2020年3月6日 数理统计概要

基础

一. $D(\xi)=E(\xi^2)-E^2(\xi)$ 方差的定义

二. $\xi\sim\chi^2(n)$，求证 $E(\xi)=n$，$D(\xi)=2n$.

证明一. $D(\xi)=E(\xi-E(\xi))^2=E(\xi^2-2\xi E(\xi)+E^2(\xi))=E(\xi^2)-E^2(\xi)$

二. 由χ^2分布的定义知：若$\xi\sim\chi^2(n)$，则∃独立同分布的r.v. $\xi_1,\cdots\xi_n$，$\xi_i\sim N(0,1)$，

s.t. $\xi=\sum\limits_{i=1}^n\xi_i^2$.

$\therefore E(\xi)=\sum\limits_{i=1}^n E(\xi_i^2)=\sum\limits_{i=1}^n\left[D(\xi_i)+E^2(\xi_i)\right]=\sum\limits_{i=1}^n[1+0]=n.$

$$D(\xi)=D\left(\sum_{i=1}^n\xi_i^2\right)=\sum_{i=1}^n D(\xi_i^2)=\sum_{i=1}^n\left[E(\xi_i^4)-E^2(\xi_i^2)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^n\left[E(\xi_i^4)-1\right]=\sum_{i=1}^n[3-1]=2n.$$

$$\left(\because E(\xi_i^4)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(-x^3)de^{-\frac{x^2}{2}}\right.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(-x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+3\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}x^2dx\right]$$

$$\left.=\frac{3}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2}}dx=3E(\xi_i^2)=3\right)$$

提升

1. $\xi_1\cdots\xi_n$来自正态总体$\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$，① 求 $D\left(\sum\limits_{i=1}^n(\xi_i-\bar{\xi})^2\right)$

② 求 $D\left(\sum\limits_{i=1}^n(\xi_i-\mu)^2\right)$

1. 解①∵ $\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\therefore D\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \Rightarrow D\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\bar{\xi})^2\right) = 2(n-1)\sigma^4.$

② ∵ $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

$\therefore D\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2\right) = 2n \Rightarrow D\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\mu)^2\right) = 2n\sigma^4.$

2. P_{245} 第1的特例. 若 $\xi_1 \cdots \xi_n$ 来自母体 $\xi \sim N(0,1)$ 则 $\frac{\bar{\xi}\cdot\sqrt{n-1}}{\sqrt{S_n^2}} \sim t(n-1)$.

3. P_{246} 第2的特例: 设 $\xi_1 \cdots \xi_n$ 与 $\eta_1 \cdots \eta_n$ ~~都~~ 都是来自母体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的相互独立子样. 令 S_{1n}^2 与 S_{2n}^2 分别为这两个子样的样本方差。

则 $\frac{S_{1n}^2}{S_{2n}^2} \sim F(n-1,n-1)$ 分布.

4. 第3要求会证明（考点）

5. 分位数

① 若 $P(\xi \le a)=p$，则记 $a=a_p$，称 a_p 为 p 的下分位数

教材里也称 p 的下分位数为分位数

② 若 $P(\xi \ge b)=p$，则记 $b=b_p$ 称 b_p 的 p 的上分位数.

根据定义可知 下分位数 a_p 与上分位数 b_p 关系

$$P(\xi \le a_{1-p}) = 1-p = 1-P(\xi \ge b_p)$$

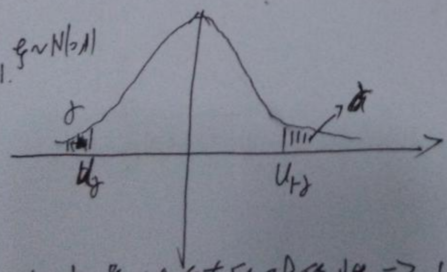
注意 教材里我们用下分位数，简称为分位数 （注意）

约定：在标准正态分布函数用符号 u，

t …… t

F …… F

例1. $\xi \sim N(0,1)$

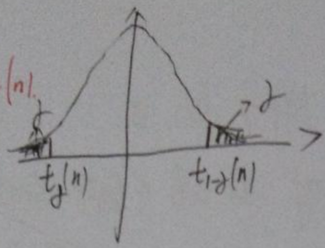


据标准正态分布的对称性 $\Rightarrow u_\alpha = -u_{1-\alpha}$.

特别的，$u_{0.05}=-1.65$，$u_{0.95}=1.65$.

$u_{0.025}=-1.96$. $u_{0.975}=1.96$ （常用）

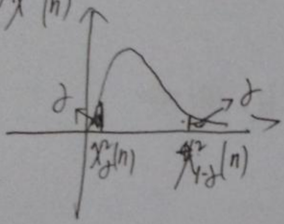
例2. $\xi \sim t(n)$.



t分布密度函数关于y轴对称

特例 $t_{0.995}(18)=2.878$； $t_{0.005}(18)=-2.878$

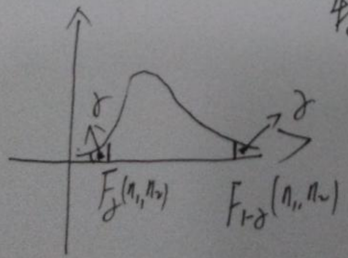
例2. $\xi \sim \chi^2(n)$



特例 $\chi^2_{0.95}(30)=43.773$

$\chi^2_{0.05}(30)=18.493$

例4. $\xi \sim F(n_1, n_2)$.



特例: $F_{0.95}(9,9)=3.18$