t_1$  (对应于她的测量结果“1”)。

Bob随机选择选取在Z或X方向进行测量, 具体可能及概率情形见表。

当Alice选择Z测量方向发送“0”时, 第二列包含Eve选择的测量方向和测量结果。第三列显示了Eve重新发送比特对应的测量方向。第四列表示Bob选择的测量方向。第五列表示测量结果及对应的概率。

**Table 2.** M型攻击概率分析

Alice发送	Eve接收	Eve发送	Bob接收	测量结果与对应的概率	对基是否保留
Z0	Z0	X1t <sub>0</sub>	Z	0	$\frac{1}{2}\eta_0(t_0)$ 是
				1	$\frac{1}{2}\eta_1(t_0)$ 是
				-	$1 - \frac{1}{2}\eta_0(t_0) - \frac{1}{2}\eta_1(t_0)$ 丢弃
Z0	Z0	X1t <sub>0</sub>	X	0	0 否
				1	$\eta_1(t_0)$ 否
				-	$1 - \eta_1(t_0)$ 丢弃
Z0	Z0	X1t <sub>0</sub>	Z	0	$\frac{1}{2}\eta_0(t_0)$ 是
				1	$\frac{1}{2}\eta_1(t_0)$ 是
				-	$1 - \frac{1}{2}\eta_0(t_0) - \frac{1}{2}\eta_1(t_0)$ 丢弃
Z0	Z0	X1t <sub>0</sub>	X	0	0 否
				1	$\eta_1(t_0)$ 否
				-	$1 - \eta_1(t_0)$ 丢弃
Z0	X0	Z1t <sub>0</sub>	Z	0	0 是
				1	$\eta_1(t_0)$ 是
				-	$1 - \eta_1(t_0)$ 丢弃
Z0	X0	Z1t <sub>0</sub>	X	0	$\frac{1}{2}\eta_0(t_0)$ 否
				1	$\frac{1}{2}\eta_1(t_0)$ 否
				-	$1 - \frac{1}{2}\eta_0(t_0) - \frac{1}{2}\eta_1(t_0)$ 丢弃
Z0	X1	Z0t <sub>1</sub>	Z	0	$\eta_0(t_1)$ 是
				1	0 是
				-	$1 - \eta_0(t_1)$ 丢弃
Z0	X1	Z0t <sub>1</sub>	X	0	$\frac{1}{2}\eta_0(t_1)$ 否
				1	$\frac{1}{2}\eta_1(t_1)$ 否
				-	$1 - \frac{1}{2}\eta_0(t_1) - \frac{1}{2}\eta_1(t_1)$ 丢弃

这里我们假设Eve的检测器是完美的, Alice发送一次比特值为Bob所探测到的概率为:

$$P_{arrive}(|A = Z0) = \frac{1}{4}[\eta_0(t_0) + \eta_0(t_1) + 2\eta_1(t_0)] \quad (8)$$

Alice四种选择的平均概率如下:

$$P_{arrive} = \frac{1}{8}[\eta_0(t_0) + 3\eta_0(t_1) + 3\eta_1(t_0) + \eta_1(t_1)]. \quad (9)$$

$$P_{error} = \frac{1}{4}(\eta_1(t_0) + \eta_0(t_1)) \quad (10)$$

其中 $P_{error}$ 表示Bob探测到的比特值与Alice发送的不同, $P_{arrive}$ 表示Bob成功探测到结果。

从而得到, 得到密钥误码率QBER:

$$QBER = \frac{P_{error}}{P_{arrive}} \quad (11)$$

$$= \frac{2\eta_0(t_1) + 2\eta_1(t_0)}{\eta_0(t_0) + 3\eta_0(t_1) + 3\eta_1(t_0) + \eta_1(t_1)} \quad (12)$$

$$= \frac{2r}{1 + 3r} \quad (13)$$

我们比较Bob和Eve互信息, 其中 $H(A)$ :

$B$ )表示Alice和Bob之间的互信息,  $H(A : E)$ 表示Alice和Eva之间的互信息。当 $H(A : B) > H(A : E)$ , 表明这个系统的安全性可以保证。对于仅具有单向经典通信的协议, 此条件是充分且必要的。对于该攻击, 很显然 $A \rightarrow E \rightarrow B$ 是马尔可夫链。因此, 有 $H(A : B) \leq H(A : E)$ , 因此Bob的密钥通常不安全。为了更详细的分析这种特殊攻击[2], 我们评估ALice和Eva的互信息。

$$H(A : E) = H(A) - H(A|E) \quad (14)$$

随后证实: 当Eva测量结果为Z0, Z1, X0或者X1时, Alice只有两种可能的比特值, 由于QKD协议中的对称性和窃听策略, 我们假设ALice选择测量方向是Z方向, 我们可以由 $P(A)$ 得到信息熵 $H(A)$ :

$$H(A) = -\sum_i p_i \log p_i \quad (15)$$

我们有:

$$P(A = 0) = \frac{\eta_0(t_0) + \eta_0(t_1) + 2\eta_1(t_0)}{\eta_0(t_0) + 3\eta_0(t_1) + 3\eta_1(t_0) + \eta_1(t_1)}, \quad (16a)$$

$$P(A = 1) = 1 - P(A = 0). \quad (16b)$$

为了确切求出条件熵 $H(A|E)$ , 需要条件概率 $P(E|A)$ 和 $P(A|E)$ , 由贝叶斯公式:

$$P(A|E) = \frac{P(A)}{P(E)} P(E|A). \quad (17)$$

由表(1), 条件概率 $P(E|A)$ 计算为:

$$P(E = Z0|A = 0) = \frac{\eta_0(t_0) + \eta_1(t_0)}{\eta_0(t_0) + \eta_0(t_1) + 2\eta_1(t_0)}, \quad (18a)$$

$$P(E = Z1|A = 0) = 0, \quad (18b)$$

$$P(E = X0|A = 0) = \frac{\eta_1(t_0)}{\eta_0(t_0) + \eta_0(t_1) + 2\eta_1(t_0)}, \quad (18c)$$

$$P(E = X1|A = 0) = \frac{\eta_0(t_1)}{\eta_0(t_0) + \eta_0(t_1) + 2\eta_1(t_0)}. \quad (18d)$$

在 $A = 1$ 的情况下, 我们发现由公式对称性直接从(14)计算条件概率:

$$P(E) = \sum_a P(E|A = a)P(A = a), \quad (19)$$

条件熵 $H(A|E)$ 为:

$$H(A|E) = -\sum_{a,e} P(a,e) \log(P(a|e)) \quad (20)$$

$$\begin{aligned} H(A|E) = & -\sum_{a,e} P(A = a)P(E = e|A = a) \\ & \times \log P(A = a|E = e). \end{aligned} \quad (21)$$

由上面的计算, 容易得出结果:

$$H(A|E) = (\text{QBER}) \quad (22)$$

$$H(A : E) = H(A) - (\text{QBER}) \quad (23)$$

同样地, 我们也可以得到A与B的互信息为:

$$H(A : B) = H(A) - H(A|B). \quad (24)$$

又因A和B只能取两种值("0"或"1"), 则条件概率 $P(A|B)$ 为:

$$P(B = 0|A = 0) = \frac{\eta_0(t_0) + \eta_0(t_1)}{\eta_0(t_0) + \eta_0(t_1) + 2\eta_1(t_0)}, \quad (25a)$$

$$P(B = 1|A = 0) = 1 - P(B = 0|A = 0), \quad (25b)$$

$$P(B = 1|A = 1) = \frac{\eta_1(t_1) + \eta_1(t_0)}{\eta_1(t_1) + \eta_1(t_0) + 2\eta_0(t_1)}, \quad (25c)$$

$$P(B = 0|A = 1) = 1 - P(B = 1|A = 1). \quad (25d)$$

在假设简化情况下, 探测器SPDs效率曲线为对称曲线, 其中 $H(A) = 1$ 。发现 $H(A : B) = 1 - h(\text{QBER})$ ,  $H(A : E) = 1 - (\text{QBER})$ , 其中 $h$ 为二进制香农熵函数:

$$h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2(1-x) \quad (26)$$

$H(A : B), H(A : E)$ 都仅仅取决于归一化效

率 $\eta, \eta \equiv \eta_1(t_0)/\eta_0(t_0)$ 。

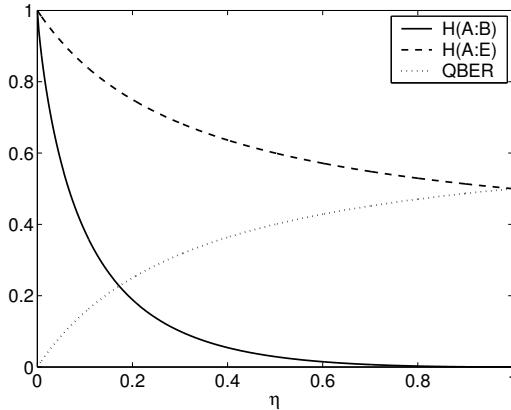


Figure 3. Alice, Bob和Eva互信息和误码率的关系[2]

据图(2),明显地, Eve和Alice有更多的互信息。对于 $\eta = 1/3$ ,  $H(A : E) - H(A : B)$ 有最大值, 其约等于0.58。对于1/3相对应的QBER, 若Bob不清楚探测器效率失配, 根据shor提出的单光子通信理论, 通信双方之间误码率需要小于等于0.11, 此时会认为密钥为安全的。因此当 $\eta$ 小于等于0.066时, Eve会危及系统的安全[7]。

在实际过程中, Alice和Bob希望QBER保持在低于0.11的某个水平, 这使Eve可操作空间变小。同样, 在本节中考虑的实际情况中, Bob检测器中的暗计数对总QBER的影响与其他误差源无关, 并且不受Eve的控制。Eve只能在Bob的检测器中暗计数外进行攻击。尽管该攻击可能不会根据QBER被发现, 但由于Bob检测器具有不同测量结果统计信息, 它可能仍被检测到。对于Bob选择X测量方向的情况, 从(16)和(25)可以看出, 由于Eve的攻击, 测量统计数据发生了变化。然而, 通过选择合适的 $t_0$ 和 $t_1$ , 可以减少甚至消除这些变化 (例如, 在上面分析的对称情况下, Bob检测到“0”与“1”统计数据是相等的)。在统计上, 如果由于光学失准(optical misalignments)等原因但却没有Eve的攻击, 可能会产生类似的统计偏差, 并且可能在Bob预期的范围之内[3]。

到目前为止, 我们已经假设Alice和Eva使用单光子状态。然后, Bob可以将量子比特率的降低视为攻击, 因为受到攻击的 $P_{arrive}$ 通常会小于Bob没有受到攻击的时候。任何实施得当的Bob都会监视量子比特率, 如果比特率显著下降, 则会发出警报。为了弥补检测概率的降低,

Eva可以增加其脉冲的强度。

监视比特率的变化和偶然的统计偏差可作为一般预防该攻击的措施。

### 4.3 Q型时移攻击

这一节分析了一个利用相同缺陷但更为简单的时移攻击, Q型时移攻击方法简化了攻击流程, Eve不再测量Alice的脉冲信号也不再发送信号给Bob, 而是采取一种在Alice、Bob线路中增设高速光开关的方式, 在两种模式中随机切换, 控制Alice的信号以确保在时间  $t_0$ 或者 $t_1$ 到达Bob的探测器, 从而根据光开关的模式以极大的概率推测到Bob所接受的信号(如图3所示)。其相比 M型时移攻击大幅简化实现过程并提升了可操作性空间。

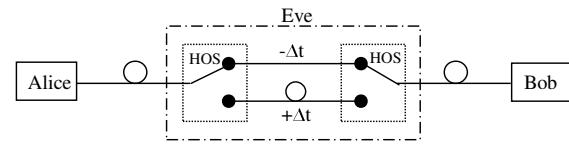


Figure 4. Eva攻击示意图[3]

Alice选择在X测量方向上发送量子比特值为“1”, 则此时Eve随机转换时间 $t_0$ 或者 $t_1$ , Bob随机的在Z或者X方向进行测量, 所有可能情形及对应概率见表(3)。

Table 3. Q型攻击概率分析

Alice发送	时移时间	Bob接收	Bob测量结果对应概率	是否保留
X1	$t_0$	Z	0 1 -	0.5 $\eta_0(t_0)$ 0.5 $\eta_1(t_0)$ $1 - 0.5\eta_0(t_0) - 0.5\eta_1(t_0)$
		X	0 1 -	0 $\eta_1(t_0)$ $1 - \eta_1(t_0)$
		Z	0 1 -	0.5 $\eta_0(t_1)$ 0.5 $\eta_1(t_1)$ $1 - 0.5\eta_0(t_1) - 0.5\eta_1(t_1)$
X1	$t_1$	X	0 1 -	0 $\eta_1(t_1)$ $1 - \eta_1(t_1)$

Alice选择在X方向上发送量子比特值“0”, Alice选择在Z方向上发送量子比特值“0”或“1”的情况于此表对应。

我们可以计算, Bob正确探测Alice发送的概

率为:

$$P_{arrive} = \frac{1}{4}(\eta_0(t_0) + \eta_1(t_0) + \eta_0(t_1) + \eta_1(t_1)) \quad (27)$$

$$P_{error} = \frac{1}{4}(\eta_0(t_1) + \eta_1(t_0)) \quad (28)$$

从而得到密钥误码率QBER为:

$$QBER = \frac{P_{error}}{P_{arrive}} \quad (29)$$

$$= \frac{\eta_0(t_1) + \eta_1(t_0)}{\eta_0(t_0) + \eta_1(t_0) + \eta_0(t_1) + \eta_1(t_1)} = \frac{r}{r+1} \quad (30)$$

假设由Alice发送比特“0”和“1”具有相等的先验概率。由式(30)得到Eva猜测Bob的比特值错误的概率为 $r/(r+1)$ ，因此Eva对最终密钥的互信息由下式给出:

$$H(B : E) = 1 - h(r/(r+1)) \quad (31)$$

其中 $h(x)$ 为二进制香农熵函数，由式(26)给出。在此攻击中，Eva不探测Alice发送的状态，故Eva不会引入任何错误。

现在我们证明，只要 $H(B : E) > 0$ ，如果Alice和Bob之间都不知道Eva的攻击，那么他们之间共享的最终密钥就不安全。为证明这一点，本节计算了在Eva的攻击下密钥生成率的上限，一个上限由条件互信息给出[8]:

$$H(A : B | E) = h(r/(r+1)). \quad (32)$$

如果Alice和Bob不知道存在时移，那么他们会以1的速率产生密钥。因此，每当 $h(r/(r+1)) < 1$ 或者Alice和Bob比上限值更高的速率生成密钥时，他们之间共享的最终密钥是不安全的。为了量化上限值，我们可以用在实验中观察到的 $r = 2$ 的实验值代替[3]，这给我们一个上限值 $H(A : B | E) = H(2/3) = 0.9183$ ，在这种情况下，时移攻击会导致密钥生成速率降低。

相比M型攻击，Q型攻击更加容易实现。Eva可以通过一个长的光路实现所需的时移，使

高速开关重新发送从Alice端接收到的信号。而且Q型攻击另一个优点是Eve没有引入任何错误。Alice和Bob很难检测到Eve的存在。

它的一个缺点是，对于筛选密钥Eve不能得到完整信息(除去极端情况 $r = 0$ )。因此，Alice和Bob仍可能制定出一个安全的密钥，前提是他们能够正确的知晓Eve的信息上限。

## 5 Conclusion

近来，量子保密通信技术的理论研究已非常成熟，逐走向实际应用，实用QKD的安全性分析成为了许多学者关注的重点。QKD系统可保证Alice与Bob产生安全通信密钥，结合“一次一密”算法可保证无条件的安全通信。然而，实际阶段的QKD系统中的物理元器件很难达到理论要求，存在着各种各样的安全缺陷，同时也存在受到攻击的可能，使传输的密钥产生很大的安全隐患。本文结合相关文献介绍了PNS攻击，也介绍并讨论两种时移攻击，展示出具体的攻击策略，表明实际中的QKD系统并非绝对安全。

## 致谢

感谢陈承渝学长不辞劳苦的指导帮助，感谢徐颖宸学姐在物理方面给我的支持与帮助，同时也感谢其他IBPE的学长学姐的帮助，最后感谢父母的关心理解。

## 参考文献

- [1] Gilles Brassard,Norbert Lütkenhaus,Tal Mor,et al..Limitations on practical quantum cryptograph[J].Phys Rev Lett,2000,85(6):1330-1333.
- [2] V. Makarov, A. Anisimov, and J. Skaar, Effects of detector efficiency mismatch on security of quantum cryptosystems, arXiv:quant-ph/0511032 (2005).
- [3] ZHAO Y, FUNG C H F, QI B, et al. Quantum hacking: Experimental demonstration of

- time-shift attack against practical quantum-key-distribution systems[J]. Physical Review A, 2008, 78(4): 1–5. [DOI: 10.1103/PhysRevA.78.042333]
- [4] Bennett C H, Brassard G. Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing. Bangalore, India, 1984, 175(0).
- [5] LI F L. Advanced Laser Physics[M]. Hefei: Press of University of Science and Technology of China, 1992: 285–327. 李福利. 高等激光物理学[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 1992: 285–327.
- [6] LI H X, CHI Y G, HAN Y, YAN B, WANG W. Analysis on photon-number-splitting attack against decoy-state quantum key distribution schemes[J]. Journal of Cryptologic Research, 2018, 5(1): 1–12. 李宏欣, 迟洋广, 韩宇, 闫宝, 王伟. 针对诱骗态子密钥分发方案的 PNS 攻击研究[J]. 密码学报, 2018, 5(1): 1–12.
- [7] Lütkenhaus N, Jahma M. Quantum key distribution with realistic states: photon number statistics in the photon-number splitting attack[J]. New Journal of Physics, 2002, 4(1): 44.
- [8] U. M. Maurer and S. Wolf, Unconditionally secure key agreement and the intrinsic conditional information, IEEE Trans. Inf. Theory 45 (1999), 499–514.