homework14nd

九

🌈

9.证明：若供需约束的网络N存在可行流f，则其附加网络N'上一定存在流函数f'，使得任给$1 \leq j \leq n$，f'使得边(y_j, y_0)都满载

- 对于有供需约束的网络N的可行流f，有$\sum\limits_{e \in \alpha(y_j)} f(e) - \sum\limits_{e \in \beta(y_j)} f(e) \geq \rho(y_j)$，$y_j \in Y$
- 显然存在其他可行流f^-，通过减小一些边的流量使$\sum\limits_{e \in \alpha(y_j)} f(e) - \sum\limits_{e \in \beta(y_j)} f(e) = \rho(y_j)$，$y_j \in Y$
- 对于其附加网络N'，可以认为是在可行流方案f^-中，令所有汇点y_j蓄积的流量分别通过边(y_j, y_0)汇入y_0，故$\forall y_j \in Y$，$c((y_j, y_0)) = \rho(y_j) = \sum\limits_{e \in \alpha(y_j)} f^-(e) - \sum\limits_{e \in \beta(y_j)} f^-(e)$，即为满载

🌈

15.证明：假设f与f'为网络N上的流函数，且$\mathrm{Val}(f) = \mathrm{Val}(f')$，证明$f - f'$是$N$上的一个循环

- $\sum\limits_{e \in \alpha(s)} (f - f')(e) - \sum\limits_{e \in \beta(s)} (f - f')(e) = \mathrm{Val}(f') - \mathrm{Val}(f) = 0$
- $\sum\limits_{e \in \alpha(t)} (f - f')(e) - \sum\limits_{e \in \beta(t)} (f - f')(e) = \mathrm{Val}(f) - \mathrm{Val}(f') = 0$
- $\forall v \in V(D) - \{s, t\}$，$\sum\limits_{e \in \alpha(v)} (f - f')(e) - \sum\limits_{e \in \beta(v)} (f - f')(e) = 0 - 0 = 0$
- 综上，$f - f'$是N上的一个循环

🌈

17.修改算法 `9.4`，求有供需约束网络的最大流

- 输入：有供需约束网络$N = (D, X, Y, \sigma, \rho, c)$
- 输出：N的最大流函数f，或断定N没有可行流

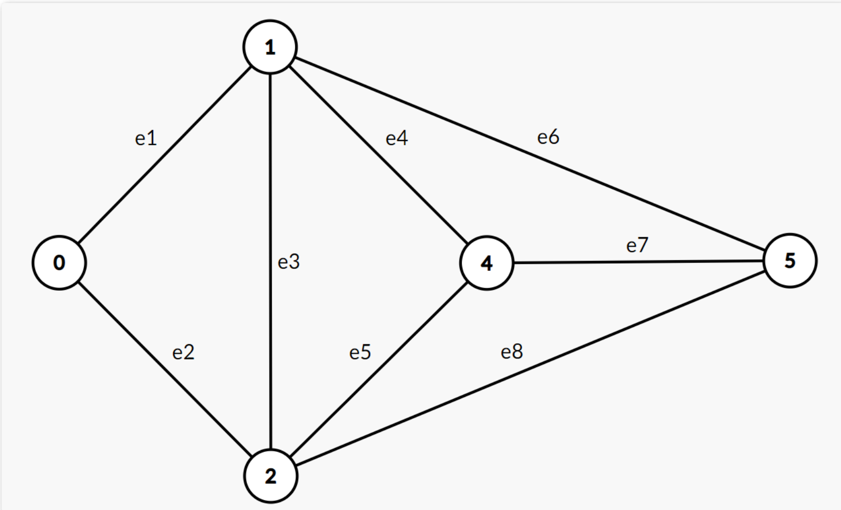
- （1）构造N的附加网络$N' = (D', x_0, y_0, c')$
- （2）用$2F$算法求出N'的最大流函数f'
- （3）若f'满足：任给$1 \leq j \leq n$，f'使得边(y_j, y_0)满载，即$f'((y_j, y_0)) = c'((y_j, y_0))$，则转第（4）步；否则，输出结论“$N$没有可行流”，算法停止
- （4）构造新网络$N'' = (D', x_0, y_0, c'')$
  - $c''(e) = \begin{cases} c'(e) - f'(e), & e = (x_0, x_i)\text{或}e \in E(D) \\ \infty, & e = (y_j, y_0) \end{cases}$
- （5）用$2F$算法求出N''的最大流函数f''
- （6）将$f' + f''$限制到网络N上，即任给$e \in E(D) \subset E(D')$，令$f(e) = f'(e) + f''(e)$。f就是N的最大流。算法停止

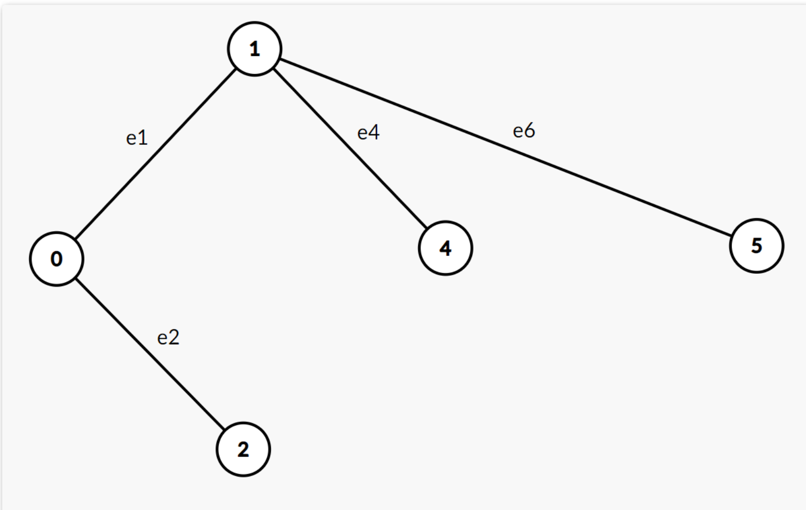
> 🌈
>
> 19.证明引理9.6：任给有向图D中的一个非负的循环f，f都是一些有向圈导出循环的线性组合。若f的函数值都是整数，则f是有向圈导出循环的某个线性组合，使得该线性组合中的系数都是非负整数

- 对于有向图D中的非负循环f，设其支撑为边子集E'，边导出子图$D[E']$。
- 则显然$D[E']$中不存在入度为零的点，也不存在出度为零的点，则$D[E']$中一定含有有向圈。
- 不妨设$D[E']$的某个有向圈C含有正函数值边e_+（均为负值同理），令$\tilde{f}(e) = \begin{cases} f(e) - f(e_+), & e \in C \\ f(e), & e \notin C \end{cases}$
- 经过若干次操作直至f'无支撑，则说明f都是一些有向圈导出循环的线性组合
- 若f的函数值都是整数，则上述操作中$f(e_+)$或$|f(e_-)|$即为该有向圈在线性组合中的系数，负值圈反向即可

十

1.给出图G的一颗生成树T，求出G关于T的一组基本圈组和圈空间$\mathcal{C}(G)$中的所有向量，并给出图示



- 生成树T如下：
- 

- 基本圈组：

$$
\begin{gathered}
(e_1, e_2, e_3) \\
(e_1, e_2, e_4, e_5) \\
(e_4, e_6, e_7) \\
(e_1, e_2, e_6, e_8)
\end{gathered}
$$

- 圈空间$\mathcal{C}(G)$：

边子集	边向量
$\emptyset$	$(0,0,0,0,0,0,0,0)$
$\{e_5,e_7,e_8\}$	$(0,0,0,0,1,0,1,1)$
$\{e_4,e_6,e_7\}$	$(0,0,0,1,0,1,1,0)$
$\{e_4,e_5,e_6,e_8\}$	$(0,0,0,1,1,1,0,1)$
$\{e_3,e_6,e_8\}$	$(0,0,1,0,0,1,0,1)$
$\{e_3,e_5,e_6,e_7\}$	$(0,0,1,0,1,1,1,0)$
$\{e_3,e_4,e_7,e_8\}$	$(0,0,1,1,0,0,1,1)$
$\{e_3,e_4,e_5\}$	$(0,0,1,1,1,0,0,0)$
$\{e_1,e_2,e_6,e_8\}$	$(1,1,0,0,0,1,0,1)$
$\{e_1,e_2,e_5,e_6,e_7\}$	$(1,1,0,0,1,1,1,0)$
$\{e_1,e_2,e_4,e_7,e_8\}$	$(1,1,0,1,0,0,1,1)$
$\{e_1,e_2,e_4,e_5\}$	$(1,1,0,1,1,0,0,0)$
$\{e_1,e_2,e_3\}$	$(1,1,1,0,0,0,0,0)$
$\{e_1,e_2,e_3,e_6,e_8\}$	$(1,1,1,0,0,1,0,1)$
$\{e_1,e_2,e_3,e_5,e_7,e_8\}$	$(1,1,1,0,1,0,1,1)$
$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_6,e_7\}$	$(1,1,1,1,0,1,1,0)$

> 🌈
>
> 3.证明：给定连通图G的一颗生成树T，其对应的基本割集组$S_1,S_2,\cdots,S_{\nu-1}$为$\mathcal{S}(G)$的一组基，$\mathcal{S}(G)$的维数为$\nu-1$

- 给定一组常数$k_1,k_2,\cdots,k_{\nu-1}$，若

$$\begin{aligned}&k_1S_1+k_2S_2+\cdots+k_{\nu-1}S_{\nu-1}\\=&(k_1,k_2,\cdots,k_{\nu-1},*,\cdots,*)\\=&(0,0,\cdots,0,0,\cdots,0)\end{aligned}$$

- 则必有$k_1=k_2=\cdots k_{\nu-1}=0$，故$S_1,S_2,\cdots,S_{\nu-1}$线性无关
- $\forall V'\in V(G)$且$V'\neq\emptyset$，设$(V',\overline{V'})$上属于T的边为$e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_t}$，则有

$$(V',\overline{V'})+S_{i_1}+S_{i_2}+\cdots+S_{i_t}=(\overset{T\text{的边}}{0,0,\cdots,0},\overset{\text{非}T\text{的边}}{*,\cdots,*})$$

- 一方面因为$(V',\overline{V'})+S_{i_1}+S_{i_2}+\cdots S_{i_t}\in\mathcal{S}(G)$；另一方面，$(V',\overline{V'})+S_{i_1}+S_{i_2}+\cdots S_{i_t}\in E(G)-E(T)$，不可能为割集，故只能为零向量。

- 因而$(V', \overline{V'}) = S_{i_1} + S_{i_2} + \cdots S_{i_t}$，即$\mathcal{S}(G)$中的任意一个割断向量都可以表示成$S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-1}$的线性组合
- 综上$S_1, S_2, \cdots, S_{\nu-1}$是$\mathcal{S}(G)$的一组基，$\mathcal{S}(G)$的维数为$\nu - 1$