一(4):

- 将群体中所有人抽象为图的顶点，构成$V(G)$
- 定义$E(G):\{uv|u,v\in V(G)\text{且}u\text{和}v\text{是朋友}\}$，则朋友数即为各点度数
- 若所有人的朋友数均不相同，即$deg(u),u=1,2,\cdots,n$互不相同
- 由$deg(u)\leq n-1$知$\{deg(u)|u=1,\cdots,n\}=\{d|d=0,1,\cdots,n-1\}$
- 不妨设$deg(u_1)=n-1,deg(u_2)=0$，$u_1\neq u_2$
- 则u_2不与任何人为朋友，而u_1与所有人都为朋友，矛盾
- 故必有两人朋友数一样多

一(5):

- 将$2n$个人抽象为图的顶点，构成$V(G)$
- 定义$E(G):\{uv|u,v\in V(G)\text{且}u\text{和}v\text{认识}\}$，则有
  $deg(u)\geq n,u=1,2,\cdots n$
- 必存在$u_1,u_2\in V(G)$使得$deg(u_1)+deg(u_2)\geq 2n$
- 则在除u_1和u_2的$n-2$个顶点中，必存在至少两个顶点v_1,v_2分别同时与u_1和u_2相邻
- 将四人按u_1,v_1,u_2,v_2排成一圈，可使每个人旁边都是他认识的人

一（8）：

- 定义函数$s(n)=\begin{cases}1 & ,n\text{为奇数}\\0 & ,n\text{为偶数}\end{cases}$
- 设$m=|\{u|u\in V'\text{且}s(deg(u))=1\}|$，即度数为奇数的点数
- 则$s\left(\sum_{u\in V'}deg(u)\right)=s(m)$
- 不妨设$E':\{uv|u,v\in V'\text{且}uv\in E(G)\}$,
  $E'':\{uv|u\in V(G)-V'\text{且}v\in V';v\in V(G)-V'\text{且}u\in V'\}$
- 则$|E''|=k$
- 而$|E''|+2|E'|=\sum_{u\in V'}deg(u)$
- 故$s(k)=s(|E''|)=s\left(|E''|+2|E'|\right)=s\left(\sum_{u\in V'}deg(u)\right)=s(m)$
- 原题得证

一（15）：

- 先将图G任意拆成两个子图$X:=(V(X),E(X))$和$Y:=(V(Y),E(Y))$，满足
  $V(G)=V(X)+V(Y)$且$V(X)\cap V(Y)=\emptyset$
- 其中$E(X)=\{uv|u,v\in V(X)\text{且}uv\in E(G)\}$,
  $E(Y)=\{uv|u,v\in V(Y)\text{且}uv\in E(G)\}$

- 定义生成子图$H := (V(G), E(H))$，其中 $E(H) = \{uv|u \in V(X), v \in V(Y) 且 uv \in E(G)\}$
- 则H显然为二分图
- 随后按如下规则进行操作：
  1. 若存在某点$u \in V(X)$满足$|\{uv|uv \in E(X)\}| > |\{uv|uv \in E(H)\}|$，即$d_H(u) < \frac{1}{2}d_G(u)$。则将点$u$移到$Y$中，即令$V(X) = V(X) - u$，$V(Y) = V(Y) + u$。
  2. 若存在某点$u \in V(Y)$满足$d_H(u) < \frac{1}{2}d_G(u)$，同理，将点$u$移到$X$中。
  3. 若不存在点满足上述条件，即$\forall u \in V(G) = V(H)$，都有$d_H(u) \geq d_G(u)/2$，结束操作，此时的图$H$即为题所求。
  4. 否则重复上述操作。
- 现证明上述操作的有穷性：
  - 不妨某次操作是将点u从X中移动到Y中
  - 则操作过后$E'(H) = E(H) - \{uv|uv \in E(H)\} + \{uv|uv \in E(X)\}$，有$|E'(X)| > |E(X)|$
  - 即每次操作都会使$|E(H)|$增加，而有限制$|E(H)| \leq |E(G)|$，故操作一定次数后一定会停止，并得到最终符合要求的图H

一（16）：

- 对于G任意一条长度为l（$0 \leq l < k$）的轨道$u_0e_1u_1 \cdots e_lu_l$
- 由于$deg(u_l) \geq \delta(G) \geq k > l - 1$，故存在点$u_{l+1} \in V(G)$，其不在该轨道上且与$u_l$相邻，不妨记$e_{l+1} : u_lu_{l+1}$
- 则存在长度为$l + 1$的轨道$u_0e_1u_1 \cdots e_lu_le_{l+1}u_{l+1}$
- 由归纳法可得G内一定存在长度为k的轨道