量子纠缠与量子测量

黄晨

chen_huang@hust.edu.cn

2020 年 12 月 10 日

目录

1. 量子比特 (Qubit) 与量子纠缠
   - 量子比特 (qubit)
   - 量子纠缠 (entanglement)
   - 密度矩阵
   - 自发参量下转换 (SPDC) 制备纠缠光子对
2. 量子纠缠态的测量
   - 光路的保偏与波片的定轴
   - 最大纠缠态的制备
   - 实验中的投影测量
   - 密度矩阵重构
3. Bell 不等式的检验
   - EPR 佯谬与 Bell 不等式
   - 制备 Bell 态
   - Bell 不等式的检验

量子比特 (Qubit)

我们总可以将一个量子态表示为

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{d-1} c_n |n\rangle \tag{1}$$

其中 d 是 Hilbert 空间维数，$|n\rangle$ 是该系统在某一表象下的本征态。当 $d = 2$ 时，我们得到的即是量子比特 (Qubit)

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \tag{2}$$

量子纠缠 (Entanglement)

考虑一个包含 A 和 B 两个量子比特的复合系统，其状态可以表示为

$$|\psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \tag{3}$$

其中 $|ij\rangle = |i\rangle \otimes |j\rangle$。

- 直积态

$$|\psi\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |\psi\rangle_B \tag{4}$$

- 纠缠态 (e.g. Bell 态)

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \tag{5}$$

我们可以定义诸如纠缠度 (concurrence) 来定量描述一个量子态纠缠的大小[1]。

[1] William K Wootters. "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits". In: *Physical Review Letters* 80.10 (1998), p. 2245.

密度矩阵

量子纠缠的存在带来了体系信息的不完备性。借助于统计物理中系综的概念，我们可以引入“量子系综”。对于一个量子系综 $\{|\psi_i\rangle, p_i\}$，其概率分布完全由以下密度矩阵描述

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \tag{6}$$

对于量子比特，纠缠度 (concurrence) 定义为[2]

$$C = \max\left\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right\} \tag{7}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 是 R 按降序排列的本征值，即 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$，$R$ 与测量基的选取无关

$$R = \rho(\sigma_y \otimes \sigma_y)\rho^T(\sigma_y \otimes \sigma_y) \tag{8}$$

[2] Daniel FV James et al. “On the measurement of qubits”. In: *Asymptotic Theory of Quantum Statistical Inference: Selected Papers*. World Scientific, 2005, pp. 509–538.

自发参量下转换 (SPDC) 制备纠缠光子对

在量子信息中，我们可以以单光子为载体，利用光的不同偏振态表示量子比特，比如分别用水平偏振态 $|H\rangle$ 和垂直偏振态 $|V\rangle$ 表示正交基矢 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$。

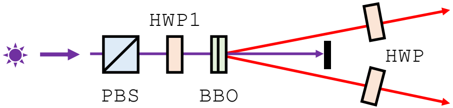

图: SPDC 过程光路示意图

利用非线性晶体 BBO 的自发参量下转换 (Spontaneous Parametric Down-Conversion, SPDC) 制备纠缠光子对[3]。

- $|H\rangle \to |VV\rangle$
- $|V\rangle \to |HH\rangle$

[3] John C Garrison and R. Y. Chiao. *Quantum optics*. Oxford University Press, 2008.

1. 量子比特 (Qubit) 与量子纠缠
   - 量子比特 (qubit)
   - 量子纠缠 (entanglement)
   - 密度矩阵
   - 自发参量下转换 (SPDC) 制备纠缠光子对
2. 量子纠缠态的测量
   - 光路的保偏与波片的定轴
   - 最大纠缠态的制备
   - 实验中的投影测量
   - 密度矩阵重构
3. Bell 不等式的检验
   - EPR 佯谬与 Bell 不等式
   - 制备 Bell 态
   - Bell 不等式的检验

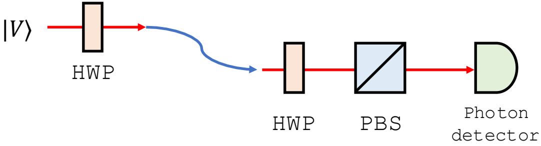

图: 光路保偏示意图

消光时，即光子处于 $|VV\rangle$ 态时 HWP 和 QWP 的角度如下表：

状态	HWP1	QWP1	HWP2	QWP2
$\|VV\rangle$	132°	328°	5°	28°

在接下来调节光子偏振状态中，我们只需要在这些角度的基础上对波片进行旋转。

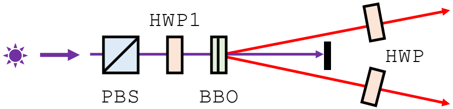

图: 参量下转换过程光路示意图

- $|\mathrm{H}\rangle \rightarrow \eta\,|\mathrm{VV}\rangle$
- $|\mathrm{V}\rangle \rightarrow \eta'\,|\mathrm{HH}\rangle$

考虑到实验中所用的激光器出射激光为水平偏振方向。它经过快轴与水平方向的夹角为 α 的 HWP1 后得到的光子态为

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} |\mathrm{H}\rangle = \cos(2\alpha)\,|\mathrm{H}\rangle + \sin(2\alpha)\,|\mathrm{V}\rangle \quad (9)$$

经过 BBO 后，出射的光子态 (未归一) 为

$$|\psi\rangle = \eta' \sin(2\alpha)\,|\mathrm{HH}\rangle + \eta \cos(2\alpha)\,|\mathrm{VV}\rangle \quad (10)$$

在实验中，我们需要制备最大纠缠态

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{HH}\rangle + |\mathrm{VV}\rangle) \tag{11}$$

为了得到最大纠缠态，HWP 的角度 α 需满足

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\eta}{\eta'}\right) = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{n}{n'}\right) \tag{12}$$

其中 n 是 $\alpha = 0°$ 时的符合计数，n' 是 $\alpha = 45°$ 时的符合计数。在实验中，我们的测量结果如下

n	n'	α
65338	60080	$23°42'01''$

实验中的投影测量

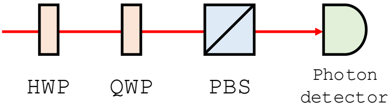

图: 测量光路示意图

假设 HWP 的快轴与水平方向夹角为 h(正方向为逆时针)，那么 HWP 的 Jones 矩阵可以写为

$$U_{\text{HWP}}(h) = \begin{pmatrix} \cos(2h) & \sin(2h) \\ \sin(2h) & -\cos(2h) \end{pmatrix} \tag{13}$$

假设 QWP 的快轴与水平方向夹角为 q(正方向为逆时针)，那么 QWP 的 Jones 矩阵可以写为

$$U_{\text{QWP}}(q) = \begin{pmatrix} 1 - i\cos(2q) & -i\sin(2q) \\ -i\sin(2q) & 1 + i\cos(2q) \end{pmatrix} \tag{14}$$

实验中的投影测量

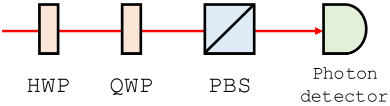

图: 测量光路示意图

则先经过 HWP，再经过 QWP 总的 Jones 矩阵为

$$
\begin{aligned}
U(h,q) =& U_{\mathrm{QWP}}(q)U_{\mathrm{HWP}}(h) \\
=& \begin{pmatrix} \cos(2h) - i\cos(2q-2h) & \sin(2h) + i\sin(2q-2h) \\ \sin(2h) - i\sin(2q-2h) & -\cos(2h) - i\cos(2q-2h) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{15}
$$

偏振分光棱镜 PBS 能够让水平偏振的光子几乎全部透过，而垂直偏振的光子几乎全部反射，PBS 与单光子计数器的作用等价于测量算符

$$
O = |\mathrm{H}\rangle\langle\mathrm{H}| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{16}
$$

实验中的投影测量

考虑 HWP，QWP，PBS，单光子计数器共同作用的测量算符。对于一个量子比特 $|\psi\rangle$，通过 HWP，QWP 后变为 $|\psi_{\text{proj}}\rangle$，能够到达单光子计数器计数的概率为

$$P = \langle\psi_{\text{proj}}| O |\psi_{\text{proj}}\rangle = \langle\psi| U^\dagger O U |\psi\rangle = \langle\psi| U^\dagger |\mathrm{H}\rangle \langle\mathrm{H}| U |\psi\rangle \tag{17}$$

这等价于利用投影算符 O' 对 $|\psi\rangle$ 进行投影测量

$$O' = U^\dagger |\mathrm{H}\rangle \langle\mathrm{H}| U \tag{18}$$

于是测量基

$$U^\dagger |\mathrm{H}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(2h) + i\cos(2q - 2h) \\ \sin(2h) - i\sin(2q - 2h) \end{pmatrix} \tag{19}$$

密度矩阵重构量

测量基

$$U^{\dagger}|\mathrm{H}\rangle=\begin{pmatrix}\cos(2h)+i\cos(2q-2h)\\ \sin(2h)-i\sin(2q-2h)\end{pmatrix} \tag{20}$$

通过调整 HWP 和 QWP 的角度，我们可以选取需要的投影算符。

测量基	HWP 角度 (h)	QWP 角度 (q)
$\|\mathrm{H}\rangle$	$0°$	$0°$
$\|\mathrm{V}\rangle$	$45°$	$0°$
$\|\mathrm{D}\rangle=(\|\mathrm{H}\rangle+\|\mathrm{V}\rangle)/\sqrt{2}$	$22.5°$	$0°$
$\|\mathrm{R}\rangle=(\|\mathrm{H}\rangle-i\|\mathrm{V}\rangle)/\sqrt{2}$	$22.5°$	$45°$

重构密度矩阵需要选取 16 组测量基。

密度矩阵重构

序号	测量基 1	测量基 2	HWP1	QWP1	HWP2	QWP2	符合计数
1	$\lvert V\rangle$	$\lvert V\rangle$	45°	0°	45°	0°	32108
2	$\lvert V\rangle$	$\lvert H\rangle$	45°	0°	0°	0°	942
3	$\lvert H\rangle$	$\lvert H\rangle$	0°	0°	0°	0°	31359
4	$\lvert H\rangle$	$\lvert V\rangle$	0°	0°	45°	0°	569
5	$\lvert D\rangle$	$\lvert V\rangle$	22.5°	0°	45°	0°	18713
6	$\lvert D\rangle$	$\lvert H\rangle$	22.5°	0°	0°	0°	12715
7	$\lvert R\rangle$	$\lvert H\rangle$	22.5°	45°	0°	0°	19014
8	$\lvert R\rangle$	$\lvert V\rangle$	22.5°	45°	45°	0°	13706
9	$\lvert R\rangle$	$\lvert D\rangle$	22.5°	45°	22.5°	0°	29112
10	$\lvert R\rangle$	$\lvert R\rangle$	22.5°	45°	22.5°	45°	17793
11	$\lvert D\rangle$	$\lvert R\rangle$	22.5°	0°	22.5°	45°	29387
12	$\lvert V\rangle$	$\lvert R\rangle$	45°	0°	22.5°	45°	12863
13	$\lvert H\rangle$	$\lvert R\rangle$	0°	0°	22.5°	45°	20495
14	$\lvert H\rangle$	$\lvert D\rangle$	0°	0°	22.5°	90°	14342
15	$\lvert V\rangle$	$\lvert D\rangle$	45°	0°	22.5°	90°	19092
16	$\lvert D\rangle$	$\lvert D\rangle$	22.5°	0°	22.5°	90°	17740

密度矩阵重构

根据以上数据，我们重构出纠缠量子比特的密度矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0.483 & -0.025-0.070i & -0.053-0.044i & 0.009-0.393i \\ -0.025+0.070i & 0.009 & 0.039+0.015i & 0.037+0.041i \\ -0.053+0.044i & 0.039-0.015i & 0.014 & 0.040+0.056i \\ 0.009+0.393i & 0.037-0.041i & 0.040-0.056i & 0.494 \end{pmatrix} \tag{21}$$

密度矩阵重构

根据以上数据，我们重构出纠缠量子比特的密度矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0.483 & -0.025-0.070i & -0.053-0.044i & 0.009-0.393i \\ -0.025+0.070i & 0.009 & 0.039+0.015i & 0.037+0.041i \\ -0.053+0.044i & 0.039-0.015i & 0.014 & 0.040+0.056i \\ 0.009+0.393i & 0.037-0.041i & 0.040-0.056i & 0.494 \end{pmatrix} \tag{21}$$

将结果可视化

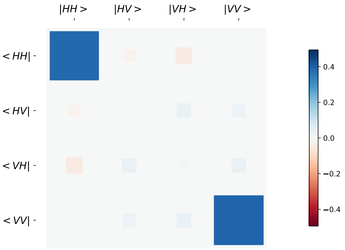

图: 实数部分

图: 虚数部分

密度矩阵重构

前面我们已经提及纠缠度的定义，即

$$C = \max\left\{0, \sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_3} - \sqrt{\lambda_4}\right\} \tag{22}$$

事实上我们可以利用 QuTiP(Quantum Toolbox in Python) 包[4]，只需一行代码便可计算出纠缠度。结果为

$$C = 0.825364 \tag{23}$$

可见我们制备的纠缠光子对纠缠度较高。

[4] J. R Johansson, P. D Nation, and Franco Nori. "QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems". In: *Computer Physics Communications* 184.4 (2013), pp. 1234–1240.

在量子力学的发展中，对量子纠缠的理解一直存在争议。其中最具代表性的就是 Einstein 等人提出的 EPR 佯谬。Einstein 论证的依据是定域实在论[5]

(1) 若两次测量是类空间隔的，则这两次测量不存在因果关系。

(2) 如果没有扰动一个系统，那么此系统的任何可观测量作为物理实在应该具有一个确定的数值。

这个论证和量子力学是相违背的。

[5] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" In: *Phys. Rev.* 47 (10 1935), pp. 777–780. DOI: 10.1103/PhysRev.47.777.

在量子力学的发展中，对量子纠缠的理解一直存在争议。其中最具代表性的就是 Einstein 等人提出的 EPR 佯谬。Einstein 论证的依据是定域实在论[5]

(1) 若两次测量是类空间隔的，则这两次测量不存在因果关系。

(2) 如果没有扰动一个系统，那么此系统的任何可观测量作为物理实在应该具有一个确定的数值。

这个论证和量子力学是相违背的。

考虑一个 Bell 态

$$|\psi\rangle_{AB}^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right) \tag{24}$$

[5] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" In: *Phys. Rev.* 47 (10 1935), pp. 777–780. DOI: 10.1103/PhysRev.47.777.

对于单个粒子，倘若用 $\hat{n}$ 方向上的 Pauli 矩阵对其进行测量，我们将得到 $+1$ 或 -1。根据量子力学，测量结果是完全随机的，量子力学给出的期望为

$$\langle\sigma_n\rangle = \langle\psi|\,\sigma_n\,|\psi\rangle \tag{25}$$

对于量子比特系统，分别用 $\hat{n}$ 和 $\hat{m}$ 方向上的 Pauli 矩阵 σ_n 和 σ_m 对 A 和 B 粒子进行测量，得到的结果也是+1 或-1，量子力学给出的期望值为

$$\langle\sigma_n\otimes\sigma_m\rangle = \langle\psi|\,\sigma_n\otimes\sigma_m\,|\psi\rangle \tag{26}$$

特别地，对于 Bell 态

$$P(\hat{n},\hat{m}) = \langle\sigma_n\otimes\sigma_m\rangle = -\hat{n}\cdot\hat{m} \tag{27}$$

根据局域隐变量理论，对于粒子 A 和 B，实际上都存在一个确定的函数 A 和 B 给出它的状态，即

$$A(\hat{n},\lambda)=\pm 1 \tag{28}$$

$$B(\hat{m},\lambda)=\pm 1 \tag{29}$$

其中 λ 表示决定这对粒子状态的隐变量。对于大量粒子对 AB，λ 满足密度分布 $\rho(\lambda)$，对粒子对 AB 分别进行 $\vec{a}$ 方向和 $\vec{b}$ 方向上的测量，期望值为

$$P(\vec{a},\vec{b})=\int\rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)B(\vec{b},\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{30}$$

特别地，根据 Bell 态的纠缠性质，测量函数 A 和 B 之间存在反对称关系

$$A(\hat{n},\lambda)=-B(\hat{n},\lambda) \tag{31}$$

于是 Eq.(30) 可以写成

$$P(\vec{a},\vec{b})=-\int\rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{32}$$

考虑另一个测量方向 $\vec{c}$

$$\begin{aligned} P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c}) &= -\int \rho(\lambda)\left[A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda) - A(\vec{a},\lambda)A(\vec{c},\lambda)\right]\mathrm{d}\lambda \\ &= \int \rho(\lambda)A(\vec{a},\lambda)A(\vec{b},\lambda)\left[A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda) - 1\right]\mathrm{d}\lambda \end{aligned} \tag{33}$$

又根据 Eq.(28)，有

$$|P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| \le \int \rho(\lambda)\left|A(\vec{b},\lambda)A(\vec{c},\lambda) - 1\right|\mathrm{d}\lambda \tag{34}$$

即得到 Bell 不等式

$$1 + P(\vec{b},\vec{c}) \ge |P(\vec{a},\vec{b}) - P(\vec{a},\vec{c})| \tag{35}$$

在实验中，我们可以通过测量符合计数的方法得到 $P(\vec{a},\vec{b})$ 的测量值

$$P(\vec{a},\vec{b})=\frac{N_{a+b+}-N_{a+b-}-N_{a-b+}+N_{a-b-}}{N_{a+b+}+N_{a+b-}+N_{a-b+}+N_{a-b-}} \tag{36}$$

在本次实验中，我们关注的是另一种概率：

$$C(\vec{a},\vec{b})=\frac{N_{a+b-}+N_{a-b+}}{N_{a+b+}+N_{a+b-}+N_{a-b+}+N_{a-b-}} \tag{37}$$

它满足如下形式的 Bell 不等式

$$C(\vec{a},\vec{b})+C(\vec{a},\vec{c})+C(\vec{b},\vec{c})\geq 1 \tag{38}$$

然而，在量子力学中，我们总能构造出

$$C(\vec{a},\vec{b})+C(\vec{a},\vec{c})+C(\vec{b},\vec{c})<1 \tag{39}$$

即量子力学预言违反了定域实在论的结果。

Bell 不等式的检验所需要的是最大纠缠态

$$\left|\psi^{-}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathrm{HV}\rangle - |\mathrm{VH}\rangle\right) \tag{40}$$

但实际上，我们通过 SPDC 所能得到的态是

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\mathrm{HH}\rangle + e^{i\varphi}|\mathrm{VV}\rangle\right) \tag{41}$$

为了得到最大纠缠态，我们需要对波片进行旋转。如图，在 Bell 不等式验证实验中，我们采用的光路与前述密度矩阵重构时的所用光路进行了一些改动。其中第一块 HWP 的作用仅仅是保偏，我们通过旋转 QWP 和后面的 HWP 来调节光子的偏振。

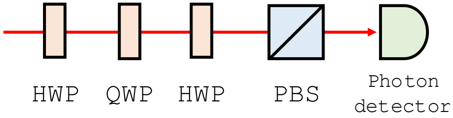

图: 测量光路示意图

QWP 和 HWP 总的 Jones 矩阵为

$$
\begin{aligned}
U =& U_{\text{HWP}}(h)U_{\text{QWP}}(q) \\
=& \begin{pmatrix} i\cos(2h)+\cos(2q-2h) & i\sin(2h)+\sin(2q-2h) \\ i\cos(2h)-\sin(2q-2h) & -i\cos(2h)+\cos(2q-2h) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{42}
$$

QWP 和 HWP 总的 Jones 矩阵为

$$\begin{aligned} U =& U_{\mathrm{HWP}}(h)U_{\mathrm{QWP}}(q) \\ =& \begin{pmatrix} i\cos(2h)+\cos(2q-2h) & i\sin(2h)+\sin(2q-2h) \\ i\cos(2h)-\sin(2q-2h) & -i\cos(2h)+\cos(2q-2h) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{42}$$

令 $q=\pi/4$，$h=\gamma/2$，则

$$U = U_{\mathrm{HWP}}\left(\frac{\gamma}{2}\right)U_{\mathrm{QWP}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\gamma} & -ie^{i\gamma} \\ ie^{-i\gamma} & -e^{i\gamma} \end{pmatrix} \tag{43}$$

令 $q=-\pi/4$，$h=\gamma/2$，则

$$U = U_{\mathrm{HWP}}\left(\frac{\gamma}{2}\right)U_{\mathrm{QWP}}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\gamma} & ie^{i\gamma} \\ -ie^{-i\gamma} & -e^{i\gamma} \end{pmatrix} \tag{44}$$

QWP 和 HWP 总的 Jones 矩阵为

$$\begin{aligned} U =& U_{\mathrm{HWP}}(h)U_{\mathrm{QWP}}(q) \\ =& \begin{pmatrix} i\cos(2h)+\cos(2q-2h) & i\sin(2h)+\sin(2q-2h) \\ i\cos(2h)-\sin(2q-2h) & -i\cos(2h)+\cos(2q-2h) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{42}$$

令 $q=\pi/4$，$h=\gamma/2$，则

$$U = U_{\mathrm{HWP}}\left(\frac{\gamma}{2}\right)U_{\mathrm{QWP}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\gamma} & -ie^{i\gamma} \\ ie^{-i\gamma} & -e^{i\gamma} \end{pmatrix} \tag{43}$$

令 $q=-\pi/4$，$h=\gamma/2$，则

$$U = U_{\mathrm{HWP}}\left(\frac{\gamma}{2}\right)U_{\mathrm{QWP}}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\gamma} & ie^{i\gamma} \\ -ie^{-i\gamma} & -e^{i\gamma} \end{pmatrix} \tag{44}$$

若有 $\gamma_1+\gamma_2=-\varphi/2$，分别将 $U(q=\pi/4, h=\gamma_1/2)$ 和 $U(q=-\pi/4, h=\gamma_2/2)$ 作用在不同的光路上，可以得到 Bell 态

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\mathrm{HV}\rangle - |\mathrm{VH}\rangle) \tag{45}$$

波片可按下表进行旋转：

测量光路编号	QWP (rad)	HWP(rad)
1	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\varphi}{8}$
2	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\varphi}{8}$

对于 $\|VV\rangle$ 与 $\|HH\rangle$ 之间的相位差 φ，可以通过密度矩阵矩阵元 ρ_{14}^* 求得。

$$\varphi = \text{angle}\left(\rho_{14}^*\right) = 89°22'48'' \tag{46}$$

值得注意的是，在实验中，当我们用 $\varphi = 89°22'48''$ 调整波片时，并不能得到 Bell 态，原因可能来自于

- 测量密度矩阵至制备 Bell 态之间存在较长的时间差，测量环境在此过程中可能发生变化。

于是在实验中，我们放弃使用由密度矩阵得到的 φ 角，而是直接旋转波片，根据消光条件得到 Bell 态。

Bell 不等式的检验

为了检验 Bell 不等式，我们可以选取 $x-z$ 平面内三个测量方向

方向 $\hat{n}$	ψ_+	HWP 角度 $(h_+)^*$	ψ_-	HWP 角度 (h_-)
$\hat{a}=[0,0,1]^{\mathrm{T}}$	$[1,0]^{\mathrm{T}}$	0°	$[0,1]^{\mathrm{T}}$	45°
$\hat{b}=[\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$	$[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}]^{\mathrm{T}}$	30°	$[\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$	-15°
$\hat{c}=[-\frac{\sqrt{3}}{2},0,-\frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$	$[\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}]^{\mathrm{T}}$	-30°	$[\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}]^{\mathrm{T}}$	15°

* HWP 角度指得到 Bell 态后继续旋转的角度

基于以上测量方向，我们选取 12 组测量基并进行测量，结果如下。

序号	测量基	HWP1 角度 (h_1)	HWP2 角度 (h_2)	符合计数
1	a_+b_+	0°	-30°	18978
2	a_+b_-	0°	15°	10009
3	a_-b_+	-45°	-30°	7541
4	a_-b_-	-45°	15°	18430
5	a_+c_+	0°	30°	21394
6	a_+c_-	0°	-15°	7953
7	a_-c_+	-45°	30°	8460
8	a_-c_-	-45°	-15°	17300
9	b_+c_+	-30°	30°	20084
10	b_+c_-	-30°	-15°	7230
11	b_-c_+	15°	30°	9455
12	b_-c_-	15°	-15°	18036

根据表中的测量结果，计算得到

$$C(\vec{a},\vec{b}) = 0.319 \qquad C(\vec{a},\vec{c}) = 0.298 \qquad C(\vec{b},\vec{c}) = 0.304 \tag{47}$$

于是

$$C(\vec{a},\vec{b}) + C(\vec{a},\vec{c}) + C(\vec{b}+\vec{c}) = 0.922 < 1 \tag{48}$$

验证了 Bell 不等式的违背。

致谢

- 感谢张少良老师的指导、实验室学长们的帮助。
- 感谢我的搭档周卓雅同学，和你的合作非常愉快。
- 特别感谢陈承渝学长的帮助。
- 感谢在场老师们和同学们的聆听。