作业8nd

四.1 证明：K_5与$K_{3,3}$删去一条边后都是平面图

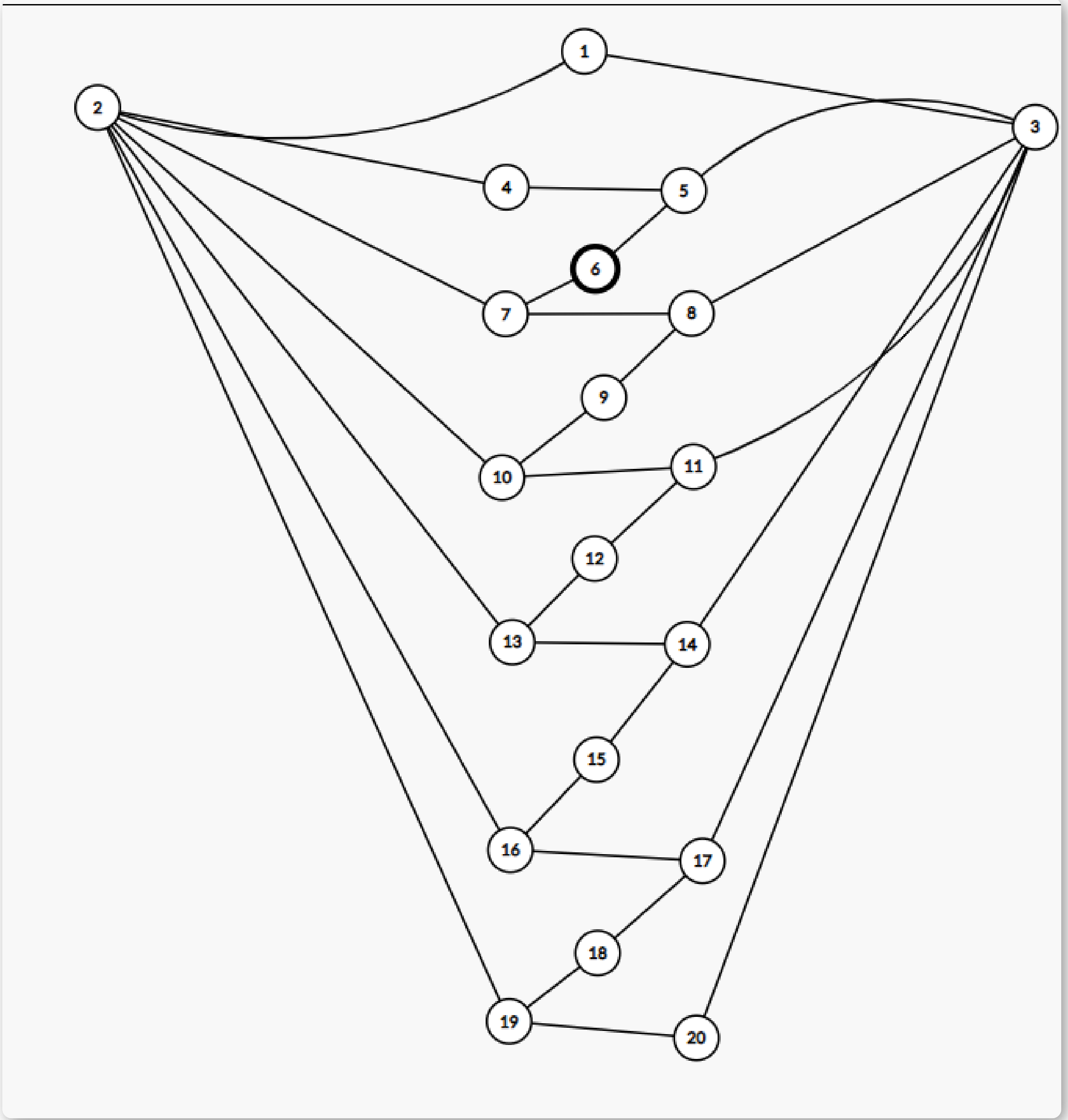
- K_5：
  - 对于K_5的任一极大平面子图G'，有$\varepsilon(G')=3\nu(G')-6=9$
  - 即G'由删除K_5中某一条边得到
  - 由于完全图K_5的对称性，删除其中任意一条边得到的图G''均与G'同构，为平面图
- $K_{3,3}$中的所有边亦具有对称性，证明同理

四.4 设连通平面图G是有8个顶点的$4-$正则图，则它的平面嵌入把平面分成多少个面?

- $2\varepsilon=4\nu$，$\varepsilon=16$
- $\phi=2-\nu+\varepsilon=10$

四.6 设G是连通的简单平面图, 面数$\phi<12$，最小度$\delta\geq 3$

1. **证明G中存在度数小于等于4的面**
   - 由于$\delta\geq 3$，故$2\varepsilon\geq 3\nu$，$\nu\leq\frac{2}{3}\varepsilon$
   - 由于$\phi<12$，故$2=\nu-\varepsilon+\phi<\nu-\varepsilon+12\leq\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+12$，$\varepsilon<30$
   - 若G中所有面度数均大于4，则$2\varepsilon=\sum\limits_{f\in F(G)}deg(f)\geq 5\phi$，$\phi\leq\frac{2}{5}\varepsilon$
   - $2=\nu-\varepsilon+\phi\leq\frac{2}{3}\varepsilon-\varepsilon+\frac{2}{5}\varepsilon=\frac{1}{15}\varepsilon$，$\varepsilon\geq 30$，矛盾
   - 故G中存在度数小于等于4的面
2. **举例说明当$\phi=12$时，其他条件不变，(1)的结论不成立**
   - 若$\phi=12$，则$\varepsilon=30$，$\nu=20$
   -



四.7 设G是ν个顶点ε条边的简单平面图，$\varepsilon < 30$，证明存在顶点$v \in V(G)$，使得$\deg(v) \leq 4$

- 若$\forall v \in V(G)$，均有$\deg(v) > 4$
- 则$2\varepsilon = \sum\limits_{v \in V(G)} deg(v) \geq 5\nu$，$\nu \leq \frac{2}{5}\varepsilon$
- 则$\varepsilon \leq 3\nu - 6 \leq \frac{6}{5}\varepsilon - 6$，$\varepsilon \geq 30$，矛盾
- 故$\exists v \in V(G)$，使得$\deg(v) \leq 4$

五.2 证明：树至多有一个完备匹配

- 若树T存在完备匹配M
- 对于树T上任意一点u，将其删除将得到若干连通片，且有$o(G - \{u\}) = 1$，否则无法完备匹配
- 不妨设u在M中与v相配，则v将处在唯一的奇片中，且$uv \in E(T)$

- 对于任意完备匹配M'，u和v必然相配，推广可得树至多只有一个完备匹配

五.4 两个人在图G上博弈，交替选择不同的顶点$v_0, v_1, v_2, \cdots$，使得当$i > 0$时，v_i与$v_i - 1$相邻，直到不能选到顶点为止，谁最后能选到一个顶点谁赢。证明：第一个选顶点的人有必胜的策略，当且仅当G中无完备匹配，并给出一个必胜的策略

- **充分性：**
  - 若G中存在完备匹配M，则划分$G = X \cup Y$，且$X \cap Y = \emptyset$，满足$|X| = |Y|$且$M \in \{uv|u \in V(X), v \in V(Y)\}$
  - 记$n = |X| = |Y| = \frac{|G|}{2}$
  - 设$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$且$x_i$和$y_i$在$M$中相配，$i = 1, 2, \cdots, n$
  - 不妨假设先手最先取了x_1，则令后手取y_1
  - 分别在X、Y、M中删除x_1、y_1、x_1y_1得到X'、Y'、M'
  - 此时不管先手取X'或Y'中的点u，令后手取在M中与u相配的点即可
  - 若干次操作后，先手将无点可取，即不存在必胜策略
  - 故存在必胜策略时G中无完备匹配
- **必要性：**
  - 若G中无完美匹配，设存在最大匹配M
  - 记G中被M许配的点的集合为S
  - 划分$S = X \cup Y$，且$X \cap Y = \emptyset$，满足$|X| = |Y|$且$M \in \{uv|u \in V(X), v \in V(Y)\}$
  - 则令先手取$G - S$中的任意一点u_0，若后手取的点$v_0 \notin S$，则$M + u_0v_0$也为匹配，这与M是G的最大匹配矛盾
  - 故后手此时只能取S中的点，即$v_0 \in S$
  - 此后先手只需取v_0在M中相配的点即可，不妨记为u_1
  - 若此时后手可以取$v_1 \notin S$，则轨道$u_0v_0u_1v_1$为增广轨道，这与M是G的最大匹配矛盾
  - 故后手此时只能取S中的点
  - 以此类推，后手任取S中的一点v_i后，先手均可取v_i在M中相配的点u_i，直至后手无点可取，先手必胜

五.6 证明：8×8的正方形去除对角上的两个1×1的小正方形后，不能用1×2的长方形覆盖

- 

- 按上图所示为各方块染色
- 则摆入任何一个1×2的长方形都将恰好覆盖一个红色格和一个绿色格
- 而一共有32个绿色格，30个红色格，故不可能全部覆盖

五.7 证明：二分图G有完备匹配的充要条件是，对任何$S \subseteq V(G)$，都满足$|N(S)| \geq |S|$。这个命题对一般图成立吗?

- **必要性:**
  - 假设二分图划分点集$V(G) = X \cup Y$且$X \cap Y = \emptyset$，且$|X| \geq |Y|$
  - $\forall S \subseteq X$，显然都有$S \subseteq V(G)$和$|N(S)| \geq |S|$，故由$Hall$定理知二分图存在将X中所有顶点都许配的匹配M
  - 由于$|X| \geq |Y|$，故Y中所有顶点也被M许配，即G由完备匹配

- **充分性：**
  - 若二分图G有完备匹配
  - 由$Hall$定理知，$\forall S\subseteq X$或$S\subseteq Y$，都满足$|N(S)|\geq|S|$
  - 若$S=S_1\cup S_2$，且$S_1\subseteq X$，$S_2\subseteq Y$
  - 则$|N(S)|=|N(S_1)|+|N(S_2)|\geq|S_1|+|S_2|=|S|$
  - 原题得证