直径规约整理

1 计算上界 U

我们可以通过计算具有 n 个点的 k-defective 的直径 d 的上界来对我们原来的问题进行简化. 这篇文章将计算这个上界的思路进行整理.

为了方便计算, 我们首先需要将图进行转化. 假设我们有一个图,$G = (V, E)$. 这个图是一个 k-defective. 其中 $s, t \in V$ 两个点之间的一条路径是 G 的一个直径, 这条直径的长度为 d.

通过将整个图 G 中的点按照到 s 的距离进行分层, 可以将原来的图绘制成一个分层图, 其中 s 在第 0 层, t 在第 d 层 (示意图见图 1).

画好分层图之后, 可以将图中的边分为两种, 一种是一个端点在直径上的边 (蓝色), 另外一种是两个端点都不在直径上的边 (红色).

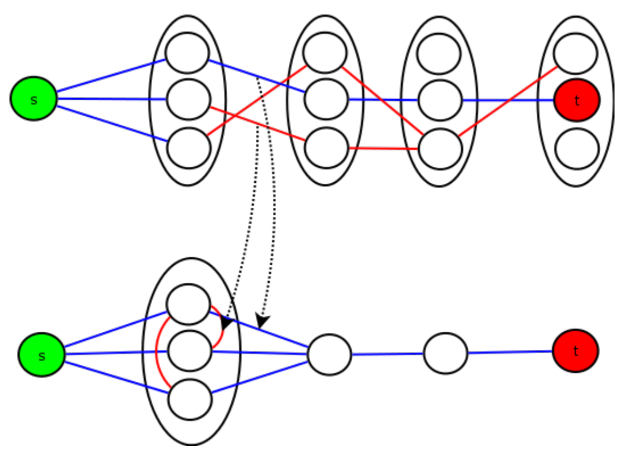

图 1: 转换方式示意图

通过将所有其他层中不在直径上的点移动到第一层, 我们可以得到如图

1所示的新图. 这张图与原图的点数和边数是一样的 (虽然没有画得一样).

我们可以在第一层中补充新的边, 将第一层补充成一个团, 这样, 可以得到关于边数 $|E|$ 的一个上界 M. 即 $M \geq |E|$. 再结合 k-defective 的定义 $|E| \geq \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) - k$. 最终我们可以得到: $M \geq \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) - k$. 根据上面的图 1, 我们可以将 M 展开成如下形式:

$$M = \left(\begin{array}{c} n-d \\ 2 \end{array} \right) + 2(n-d) + (d-2)$$

综合上面的式子可以得到关于 d 的约束:

$$\left(\begin{array}{c} n-d \\ 2 \end{array} \right) + 2(n-d) + (d-2) \geq \left(\begin{array}{c} n \\ 2 \end{array} \right) - k$$

解这个式子可以得到:

$$\begin{cases} d \leq \frac{(2n+1)-\sqrt{4n^2-12n+17-8k}}{2} \\ d \geq \frac{(2n+1)+\sqrt{4n^2-12n+17-8k}}{2} (\text{不可能发生, 因为 } d \leq n-1) \end{cases}$$

故, 最终可以得到: $d \leq \frac{(2n+1)-\sqrt{4n^2-12n+17-8k}}{2} = U$. 并且我们可以知道: 只要 $\Delta = 4n^2 - 12n + 17 - 8k \geq 0$, 这个上界就是有效的.

总结一下, U 是: 有 n 个点的 k-defective 的直径长度的上界.

2 在分支中使用上界 U^*

上界 U 是不能直接在分支的时候使用的, 因为 U 是一个和 n 有关的函数 $U(n)$ (k 一旦给定就不会变, 这里可以看成常数), 其中 n 是 k-defective 中的点数. 假设最优解的大小为 x, 则最优解中直径的上界为 $U(x)$. 因为我们不知道 x, 所以, 实际上我们不能直接使用 $U(x)$.

但是, 观察 $U(n)$ 的图像 (图 2, 图 3), 我们可以猜想: $\exists l \geq 0$ 使得当 $n > l$ 时, $U(n) \leq U(l)$. 如果是这样的话, 则我们可以令 $U^* = U(l) \geq U(n) \geq |E|$ 作为分支时使用的上界.

令 $U(n) = \frac{(2n+1)-\sqrt{4n^2-12n+17-8k}}{2}$. 则:

$$U'(n) = 1 - \frac{2n-3}{\sqrt{4n^2-12n+17-8k}}$$

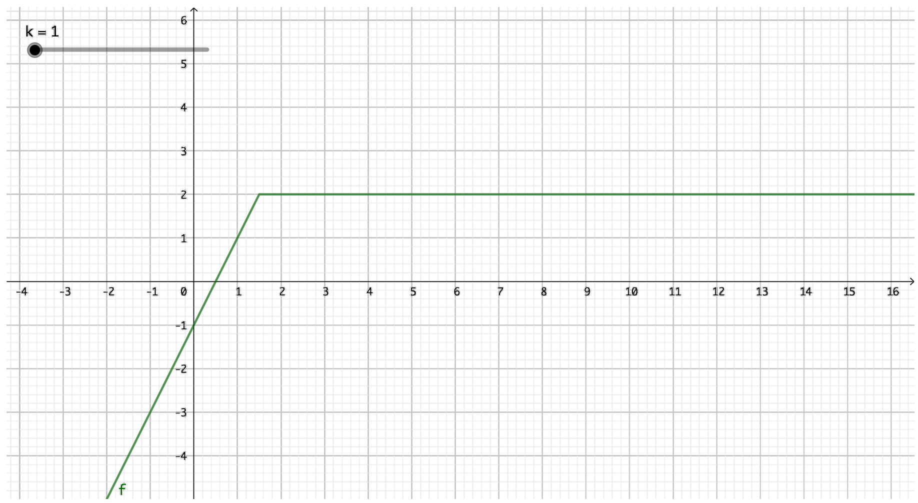

图 2: $k = 1$ 时, 上界的图像

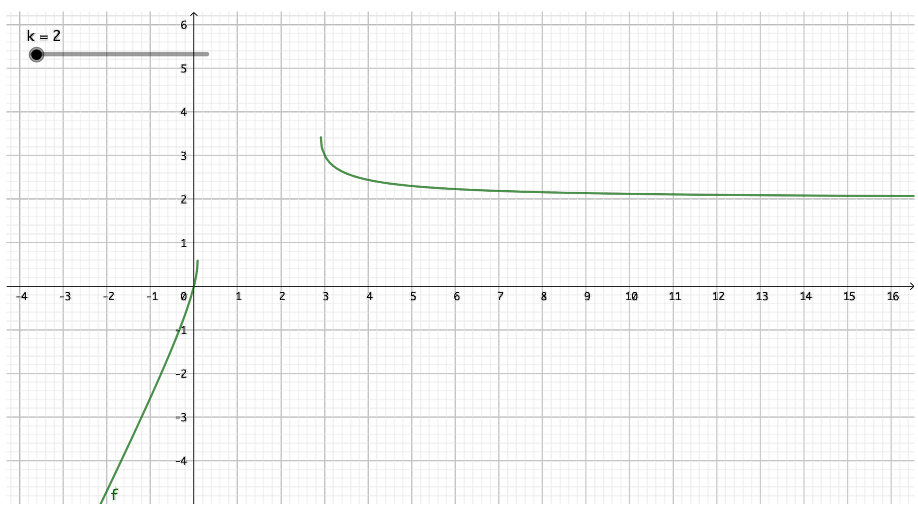

图 3: $k > 1$ 时, 上界的图像

继续化简一下可以得:

$$U'(n) = 1 - sgn(2n-3)\sqrt{\frac{4n^2 - 12n + 17 - 8}{4n^2 - 12n + 17 - 8k}}$$

故当 $2n - 3 \geq 0$ 时:

当 $k=1$, 且 $\Delta = 4n^2-12n+17-8k \geq 0$ 时, $U'(n)=1$.
当 $k>1$, 且 $\Delta = 4n^2-12n+17-8k \geq 0$ 时, $U'(n)<1$ 单调递减.
这就证明了之前的猜想的正确性.

总结一下: 假设我们现在得到了最优解的下界 l, 且满足如下条件

$$\begin{cases} k \geq 1 \\ \Delta = 4l^2 - 12l + 17 - 8k > 0 \\ 2l - 3 \geq 0 \end{cases}$$

则我们可以得到一个最优解的直径的上界 $U^* = U(l)$.