

复杂边界条件下半球壳受迫振动响应分析

庞福振, 张明, 高聪, 郑嘉俊, 李海超

(哈尔滨工程大学, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 基于半解析法求解得到中厚半球壳的稳态振动与瞬态振动响应。基于一阶剪切变形理论推导球壳结构能量表达式, 引入 Jacobi 多项式和傅里叶级数表示半球壳结构的轴向和径向位移, 利用 Ritz 法得到半球壳的稳态振动响应, 有限元对比结果验证了本文方法的可行性。在此基础上, 对半球壳在不同边界条件、截顶角和壳体厚度等因素下稳态振动与瞬态振动特性规律进行总结分析。

关键词: 半解析法; 半球壳; 稳态振动; 瞬态振动

中图分类号: O327 **文献标志码:** A

引言

半球壳结构作为应用于航空航天、土木、机械等工程领域中一类常见结构, 在设计应用当中由于结构的特殊性, 很少单独使用, 通常在自身一端或两端开口后与其他结构或设备进行连接。这不仅改变了球壳的原始结构形状, 也导致其自身固有特征发生改变。此外, 在实际应用中球壳结构会暴露在载荷相对复杂的环境中而引起结构的疲劳和振动, 与自身两端开口处连接设备形成相互耦合作用以致可能发生共振, 同时伴随产生较大的结构振动噪声而对生产生活造成不利影响。因此, 准确分析球壳结构及其开口状态下自身振动响应, 对于指导其结构设计, 具有重要的工程应用价值。

针对球壳振动特性的研究, 国内外学者先后提出了不同的分析方法, 并对这些方法进一步开展组合分析, 提高求解的快速有效性, 比如有限元法、动力刚度法、Ritz 法、区域分解法等^[1-3]。Thomasa 等^[4]推导了大振幅位移作用下浅球壳的非线性振动方程, 并将理论分析结果与试验结果进行对比分析后进行补充。Hosseini-Hashemi 等^[5]和 Tornabene 等^[6]分别基于一阶剪切变形理论(FSDT)提出了新的中厚球壳的自由振动特性方法, 并用有限元法验证了数值模拟的收敛性。Mena 等^[7]采用混合有限元法对不同几何形状、边界条件和半径厚度比的球壳自由振动特性进行分析。Tornabene 等^[8]对不同求解方法进行对比, 并利用广义微分求积法(GDQ)研究

了球壳结构的自由振动特性。Hou^[9]导出扁球壳的自由振动频率微分求解方程, 对扁球壳的三阶频率和模态曲线数值模拟分析。Hu 等^[10]提出一种全新基于里兹法求解球形球壳自由振动的解析法, 引入雅可比多项式和傅里叶级数表征结构轴向和周向位移, 数值模拟结果验证了方法的高效精确性, 并进一步分析了各向同性中厚球形球壳的振动特性。赵伟东等^[11]采用 Kantorovich 时间平均法简化微分方程, 探讨了均布压力作用导致扁球壳的自由振动特性规律。陈旭东等^[12]利用动力刚度法获得了不同边界条件下中厚扁球壳体的自由振动频率特征, 并延伸到扁球壳领域。Gan 等^[13]和李善倾等^[14-15]讨论应用 Green 函数法来求解夹板和筒支边界下不同底面形状的扁球壳自由振动, 并构造出合适的边界条件方程用于改善积分求解方程的奇异性。此外, 提出了一种新解析法可用于分析双参数基础上的不规则扁球壳的自由振动问题。池旭帆等^[16]引入 Bezier 函数来模拟球壳结构中面位移, 从而基于一阶剪切变形理论建立一种半解析法用于求解开口球壳的自由振动与受迫振动, 并对结构的受迫振动进行重点分析。

由以上文献分析可知, 上述研究考虑结构厚度变化和开口特征的变形影响研究较少, 同时现有研究多基于经典薄壳理论对球壳结构自由振动响应进行分析, 缺乏对球壳结构受迫振动情况下半解析法研究, 其求解方法尚待进一步丰富。薄壳的厚度需要小于壳体变形模态波长或曲率半径的 1/20, 该范围内一阶剪切变形理论与经典薄壳理论相比, 由于薄壳理论忽略了横向剪切变形以及法向应力对壳体

变形的影响,在计算求解精度方面存在不足,而一阶剪切变形理论由于引入剪切修正因子来弥补了薄壳理论忽略剪切变形的影响,在求解精度上更精确,适用于球壳结构在集中力下的振动响应分析^[17-18]。为此,本研究以半球壳结构为研究对象,基于一阶剪切变形理论推导开口球壳能量表达式,引入人工弹簧模拟半球壳结构的边界条件,采用 Jacobi 多项式和傅里叶级数分别表示结构的轴向位移和径向位移,基于里兹法推导出球壳结构的振动微分方程,开展一般边界条件球壳受迫振动特性研究,分析了结构边界条件、开口大小和壳体厚度对半球壳体稳态振动与瞬态振动响应的影响,进一步丰富了球壳结构受迫振动响应研究,为其振动控制提供理论依据。

1 理论公式

1.1 半球结构模型

图1为半球壳结构几何模型,坐标系为 $(\varphi, \theta, \delta)$,其中 φ 表示结构底边对应的圆心角, $\varphi_0 = \pi/2$,球壳环向封闭, θ 为环向角度, δ 为结构法线方向,半球壳半径为 R , γ 表示半球壳截顶角, u , v 和 w 分别表示 φ , θ 和 δ 方向的位移。引入人工弹簧用于模拟半球壳的边界条件,弹簧方向示意图如图2所示,线性边界约束采用三组线性弹簧进行模拟,旋转约束边界采用两组角弹簧进行模拟。

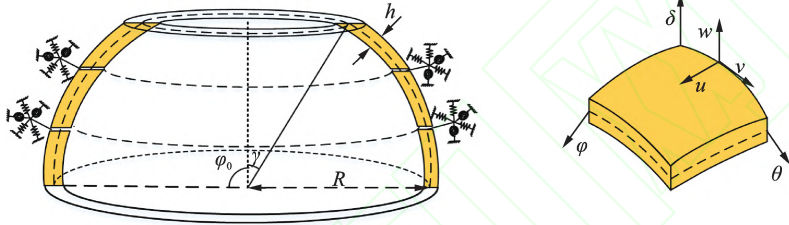


图1 半球壳结构模型与坐标系

Fig. 1 Structure model and coordinate system of hemisphere shell

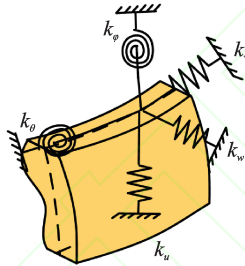


图2 人工弹簧连接示意图

Fig. 2 Schematic diagram of artificial spring connection

1.2 球壳能量泛函建立

运用区域分解法理论^[19],将半球壳结构沿轴向分为等长的 H 段,于每一段的首尾处分别设置五组人工弹簧,通过调节弹簧刚度值用来模拟连续性条件以及半球壳的边界条件,基于 FSDT 理论建立结构能量泛函,边界弹簧的模拟。边界弹簧当中假设第 i 段位移场表示为:

$$\begin{cases} \bar{U}^i(\varphi, \theta, \delta, t) = u^i(\varphi, \theta, t) + \delta\psi_\varphi^i(\varphi, \theta, t) \\ \bar{V}^i(\varphi, \theta, \delta, t) = v^i(\varphi, \theta, t) + \delta\psi_\theta^i(\varphi, \theta, t) \\ \bar{W}^i(\varphi, \theta, \delta, t) = w^i(\varphi, \theta, t) \end{cases} \quad (1)$$

球壳的应变取如下形式

$$\begin{cases} \epsilon_\varphi^i = \frac{1}{R} \frac{\partial u^i}{\partial \varphi} + \frac{v^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{w^i}{R} \\ \epsilon_\theta^i = \frac{1}{R} \frac{\partial v^i}{\partial \theta} + \frac{u^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{w^i}{R} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \gamma_{\varphi\theta}^i = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u^i}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v^i}{R} \right) \\ \gamma_{\varphi\delta}^i = \frac{1}{R} \frac{\partial w^i}{\partial \varphi} - \frac{u^i}{R} + \psi_\varphi^i \\ \gamma_{\theta\delta}^i = \frac{1}{R} \frac{\partial w^i}{\partial \theta} - \frac{v^i}{R} + \psi_\theta^i \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \kappa_\varphi^i = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\varphi^i}{\partial \varphi} + \frac{\psi_\theta^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} \\ \kappa_\theta^i = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{\psi_\varphi^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \\ \kappa_{\varphi\theta}^i = \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\psi_\varphi^i}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\psi_\theta^i}{R} \right) \end{cases} \quad (4)$$

式中 $\epsilon_\varphi^i, \epsilon_\theta^i, \gamma_{\varphi\theta}^i, \gamma_{\varphi\delta}^i$ 和 $\gamma_{\theta\delta}^i$ 为中性面处正应变和剪切应变; $\kappa_\varphi^i, \kappa_\theta^i$ 和 $\kappa_{\varphi\theta}^i$ 为中性面处的曲率值。

球壳结构应力可表示为:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\varphi^i \\ \sigma_\theta^i \\ \tau_{\varphi\theta}^i \\ \tau_{\varphi\delta}^i \\ \tau_{\theta\delta}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_\varphi^i \\ \epsilon_\theta^i \\ \gamma_{\varphi\theta}^i \\ \gamma_{\varphi\delta}^i \\ \gamma_{\theta\delta}^i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中 $\sigma_x^i, \sigma_y^i, \tau_{xy}^i, \tau_{xz}^i$ 和 τ_{yz}^i 分别表示正应力和剪应力;
 Q_{ii} 为应力和应变的关系系数。

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1 - \mu^2}, Q_{66} = \frac{E}{2[1 + \mu]} \quad (6)$$

式中 E 和 μ 表示弹性模量和泊松比,力和力矩可表示为:

$$\begin{bmatrix} N_\varphi^i \\ N_\theta^i \\ N_{\varphi\theta}^i \\ M_\varphi^i \\ M_\theta^i \\ M_{\varphi\theta}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 & B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 & D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_\varphi^{0,i} \\ \epsilon_\theta^{0,i} \\ \gamma_{\varphi\theta}^{0,i} \\ \kappa_\varphi^i \\ \kappa_\theta^i \\ \kappa_{\varphi\theta}^i \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_\varphi^i \\ Q_\theta^i \end{Bmatrix} = \bar{\kappa} \begin{bmatrix} A_{66} & 0 \\ 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{\varphi\theta}^{0,i} \\ \gamma_{\theta\varphi}^{0,i} \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 N_φ, N_θ 和 $N_{\varphi\theta}$ 为面内力; M_φ, M_θ 和 $M_{\varphi\theta}$ 为力矩;
 Q_φ, Q_θ 为横向剪应力,其中剪切修正因子 $\bar{\kappa} = 5/6$ 。
 $A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} (i, j = 1, 2, 6)$ 为拉伸、拉伸-弯曲耦合及弯曲刚度,分别为:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij} (1, \delta, \delta^2) d\delta \quad (9)$$

第 i 段应变能表示为:

$$U^i = \frac{1}{2} \iint_S \left(N_\varphi^i \epsilon_\varphi^{0,i} + N_\theta^i \epsilon_\theta^{0,i} + N_{\varphi\theta}^i \gamma_{\varphi\theta}^{0,i} + M_\varphi^i \kappa_\varphi^i + M_\theta^i \kappa_\theta^i + M_{\varphi\theta}^i \kappa_{\varphi\theta}^i + Q_\varphi^i \gamma_{\varphi\theta}^{0,i} + Q_\theta^i \gamma_{\theta\varphi}^{0,i} \right) R^2 d\varphi d\theta \quad (10)$$

结构应变能可用参考面位移和转角表示: $\bar{U}^i = U_S^i + U_B^i$, 其中, U_S^i 和 U_B^i 分别为拉伸和弯曲-拉伸耦合能量,表达式为:

$$U_S^i = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ \begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u^i}{\partial \varphi} + \frac{v^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{w^i}{R} \right)^2 + \\ & A_{22} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v^i}{\partial \theta} + \frac{u^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{w^i}{R} \right)^2 + \\ & A_{66} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u^i}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v^i}{R} \right) \right)^2 + \\ & 2A_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u^i}{\partial \varphi} + \frac{v^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} + \frac{w^i}{R} \right) \cdot \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v^i}{\partial \theta} + \frac{u^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{w^i}{R} \right) + \\ & \bar{\kappa} A_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w^i}{\partial \varphi} - \frac{u^i}{R} + \phi_\varphi^i \right)^2 + \\ & \bar{\kappa} A_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial w^i}{\partial \theta} - \frac{v^i}{R} + \phi_\theta^i \right)^2 \end{aligned} \right\} R^2 d\varphi d\theta \quad (11)$$

$$U_B^i = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ \begin{aligned} & D_{11} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\varphi^i}{\partial \varphi} + \frac{\psi_\theta^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 + \\ & D_{22} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{\psi_\varphi^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 + \\ & D_{66} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\psi_\varphi^i}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\psi_\theta^i}{R} \right) \right)^2 + \\ & 2D_{12} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\varphi^i}{\partial \varphi} + \frac{\psi_\theta^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \psi_\theta^i}{\partial \theta} + \frac{\psi_\varphi^i}{R^2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right) \end{aligned} \right\} R^2 d\varphi d\theta \quad (12)$$

半球壳分段后每段两端耦合边界条件的控制方程表达式为:

壳段下端边界和壳段上端边界分别为:

$$\begin{cases} N_\varphi^0 = k_{u,0} u \\ N_\theta^0 = k_{v,0} v \\ N_{\varphi\theta}^0 = k_{w,0} w \\ M_\varphi^0 = k_{\varphi,0} \phi_\varphi \\ M_\theta^0 = k_{\theta,0} \phi_\theta \end{cases}, \begin{cases} N_\varphi^1 = -k_{u,1} u \\ N_\theta^1 = -k_{v,1} v \\ N_{\varphi\theta}^1 = -k_{w,1} w \\ M_\varphi^1 = -k_{\varphi,1} \phi_\varphi \\ M_\theta^1 = -k_{\theta,1} \phi_\theta \end{cases} \quad (13)$$

式中 k_u, k_v, k_w 为线性弹簧刚度, k_φ, k_θ 为角弹簧刚度。半球壳的边界条件模拟通过控制连接弹簧的刚度值来实现,因此存储在边界弹簧中的势能 U_b 可表示为:

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{aligned} & k_{u,0} u^2 + k_{v,0} v^2 + \\ & k_{w,0} w^2 + k_{\theta,0} \phi_\theta^2 + \\ & k_{\varphi,0} \phi_\varphi^2 \end{aligned} \right\} R d\theta d\delta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{aligned} & k_{u,1} u^2 + k_{v,1} v^2 + \\ & k_{w,1} w^2 + k_{\theta,1} \phi_\theta^2 + \\ & k_{\varphi,1} \phi_\varphi^2 \end{aligned} \right\} R d\theta d\delta \quad (14)$$

相邻段的势能表示为:

$$U_s^i = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{aligned} & k_u (u^i - u^{i+1})^2 + \\ & k_v (v^i - v^{i+1})^2 + \\ & k_w (w^i - w^{i+1})^2 + \\ & k_\varphi (\phi_\varphi^i - \phi_\varphi^{i+1})^2 + \\ & k_\theta (\phi_\theta^i - \phi_\theta^{i+1})^2 \end{aligned} \right\} R d\theta d\delta \quad (15)$$

总势能表示为:

$$U_{BS} = U_b + \sum_{i=1}^{H-1} U_s^i \quad (16)$$

第 i 段的动能如下所示:

$$T^i = \frac{1}{2} \iint_S \left\{ I_0 \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_i}{\partial t} \right)^2 \right] + 2I_1 \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial t} \frac{\partial \psi_i^e}{\partial t} \right) + I_2 \left[\left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_i^e}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} dS \quad (17)$$

其中,

$$(I_0, I_1, I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left(1 + \frac{\delta}{R} \right)^2 (1, \delta, \delta^2) d\delta \quad (18)$$

集中载荷对第 i 圆环壳段所作的功

$$\begin{cases} P_0^{(\alpha, \beta)}(\phi) = 1 \\ P_1^{(\alpha, \beta)}(\phi) = \frac{\alpha + \beta + 2}{2} \phi - \frac{\alpha - \beta}{2} \\ P_i^{(\alpha, \beta)}(\phi) = \frac{(\alpha + \beta + 2i - 1) \{ \alpha^2 - \beta^2 + \phi(\alpha + \beta + 2i)(\alpha + \beta + 2i - 2) \}}{2i(\alpha + \beta + i)(\alpha + \beta + 2i - 2)} P_{i-1}^{(\alpha, \beta)}(\phi) - \\ \frac{(\alpha + i - 1)(\beta + i - 1)(\alpha + \beta + 2i)}{i(\alpha + \beta + i)(\alpha + \beta + 2i - 2)} P_{i-2}^{(\alpha, \beta)}(\phi) \end{cases} \quad (20)$$

式中 $\phi \in [-1, 1]$; α 和 β 分别为定义在区间 $[-1, 1]$ 之间的雅可比参数; $i=2, 3, \dots$

结构的各个位移函数分量可以写成雅可比多项式和三角级数的形式,如下所示:

$$\begin{cases} u = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \begin{bmatrix} A_m \sin(n\theta) \\ B_m \cos(n\theta) \end{bmatrix} e^{i\omega t} \\ v = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \begin{bmatrix} C_m \sin(n\theta) \\ D_m \cos(n\theta) \end{bmatrix} e^{i\omega t} \\ w = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \begin{bmatrix} E_m \cos(n\theta) \\ F_m \sin(n\theta) \end{bmatrix} e^{i\omega t} \\ \phi_x = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \begin{bmatrix} G_m \cos(n\theta) \\ H_m \sin(n\theta) \end{bmatrix} e^{i\omega t} \\ \phi_y = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \begin{bmatrix} I_m \sin(n\theta) \\ J_m \cos(n\theta) \end{bmatrix} e^{i\omega t} \end{cases} \quad (21)$$

式中 $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m, G_m, H_m, I_m$ 和 J_m 为雅可比展开系数; m 和 n 分别表示轴向和周向的半波数; M 和 N 为最高阶数。

半球壳的拉格朗日能量函数为:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^H (T^i - U^i) - U_{BS} \quad (22)$$

基于里兹法对结构能量泛函待定系数作变分处理:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vartheta} = 0 \quad \vartheta = U_m, V_m, W_m, \phi_{xm}, \phi_{\theta m} \quad (23)$$

因此,球壳的结构动力响应方程为:

$$(K - \omega^2 M)Q = F \quad (24)$$

式中 K, M, Q 分别为刚度矩阵、质量矩阵和系数

$$W^i = \int f_{\omega, i} w_i dx \quad (19)$$

式中 $f_{\omega, i}$ 为 z 方向施加的外部集中荷载。

1.3 位移函数和系统特征方程求解

利用能量变分原理对球壳进行振动分析时,其收敛速度和求解精度很大程度上取决于位移函数的选取。常见结构位移容许函数类型有简单多项式、幂级数、傅里叶级数、雅可比多项式等^[20],因此基于多段划分原则,选择将雅可比正交多项式表征半球壳体的轴向的位移场,利用三角级数表征半球壳的周向位移,推导出雅可比多项式的递推公式为:

矩阵。通过求解式(21),可以得到球壳的自由振动结果。

外激励下半球壳的未知系数矩阵推导为:

$$Q = (K - \omega^2 M)^{-1} F \quad (25)$$

式中 F 为外激励矩阵,将上述结果代入式(21)可得半球壳的受迫振动响应。

工程应用中通常考虑结构阻尼,本研究采用瑞利阻尼^[21]。瑞利阻尼为:

$$C = aM + bK \quad (26)$$

式中 C 为阻尼矩阵; a, b 表示如下:

$$a = \frac{2\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \xi, \quad b = \frac{2\xi}{\omega_i + \omega_j} \quad (27)$$

式中 ω_i 和 ω_j 表示结构的第 i 和第 j 个频率; ξ 为阻尼比。本研究中, $\omega_i = 2$ Hz, $\omega_j = 400$ Hz, $\xi = 0.05$, 则设瑞利阻尼为: $a = 2, b = 0.00003$ 。

假设加速度在 $[t, t + \Delta t]$ 时间范围内为常数,同时引入 η 和 μ 两个参数^[22],如下所示:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_i = [(1 - \eta) \ddot{x}_i + \eta \ddot{x}_{i+1}] \Delta t \\ \Delta x_i = \dot{x}_i \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \mu \right) \ddot{x}_i + \mu \ddot{x}_{i+1} \right] \Delta t^2 \end{cases} \quad (28)$$

本文取 $\eta = 0.5, \mu = 0.25$, 可将上式求解得:

$$\begin{cases} \ddot{x}_{i+1} = \frac{1}{\mu \Delta t^2} \Delta x_i - \frac{1}{\mu \Delta t} \dot{x}_i - \left(\frac{1}{2\mu} - 1 \right) \ddot{x}_i \\ \dot{x}_{i+1} = \frac{\eta}{\mu \Delta t} \Delta x_i - \left(1 - \frac{\eta}{\mu} \right) \dot{x}_i + \left(1 - \frac{\eta}{2\mu} \right) \ddot{x}_i \Delta t \end{cases} \quad (29)$$

增量平衡方程如下:

$$M \ddot{x}_{i+1} + C \dot{x}_{i+1} + K x_{i+1} = F_{i+1} \quad (30)$$

将式(29)代入式(30)可得

$$\bar{K}x_{i+1} = \bar{F}_{i+1} \quad (31)$$

其中,

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{K} = K + \frac{1}{\mu\Delta t^2} M + \frac{\eta}{\mu\Delta t} C \\ \bar{F}_{i+1} = F_{i+1} + M \left(\frac{1}{\mu\Delta t^2} x_i + \frac{1}{\mu\Delta t} \dot{x}_i + \left(\frac{1}{2\mu} - 1 \right) \ddot{x}_i \right) \\ C \left(\frac{\eta}{\mu\Delta t} x_i + \left(\frac{\eta}{\mu} - 1 \right) \dot{x}_i + \left(\frac{\eta}{2\mu} - 1 \right) \ddot{x}_i \Delta t \right) \end{array} \right. + (32)$$

将式(31)代入式(29)得到 \dot{x}_{i+1} 和 \ddot{x}_{i+1} , 重复迭代直到时间结束, 即得到结构在任何时刻的响应。

2 受迫振动特性分析

半球壳结构材料为钢, 密度 $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, 杨氏模量 $E = 210 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 半径 $R = 2 \text{ m}$, 无特殊说明情况下, 本研究取半球壳厚度 $h = 0.005 \text{ m}$, $\alpha = \beta = 0$ 。为了避免舍入结果, 取固有频率的无量纲频率参数 $\Omega = \omega R \sqrt{\rho(1-\mu)^2/E}$ 。半球壳边界条件模拟采用人工弹簧刚度表示, 其中自由支承、固定支承、简支支承和弹性支承边界条件分别用 F, C, S 和 E 表示。弹簧刚度与经典边界之间的对应关系如表 1 所示。

表 1 一般边界条件下球环弹簧刚度值

Tab. 1 The corresponding spring stiffness values of spherical shell for general boundary conditions

边界条件	F	C	S	E
线性弹簧/(N·m ⁻¹)	k_u	0	10^{15}	10^{15}
	k_v	0	10^{15}	10^{15}
	k_w	0	10^{15}	10^{15}
角弹簧/(N·rad ⁻¹)	k_φ	0	10^{15}	0
	k_θ	0	10^{15}	0

2.1 稳态振动分析

由理论表达式可知, 计算精度与位移表达式中的多项式模型截断数大小密切相关。因此, 为进一步验证本文方法在计算结构受迫振动时的适用性, 同时保证数值计算的求解精度, 需对多项式模型截断数进行收敛性分析。对半球壳体在 $(1/4\pi, 0)$ 处施加幅值为 $F_0 = 1 \text{ N}$ 的径向激励载荷, 结构边界条件为大端简支, 小端自由, 选择考核点位于半球壳结构 $(1/6\pi, \pi)$ 与 $(1/3\pi, \pi)$ 处。图 3 和图 4 分别为不同多项式截断数下振动响应变化曲线和本文方法与有

限元法计算精度对比, 分析频带 2~400 Hz, 间隔频率为 2 Hz。图中 L_a 为振动加速度级, $L_a = 20 \lg(a/a_0)$, $a_0 = 1 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$ 。

由图 3 可知, 当结构模型截断数 M 趋近于 4 时, 在分析频段内本文方法收敛速度快, 稳定性好, 因此取多项式截断数 $M=4$ 。由图 4 可知本文方法与有限元法结果吻合较好, 曲线趋势基本一致, 可以用来分析球壳结构的稳态振动响应。

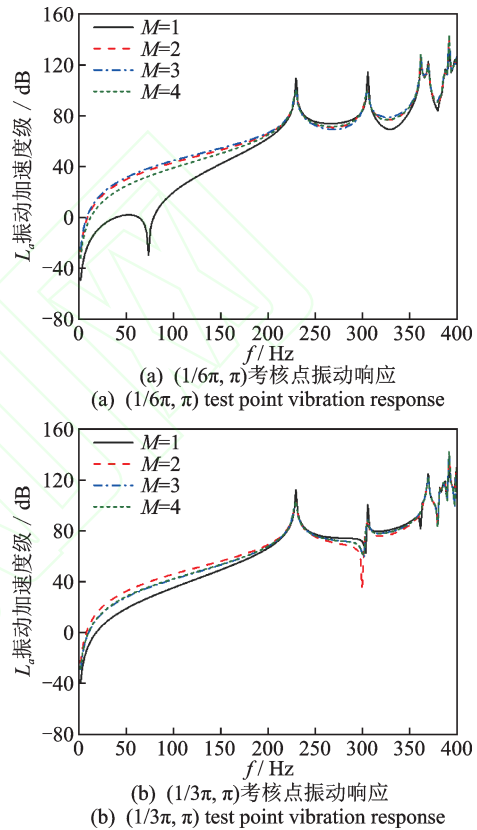


图 3 不同多项式截断数下计算精度对比曲线

Fig. 3 Comparison curves of calculation accuracy under different truncation numbers of polynomials

为充分探究不同边界条件下、不同结构厚度及截顶角大小对半球壳结构动力响应的影响, 本研究在数理模型验证基础上开展半球壳稳态振动响应分析。

表 2 和图 5 分别给出了不同边界条件下开口球壳的结构固有频率参数和不同考核点振动响应, 截顶角 $\gamma = \pi/10$ 。由表 2 可知, 开口球壳的结构固有频率参数受边界条件的影响较大, 随着边界条件的增强, 结构刚度变大, 固有频率升高。由图 5 可知开口球壳结构的振动响应随着边界条件逐渐增强亦会减弱, 此外, 对比不同考核点振动响应可知越靠近球壳中心位置, 振动响应越大。

图 6 给出了在不同边界条件下开口球壳不同结构厚度对结构振动响应的影响, 选择考核点在 $(1/$

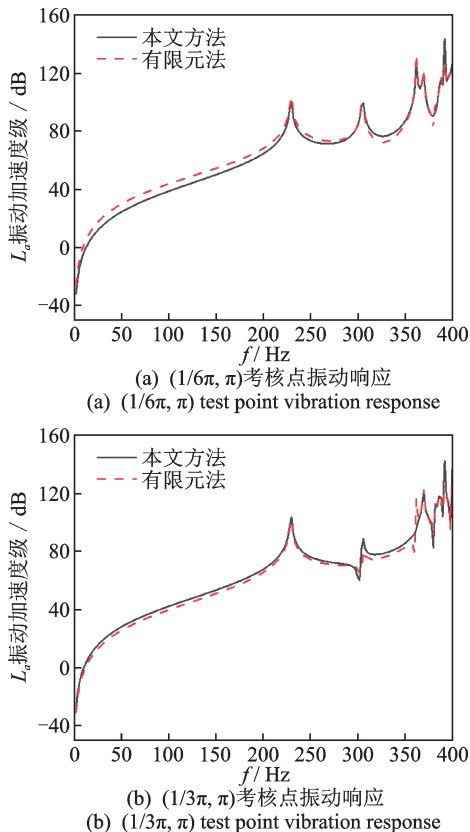


图 4 本文方法与有限元法稳态振动响应比较
Fig. 4 Comparison of the steady vibration response of Present method and FEM results

$6\pi, \pi)$ 处,截顶角 $\gamma = \pi/10$ 。由图 6 可知,在 F-S 边界下随着结构厚度增加导致自身刚度变大,低阶固有频率升高;在 E-C 边界条件下,结构厚度增加反而降低了前三阶固有频率,第四阶固有频率变大,但结构厚度增加都会造成结构振动响应的降低。

图 7 给出了不同边界条件下开口球壳截顶角对结构振动响应的影响,选择考核点位于 $(1/3\pi, \pi)$ 处。由图 7 可知,半球壳的固有频率在开口后相比未开口刚度变低,随着截顶角变大固有频率低频偏移现象更加明显,同时振动加速度响应曲线在低频处峰值变大。横向对比可知,边界条件的增强亦提高了开口球壳的固有频率。

2.2 瞬态振动分析

首先,对无阻尼的半球壳振动系统进行瞬态响应分析。图 9 为在三角形脉冲载荷作用下本文方法

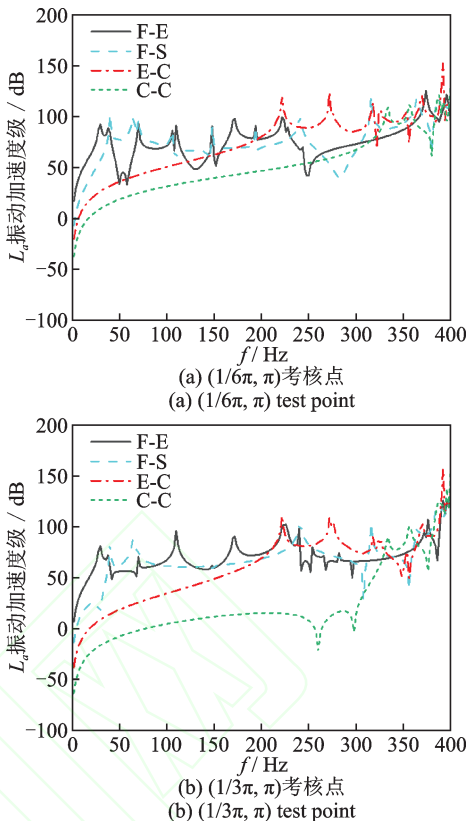


图 5 不同边界条件下半球壳振动响应对比
Fig. 5 Comparison of vibration responses of hemispherical shell under different boundary conditions

与有限元法计算求解的无阻尼瞬态振动响应结果,其中三角形脉冲载荷函数曲线如图 8 所示, $q_0=1$ N, $t_0=0.005$ s, $\tau=0.005$ s, $\Delta t=0.0001$ s, 截顶角 $\gamma = \pi/10$ 。可见,本文方法与有限元计算结果吻合较好,两曲线趋势基本一致,可以用来有效研究半球壳结构的瞬态受迫振动响应。

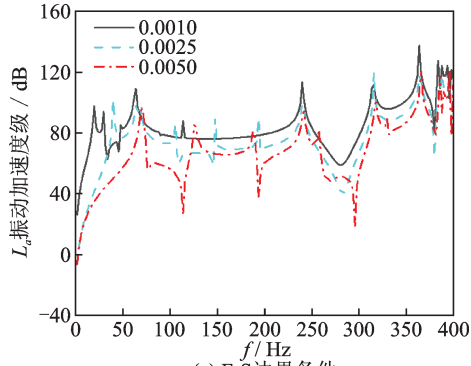
图 10 和 11 分别给出了在不同边界条件下半球壳不同考核点及不同厚径比(h/R)下无阻尼瞬态振动响应结果,其中截顶角 $\gamma = \pi/10$ 。由图 10 和 11 可知,开口球壳边界条件增强或自身结构厚度增加,振动响应幅值均出现明显降低,但边界条件对振动响应幅值影响相对较大。由图 10 横向对比可知,越靠近结构的中心位置结构响应越大,且边界条件的增强导致振动位移周期减小,表明结构固有频率变大,这与稳态振动结论是一致的。

图 12 给出了在不同截顶角情况下开口球壳的

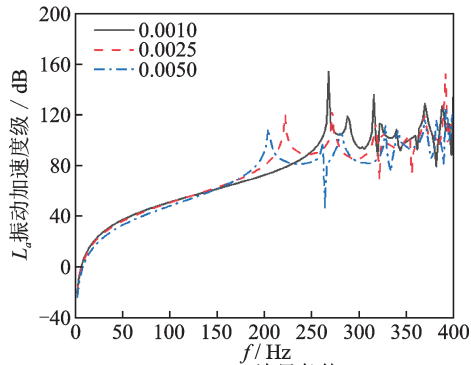
表 2 不同边界条件下半球壳结构的固有频率

Tab. 2 Natural frequencies of spherical shell structures under different boundary conditions

边界条件	固有频率/Hz									
F-E	29.2	38.9	69.7	106.4	110.4	148.1	171.0	194.1	206.9	223.0
F-S	40.2	64.9	69.7	106.4	148.1	194.1	240.9	243.7	316.1	364.9
E-C	221.7	272.2	275.1	317.6	325.0	353.3	369.3	381.2	389.7	392.0
C-C	333.2	356.9	385.2	388.5	390.5	392.7	395.9	399.5	400.0	403.0



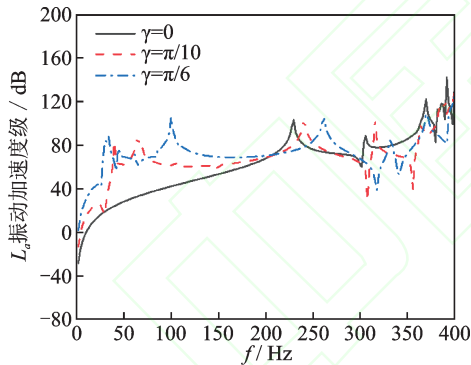
(a) F-S边界条件
(a) F-S boundary condition



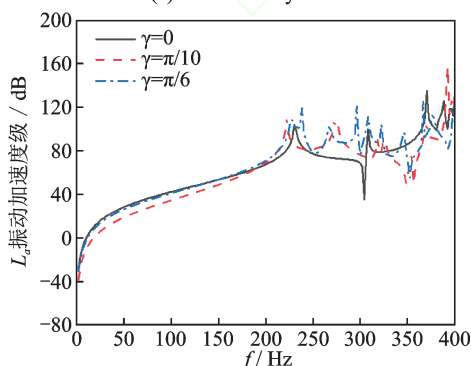
(b) E-C边界条件
(b) E-C boundary condition

图6 半球壳不同厚径比(h/R)振动响应对比

Fig. 6 Comparison of the steady vibration of hemispherical shell with different h/R ratio



(a) F-S边界条件
(a) F-S boundary condition



(b) E-C边界条件
(b) E-C boundary condition

图7 半球壳不同截顶角振动响应对比

Fig. 7 Comparison of vibration response of hemispherical shell with different truncation angles

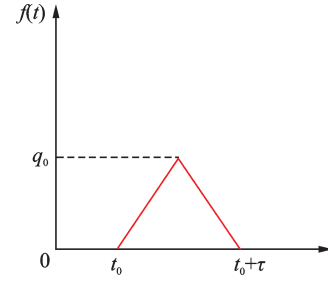
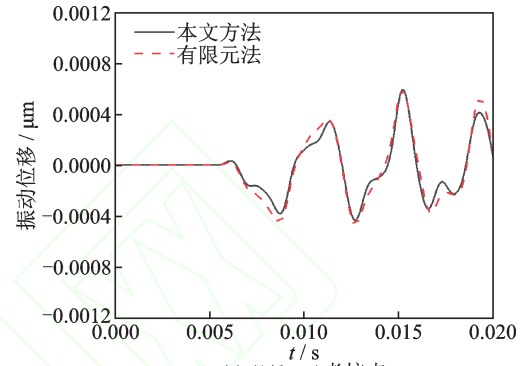
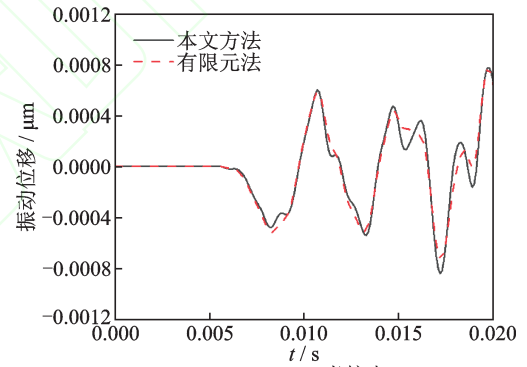


图8 三角形脉冲载荷

Fig. 8 Triangular pulse load



(a) (1/6π, π)考核点
(a) (1/6π, π) test point



(b) (1/3π, π)考核点
(b) (1/3π, π) test point

图9 本文方法与有限元法的无阻尼瞬态振动响应比较

Fig. 9 Comparison of the undamped transient vibration response of Present method and FEM

无阻尼瞬态振动响应结果,考核点在 $(1/3\pi, \pi)$ 处。由图12可知,随着截顶角变大,结构开口后振动响应幅值变大,振动位移周期变大。同时横向对比可知边界条件的增强亦限制了结构的振动响应幅值,并使得结构固有频率升高,这与不同截顶角下稳态振动响应结论一致。

图13给出了在不同结构阻尼下开口球壳的瞬态振动响应结果,截顶角 $\gamma = \pi/10$ 。由图13可知,结构阻尼对振动响应有较大抑制作用,在自由-简支边界条件下半球壳结构阻尼的增加并未使得瞬态振动响应幅值出现明显衰减,但在弹性-固定边界条件下随着结构阻尼的增大,瞬态振动响应位移随时间出现较大的幅值衰减。

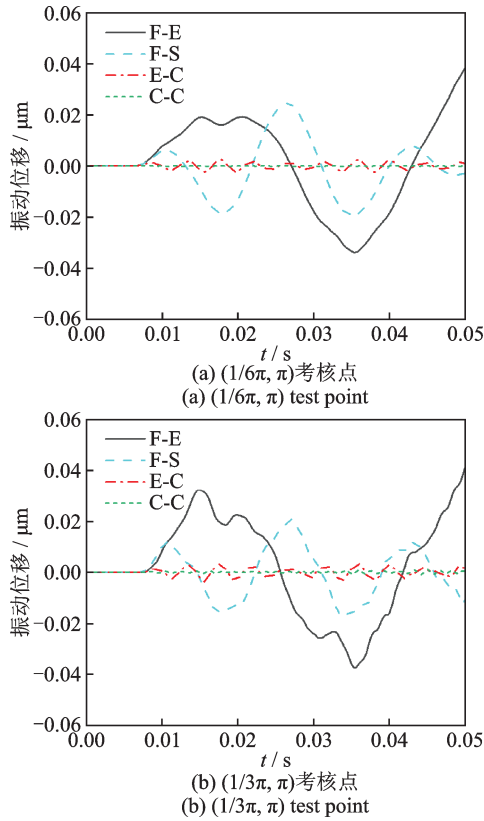


图 10 不同边界条件下考核点振动响应时间历程曲线
Fig. 10 Vibration response time history curves of test points under different boundary conditions

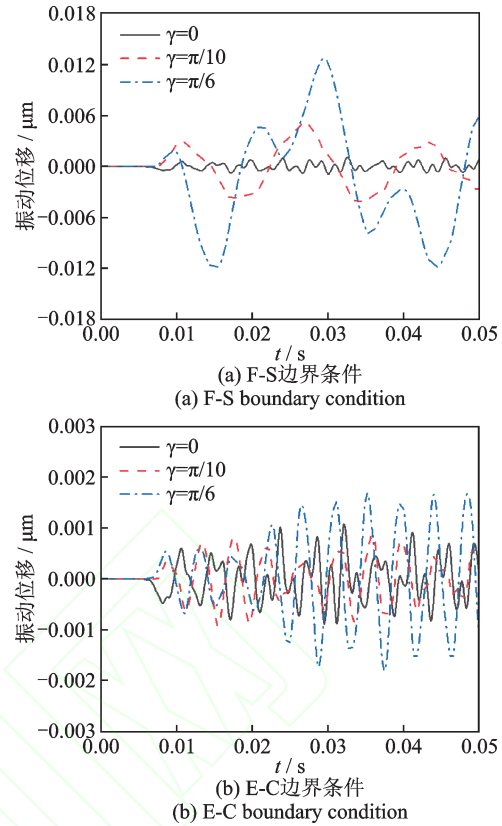


图 12 不同截顶角下半球壳振动响应时间历程曲线
Fig. 12 Vibration response time history curves of hemispherical shells at different truncated angles

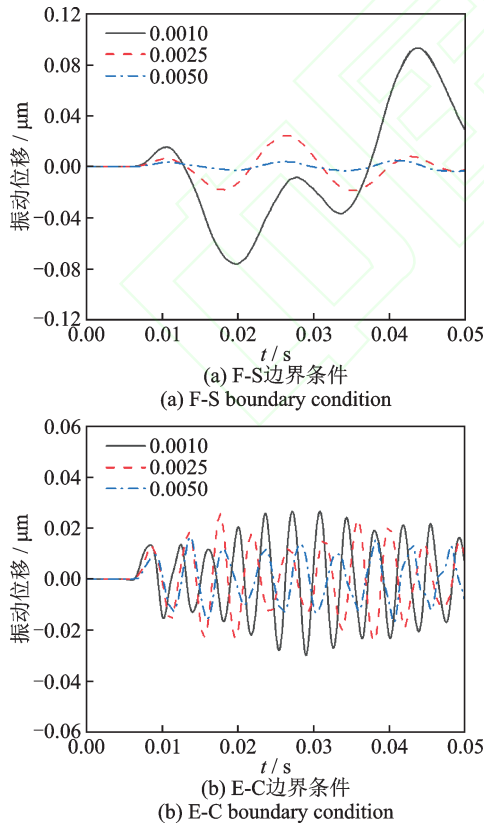


图 11 不同厚径比下半球壳振动响应时间历程曲线
Fig. 11 Vibration response time history curves of hemispherical shell with different h/R ratio

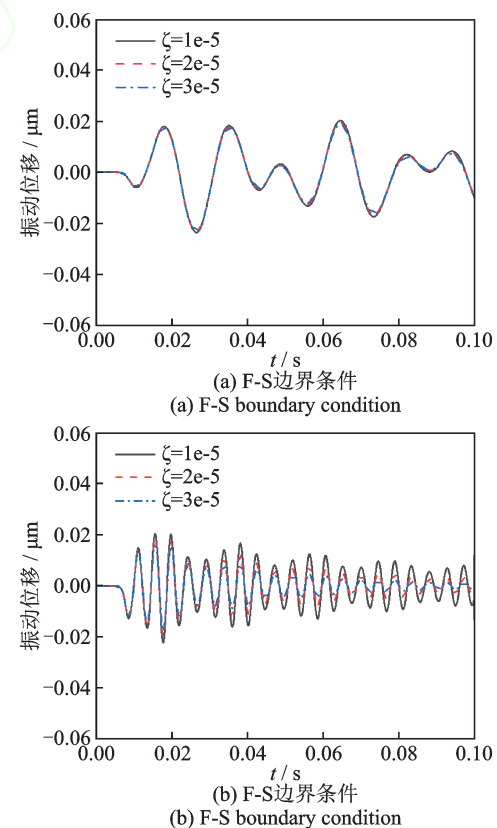


图 13 不同结构阻尼下半球壳振动响应时间历程曲线
Fig. 13 Vibration response time history curves of hemispherical shells with different structural damping

3 结 论

本文引入雅克比正交多项式和傅里叶级数分别表示半球壳的轴向位移和径向位移,从而建立半球壳的强迫振动分析模型,基于 Ritz 法研究了边界条件、结构厚度和截顶角对半球壳受迫振动特性的影响。研究得出主要结论如下:

1)本文方法具备较好的收敛性和求解精度。当雅克比多项式模型截断数超过4时,本文方法具备较好的收敛稳定性,通过与有限元求解结果对比分析,本文方法计算精度较好。

2)半球壳结构固有频率不仅与结构参数属性有关,还与边界条件有关。随着半球壳结构厚度变大,其低阶固有频率在自由-简支边界下出现增大,在弹性-固定边界下前三阶固有频率出现降低;截顶角变大降低了结构的刚度,导致结构低阶固有频率降低,同时边界条件的增强亦会使得结构的固有频率提高。

3)半球壳的振动响应受到边界条件、壳体厚度、截顶角以及自身结构阻尼等多种因素的影响。半球壳结构振动响应越靠近球壳自身中心位置,其振动响应峰值越大。边界条件的增强和壳体厚度的增加均会降低结构振动位移,而截顶角变大会导致结构刚度降低,半球壳的振动响应位移会出现变大。结构阻尼对壳体的位移响应与边界条件有关,在弹性-固定边界条件下,阻尼对振动响应衰减影响较大。

参考文献:

- [1] Li Haichao, Pang Fuzhen, Miao Xuhong, et al. Jacobi-Ritz method for free vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells with arbitrary boundary conditions: a unified formulation[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2019, 77(2): 427-440.
- [2] 李正良, 胡浩, 于伟. 正交加筋圆柱壳-球壳组合结构自由振动分析[J]. *振动与冲击*, 2015, 34(22): 129-137.
- LI Zhengliang, HU Hao, YU Wei. Free vibration of joined and orthogonally stiffened cylindrical-spherical shells[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2015, 34(22): 129-137.
- [3] 林智斌, 桂国庆, 钱若军. 单层球壳结构在简单荷载作用下的动力稳定分析[J]. *工程力学*, 2006, 23(6): 6-10.
- LIN Zhi-bin, GUI Guo-qing, QIAN Ruo-jun. Dynamic stability of single-layer reticulated shells under simple

- loads[J]. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(6): 6-10.
- [4] Oliver Thomas, Touzé C, Chaigne A. Non-linear vibrations of free-edge thin spherical shells: modal interaction rules and 1:1:2 internal resonance[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2005, 42(11): 3339-3373.
- [5] ShHosseini-Hashemi, Fadaee M. On the free vibration of moderately thick spherical shell panel—a new exact closed-form procedure[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(17): 4352-4367.
- [6] Francesco Tornabene, Erasmo Viola. Vibration analysis of spherical structural elements using the GDQ method[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2007, 53(10): 1538-1560.
- [7] Mohamed Mena, Lakis Aouni A. Free vibration of spherical shells using a hybrid finite element method[J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2015, 15(4): 1450062.
- [8] Tornabene F, Brischetto S, Fantuzzi N, et al. Numerical and exact models for free vibration analysis of cylindrical and spherical shell panels[J]. *Composites Part B: Engineering*, 2015, 81: 231-250.
- [9] Hou Xian Qin. Free vibration of shallow-spherical shell[J]. *Applied Mechanics and Materials*, 2014, 578-579: 890-894.
- [10] Hu Bing, Gao Cong, Zhang Hang, et al. Free vibration characteristics of moderately thick spherical shell with general boundary conditions based on Ritz method[J]. *Shock and Vibration*, 2020, 2020: 1-20.
- [11] 赵伟东, 邱平, 吴晓, 等. 均布压力作用下扁球壳几何非线性自由振动[J]. *兰州理工大学学报*, 2010, 36(4): 168-171.
- Zhao Weidong, Qiu Ping, Wu Xiao, et al. Geometrically nonlinear free vibration of a shallow spherical shell under uniform pressure[J]. *Journal of Lanzhou University of Technology*, 2010, 36(4): 168-171.
- [12] 陈旭东, 叶康生. 中厚椭圆壳自由振动动力刚度法分析[J]. *振动与冲击*, 2016, 35(6): 85-90.
- Chen Xudong, Ye Kangsheng. Free vibration analysis of moderately thick elliptical shells using the dynamic stiffness method[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(6): 85-90.
- [13] Gan Jiarong, Yuan Hong, Li Shanqing, et al. An analytical method for shallow spherical shell free vibration on two-parameter foundation[J]. *Heliyon*, 2021, 7(1): e05876.
- [14] 李善倾, 袁鸿, 刘人怀. 夹支扁球壳自由振动问题的准 Green 函数方法[J]. *振动工程学报*, 2015, 28(6): 865-870.
- Li Shanqing, Yuan Hong, Liu Renhuai. Quasi-Green's function method for free vibration of slip clamped shal-

- low spherical shell[J]. Journal of Vibration Engineering, 2015, 28(6): 865-870.
- [15] 李善倾, 袁鸿. 简支梯形底扁球壳自由振动问题的准 Green 函数方法[J]. 应用数学和力学, 2010, 31(5): 602-608.
- Li Shanqing, Yuan Hong. Quasi-Green's function method for free vibration of simply-supported trapezoidal shallow spherical shell[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2010, 31(5): 602-608.
- [16] 池旭帆, 束永平. 基于 Bezier 函数方法的球壳振动特性分析[J]. 东华大学学报(自然科学版), 2021, 47(5): 135-142.
- Chi Xufan, Shu Yongping. Vibration characteristics analysis of spherical shell based on Bezier function method[J]. Journal of Donghua University (Natural Science), 2021, 47(5): 135-142.
- [17] 王青山. 任意边界条件下复合材料回转类中厚板壳及耦合结构振动特性研究[D], 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2016.
- Wang Qingshan. Study of vibration characteristics for moderately thick plates and shells of revolution and coupled structures subjected to general boundary condition [D], Harbin: Harbin Engineering University, 2016.
- [18] 吴仕昊. 桨-轴-艇耦合结构的振动和声辐射特性理论与试验研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2015.
- Wu Shihao. Theoretical and experimental study on vibration and sound characteristics of propeller-shaft-shell coupled structures[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2015.
- [19] 瞿叶高, 孟光, 华宏星, 等. 基于区域分解的薄壁回转壳自由振动分析[J]. 应用力学学报, 2013, 30(1): 1-6.
- Qu Yegao, Meng Guang, Hua Hongxing, et al. Free vibration analysis of thin shells of revolution based on domain decomposition method [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2013, 30(1): 1-6.
- [20] 李海超. 复合材料回转结构振动声辐射雅可比-里兹方法及应用[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2021.
- Li Haichao. Jacobi-Ritz method and application for vibration and sound radiation of composite shells of revolution [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2021.
- [21] 朱诗勇, 杨芬. 考虑车桥耦合振动的钢梁桥腹板间隙的疲劳研究[J]. 工程与建设, 2021, 35(5): 1021-1022.
- ZHU Shiyong, YANG Fen. Fatigue study on the web gap of steel girder bridge considering axle coupling vibration [J]. Engineering and Construction, 2021, 35(05): 1021-1022.
- [22] 李振国. 基于时域分析的曲壳结构振动辐射特性研究[D]. 大连: 大连理工大学, 2017.
- Li Zhenguo. The research of vibration radiation characteristics based on time domain analysis for curve shell structures[D]. Dalian: Dalian University of Technology, 2017.

Forced vibration response analysis of hemispherical shell under complex boundary conditions

PANG Fuzhen, ZHANG Ming, GAO Cong, ZHENG Jia-jun, LI Hai-chao

(Harbin Engineering University, Harbin, 150001, China)

Abstract: The steady-state and transient vibration responses of medium thick hemispherical shell are obtained based on semi-analytical method. Based on the first-order shear deformation theory, the energy expression of spherical shell structure is deduced. The Jacobi orthogonal polynomials and Fourier series are introduced to represent the axial and circumferential displacements of the hemispherical shell structure. The steady vibration response of the hemispherical shell is obtained by Ritz method. The results are compared with the finite element method to verify the feasibility of the presented method in this paper. On this basis, the characteristics of steady and transient vibration of the hemispherical shell under different boundary conditions, truncated Angle and shell thickness are summarized and analyzed.

Key words: semi analytical method; hemisphere shell; steady state vibration; transient vibration

作者简介: 庞福振(1980—),男,博士,教授。E-mail: pangfuzhen@hrbeu.edu.cn。