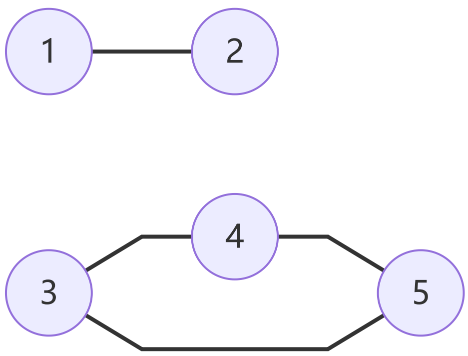
二.8

- **必要性：**
  - 对于树T，设其度数序列为$d_1, d_2, \cdots, d_\nu$，不妨令其满足$d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_\nu$
  - 则必有$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = \sum_{i=1}^{\nu} deg(i) = 2\varepsilon = 2(\nu - 1)$
- **充分性：**
  - 对于图G，由$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2\varepsilon = 2(\nu - 1)$知$\varepsilon = \nu - 1$
  - 若图G为单连通图，由连通图$\varepsilon \geq \nu - 1$性质知图G为树
  - 若图G为多连通图，形如下方所示的多连通带圈图也可满足$\sum_{i=1}^{\nu} d_i = 2(\nu - 1)$，故充分性不成立
  - 

二.13

- $\tau(K_\nu - e) = \tau(K_\nu) - \tau(K_\nu \cdot e)$
- 不妨设$e = uv$，记图$G = K_\nu \cdot e$，$V(G) = V(K_\nu)/\{v\}$，$E(G) = E(K_\nu)/\{vw | v, w \in V(K_\nu)\} \cup \{uw | w \in V(G)且w \neq u\}$
- 即在大小为$\nu - 1$的完全图上加上$\nu - 2$条从同u点发出的重边
- 对于图$K_{\nu-1}$的任意一颗生成树T，记$n = |\{uw | uw \in E(T)\}|$
- 则$\tau_n(K_{\nu-1}) = C_{\nu-3}^{n-1}(\nu - 2)^{\nu-n-2}$
- 而图$E(G)$中的任一对重边不可能同时出现在生成树中

- $$\begin{aligned}故\tau(G) &= \sum_{n=1}^{\nu-2} 2^n C_{\nu-3}^{n-1}(\nu-2)^{\nu-n-2} \\ &= 2(\nu-2)^{\nu-3}\sum_{n=1}^{\nu-2} C_{\nu-3}^{n-1}\left(\frac{2}{\nu-2}\right)^{n-1} \\ &= 2(\nu-2)^{\nu-3}\left(\frac{2}{\nu-2}+1\right)^{\nu-3} \\ &= 2\nu^{\nu-3}\end{aligned}$$
- 故$\tau(K_\nu - e) = \tau(K_\nu) - \tau(K_\nu \cdot e) = \nu^{\nu-2} - 2\nu^{\nu-3} = (\nu-2)\nu^{\nu-3}$

二.16

1. **破圈法算法：**
    1. 找到图中的任一圈
    2. 删除圈上边权最大的边
    3. 重复上述操作直至图中无圈，剩余的图即为原图的最小生成树
2. **破圈法正确性证明：**
    - 假设图G的最小生成树为T_0
    - 若某一圈$u_m e_1 u_1 \cdots e_{k-1} u_{k-1} e_k v_m e_m u_m$上唯一一条边权最大的边为$e_m = u_m v_m$保留在最小生成树$T_0$上
    - 则在T_0上删除e_m可得到两个连通片，且圈上一定存在另一条边$e_n = u_n v_n$满足u_n和v_n各自位于不同的连通片中
    - 否则将有$u_m, u_1, u_2, \cdots, u_{k-1}, v_m$均位于同一连通片中，这显然不成立
    - 若$\omega(e_n) < \omega(e_m)$，则在$T_0$上删除$e_m$并连接$e_n$仍可保证连通且为树，而总边权更小，这与$T$为最小生成树矛盾
    - 若$\omega(e_n) \geq \omega(e_m)$，这与$e_m$为圈上唯一一条最大边权的边矛盾
    - 同时上述过程也可证明若圈上出现多个最大边权，删除其中任意一条均可得到最小生成树
    - 综上，破圈法每轮删除的最大边权边的权值一定在答案中计算，即可保证最终得到的是最小生成树。
3. **破圈法时间复杂度分析：**
    - 若采用dfs寻找图中的圈，时间复杂度等同于遍历整幅图，即$O(\nu + \varepsilon)$
    - 若采用$Tarjan$寻找图中的边双连通分量，每次删除连通分量内的最大边，时间复杂度同为$O(\nu + \varepsilon)$
    - 删除操作一共进行$\varepsilon - \nu + 1$轮
    - 总时间复杂度为$O(\varepsilon^2)$

二.17

- **必要性：**
  - 对于一颗有根树，显然除根节点入度为0外，其他点入度均为1
- **充分性：**
  - 不妨设树T中唯一一个入度为0的点为u_0
  - 由于
    $\nu - 1 \sum_{u \in V(T)} deg^+(u) = \sum_{u \in V(T)且u \neq u_0} deg^+(u) \geq \sum_{u \in V(T)且u \neq u_0} 1 = \nu - 1$
  - 故除u_0外所有点入度均为1
  - 对于树上任意一点$v(v \neq u_0)$，记u_0到v的轨迹为$u_0 e_1 u_1 \cdots e_k v$
  - 由于u_0入度为0，则e_1必为u_0指向u_1
  - 由于u_1入度为1，对应的边仅可能为e_1，则e_2必为u_1指向u_2
  - 以此类推，轨迹上所有的边均由靠近u_0的点指向远离u_0的点
  - 若以u_0为根，认为有向边均由父节点指向子节点，则可得到有根树
- $Q.E.D.$