6.3. Cramer-Rao不等式.

一. P279. 例6.10 设 $\xi \sim U(0,\theta)$ 求θ的矩法估计量的方差

解 ∵ $E(\xi)=\frac{\theta}{2}$ ∴据矩法 $\frac{\theta}{2}=\bar{\xi} \Rightarrow \hat{\theta}=2\bar{\xi}$ 为θ的矩法估计量.

$D(\hat{\theta})=4D(\bar{\xi})=4\cdot\frac{\theta^2}{12n}=\frac{\theta^2}{3n}$. $\left(D(\bar{\xi})=\frac{1}{n}D(\xi)\right)$.

二. Cramer-Rao不等式: 设 $\xi_1 \cdots \xi_n$是具有概率函数$f(x;\theta)$的母体ξ的子样, η为θ的无偏估计量,则 $D(\eta)\geq\frac{1}{nI(\theta)}$, 其中

$I(\theta)=E\left(\frac{\partial \ln f(\xi;\theta)}{\partial\theta}\right)^2$.

三. P285. 定义6.4: 若θ的一个无偏估计量$\hat{\theta}$满足 $D(\hat{\theta})=\frac{1}{nI(\theta)}$, 则$\hat{\theta}$为$\theta$的有效估计.

四. 定义6.5. 有效率: $e=\frac{\frac{1}{nI(\theta)}}{D(\hat{\theta})}$ 为估计$\hat{\theta}$的有效率.

五. 判断有效估计的步骤: 判断$\hat{\theta}$是否为θ的有效估计.

① 求$D(\hat{\theta})$. ② 概率函数$f(x;\theta)$取对数,再求偏导.

③ 计算信息量$I(\theta)$ ④ 判断是否有$D(\hat{\theta})=\frac{1}{nI(\theta)}$.

②

例 设 $\xi_1 \cdots \xi_n$ 是取自母体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一个子样. ① 当 μ 已知时,

判断 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2$ 是否为 σ^2 的有效估计.

② 当 μ 未知时. 判断 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$ 是否为 σ^2 的有效估计

解: ① 有效估计必须是无偏估计, 先判断无偏性.

$\because \frac{\xi_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1) \quad \therefore \left(\frac{\xi_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1) \quad \therefore E\left(\frac{\xi_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = 1$

$\therefore E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2\right) = \sigma^2$ ∴ 是无偏的.

下面判断有效性. $\because f(x,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

(i) $\ln f(x;\sigma^2) = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \ln\sqrt{2\pi\sigma^2} = -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2$.

$\frac{\partial \ln f(x;\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^2}$

(ii) $\because E\left(\frac{\partial \ln f(\xi,\sigma^2)}{\partial \sigma^2}\right)^2 = E\left[\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^4} - \frac{1}{2\sigma^2}\right]^2$

$= E\left[\frac{(\xi-\mu)^4}{(2\sigma^4)^2} - 2\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^4}\cdot\frac{1}{2\sigma^2} + \frac{1}{4\sigma^4}\right]$

$= \frac{1}{4\sigma^8}E(\xi-\mu)^4 - \frac{1}{2\sigma^6}E(\xi-\mu)^2 + \frac{1}{4\sigma^4}$.

$= \frac{1}{4\sigma^8}\cdot 3\sigma^4 - \frac{1}{2\sigma^6}\cdot\sigma^2 + \frac{1}{4\sigma^4} = \frac{1}{2\sigma^4} = I(\sigma^2)$

注: $\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1)$ $\therefore E(\xi-\mu)^2 = \sigma^2$. $D(\xi-\mu)^2 = 2\sigma^4$

$\therefore E(\xi-\mu)^4 = [E(\xi-\mu)^2]^2 + D(\xi-\mu)^2 = 3\sigma^4$.

(iii) $\because D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(\xi_i-\mu)^2=\frac{2\sigma^4}{n}$. ③

$\therefore D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2\right)=\frac{1}{n\cdot I(\sigma^2)}$

$\therefore \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2$ 为 σ^2 的有效估计量

② 当 μ 未知时 $E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2\right)=\sigma^2$ ∴为无偏估计.

由①(ii) 可知 $I(\sigma^2)=\frac{1}{2\sigma^4}$.

下面求 $D\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2\right)$.

$\because \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2\sim\chi^2(n-1)$ (定理书中可直接用)

$\therefore D\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2\right)=2(n-1)\sigma^4$.

$\therefore D\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2\right)=\frac{2\sigma^4}{n-1}\neq\frac{1}{nI(\sigma^2)}$

$\therefore \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$ 不是 σ^2 的有效估计量.

④ 作业 二、三、四

第六章 内容概要和作业

一. 定理6.1 (P264) 设母体ξ的二阶矩存在，求母体均值$E(\xi)$与母体方差$D(\xi)$的矩法估计

解 据矩法有 $E(\xi)=\bar{\xi}$, $D(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)=\overline{\xi^2}-\bar{\xi}^2=S_n^2$

$\therefore \hat{E}(\xi)=\bar{\xi}$, $\hat{D}(\xi)=S_n^2$

二. (作业) P_{308}: 6.32. 设$\xi_1 \cdots \xi_n$为取自母体$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$的子样，

令 $S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$, $S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$, $S_3^2=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$.

哪一个是母体方差的无偏估计，哪一个对σ^2的均方误差最小？

(作业)
三. 设$\xi \sim b(1,p)$，求p的矩法估计和极大似然估计量.

(作业)
四. 设$\xi_1 \cdots \xi_n$为取自母体$\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$的一个子样，求① 当μ为已知，

判断 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2$是否为$\sigma^2$的有效估计量

② 当μ未知，判断$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$是否为$\sigma^2$的有效估计量