3月13日 1-2节 内容（复习）

①

第六章考点.

例6.1 定义6.2 例6.4 例6.8 例6.14

1. $\xi \sim b(1,p)$ 概率函数 $f(x;p)=\begin{cases} p^x(1-p)^{1-x}, & x=0,1 \\ 0. & 其它 \end{cases}$

2. $\xi \sim P(\lambda)$ 概率函数 $f(x,\lambda)=\begin{cases} \dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, & x=0,1,2,\cdots \\ 0. & 其它 \end{cases}$

题型1. 设总体 $\xi \sim U(0,\theta)$，θ未知. $\xi_1 \cdots \xi_n$为一个子样，已知θ的两个估计量 $\hat{\theta}_1=2\bar{\xi}$，$\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}\xi_{(n)}$，$\xi_{(n)}$为最大次序统计量，请判断 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 的无偏性，~~与有效~~性，哪个更有效？

解.(1) $\because \xi \sim U(0,\theta)$ $\therefore E(\xi)=\frac{\theta}{2}$，$D(\xi)=\frac{\theta^2}{12}$.

$$p_\xi(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta \\ 0. & 其它 \end{cases} \quad 且 \quad p_{\xi_{(n)}}(x)=\begin{cases} n\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta \\ 0. & 其它 \end{cases}$$

(2) 先考虑 $\hat{\theta}_1=2\bar{\xi}$.

$\because E(\hat{\theta}_1)=2E(\bar{\xi})=2E(\xi)=\theta$. $\therefore \hat{\theta}_1$为$\theta$的无偏估计量

$$D(\hat{\theta}_1)=4D(\bar{\xi})=4\cdot\frac{1}{n}D(\xi)=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}.$$

再考虑 $\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}\xi_{(n)}$

$$\because E(\hat{\theta}_2)=\frac{n+1}{n}E(\xi_{(n)})=\frac{n+1}{n}\int_0^\theta x\cdot n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{(n+1)}{\theta^n}\int_0^\theta x^n dx=\frac{n+1}{\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+1}}{n+1}$$

$=\theta$ $\therefore \hat{\theta}_2$为$\theta$的无偏估计量

②

$$E(\hat{\theta}_2^2) = \frac{(n+1)^2}{n^2}E(\xi_{(n)}^2) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\int_0^\theta x^2\cdot n\frac{x^{n-1}}{\theta^n}dx = \frac{(n+1)^2}{n\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}dx$$

$$= \frac{(n+1)^2}{n\theta^n}\cdot\frac{\theta^{n+2}}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2$$

$$\therefore D(\hat{\theta}_2) = E(\hat{\theta}_2^2) - E^2(\hat{\theta}_2) = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\theta^2 - \theta^2$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{n(n+2)}\theta^2 = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

∴ 当 $n \geq 2$ 时 $D(\hat{\theta}_1) = \frac{\theta^2}{3n} \geq \frac{\theta^2}{n(n+2)} = D(\hat{\theta}_2)$ ∴ $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 更有效.

2. 设总体 $\xi \sim U(a,b)$，a,b 未知，设 $\xi_1 \dots \xi_n$ 为子样.
求 a,b 的极大似然估计量 $\hat{a}$ 与 $\hat{b}$，并求 $E(\hat{b}-\hat{a})$.

解：$L(x_1 \dots x_n; a,b) = \prod_{i=1}^n f(x_i;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \leq x_i \leq b \\ 0, & 其它 \end{cases}$

注意到当 b 变小 或 a 变大时，$b-a$ 变小，$L(x_1\dots x_n;a,b)$ 变大.
对于观测值 $x_1, \dots, x_n$，总有 $a \leq x_i \leq b$ ∴ 可令
$\hat{a} = \min\{x_1 \dots x_n\} = \xi_{(1)}$，$\hat{b} = \max\{x_1 \dots x_n\} = \xi_{(n)}$

$$\therefore E(\hat{b}-\hat{a}) = E(\xi_{(n)}) - E(\xi_{(1)})$$

$$= \int_a^b x\cdot n\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{b-a}dx - \int_a^b x\cdot n\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^{n-1}\frac{1}{b-a}dx$$

$$= \frac{n-1}{n+1}(b-a)$$

参考课本 272 页例题 6.6

掌握例题 6.6 和 6.7

3

3. 设总体 $\xi \sim N(\mu, 5^2)$，从总体抽取容量是 64 的子样.

则 $P(|\bar{\xi}-\mu|<1)=$ ______

解 $\because \bar{\xi} \sim N(\mu, (\frac{5}{8})^2)$

$\therefore \dfrac{\bar{\xi}-\mu}{\frac{5}{8}} \sim N(0,1)$

$\therefore P(|\bar{\xi}-\mu|<1) = P\left(\dfrac{|\bar{\xi}-\mu|}{\frac{5}{8}} < \dfrac{8}{5}\right) = 2\Phi(\frac{8}{5})-1$.

4. 设 $\xi_1 \cdots \xi_n$ 是总体 $N(\mu, 9)$ 的一个子样. $\bar{\xi}$ 为子样均值.

① 若 $Y \sim N(0,1)$ 求证 $E(|Y|)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

② 问样本容量 n 至少应该取多大才能保证 $E(|\bar{\xi}-\mu|) \le 0.1$.

5. 设三个样本 ξ_1, ξ_2, ξ_3 来自总体 $N(0, \sigma^2)$，定义

$Y_1 = X_1+X_2+X_3$, $Y_2 = X_1+X_2-2X_3$.

① 计算 $P(|Y_2| > 2\sqrt{3}\sigma)$

② 证明 Y_1 与 Y_2 独立. ③ 计算 $P(|Y_2| < \sqrt{2}|Y_1|)$.