第六章点估计 核心和预备知识

1. 概率函数 $f(x)$：$\begin{cases} \text{连续型分布的密度函数 } f(x)=p_{\xi}(x) \\ \text{离散型分布时 } f(x)=p(\xi=x) \end{cases}$

2. 母体矩和样本矩定义与关系

定义：设 $\xi_1 \cdots \xi_n$ 是来自母体 ξ 的容量为 n 的子样，则

① $E(\xi)$ 与 $\bar{\xi}$ 分别为母体和子样的一阶原点矩。

② $E(\xi^k)$ 为母体的 k 阶原点矩，$\overline{\xi^k}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^k$ 为子样的 k 阶原点矩

关系 ① 由 P_{105} 贝努钦大数定律可知 $\bar{\xi}\xrightarrow{P}E(\xi)$，即子样均值依概率收敛于 $E(\xi)$。

② 由 P_{114} 斯鲁茨基定理可知 $R(\overline{\xi^k})\xrightarrow{P}R(E(\xi^k))$ 其中 R 为有理函数，特别的 $\overline{\xi^k}\xrightarrow{P}E(\xi^k)$，即 k 阶子样原点矩依概率收敛于 $E(\xi^k)$。

3. 矩法（替换原则）：令 $\overline{\xi^k}=E(\xi^k)$ 求未知参数

替换原则 令 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^k = E(\xi^k)$，母体 ξ 分布中有 N 个未知参数，则令 $k \leq$ 未知参数个数.

例1. 设母体 $\xi \sim U(a,b)$. a,b 未知 求 a,b 的矩法估计量.

解. 令 $\xi_1 \cdots \xi_n$ 为一个样本.

$\because E(\xi) = \frac{a+b}{2}$ $\quad E(\xi^2) = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4}$，所以令

$$\frac{a+b}{2} = A_1, \quad \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{(a+b)^2}{4} = A_2$$

$$\Rightarrow \quad a+b = 2A_1, \quad b-a = \sqrt{12(A_2 - A_1^2)}$$

具体解上面加个箭头

$$\Rightarrow \hat{a} = A_1 - \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{\xi} - \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2}$$

$$\hat{b} = A_1 + \sqrt{3(A_2 - A_1^2)} = \bar{\xi} + \sqrt{\frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2}$$

(注. $A_2 - A_1^2 = \overline{\xi^2} - \bar{\xi}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 - \bar{\xi}^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 - n\bar{\xi}^2\right)$

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2$)

例2. 设母体 ξ 的 pdf 为 $p_\xi(x) = \begin{cases} (\alpha+1)x^\alpha, & 0<x<1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$，$\alpha>0$ 未知.

求 α 的矩法估计量

解 $\because E(\xi) = \int_0^1 x p_\xi(x)\,dx = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}$ 令 $\frac{\alpha+1}{\alpha+2} = \bar{\xi} \Rightarrow$

$$\alpha = \frac{2\bar{\xi}-1}{1-\bar{\xi}}.$$

例3. 设母体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$，$\mu$ 与 σ^2 未知. 求它们的矩估计量.

解 $\because E(\xi)=\mu$. $E(\xi^2)=E^2(\xi)+D(\xi)=\mu^2+\sigma^2$

$\therefore$ 按矩法有 $\begin{cases} E(\xi)=\mu=\bar{\xi} \\ E(\xi^2)=\mu^2+\sigma^2=\overline{\xi^2}. \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{\mu}=\bar{\xi}$，$\hat{\sigma}^2=\overline{\xi^2}-\hat{\mu}^2=\overline{\xi^2}-\bar{\xi}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2=S_n^2$

$\therefore \hat{\mu}=\bar{\xi}$，$\hat{\sigma}^2=S_n^2$.

4. 极大似然估计 (Maximum Likelihood estimate, MLE)
最早是 Gauss 提出. Fisher 研究了极大似然估计并应用.

关键是概率函数之积, 构造似然函数.

离散型 $L(x_1,x_2\ldots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}P_\xi(\xi_i=x_i;\theta)$

连续型 $L(x_1,x_2\ldots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^{n}P_{\xi_i}(x_i;\theta)$

挑选 $\hat{\theta}$, s.t. $L(x_1\ldots x_n;\hat{\theta})=\max L(x_1\ldots x_n;\theta)$ 这个 $\hat{\theta}$ 与样本有关，$\hat{\theta}(x_1\ldots x_n)$ 为极大似然估计值，
$\hat{\theta}(\xi_1\ldots\xi_n)$ 为极大似然估计量.

常规做法把 $L(x_1 \ldots x_n, \theta)$ 中 θ 的求法按下面步骤给出

① 取对数 ② 求导

($f(x)$ 最大 $\Leftrightarrow$ $\ln f(x)$ 最大).

例: ① 设总体 $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$. $x_1 \ldots x_n$ 为样本值，求 μ 与 σ^2 的极大似然估计.

② 若 $\mu = \mu_0$ 为已知，求 σ^2 的极大似然估计

解 ① μ 与 σ^2 都是未知参数.

$$L(x_1 \ldots x_n; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

两边取对数 $\ln L(x_1 \ldots x_n; \mu, \sigma^2) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2)$

则似然方程组为 $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = S_n^2 \end{matrix} \Rightarrow \mu$ 与 σ^2 的

极大似然估计量为 $\hat{\mu} = \bar{\xi}$, $\hat{\sigma}^2 = S_n^2$

② 若$\mu=\mu_0$已知，σ^2未知，现在求σ^2的极大似然估计量

解. $$L(x_1\ldots x_n;\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu_0)^2}$$

两边取对数

$$\ln L(x_1\ldots x_n,\sigma^2)=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)$$

两边对σ^2求导得似然方程为

$$\frac{\partial \ln(x_1\cdot x_n,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2-\frac{n\cdot\cancel{2\pi}}{2\cdot\cancel{2\pi}\sigma^2}=0$$

$\Rightarrow$ $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$ 为极大似然估计值.

$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_0)^2$ 为极大似然估计量.

例2. 若母体$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ ①当μ与σ^2都是未知参数时，求$\hat{\sigma}^2$的方差

② 当μ已知，σ^2未知时. 求σ^2的极大似然估计量的方差

解: ① $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$

$\therefore \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$ $\therefore D\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right)=2(n-1)$ $\therefore D(\hat{\sigma}^2)=\frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4$

② $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu_0)^2$ $\therefore \frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$ $\therefore D(\hat{\sigma}^2)=\frac{2}{n}\sigma^4$.

5. 评价估计量好坏的两个标准(有效性, 无偏性)

① 设 $\hat{\theta}=\hat{\theta}(\xi_1, \dots, \xi_n)$ 为参数 θ 的一个估计量.

若 $E(\hat{\theta})=\theta$. 则 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量.

例. $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2$ 为母体方差的无偏估计量.

$\because E(S^2)=\sigma^2$

② 令 $I(\theta)=E\left(\frac{\partial \ln f(\xi,\theta)}{\partial \theta}\right)^2$, $f(\xi,\theta)$ 是把概率函数中的 x 变成 ξ.

若 θ 的一个无偏估计量 $\hat{\theta}$, 满足 $D(\hat{\theta})=\frac{1}{nI(\theta)}$, 则

称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的有效估计.

考题: 设母体 $\xi \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ 为已知, 求证

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2$ 为 σ^2 的有效估计.