Homework11nd&12nd

七

- **2.**
  - > 若G是ν个顶点ε条边的简单图，证明$\chi(G) \geq \dfrac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$

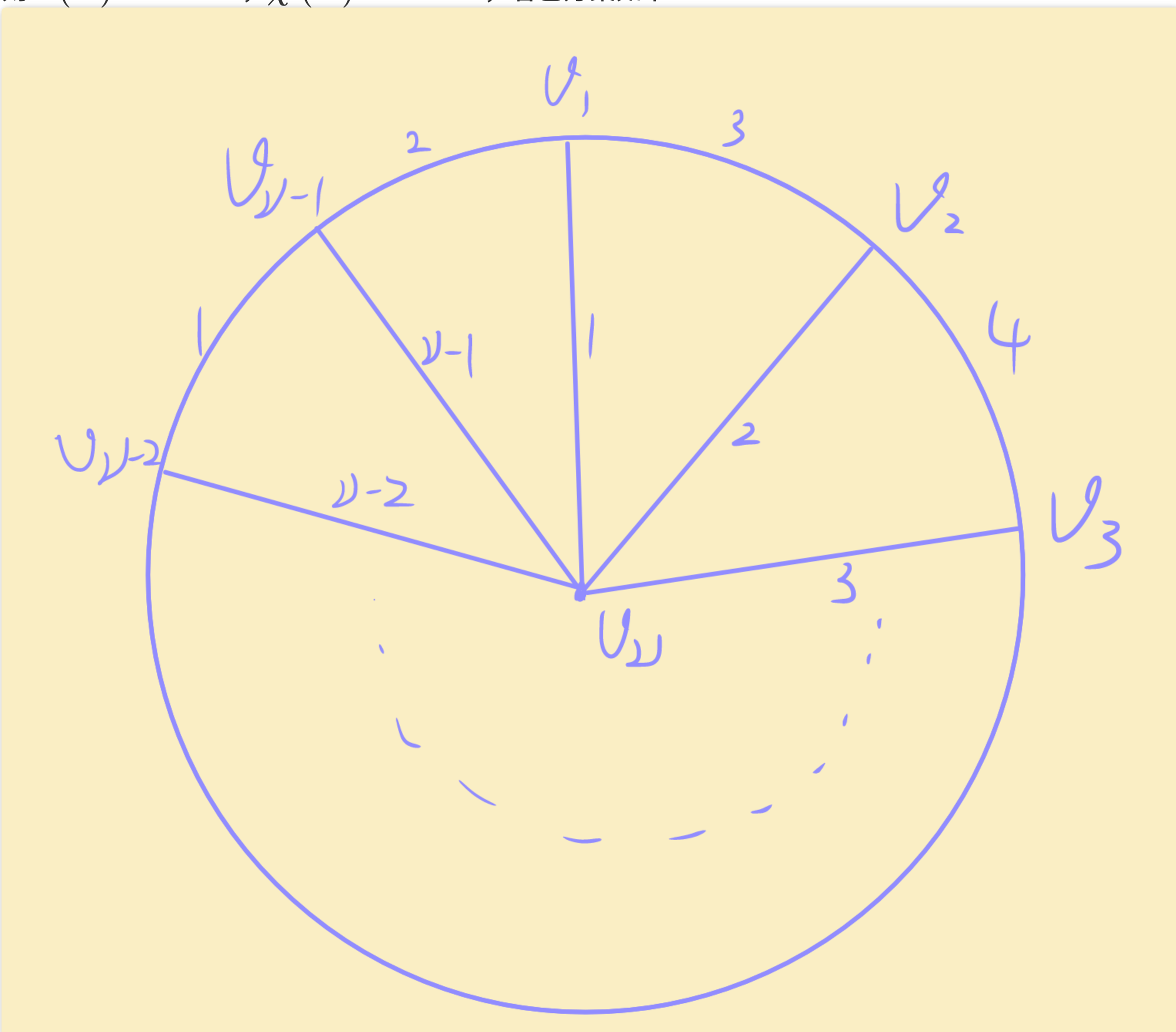
    - 不妨记$k = \chi(G)$
    - 假设某种正常$k-$顶点着色方案为$V(G) = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k$，且$S_i \cap S_j = \emptyset$，$1 \leq i, j \leq k$且$i \neq j$
    - 记$n_i = |S_i|$，$1 \leq i \leq k$，则有$\nu = \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$
    - 则
      $$\varepsilon \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} n_i(\nu - n_i) = \frac{1}{2}\left(\nu^2 - \sum_{i=1}^{k} n_i^2\right) \leq \frac{1}{2}\left[\nu^2 - \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i\right)^2\right] = \frac{\nu^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$
    - 即有$\chi(G) = k \geq \dfrac{\nu^2}{\nu^2 - 2\varepsilon}$
- **4.**
  - > 设G的度数序列为$d_1, d_2, \cdots, d_\nu$，且$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_\nu$，则$\chi(G) \leq \max_i \min\{d_i + 1, i\}$

    - 设度数序列对应的顶点序列为$v_1, v_2, \cdots, v_\nu$依次染色
    - 不妨设$\min\{d_i + 1, i\}$最大值最先在p处取到
    - 若$d_p + 1 < p$，则显然有$p > 1$和$d_p + 1 \leq p - 1$、$d_p + 1 \leq d_{p-1} + 1$，即$\min\{d_p + 1, p\} \leq \min\{d_{p-1}, p - 1\}$，矛盾
    - 若$d_p + 1 \geq p$，则将前p个点分别染色为$1, 2, \cdots, p$，对于剩余的任意一点$v_j(p < j \leq \nu)$，由于$\min\{d_j + 1, j\} \leq p$，故有$d_j < p$
    - 则可为v_j染一种不同于其邻点的颜色，且包含于p种颜色中，此即为一种正常$p-$顶点着色方案
    - 故$\chi(G) \leq \max_i \min\{d_i + 1, i\}$
- **6.**
  - > 证明：$\chi(G) + \chi(G^C) \leq \nu + 1$

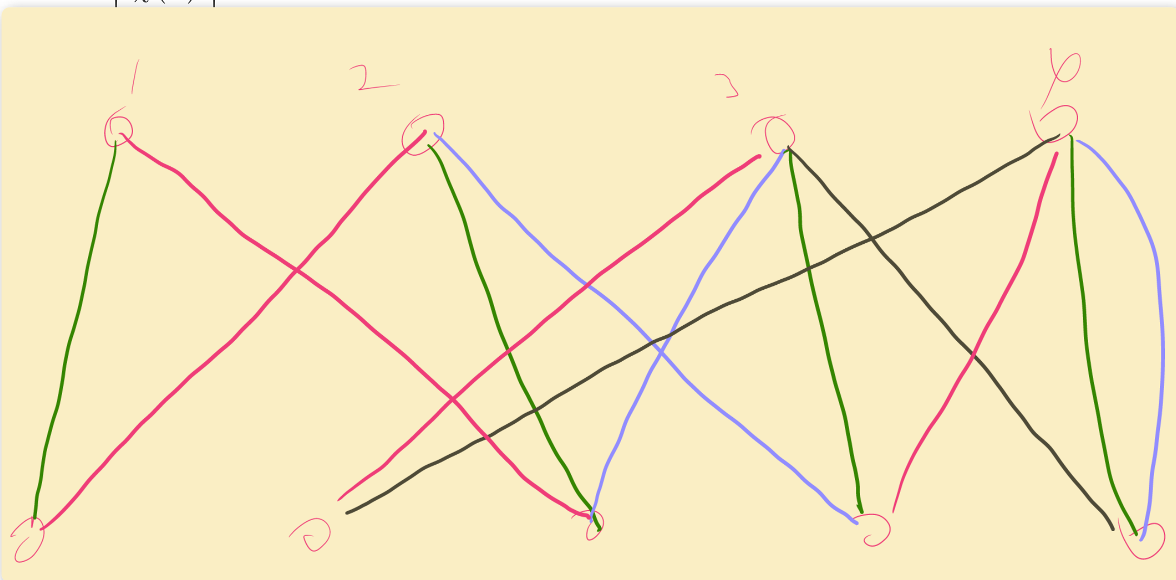
    - 数学归纳法证明命题$\chi(G) + \chi(G^C) \leq \nu + 1$
    - 当$\nu = 0$时，命题成立
    - 若当$\nu(\geq 0)$时命题成立，在ν阶图G中增加一个点u，并将其与点集$S = \{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$中所有点相连，其中$0 \leq k \leq \nu$，$v_k \in V(G)$，得到$\nu + 1$阶图$G'$
    - 若S包含了所有的$\chi(G)$种颜色，则u只能染成新的颜色，即$\chi(G') = \chi(G) + 1$，且$\deg_G(u) = k \geq \chi(G)$

- 对于G'^C，若$V(G)-S$也包含了所有的$\chi(G')$种颜色，则$\chi(G'^C)=\chi(G^C)+1$，且$\deg_{G^C}(u)=\nu-k\geq\chi'(G)$
- 若上述两个假设同时成立，则$\nu=\deg_G(u)+\deg_{G^C}(u)\geq\chi(G)+\chi(G^C)$，此时有$\chi(G')+\chi(G'^C)\leq\nu+2$，命题成立
- 若上述假设不同时成立，则$\chi(G')+\chi(G'^C)\leq\chi(G)+\chi(G^C)+1\leq\nu+2$，命题成立
- 综上，$\chi(G)+\chi(G^C)\leq\nu+1$

- **8.**
  - > 轮是一个圈上加一个新顶点，把圈上的每个顶点都和新顶点之间连一条边，求ν阶轮的边色数

    - 设ν阶轮图G，$\nu\geq 4$
    - 则$\Delta(G)=\nu-1$，$\chi'(G)=\nu-1$，着色方案如下
    - 

- **14.**
  - > 设有4名教师x_1,x_2,x_3,x_4给五个班级y_1,y_2,y_3,y_4,y_5上课，某天的教学要求如下：
    >
    > $$A=\begin{array}{c|ccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

-
  - （1）这一天最少需要安排多少课时？试排出这样的课表
    - 最少课时即为$\chi'(G)=\Delta(G)=4$
  - （2）不增加课时数的情况下，试排出一个使用教室最少的课表
    - 最少需要$\left\lceil\frac{\varepsilon(G)}{\chi'(G)}\right\rceil=4$间教室
    - 

- **16.**
  - 证明：若一个平面图的平面嵌入是$Euler$图，则它的对偶图是二分图
    - 若G是$Euler$图，则其中所有顶点度数均为偶数
    - 则对于G中点v在G^*中对应的面f_v有$\deg_{G^*}(f_v)=\deg_G(v)$
    - 由于两偶圈通过消除重合边缘而连接得到的也是偶圈，故G^*中无奇圈，即为二分图
- **17.**
  - 设G是$\nu(\geq 4)$阶极大平面图的平面嵌入，证明：G的对偶图G^*是$2-$边连通的3次正则图
    - $\forall f\in F(G)$，有$\deg_G(f)=3$
    - 故面f对应的点v_f满足$\deg_{G^*}(v_f)=3$，且G^*显然是$2-$边连通的

八

- **1.**
  - 有多少种方式把K_5定向成竞赛图
    - $2^{\varepsilon(K_5)}=2^{10}=1024$

- **2.**
  - > 设D是没有有向圈的有向图
  - > (1) 证明：$\delta^- = 0$
    - 若没有有向圈的有向图D满足$\delta^- \geq 1$，即$\forall v \in V(D)$有$\deg^-(v) \geq 1$
    - 则任取一点v_0，记$S = \{v_0\}$。
    - 由于$\deg^-(v_0) \geq 1$，则可找到其外邻顶点v_1且$v_1 \notin S$
    - 令$S = S \cup \{v_1\}$，并找到v_1的外邻顶点v_2且$v_2 \notin S$
    - 以此类推，由于D有限，故对于某点v_k，无法找到其不在S中的外邻顶点
    - 而$deg^-(v_k) \geq 1$，故v_k有外邻顶点在S内，即有有向圈，与题设矛盾
    - 故$\delta^- = 0$
  - > 试证：存在D的一个顶点序列$v_1, v_2, \cdots, v_\nu$，使得对于任给$i(1 \leq i \leq \nu)$，D的每条以v_i为终点的有向边在$\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}\}$中都有它的起点
    - 由于D无有向圈，则有拓扑排序，而且刚好符合要求
- **3.**
  - > 证明：任给无向图G，G都有一个定向图D，使得对于所有$v \in V(G)$，都有$\left|\deg^+(v) - \deg^-(v)\right| \leq 1$成立
    - 仅需考虑G连通
    - 若G中无奇度顶点，则G为$Euler$图。找到G的一条$Euler$回路并按回路走向给每条边定向，即有$\deg^+(v) = \deg^-(v)$，$\forall v \in V(G)$
    - 若G中有奇度顶点$v_1, v_2, \cdots, v_k$（k必为偶数），增加一点v_0并与所有奇度顶点连一条边，得到图G'
    - 则G'为$Euler$图，找到其一条$Euler$回路并定向，此时$\deg^{+'}(v) = \deg^{-'}(v)$，$\forall v \in V(G')$
    - 删去增加的k条边对应的有向边后有$|\deg^+(v) - \deg^-(v)| \leq 1$，$\forall v \in V(G)$