第二章习题

习题 1. 若 $E \subset \mathbb{R}$, $m^*E = 0$, 证明 $\{x^2 | x \in E\}$ 的外测度是 0.

证明. 不妨来讨论 $E \subset \mathbb{R}^+$. 令 $\forall l \in \mathbb{N}^+, E_l = E \cap (l-1, l]$, 显然 $E_l \subset E$, 所以 $m^*E_l \leq m^*E = 0$. 所以, 我们可以给所有 E_l 找到一个 L 覆盖 $\{I_{li}\}$, 满足下面的条件:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |I_{li}| < m^*E_l + \frac{\varepsilon}{2l} \cdot \frac{1}{2^l}$$

当 E_l 中的 x 全部变成 x^2 时, 我们可以把 $\{I_{li}\}$ 中的开区间 (a, b) 全部变成 (a^2, b^2), 这样之后得到一个新的对 x^2 的覆盖 $\{I_{li}^2\}$. 不难发现, 开区间的长度由 $b - a$ 变为 $b^2 - a^2 = (b-a)(a+b) \leq (b-a) \cdot 2l$. 所以我们有:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |I_{li}^2| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |I_{li}| \cdot 2l < m^*E_l + \frac{\varepsilon}{2^l}$$

而所有的 I_{li}^2 显然构成一个 $\{x^2 | x \in E\}$ 的 L 覆盖, 所以我们有:

$$\begin{aligned} m^*\{x^2 | x \in E\} &\leq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} |I_{li}^2| \\ &< \sum_{l=1}^{\infty} m^*E_l + \frac{\varepsilon}{2^l} \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^l} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

习题 2. 若 A, B 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 且 A 是 B 的真子集, 试问是否必定有 $mA < mB$? 若 A, B 都是闭集, 问是否一定 $mA < mB$? 又若 A, B 一开一闭, 结果又怎样?

解.

1. 不一定, 设 B 是某个测度不为 0 的开集, 然后 A 为 B 去掉其内部的一个点 x. 我们知道一个点 x 一定是一个闭集, 所以 $A = B \setminus \{x\} = B \cap \{x\}^c$. 所以 $\{x\}^c$ 是一个开集, 所以 A 是一个开集. 这个时候 $m^*A = m^*B - m^*\{x\} = m^*B$.

2. 不一定, 考虑测度不为 0 的闭集 A, 我们再它的外部加一个孤立点, 得到 $B = A \cup \{x\}$. 这个时候显然 $mA = mB$, 且 B 也是闭集.

3. 不一定, 参考闭矩体 B 和它对应的开矩体 A. 显然有 $mA = mB$.

■

习题 3. *设 $E \subset [0,1]$ 为可测集, 若 $mE = 1$, 试证 $\overline{E} = [0,1]$. 若 $mE = 0$, 试证 $E^0 = \emptyset$.*

解. (1): 首先, 可以发现, 对于任何 $x \in [0,1] \cap E^c$, 都存在 $\delta > 0$, 满足 $(x-\delta, x+\delta) \subset [0,1]$, 且满足 $(x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\} \subset E$. 因为否则, $(x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\} \subset [0,1] \setminus E$. 这样的话:

$$\begin{aligned} m^*([0,1]) &= m^*([0,1] \cap E) + m^*([0,1] \cap E^c) \\ &\geq m^*E + m^*E^c \\ &\geq 1 + 2\delta > 1 \end{aligned}$$

这样就产生了矛盾. 所以我们可以知道, 对于任何 $x \in [0,1] \cap E^c$, x 都是 E 的聚点, 这样 $\overline{E} = E \cup E'$ 自然就是 $[0,1]$ 了.
(2): 首先可以很容易发现, 对于任何 $x \in E$, 都不存在 $\delta > 0$, 使得 $(x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\} \subset E$. 不然, 根据外测度的单调性, 我们就有 $2\delta = m^*((x-\delta, x+\delta) \setminus \{x\}) \leq m^*E$, 这就产生了一个矛盾. 所以, 我们可以发现, E 是没有内点的, i.e. $E^0 = \emptyset$. ■

习题 4. *$m^*A = 0$, 试证明对于任意集 B, 都有 $m^*(A \cup B) = m^*B$.*

证明. 由次加性: $m^*(A \cup B) \leq m^*(B) + m^*(A) = m^*(B)$ 由单调性: $m^*B \leq m^*(A \cap B)$ □

习题 5. *设 A 为任意集, B 为 A 的可测子集, 证明 $m^*A = mB + m^*(A \setminus B)$.*

证明. 因为 B 可测, 所以我们有:

$$\begin{aligned} m^*A &= m^*(A \cap B) + m^*(A \cap B^c) \\ &= m^*B + m^*(A \setminus B) \end{aligned}$$ □

习题 6. 设 $E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}^n$ 且 E_1 可测, 又有 $mE_1 = m^*E_2$, 试证明 E_2 可测.

证明. 因为 E_1 可测, 我们有:

$$\begin{aligned} m^*E_2 &= m^*(E_2 \cap E_1) + m^*(E_2 \cap E_1^c) \\ &= m^*E_1 + m^*(E_2 \setminus E_1) \end{aligned}$$

又有, $m^*E_1 = m^*E_2$, 所以我们知道 $m^*(E_2 \setminus E_1) = 0$, 这样一来, $E_2 \setminus E_1$ 就是可测的了. 所以 $E_2 = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)$ 就是可测的了. □

习题 7. 证明有界集 E 可测的充分必要条件是, 对任意开集 G 有: $mG = m^*(G \cap E) + m^*(G \setminus E)$.

证明. ($\Leftarrow$:) 任意开集可以, 所以任意开矩体可以, 所以 E 可测.
($\Rightarrow$:) E 可测, 则任意集合可以, 则任意开集可以. □

习题 8. 证明对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意两个外测度有限的点集 A 与 B, 都有:

$$|m^*A - m^*B| \leq m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A)$$

证明.

$$\begin{aligned} m^*A &\leq m^*(A \cap B) + m^*(A \setminus B) \\ m^*(A \cap B) &\leq m^*(B) + m^*(B \setminus A) \end{aligned}$$

所以:

$$m^*(A) - m^*(B) \leq m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A)$$

同理我们有:

$$m^*(B) - m^*(A) \leq m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A)$$

所以, 综上我们有:

$$|m^*(B) - m^*(A)| \leq m^*(A \setminus B) + m^*(B \setminus A)$$

□

习题 9. 设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 且 A 可测, $m^*B < \infty$, 证明:

$$m^*(A \cap B) + m^*(A \cup B) = m^*A + m^*B$$

证明. 因为 A 是可测的, 所以我们有:

$$\begin{aligned} m^*B &= m^*(B \cap A) + m^*(B \setminus A) \\ m^*(A \cup B) &= m^*((A \cup B) \cap A) + m^*((A \cup B) \setminus A) \\ &= m^*A + m^*(A \setminus B) \end{aligned}$$

将上面两个式子加起来, 可以得到:

$$m^*B + m^*A + m^*(A \setminus B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \setminus A) + m^*(A \cup B)$$

两边消掉 $m^*(A \cup B)$ 即可得证. □

习题 10. *证明下列 (1) 和 (2) 都是点集 E 可测的充分必要条件:*

1. *对于任何给定的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 G 和闭集 F, 使得 $F \subset E \subset G$ 且 $m(G \setminus F) < \varepsilon$*
2. *对于任何给定的 $\varepsilon > 0$, 存在开集 $G_1, G_2 : G_1 \supset E, G_2 \supset E^c$, 使得 $m(G_1 \cap G_2) < \varepsilon$.*

证明 (1 小问). ($\Leftarrow$): 如果对于任何给定的 ε, 都存在这样的 G 和 F, 那么 $G \setminus E \subset G \setminus F$, 所以 $m^*(G \setminus E) \leq m^*(G \setminus F) = \varepsilon$. 所以由定理 2.8, 我们可以知道 E 是可测的.
($\Rightarrow$): 如果 E 是可测的, 则由定理 2.6, 我们知道:

- 存在开集 $G \supset E$, 且 $m(G \setminus E) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.
- 存在闭集 $F \subset E$, 且 $m(E \setminus F) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

再因为 $(G \setminus E) \cap (E \setminus F) = \emptyset$, 所以由测度的可数可加性, 我们就知道 $m(G \setminus F) = m(G \setminus E) + m(E \setminus F) < \varepsilon$. □

证明 (2 小问). 我们将第一小问中的 G 换成 G_1, F^c 换成 G_2. 然后就有 $G \setminus F = G_1 \cap G_2$. □

习题 11. *设 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ 都是可测集, 试证明 $m(A \cup B) = mA + mB$ 的充分必要条件是: $A \cap B$ 是零测集.*

证明. 由测度的可列可加性, 我们知道 $m(A \cup B) = m(A) + m(B \setminus A)$. 然而我们又有 $m(A \cup B) = mA + mB$. 所以, 我们可以得到 $mB = m(B \setminus A)$. 又由可列可加性, 我们知道 $mB = m(B \setminus A) + m(B \cap A)$, 所以可以推知 $m(B \cap A) = 0$. 不难发现, 这个逻辑过程是可逆的. □

习题 12. *设 f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值连续函数, 证明它的图像 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x), x \in \mathbb{R}\}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 内的零测集.*

证明. 令 $(l,r]$ 表示 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | l < x \leq r\}$. 当 $0 < r - l < \infty$, 我们可以构造两个辅助函数 $g = f + \frac{\varepsilon}{2}, h = f - \frac{\varepsilon}{2}$. 由 f 在 $\mathbb{R}$ 连续我们可以知道 f, g, h 在 $\mathbb{R}$ 可积. 只考虑 $(l,r]$ 这个区间内的话, 我们可以发现当 λ 足够小的时候, $g - h$ 的黎曼和即可刻画出 f 图像在 $(l,r]$ 的一个 L 覆盖, 即

$$\int_l^r (h(x) - g(x))\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i [g(xi_i) - h(xi_i)]\Delta_i$$

可以看作一个 $f \cap (l,r]$ 的一个 L 覆盖. 而不难发现, 这个积分的值在 $\varepsilon \to 0$ 的极限值就是 0. 所以我们有 $m^*(f \cap (l,r]) = 0$. 不难发现, 我们通过可数个形如 $(l,r]$ 的互不相交的半开区间即可覆盖住整个 $\mathbb{R}$. 所以由测度的可数可加性, $m^* f = \sum_{(l_i,r_i]} m^*(f \cap (l_i, r_i]) = \sum 0 = 0$. □

习题 13. *(1) 若 E 是直线上的有界可测集, 实数 α 满足 $0 \leq \alpha \leq mE$, 证明存在 E 的可测子集, 使得 $mE_\alpha = \alpha$.*
(2) 叙述并证明 (1) 在高维空间中的推广.

解. 我们直接来叙述这个定理在高维空间中的推广:

E 是 $\mathbb{R}^n$ 中的有界可测集, 实数 α 满足 $0 \leq \alpha \leq mE$, 证明存在 E 的可测子集, 使得 $mE_\alpha = \alpha$

证明. 因为 E 是有界的, 所以不妨我们来考虑这个 n 维空间的第一维, 这个时候一定能够在这一维找到一个闭区间 $[l,r]$, 使得 E 整个落在这个区间中. 然后我们来考虑第一维的一个函数, $f(x) = m(E \setminus [x,r])$. 因为对于 $x, y \in [l,r]$(不妨 $x \leq y$), 有 $(E \setminus [y,r]) \setminus (E \setminus [x,r]) = E \cap [x,y)$.

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= m(E \setminus [y,r]) - m(E \setminus [x,r]) \\ &= m(E \cap [x,y)) \leq m([x,y)) \end{aligned}$$

因为 E 是有界的, 所以我们一定能找到一个开矩体 S 将 E 包住, 不妨设这个开矩体在第一维的上下界分别是 l, r. 现在我们知道 $m([x,y)] = (y-x) \times H$. 其中 H 是 S 在其他维度上的边长的乘积. 所以对于任意小的 $\varepsilon > 0$, 都存在 $\delta < \varepsilon / H$, 使得当 $|x - y| < \delta$ 时, 都有 $m([x,y)) < \varepsilon$. 所以 f 在 $[l,r]$ 上连续.

因为 $0 = f(l) \le \alpha \le f(r) = mE$, 根据闭区间上连续函数的介值定理, 我们知道, 一定存在 $\xi \in [l, r]$ 使得 $f(\xi) = \alpha$. 这个时候 $E_\alpha = E \setminus [\xi, r]$. □

■

习题 14. 设 $\{E_k\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的集列, 满足 $\sum_{k=1}^{\infty} m^* E_k < \infty$, 试证明 $\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k$ 和 $\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k$ 都是零测集.

证明. 因为级数 $\sum_{k=1}^{\infty} m^* E_k$ 收敛, 所以由柯西收敛原理可知:

对于任意的 ε, 都存在 N, 使得 $\forall n > N, p > 0$ 都有 $\sum_{k=n+1}^{n+p} m^* E_k < \varepsilon$

因为这个不等式对于所有的 $p > 0$ 都是满足的, 所以我们令 $p \to \infty$, 再由极限不等式, 就有 $\sum_{k=n+1}^{\infty} m^* E_k \le \varepsilon$. 再根据 $\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k, \overline{\lim}_{k\to\infty} E_k$ 的定义, 我们有:

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k \subset \overline{\lim}_{k\to\infty} E_k \subset \bigcup_{l=n+1}^{\infty} E_l$$

所以:

$$m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k) \le m^*(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k) \le \sum_{l=n+1}^{\infty} m^*(E_l) \le \varepsilon$$

令 $\varepsilon \to 0$, 根据极限不等式, 就有:

$$m^*(\underline{\lim}_{k\to\infty} E_k) \le m^*(\overline{\lim}_{k\to\infty} E_k) \le 0$$

□

习题 15. *1.* 设 $\{E_k\}$ 是区间 $[0, 1]$ 中的可测集列, $mE_k = 1 (k = 1, 2, \cdots)$, 试证明 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$.

2. 若 $E_k \subset [0, 1], mE_k > \frac{n-1}{n} (k = 1, 2, \cdots, n)$, 试证 $m(\bigcap_{k=1}^{n} E_k) > 0$

3. 若 $E_k \subset [0, 1], 1 > mE_k > \alpha_k > 0 (k = 1, 2, \cdots)$, 试问 $\{\alpha_k\}$ 满足什么条件能使 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) > 0$? 又若要使 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) > 1 - \delta$ (δ 是一个充分小的正数), $\{\alpha_k\}$ 应该如何?

解.

(1) 证: 因为 $E_1 \cap E_k$ 一定是可测集, 所以我们有:

$$\begin{aligned} m[0,1] &= m([0,1] \cap (E_1 \cap E_k)) + m([0,1] \setminus (E_1 \cap E_k)) \\ &= m(E_1 \cap E_k) + m(([0,1] \setminus E_1) \cup ([0,1] \setminus E_k)) \\ &\le m(E_1 \cap E_k) + m([0,1] \setminus E_1) + m([0,1] \setminus E_k) \end{aligned}$$

因为 $E_1 \subset [0,1]$, 所以 $m([0,1] \setminus E_1) = m([0,1]) - m(E_1) = 0$. 同理 $m([0,1] \setminus E_2) = 0$. 所以, 上面的式子可以继续写成: $m[0,1] \le m(E_1 \cap E_k) \le m[0,1]$. 所以 $m(E_1 \cap E_k) = 1$.

这个时候, 因为 E_k 可测: $mE_1 = m(E_1 \cap E_k) + m(E_1 \setminus E_k)$. 而 $mE_1 = m(E_1 \cap E_k) = 1$, 所以 $m(E_1 \setminus E_k) = 0$. 又因为 E_1 可测, 所以我们有:

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m(E_1 \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) + m(E_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) \\ &= m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) + m(\bigcup_{k=1}^{\infty} (E_1 \setminus E_k)) \\ &\le m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) + \sum_{k=1}^{\infty} m(E_1 \setminus E_k) \\ &= m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) \end{aligned}$$

这个时候我们就能很容易地发现:

$$1 = m(E_1) \le m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) \le m(E_1) = 1$$

这里, 后一个不等号由单调性而来. 这就说明了 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = 1$. □

(2) 证: 和上题类似, 我们可以:

$$\begin{aligned} m[0,1] &= m([0,1] \cap \bigcap_{k=1}^{n} E_k) + m([0,1] \setminus \bigcap_{k=1}^{n} E_k) \\ &\le m(\bigcap_{k=1}^{n} E_k) + \sum_{k=1}^{n} m([0,1] \setminus E_k) \end{aligned}$$

然后, 因为 $E_k \in [0,1]$, 所以 $m([0,1]\setminus E_k) = m([0,1]) - m(E_k) < \dfrac{1}{n}$. 所以

$$m[0,1] < m(\bigcap_{k=1}^{n} E_k) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}$$
$$0 < m(\bigcap_{k=1}^{n} E_k) \qquad \square$$

(3): 由前两题的结论, 如果要使得 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) > 0$, 只要使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1-\alpha_k < 1$$

如果要使 $m(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) > 1-\delta$, 只需要使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1-\alpha_k < \delta$$

■

习题 16. *若对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任意点集 A, B, 定义他们之间的距离为 $d(A,B) = \inf\{d(x,y)|x \in A, y \in B\}$. 现在设 A, B 满足 $d(A,B) > 0$, 证明 $m^*(A\cup B) = m^*A + m^*B$.*

证明. 首先令 $m^*(A) < \infty, m^*(B) < \infty$, 否则等式直接成立. 不妨 $d(A,B) = \delta 0$, $B(x,r)$ 表示以 x 为中心半径为 r 的开球. 然后我们构造 $\hat{A} = \{B(x,\delta/3)|x \in A\}$. 很容易可以发现 $A \subset \hat{A}, b \not\subset \hat{A}$. 由定理 1.17, 可以知道任意个开集的并集仍然是开集, 所以 $\hat{A}$ 是开集, 所以 $\hat{A}$ 可测, 所以很简单的有:

$$\begin{aligned} m^*(A\cup B) &= m^*(A\cup B\cap \hat{A}) + m^*(A\cup B\setminus \hat{A}) \\ &= m^*A + m^*B \end{aligned} \qquad \square$$

习题 17. *试从可测集的定义直接证明: 若 E_1, E_2 可测, 则 $E_1 \cap E_2$ 可测.*

证明.

$$\begin{aligned} &m^*(T\cap(E_1\cap E_2)) + m^*(T\cap(E_1\cap E_2)^c) \\ &\quad\le m^*(T\cap E_1\cap E_2) + m^*(T\cap E_1^c\cap E_2^c) + m^*(T\cap E_1\cap E_2^c) + m(T\cap E_1^c\cap E_2) \\ &\quad= m^*(T\cap E_2) + m^*(T\cap E_2^c) \\ &\quad= m^*(T) \end{aligned} \qquad \square$$

习题 18. 证明: $\mathbb{R}^n$ 中任意集 E 可测的充分必要条件是 $E \cap \partial E$ (∂E 是 E 的边界) 可测

证明. 首先, 根据内点和边界点的定义, 我们可以发现对于任意 $E \subset \mathbb{R}^n$, 其实有 $E = E^0 \cup (\partial E \cap E)$. 这是因为 E 中的点都满足对于任意的 $\delta > 0$, 都有 $B(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$. 这样的话, 如果对于 x 来说, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subset E$, 那么 $x \in E^0$. 否则, 对于所有的 $\delta > 0$, 都有 $E \cap B(x, \delta) \neq \emptyset$ 且 $E^c \cap B(x, \delta) \neq \emptyset$, 这个时候 $x \in \partial E \cap E$.

我们还能知道的是 E^0 要么是个空集, 要么是个开集, 两种情况下 E^0 都是可测的. 下面来说明如果 x 是 E 的内点, 那么 x 同样是 E^0 的内点. 根据定义, 如果 x 是 E 的内点, 那么存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $B(x, \varepsilon) \subset E$. 这个时候观察开球 $B(x, \varepsilon)$ 内的任意点 y, 显然 y 是 $B(x, \varepsilon)$ 的内点, 自然也就是 E 的内点, 这样我们可以说明 $B(x, \varepsilon) \subset E^0$. 所以 x 在 E^0 中同样也是内点. 做好铺垫之后, 下面我们来开始证明.

($\Rightarrow$): 首先 E 可测, 然后 E^0 可测, 所以 $\partial E = E \setminus E^0$ 可测.

($\Leftarrow$): 因为 E^0 可测, ∂E 可测, 所以 $E = E^0 \cup \partial E$ 可测. $\square$

习题 19. 证明: 设 f 是区间 $[0,1]$ 上的可微函数, 令 $E_0=\{x\in[0,1]|f'(x)=0\}$, 证明 $m(f(E_0))=0$.

证明. 考虑 $\overline{E}_0$, $\overline{E}_0$ 可以看成一些不相交的闭区间, 下面我们来说明 $\overline{E}_0$ 中的闭区间数量是可数个的. 我们从 $C=[0,1]\setminus\overline{E}_0$ 是一些不相交的长度不为 0 的开区间说起 (如果一个开区间可以任意短的话, 那么它其中的点应该都是 E_0 的聚点, 应该都在 $\overline{E}_0$ 中). 不难发现, C 的每个开区间中, 都一定至少有一个有理数, 所以 C 是可数的. 从而我们知道 $\overline{E}_0$ 是可数的.

下面来说明, $\overline{E}_0$ 中的任一闭区间 $[l,r]$ 中, f 都取相同的函数值. 考虑定积分

$$\int_l^x f'(x)\mathrm{d}x=f(x)-f(l)$$

因为 f 显然就是 f' 的原函数, 所以 f' 在 $[l,r]$ 可积. 做这个定积分的黎曼和

$$\int_l^x f'(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f'(\xi_i)\Delta_i$$

由于已经知道了可积, 所以我们可以自主设计选择 ξ 的方法. 考虑 $\overline{E}_0$ 的构造方法, 可以发现, 如果 f' 的某个非 0 点 x 在 $[l,r]$ 中, 则 x 的某一侧一定是 f' 取 0 的点, 意味着 f' 的非 0 点在 $[l,r]$ 中不是稠密分布的. 也就是说, 对于某个 Δ_i, 我们总能在其中选出一个 ξ_i, 使得 $f(\xi)=0$. 所以最终:

$$\int_l^x f'(x)\mathrm{d}x=0=f(x)-f(l)$$

所以, $\forall x\in[l,r],f(x)=f(l)$.

最后由外测度的次可加性, 有:

$$\begin{aligned}m(f(E_0))\le m(f(\overline{E}_0))&\le\sum_{[l,r]\in\overline{E}_0}m(f([l,r]))\\&=\sum_{[l,r]\in\overline{E}_0}0=0\end{aligned}$$

□