

# 万有引力常数 $G$ 的测量

黄晨

物理英才 1801 班, U201810116

2021 年 6 月 1 日

① 实验原理

② 数据测量

③ 测量结果

④ 数据处理

1 实验原理

2 数据测量

3 测量结果

4 数据处理

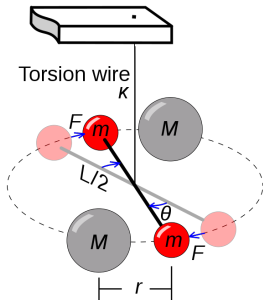


# 实验原理

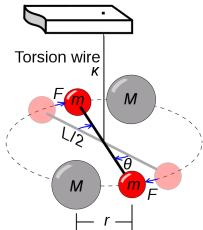
对于一个自由悬挂的扭秤，它的运动方程为

$$I\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + K\theta = 0 \quad (1)$$

$I$  为扭秤的转动惯量。 $K$  是扭丝的弹性系数且假设为常数。



# 实验原理



如果在扭秤附近放置大的吸引质量，需要考虑引力力矩沿扭丝方向的分量  $\tau_g$ ，则扭秤运动方程变为

$$I\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + K\theta = \tau_g \quad (2)$$

其中  $\tau_g = -\partial U_g / \partial \theta$ 。实验中扭秤偏转角  $\theta$  非常小 ( $10^{-3}\text{rad}$ )，可以看作小量，因此在扭秤平衡位置  $\theta = 0$  附近  $\tau_g$  可近似按  $\theta$  展开取至一阶项：

$$\tau_g = -\frac{\partial U_g}{\partial \theta} \approx \left( -\frac{\partial U_g}{\partial \theta} \right)_{\theta=0} + \left( -\frac{\partial^2 U_g}{\partial \theta^2} \right)_{\theta=0} \theta$$



# 实验原理

由于吸引质量是对称放置的，当扭秤处于平衡位置时，引力力矩为 0，即 Eq.(3) 第一项为零。定义  $K_g = (\partial^2 U_g / \partial \theta^2)_{\theta=0}$ ， $K_g$  为引力力矩的等效扭转系数，则有

$$\tau_g \approx -K_g \theta \quad (4)$$

代入扭秤运动方程，有

$$I\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + (K + K_g)\theta = 0 \quad (5)$$

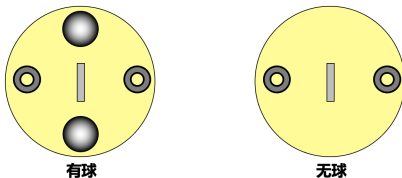


图: 左图为有球配置，右图为无球配置。



# 实验原理

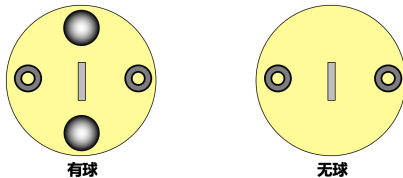


图: 左图为有球配置, 右图为无球配置。

有、无吸引质量下的响应频率分别记为  $\omega_n$  和  $\omega_f$

$$\omega_n^2 = \frac{K + K_g}{I} - \left(\frac{\gamma}{2I}\right)^2 \quad (6)$$

$$\omega_f^2 = \frac{K}{I} - \left(\frac{\gamma}{2I}\right)^2 \quad (7)$$

频率平方差

$$\Delta\omega^2 = \omega_n^2 - \omega_f^2 = \frac{K_g}{I}$$



# 实验原理

万有引力常数  $G$  可从  $K_g$  中提取出来, 即  $K_g = GC_g$ , 其中  $C_g$  为引力耦合系数。实验场景中,  $C_g$  的表达式为

$$C_g = \rho M \iiint dx dy dz \left\{ \frac{xx_0 + yy_0}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{3/2}} - \frac{3(xy_0 - x_0y)^2}{[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{5/2}} \right\}$$

由此, 万有引力常数  $G$  可以表示为

$$G = \frac{I\Delta\omega^2}{C_g} \quad (9)$$

测量几何、质量参数以及扭秤和球的空间关系可以得到  $I$  和  $C_g$ , 测量周期可以得到  $\Delta\omega^2$ 。





1 实验原理

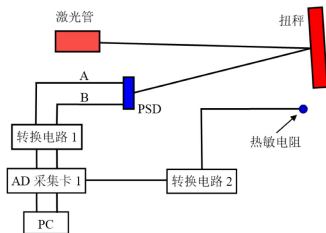
2 数据测量

3 测量结果

4 数据处理

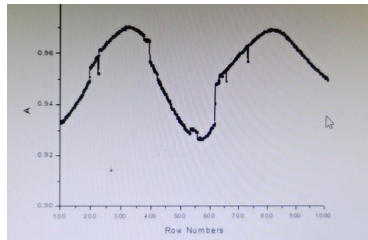
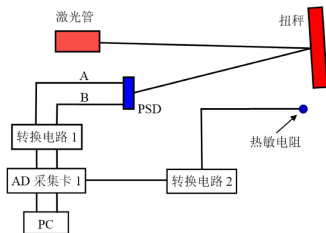


## ● 位置探测器 PSD



# 测量装置

## ● 位置探测器 PSD

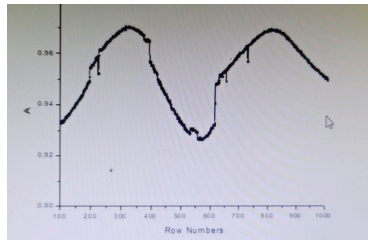
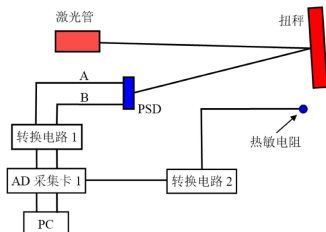


输出不稳定，抗干扰能力弱。



# 测量装置

## ● 位置探测器 PSD



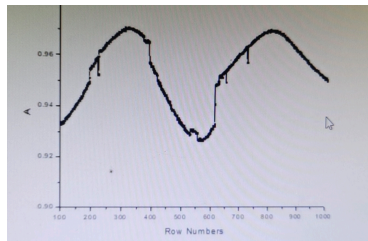
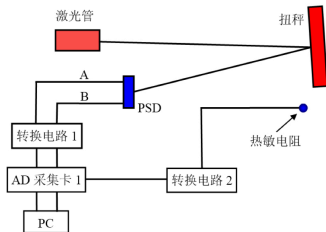
输出不稳定，抗干扰能力弱。

## ● 自准直仪



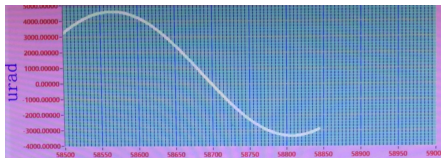
# 测量装置

## ● 位置探测器 PSD



输出不稳定，抗干扰能力弱。

## ● 自准直仪



1 实验原理

2 数据测量

3 测量结果

4 数据处理



# 测量结果

分类	项目	平均值	A 类 不确定度	B 类 不确定度	不确定度	对 G 的不确定 度贡献 ( $10^{-11}$ )
扭秤	长 $a(\text{mm})$	90.5609	0.0022	0.006	0.0023	0
	宽 $b(\text{mm})$	5.6166	0.0036	0.0006	0.0036	0
	高 $c(\text{mm})$	25.7353	0.0016	0.0006	0.0017	0.0001
	质量 $M_0(\text{g})$	62.1910	0.0002	0.0006	0.0006	
套管	质量 $M_i(\text{g})$	0.6790	0.0003	0.0006	0.0007	
	质量 $M_j(\text{g})$	1.3604	0.0006	0.0006	0.0008	
	长度 $(\text{mm})$	25.0446	0.0004	0.0006	0.0007	
夹具	上端长度 $(\text{mm})$	15.0532	0.0029	0.0006	0.0031	
	下端长度 $(\text{mm})$	9.9914	0.0030	0.0006	0.0030	
	上端直径 $(\text{mm})$	4.2398	0.0103	0.0006	0.0103	
	下端直径 $(\text{mm})$	6.0224	0.0006	0.0006	0.0009	
1 号球	直径 $D_1(\text{mm})$	125.0916	0.0063	0.0058	0.0085	
	质量 $M_1(\text{g})$	8181.40	0.15	5.00	5.00	0.0019
	高度 $H_1(\text{mm})$	75.7346	0.0179	0.020	0.0268	
2 号球	直径 $D_2(\text{mm})$	125.2312	0.0192	0.0058	0.0076	
	质量 $M_2(\text{g})$	8177.50	0.05	5.00	5.00	0.0019
	高度 $H_2(\text{mm})$	75.6544	0.0201	0.020	0.0283	
	球心距 $D_{12}(\text{mm})$	395.0678	0.0115	0.020	0.0231	



表: 位置信息记录表

1 实验原理

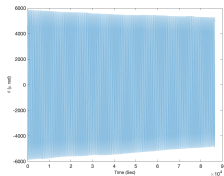
2 数据测量

3 测量结果

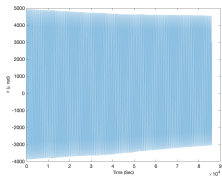
4 数据处理



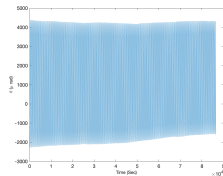




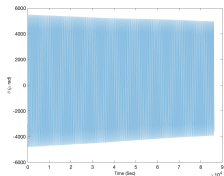
(a) 有球第一组



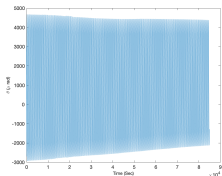
(b) 有球第二组



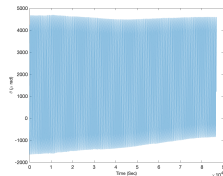
(c) 有球第三组



(d) 无球第一组



(e) 无球第二组



(f) 无球第三组

图: 扭秤运动原始曲线



# 扭秤运动周期

实验室所提供的周期计算程序对每组数据的周期估计值  $T_{\text{guess}}$  的精度要求比较高。倘若  $T_{\text{guess}}$  的取值偏离真实周期大于 3s 以上，那么程序所给出的计算结果很有可能是错误的。



# 扭秤运动周期

实验室所提供的周期计算程序对每组数据的周期估计值  $T_{\text{guess}}$  的精度要求比较高。倘若  $T_{\text{guess}}$  的取值偏离真实周期大于 3s 以上，那么程序所给出的计算结果很有可能是错误的。对于采样频率为  $F_s$ ，长度为  $N$  的离散数据，经过离散 Fourier 变换后，频谱中两个相邻位置的频率差为：

$$\Delta f = \frac{F_s}{2N} \quad (10)$$

$\Delta f$  的存在，会使最终算出来的周期数据存在  $\Delta T$  的误差范围

$$\Delta T = \frac{1}{f^2} \Delta f \quad (11)$$



# 扭秤运动周期

实验室所提供的周期计算程序对每组数据的周期估计值  $T_{\text{guess}}$  的精度要求比较高。倘若  $T_{\text{guess}}$  的取值偏离真实周期大于 3s 以上, 那么程序所给出的计算结果很有可能是错误的。对于采样频率为  $F_s$ , 长度为  $N$  的离散数据, 经过离散 Fourier 变换后, 频谱中两个相邻位置的频率差为:

$$\Delta f = \frac{F_s}{2N} \quad (10)$$

$\Delta f$  的存在, 会使最终算出来的周期数据存在  $\Delta T$  的误差范围

$$\Delta T = \frac{1}{f^2} \Delta f \quad (11)$$

实际实验中, 采样率  $F_s = 1\text{Hz}$ , 每组数据的记录时长约为 24 小时, 这对应的周期误差接近 2s。尽管使用离散 Fourier 变换可以获得周期数据, 但我们仍拥有更精确的方法, 即直接使用如下函数对实验数据进行拟合

$$F(t; A, f, \varphi_0) = A \sin(2\pi ft + \varphi_0)$$

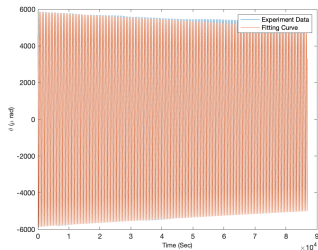


# 函数拟合效果

在拟合函数的基础上，可以定义平均损失函数

$$L(A, f, \varphi_0) = \frac{1}{N} \sum_i [F(t_i; A, f, \varphi_0) - y_i]^2 \quad (13)$$

将FFT变换所得的结果作为参数 $f$ 的初始值，然后通过梯度下降算法可以得到 $L$ 取极小值时候的参数 $A, f, \varphi_0$ 的取值。



图：扭秤运动曲线及拟合曲线 (以有球第一组数据为例)



# 测量结果

计算方法		FFT		Phase Method		平均值 (s)	不确定度 (ms)
配置情况	日期	周期 (s)	误差 (s)	周期 (s)	误差 (ms)		
无球	4 月 24 日	486.357	5.43	484.744326	5.44325	484.72	45
	4 月 26 日	486.254	5.47	484.721248	3.18471		
	4 月 28 日	486.346	5.71	484.694426	5.76234		
有球	4 月 25 日	485.562	5.49	484.052437	6.76372	484.01	24
	4 月 27 日	485.621	5.63	483.932652	4.21432		
	4 月 29 日	485.592	5.46	484.044911	5.35463		
* 以 FFT 的结果作为 GD Fitting 的初始值, GD Fitting 的结果作为 Phase Method 的初始猜测值。							

表: 拟合结果

得到扭秤运动周期:

● 无球:  $T_1 = 484.72 \text{ s}$

● 有球:  $T_2 = 484.01 \text{ s}$

根据所得数据进行计算, 最终得到

$$G = (6.680 \pm 0.003) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$



# 致谢

- 感谢黎卿老师的指导和实验室师兄在实验中的帮助;
- 感谢我的队友赵国燧和时延昊同学, 与你们的合作非常愉快;
- 感谢在场各位老师同学的聆听。

