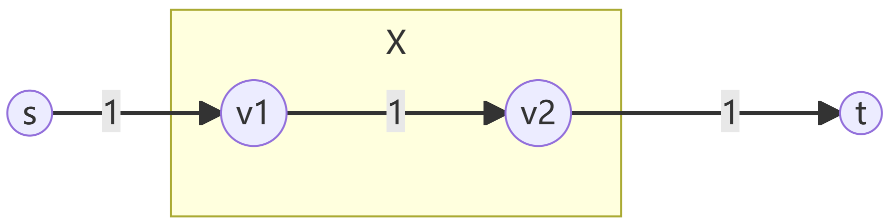
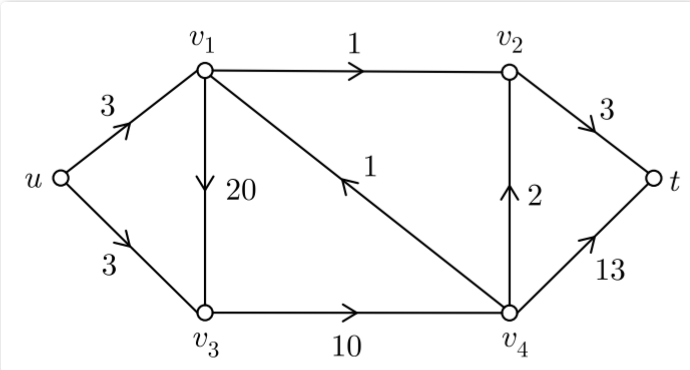
homework13nd

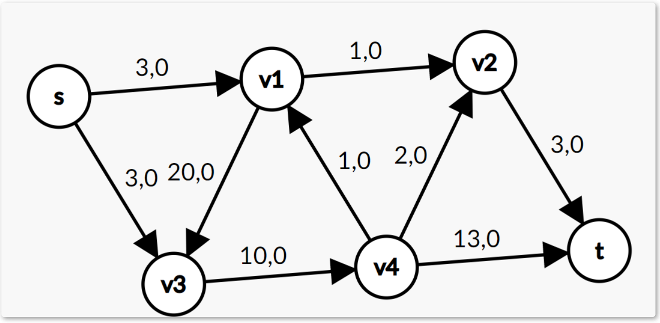
九

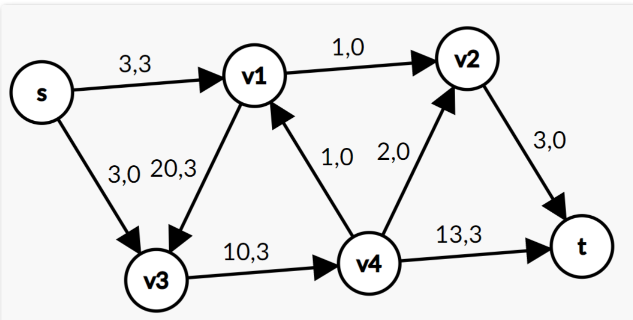
- **1**
  - > 🌈假设f是网络$N=(D,s,t,c)$上的流函数，证明：$\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)-\sum_{e\in\beta(t)} f(e)=\sum_{e\in\beta(s)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)$
  - $$\begin{aligned}0&=\sum_{v\in V(D)}\left(\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)-\sum_{e\in\beta(v)} f(e)\right)\\&=\sum_{v\in\{s,t\}}\left(\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)-\sum_{e\in\beta(v)} f(e)\right)\end{aligned}$$
    $$\sum_{e\in\alpha(t)} f(e)-\sum_{e\in\beta(t)} f(e)=\sum_{e\in\beta(s)} f(e)-\sum_{e\in\alpha(s)} f(e)$$
- **2（2）**
  - > 🌈假设f是网络$N=(D,s,t,c)$上的流函数，$X\subset V(D)$
    > 举例说明：存在网络流f，使得$\sum_{v\in X}\sum_{e\in\beta(v)} f(e)\neq f^+(X)$，$\sum_{v\in X}\sum_{e\in\alpha(v)} f(e)\neq f^-(X)$
  - 

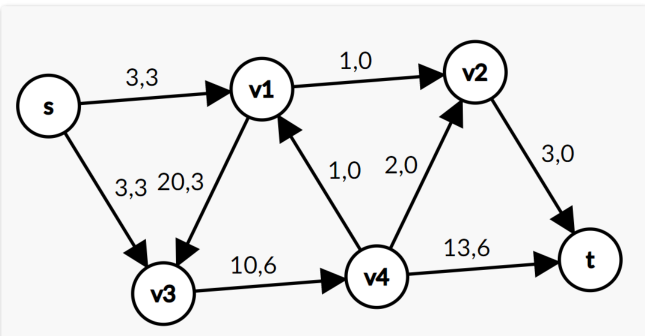
- 上图中$\sum\limits_{v\in X}\sum\limits_{e\in\beta(v)} f(e)=2\neq f^{+}(X)=1$，$\sum\limits_{v\in X}\sum\limits_{e\in\alpha(v)} f(e)=2\neq f^{-}(X)=1$

- **4**

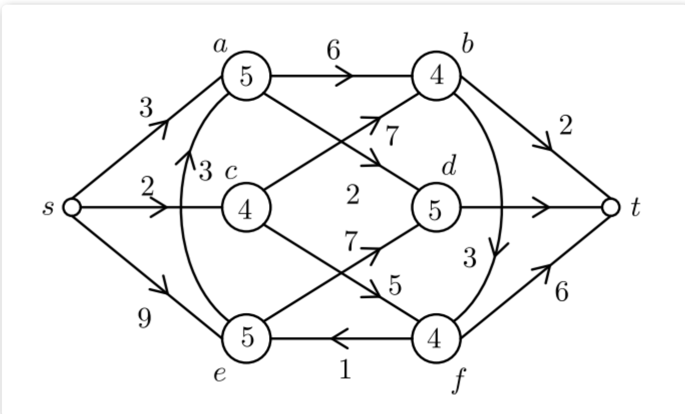
  - > 求下图中网络的最大流
    >
    > 
    >

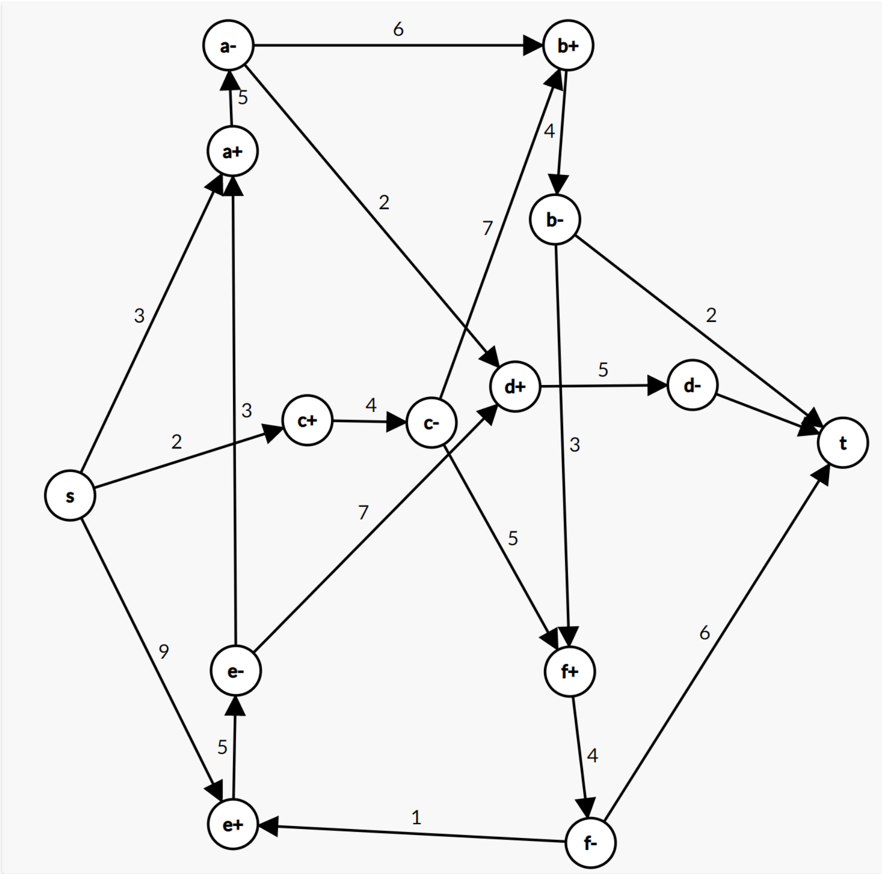
  - 

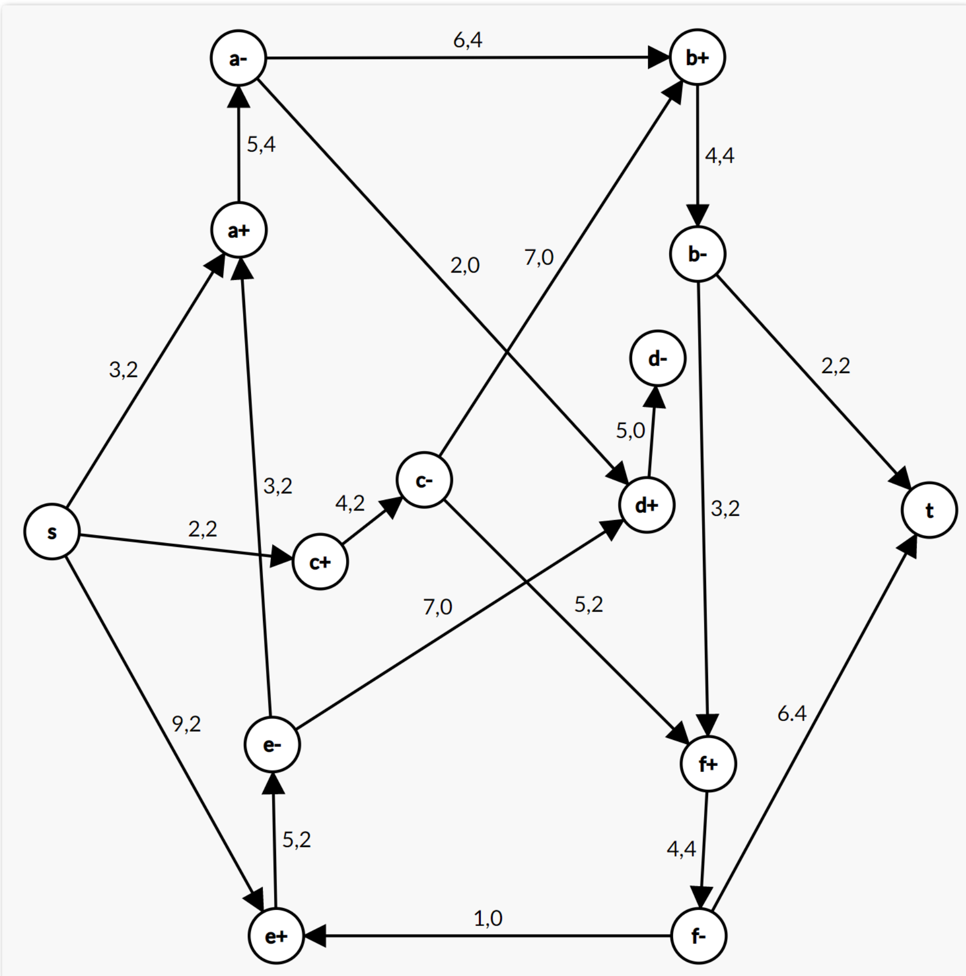
  - 寻找可增广轨道$P_1(s,t)=sv_1v_3v_4t$，$l(P_1)=3$
  - 

  - 寻找可增广轨道$P_2(s,t)=sv_3v_4t$，$l(P_2)=3$
  - 

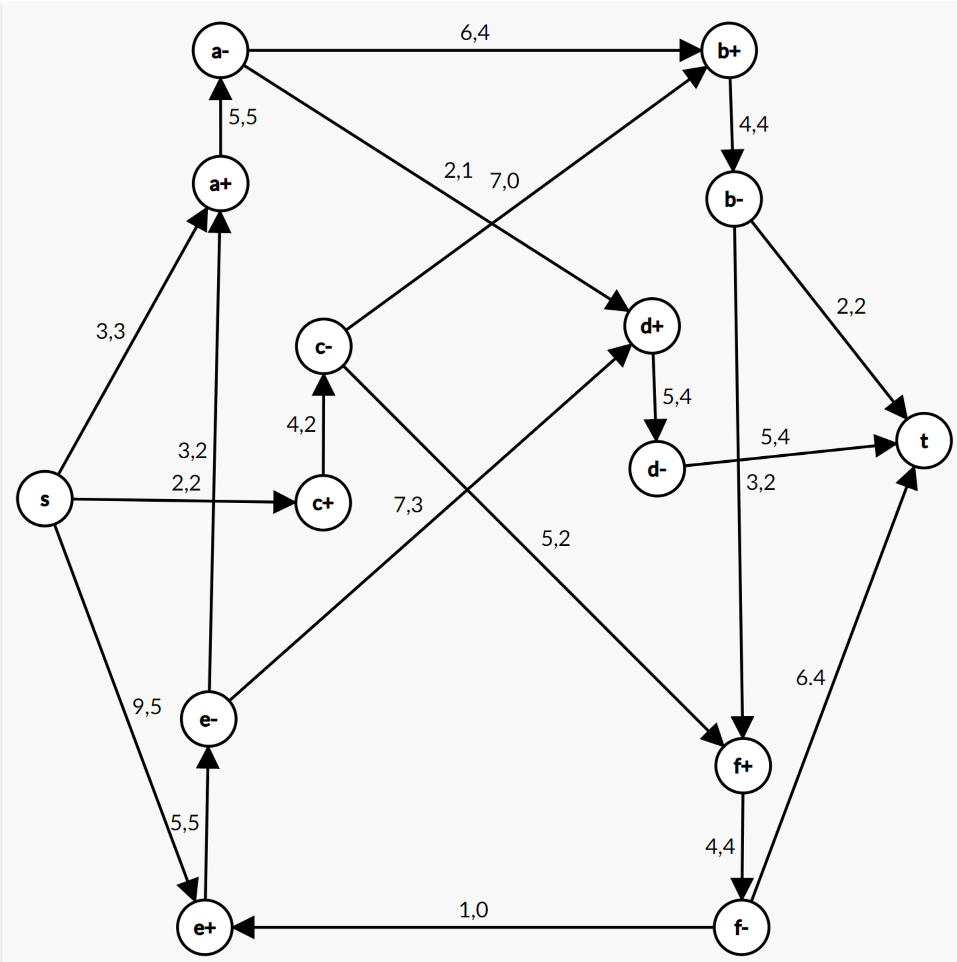
  - 得到最大流f，$\mathrm{Val}(f)=l(P_1)+l(P_2)=6$

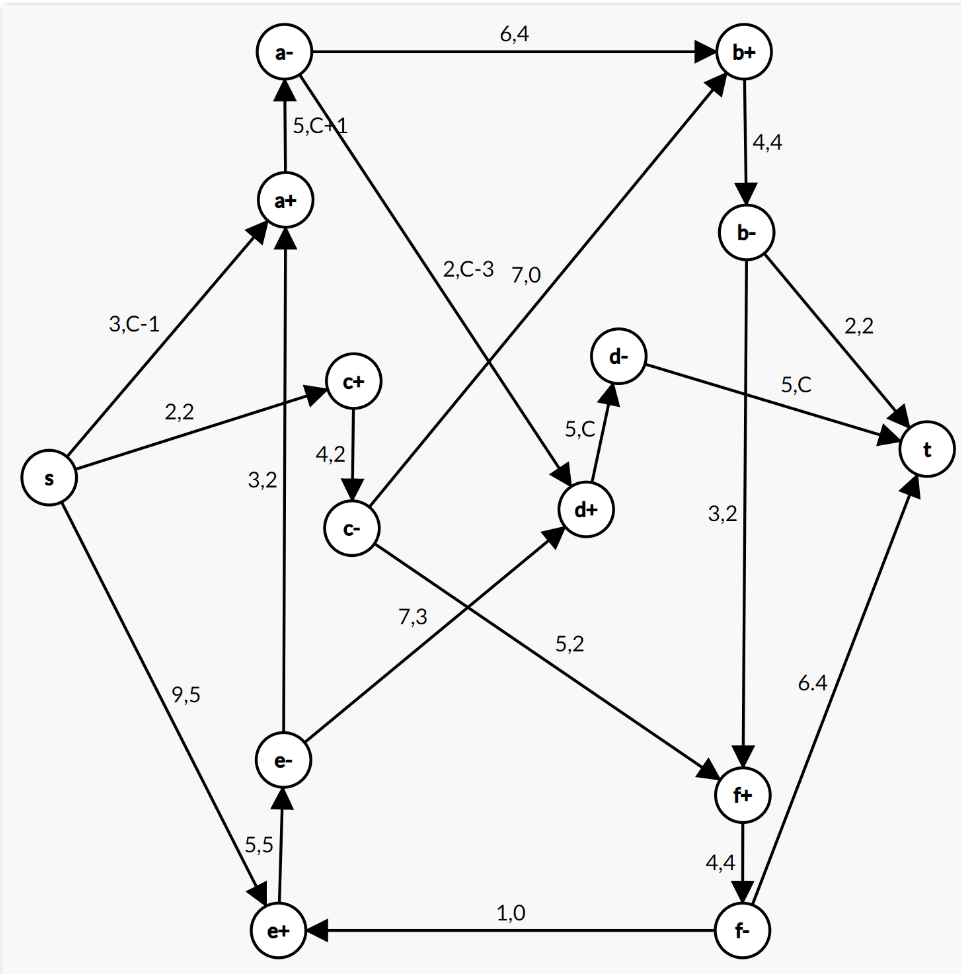
- **5**
  - > 证明：若网络中每条边的容量均为整数，则最大流的流量也一定是整数
  - 最小截$C_{min}(S,\bar{S})=\mathrm{Val}(f^*)$，而由于$C_{min}(S,\bar{S})=\sum\limits_{e\in(S,\bar{S})}c(e)$为整数，故最大流量也为整数
- **7**
  - > 在图示的网络中，除了边有容量外，源s与汇t没有容量，而其余的顶点都有容量。求此网络的最大流
    >
    > 
    >
  - 记点容量$g(v)$，$v\in V(D)-\{s,t\}$，构造网络$N'=(D',s,t,c')$
  - 其中$V(D')=\{s,t\}\cup\{v^+|v\in V(D)\}\cup\{v^-|v\in V(D)\}$
  - $$\begin{aligned}E(D')=&\{(u^+,u^-)|u\in V(D)\}\\&\cup\{(u^-,v^+)|u,v\in V(D)\text{且}(u,v)\in E(D)\}\\&\cup\{(s,u^+)|u\in V(D)\text{且}(s,u)\in E(D)\}\\&\cup\{(v^-,t)|v\in V(D)\text{且}(v,t)\in E(D)\end{aligned}$$
  - $c'(e)=\begin{cases}g(u), & e=(u^+,u^-)\\ c(u,v), & e=(u^-,v^+)\\ c((s,u)), & e=(s,u^+)\\ c((v,t)), & e=(v^-,t)\end{cases}$
  - 得到网络N'如下：
  -



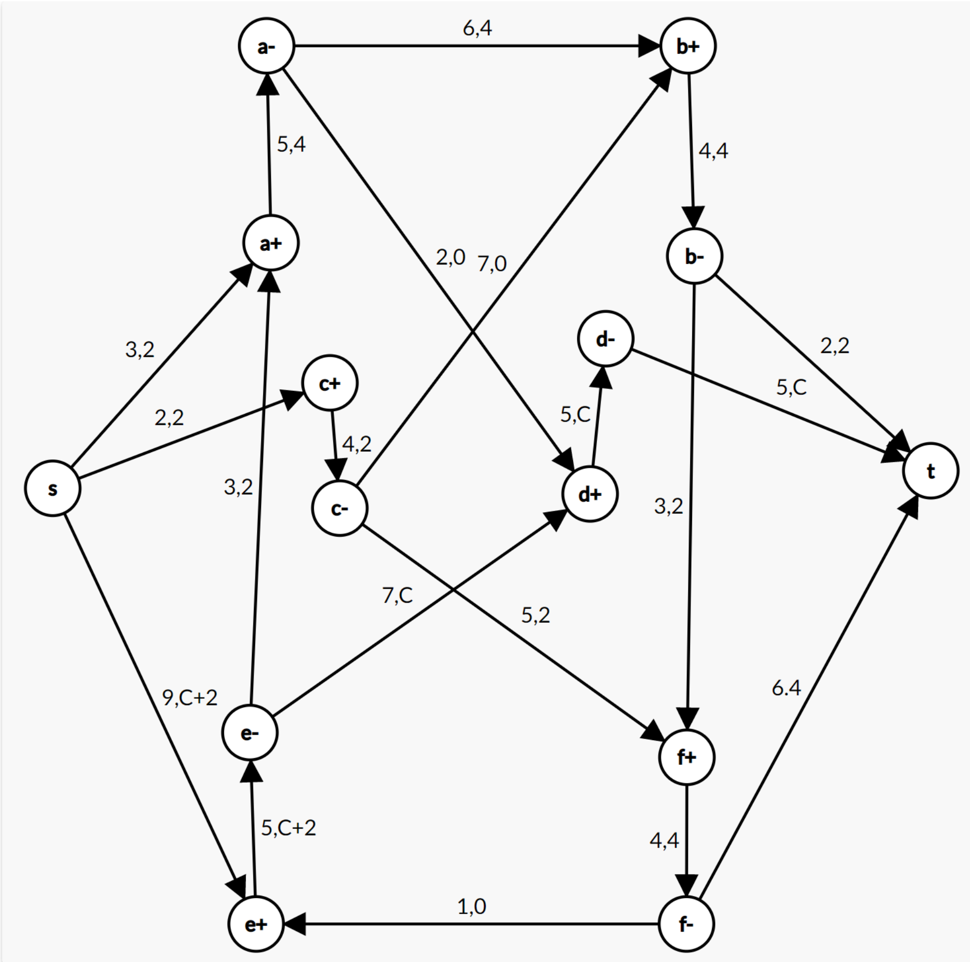
- 先删去边(d^-,t)，求得最大流$\mathrm{Val}(f')=6$
- 

- 不妨记$C=c'((d^-,t))$
- 若$C\geq 4$，则有最大流$\mathrm{Val}(f')=10$

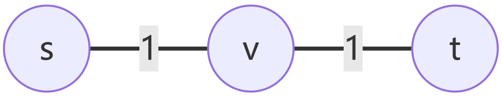
- 

- 若$3 \leq C < 4$，则有最大流$\mathrm{Val}(f') = 6 + C$
- 

- 若$0 \leq C < 3$，则有最大流$\mathrm{Val}(f') = 6 + C$

- 

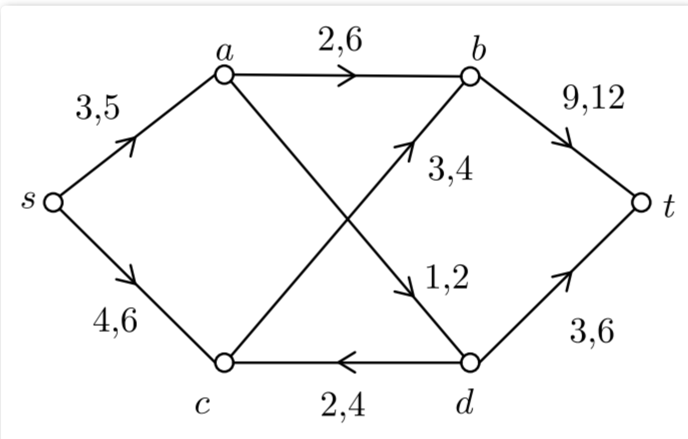
- **8**
  - > 🌈(1): 写一个如同$2F$算法的标志过程，但标记是由汇t开始的，到达s时即可得一可增载轨道
  - (1)：令$T=\{t\}$，令$\mathrm{prev}(s)=*$。
  - (2)：若$s\in T$，则已经找到可增载轨道, 通过$\mathrm{prev}(s)$回溯输出可增载轨道，算法停止；否则，转第(3)步。
  - (3)：若存在$u\in\overline{T}$，$v\in T$，使得$(u,v)\in E(D)$且边(u,v)未满载，即$f((u,v))<c((u,v))$（(u,v)是正向边），则令$T\leftarrow T\cup\{T\}$，$\mathrm{prev}(u)=v$，转第(2)步；否则，转第(4)步。
  - (4)：若存在$u\in\overline{T}$，$v\in T$，使得$(v,u)\in E(D)$且边(v,u)正载，即$f((u,v))>0$（(v,u)是反向边），则令$T\leftarrow T\cup\{u\}$，$\mathrm{prev}(u)=v$，转第(2)步；否则，输出无可增载轨道，算法停止。
  - > 🌈(2): 写一个定位算法，该算法能够确定某条边，当该边容量增大时，最大流量也随之增加

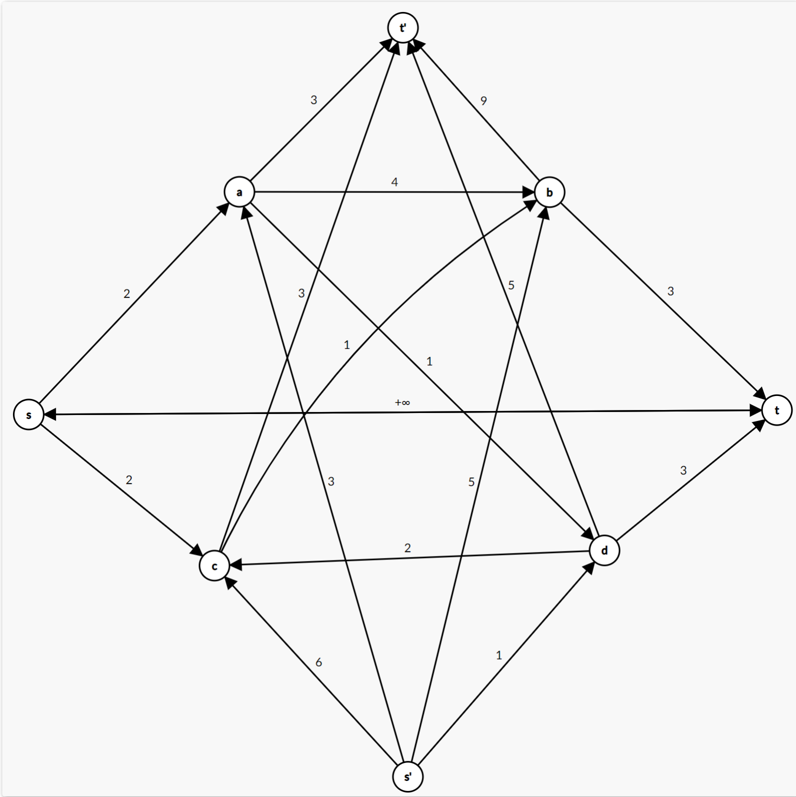
- 枚举每条边，并给该边容量增加1，执行可增载轨道算法寻找可增载轨道
- 若存在可增载轨道，则最大流量将会增加，该边满足条件。
- > (3)：(2)中所述的边是否一定存在?
- 不一定，例如
- 

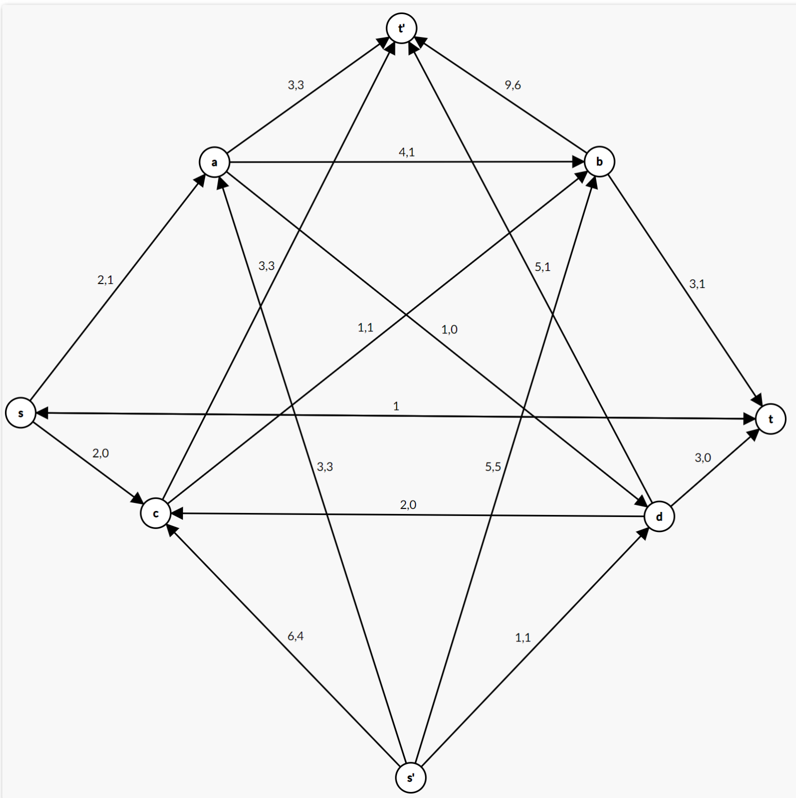
10

- > 证明：在有正下界$b(e)$但无上界$c(e)(=+\infty)$的网络中，存在可行流的充要条件是对每一条边e，要么e在一个有向回路上，要么e在由s到t或由t到s的有向轨道上
  >
  > 注：当e在t到s的有向轨道上时，流量有可能为负值
- 若存在可行流，添加一条边(t,s)，其流量$f((t,s))=Val(f)$。由于该流量方案可由若干个内部各边流量相同的回路叠加得到，故每条边都必须位于某个有向回路中。删去边(t,s)相当于每条边都在某个有向回路上或在$P(s,t)$或$P(t,s)$上
- 若每条边都在某个有向回路或在$P(s,t)$或$P(t,s)$上，添加一条边(t,s)，则此时所有边都在某个有向回路上。为每个有向回路都赋予一个极大的流量并叠加后，显然可以做到每条边流量均超过$b(e)$。此时删去边(t,s)，即为可行流

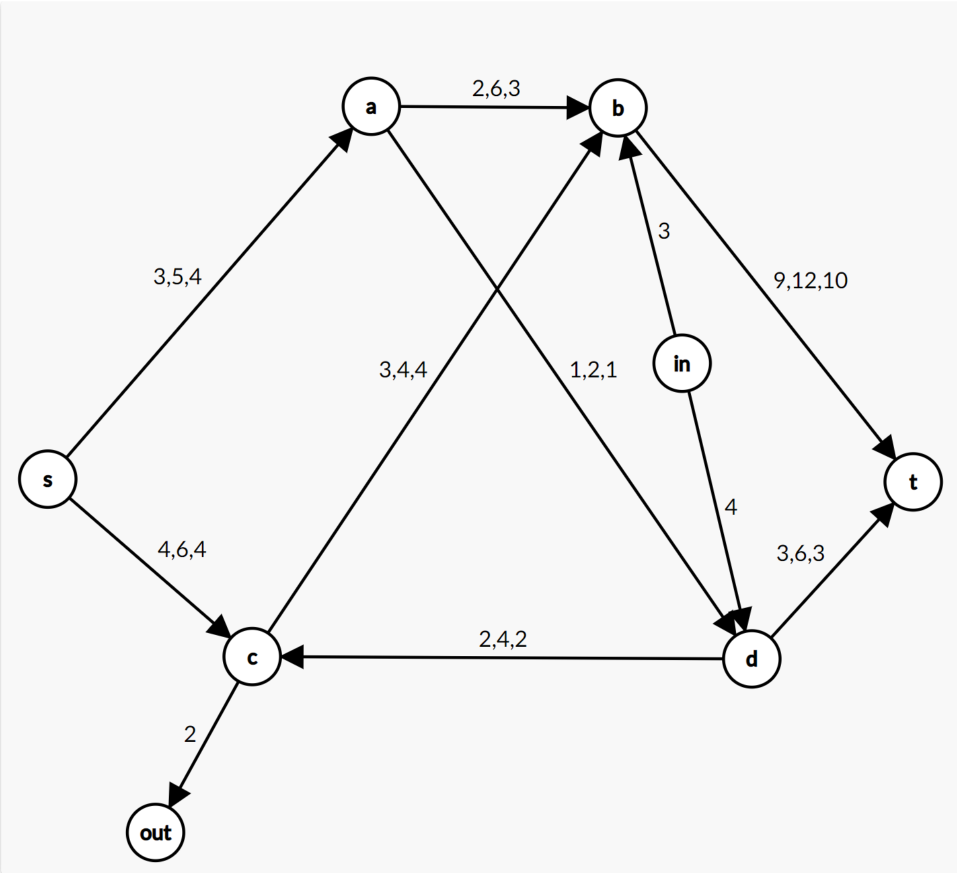
13(1)

- > 在图中，若存在可行流，请求出最大流与最小流；若不存在可行流，找出一个不含源与汇的顶点子集V'，需V'“冒出”流或者需V'“漏掉”流
  >
  > 
  >

- 构造伴随网络N'
- 

- 求最大流
- 

- 由于边(s', c)未满载，故令c漏掉2
- 由于边(b, t')、(d, t')未满载，故令b冒出3、d冒出4
- 得到原网络对应的可行流：
-


a
b
2,6,3
3
3,5,4
9,12,10
in
3,4,4
1,2,1
s
t
4
4,6,4
3,6,3
2,4,2
c
d
2
out