

二 (2) :

- 设树叶数量为 $n_1 = |V(T)| - \sum_{i=2}^k n_i$
- 则
$$\sum_{u \in V(T)} \deg(u) = \sum_{i=1}^n i \cdot n_i = \sum_{i=2}^k i \cdot n_i + |V(T)| - \sum_{i=2}^k n_i = 2(|V(T)| - 1)$$
- 有 $|V(T)| = 2 + \sum_{i=2}^k (i-1)n_i$
- 树叶数量为 $n_1 = |V(T)| - \sum_{i=2}^k n_i = 2 + \sum_{i=2}^k (i-2)n_i$

二 (4) :

- 不妨设度数为 i 的顶点数为 m_i , $i = 1, 2, \dots, \Delta(T)$

$$\text{有 } \sum_{i=1}^{\Delta(T)} i \cdot m_i = 2 \sum_{i=1}^{\Delta(T)} m_i - 2$$

$$2 = \sum_{i=1}^{\Delta(T)} (2-i)m_i$$

•

$$2 = m_1 - \sum_{i=2}^{\Delta(T)} (i-2)m_i$$

$$2 \leq m_1 - (n-2)m_n$$

$$2 \leq m_1 - (n-2)$$

$$n \leq m_1$$

- 即至少有 n 片树叶

二 (5) :

- 必要性:
 - 若 G 是森林
 - 不妨定义一个 $V(G)$ 外的新点 u_e , 并由其向 G 的所有连通片中的某一个点连一条边, 得到图 G'

- 将 G 的各连通片缩为点后, $E(G') - E(G)$ 和连通片及点 u_e 构成星图, 且连通片内部无圈, 故 G' 也无圈
- 又 G' 无重边、无环且连通, 故 G' 为树
- 有 $|E(G')| = \varepsilon + \omega = |V(G')| - 1 = \nu + 1 - 1 = \nu$
- 故有 $\varepsilon = \nu - \omega$
- 充分性:
 - 同理构造图 G'
 - 由于 $\varepsilon = \nu - \omega$, 故 $|E(G')| = \varepsilon + \omega = \nu = |V(G')| - 1$
 - 而且 G' 与 G 所有的连通片连通, 故 G' 为树
 - 而删除树 G' 上任意数量的边后得到图 G , G 必为森林
- *Q. E. D.*