数据结构第一次作业

陈小羽

目录

1 题目要求

- 创建电话号码本可以存储每个人的（姓名，地址，电话号码），一个人可以有多个电话号码，但所有电话号码不能有重复；
- 可以根据电话号码对人的信息进行排序；

- 可以根据姓名查询这个人的所有电话号码和地址；如果查询失败，则询问是否添加这个人的信息到电话号码本中，如果 “Yes”, 则根据输入的姓名，电话号码，地址等信息添加到电话号码本程序中；
- 可以根据电话号码查询对应的人的信息：姓名和地址，并删除或修改该人的信息；
- 要求查询和排序速度尽量快

2 数据结构的选择

根据题目的要求，我们需要做到快速地访问，插入，查询元素。还要能够将数据按照键值排序。按照题目中速度越快越好的要求，我选择了著名计算机科学家 Tarjan 于 1985 年提出的**伸展树**结构。

2.1 基本操作

根据我们的储备知识，再结合题目中的要求，我们需要实现**伸展树**的如下操作。

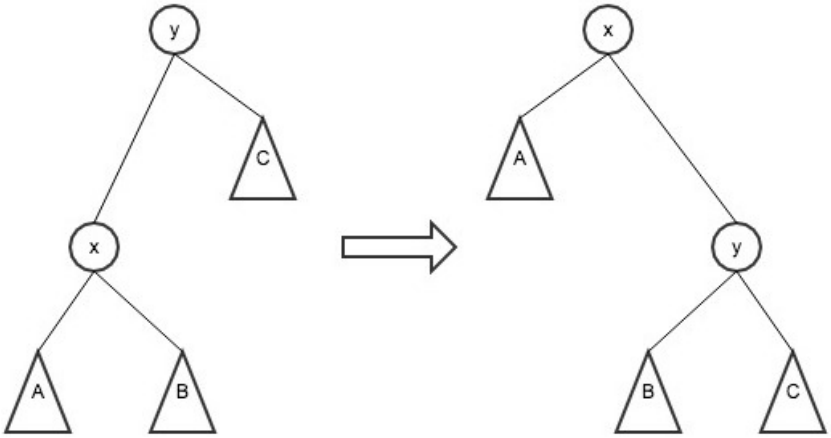
- access_L(key): 找到并返回第一个键值不大于 key 的结点的位置。并将这个结点旋转到根节点。
- access_R(key): 找到并返回第一个键值大于 key 的结点的位置。并将这个结点旋转到根节点。
- access(key): 返回键值为 key 的结点。
- splay(node): 将 node 结点旋转到根节点。在每次访问了一个结点之后使用。
- insert(key): 将一个键值为 key 的点加入树中。
- delete(key): 将树中键值为 key 的结点删除。
- query(key): 查询键值为 key 的结点中储存的信息。
- dfs(): 按照中序遍历访问整棵树，达到题目中对数据进行排序的要求。

下面我们来具体的描述和分析这些操作。

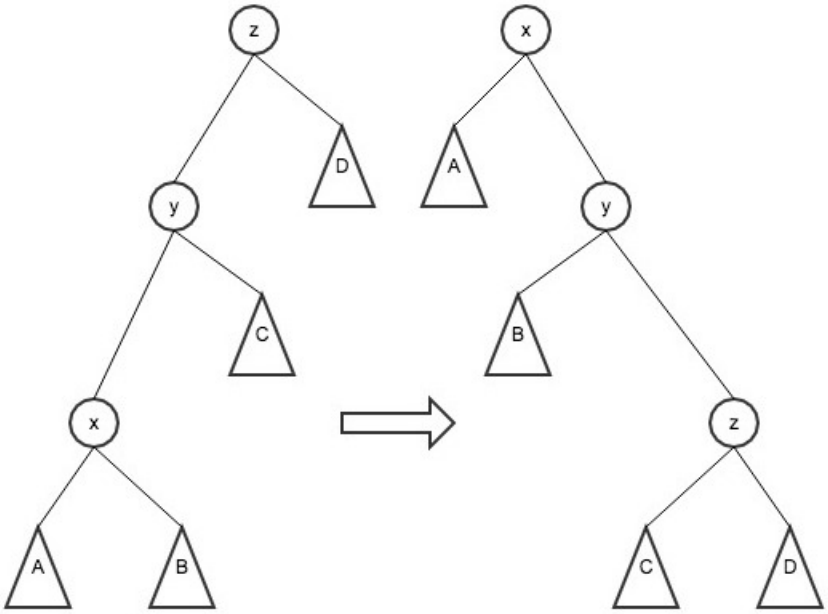
2.1.1 splay

splay 操作是整个数据结构的最重要的操作，也是整个算法的效率的保证。他的作用是将最近访问过的结点，和一些有特定需要的点，按照一定的方式旋转到根节点。splay 操作可以保证算法的所有操作的均摊复杂度是 $\mathcal{O}(logn)$ 的。

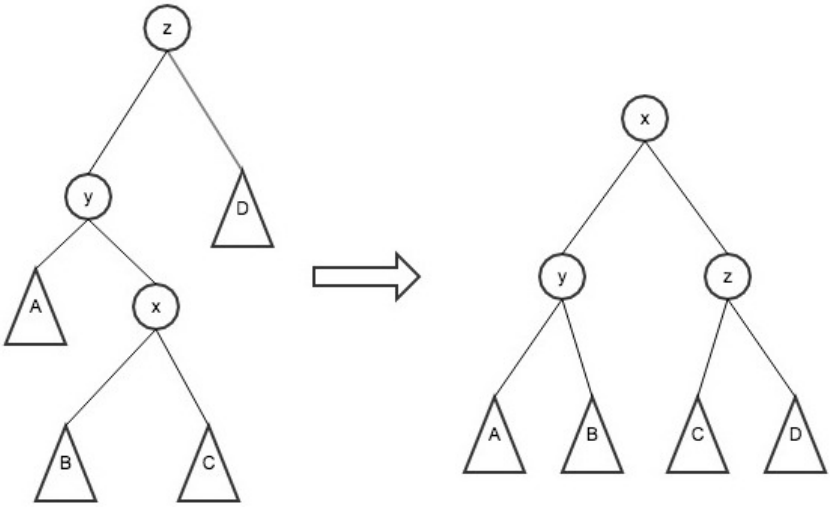
旋转 在将一个结点移动到根节点的过程中，我们需要使用一种叫做旋转的操作来保证左右儿子的相对大小关系。和时间复杂度。对于伸展树，我们具体有 3 种旋转的方法。



zig: 将一个结点旋转到它的父亲结点的位置，然后让它的父亲结点变成它的一个儿子结点。



zig-zig: 如果一个点和它的父亲结点位于相同的子树 (左/右) 的时候，直观看起来是一条线，执行 zig-zig. 具体做法是，先对 y 做一次 zig，然后对 x 做一次 zig。



zig-zag: 如果一个点和它的父亲结点在不同的子树，那么执行 zig-zag, 具体做法是对 x 进行 2 次 zig 操作。

显然，对一个结点连续使用三种旋转，就能将其旋转到根节点。

代码

```
void rotate(int x){ // 0 left, 1 right
        int y = pre[x], z = pre[y], kind = (x == lson(y));
        son[y][kind^1] = son[x][kind];
        son[x][kind] = pre[son[y][kind^1]] = y;
        pre[y] = x, pre[x] = z;
        if(z) son[z][y == rson(z)] = x;
        push_up(y);
}
void splay(int x,int at){
        while(pre[x] != at){
                if(g(x) == at) { rotate(x); break; }
                int y = pre[x], z = pre[y];
                if((y == lson(z))^(x == lson(y))) { rotate(x); rotate(x);}
                else { rotate(y); rotate(x); }
        }
        push_up(x);
        if(at == 0) root = x;
}
```

2.1.2 access

access 函数的功能具体由 access_L 和 access_R 来提供，这两个函数的功能相当于在具体的序列上二分查找满足要求的结点。要实现函数的功能，我们需要维护每棵子树中的最小值和最大值。

代码

```
int access_L(Key x, int cur){// return the last node that < x
        while(1){
                if(key[cur] >= x && lson(cur)) cur = lson(cur);
                else if(rson(cur) && minn[rson(cur)] < x) cur = rson(cur);
                else return cur;
        }
}
int access_R(Key x, int cur){// return the first node that > x
        while(1){
                if(key[cur] <= x && rson(cur)) cur = rson(cur);
                else if(lson(cur) && maxx[lson(cur)] > x) cur = lson(cur);
                else return cur;
        }
}
```

2.1.3 delete, insert, query, dfs

这些操作都可以用前面的操作拼凑出来。就显得没有那么的重要了。

2.2 复杂度分析

这里我们主要想要说明，每一次 splay 操作的均摊复杂度为 $\mathcal{O}(logn)$。由此很容易就能在同样的均摊复杂度下实现题目中要求的所有的操作 (除了 dfs 输出排序结果是 $\mathcal{O}(n)$ 的)。

2.2.1 势

我们定义一种**势函数**来衡量当前图的状态，用来更好的分析时间复杂度。我们给每个结点一个权值 $w(i)$. 记图中以某个结点为根的子树的权值之和 $S(x)$，则每个点的是函数定义为 $\Phi(x) = \log S(x)$。定义整个树的势函数为 $\Phi = \sum \Phi(x)$

2.2.2 摊还时间

我们为每次操作的摊还时间 $a = t + \Phi' - \Phi$。其中 t 是操作实际的时间，Φ' 是操作过后，整个树的势，Φ 是操作之前整棵树的势。然后我们就可以发现，对于连续的 m 次操作。总的时间可以表示为:

$$\sum_{j=1}^{m} t_j = \sum_{j=1}^{m} (a_j + \Phi_{j-1} - \Phi_j) = \sum_{j=1}^{m} a_j + \Phi_0 - \Phi_m$$

现在我们来分析每一次旋转操作的摊还时间。

- zig:
  $a = 1 + \Phi'(x) + \Phi'(y) - \Phi(x) - \Phi(y)$ 只有 x 和 y 的势会变化。
  $\leq 1 + \Phi'(x) - \Phi(x)$, 因为 $\Phi(y) \geq \Phi'(y)$
  $\leq 1 + 3(\Phi'(x) - \Phi(x))$，因为 $\Phi'(x) \geq \Phi(x)$

- zig-zig:
  $a = 2 + \Phi'(x) + \Phi'(y) + \Phi'(z) - \Phi(x) - \Phi(y) - \Phi(z)$, 只有 x,y,z 的势发生了变化。
  $= 2 + \Phi'(y) + \Phi'(z) - \Phi(x) - \Phi(y)$, 因为 $\Phi'(x) = \Phi'(z)$
  $\leq 2 + \Phi'(x) + \Phi'(z) - 2\Phi(x)$, 因为 $\Phi'(x) \geq \Phi'(y)$ 且 $\Phi(y) \geq \Phi(x)$

又因为对于所有的 $x+y \leq 1$ 且 $x, y > 0$, 都有 $\max\{\log x + \log y\} = -2$,
所以 $\Phi(x) + \Phi'(z) - 2\Phi'(x) = \log(S(x)/S'(x)) + \log(S'(z)/S'(x)) \leq -2$
将这个式子带上去就可以得到
$\leq 3(\Phi'(x) - \Phi(x))$.

- zig-zag:
  $2 + \Phi'(x) + \Phi'(y) + \Phi'(z) - \Phi(x) - \Phi(y) - \Phi(z)$
  $\leq 2 + \Phi'(y) + \Phi'(z) - 2\Phi(x)$, 因为 $\Phi'(x) = \Phi(z)$ 且 $\Phi(x) \leq \Phi(y)$
  和 zig-zig 使用同样的方法，最后可以得到
  $\leq 2(\Phi'(x) - \Phi(x)) \leq 3(\Phi'(x) - \Phi(x))$

综上所述，一次 splay 中产出的摊还时间的和应该为: $3(\Phi(t) - \Phi(x)) + 1$。(zig 的情况多了一个一，但是我们在单次 spaly 操作中，最多只会用到一次 zig。) 而 $3(\Phi(t) - \Phi(x)) + 1 = \mathcal{O}(log(S(t)/S(x)))$

设整棵树的势的大小为 W, 显然 $W = S(root)$ 现在假设我们已经做了 m 次 splay 操作。则 $\sum_{j=1}^{m} a_j = m \times \mathcal{O}(log(S(t)/S(x)) = m \times \mathcal{O}(log(W/S(x)))$
即:

$$\sum_{j=1}^{m} a_j = \mathcal{O}(m \log n)$$

进一步，我们还有 $\Phi_0 - \Phi_m \leq \sum_i^n log(W/w(i))$, 因为每个结点的 $S(i)$ 最小是 $w(i)$，最大是 W. 所以就有 $\Phi_0 - \Phi_m \leq n \log n$. 综上所述:

$$\sum_{j=1}^{m} t_j = \sum_{j=1}^{m} a_j + \Phi_0 - \Phi_m \leq \mathcal{O}(n \log n) + \mathcal{O}(m \log n)$$

$T = \mathcal{O}((n+m) \log n)$, 由于我们可以将操作次数取到 n, 所以每一次的平均的最坏复杂度为 $\mathcal{O}(\log n)$

2.2.3 结论

通过使用 splay，我们可以在均摊 $\mathcal{O}(\log n)$ 的时间内实现单词的插入，删除，询问特定的结点。并且我们可以在 $\mathcal{O}(n)$ 的时间内按照顺序输出排序后的名单。

3 题目要求的实现思路

3.1 映射

为了能够实现题目中的要求，我们使用 splay 建立了两个映射。并且利用 splay 本身有序的特点，完成排序的要求。我们具体，建立了如下的两个映射。

- 人名 → 人的信息
- 电话号码 → 人名

我们同时维护这两个映射，就可以完成题目中的要求。

可能听起来有一点麻烦，但是我们使用了模板类之后，任务就变得简单了。下面是变量的创建。

```
typedef pair<vector <long long>, string> INFO;

SPLAY::Splay <string, INFO > name2info; // name -> (num, location)
SPLAY::Splay <long long, string> num2name; // num -> name;
```

4 附录

4.1 程序中使用的一些宏

```
#define lson(x) son[(x)][0]
#define rson(x) son[(x)][1]
#define g(x) pre[pre[(x)]]
```