🌈

考试范围（以下章节不考）

1. 第三章
2. 第4.3节
3. 第5.6节
4. 第7.3.3节
5. 第7.4节
6. 第9.5节
7. 第10.5节
8. 第11章与第12章

🌈

$$
\begin{gathered}
\nu - 1 \leq \varepsilon \leq \frac{\nu(\nu-1)}{2} \\
n_{叶} \geq \Delta(T) \\
\nu - \varepsilon + \phi = 2 \\
deg(f) \geq 3 \\
2\varepsilon = \sum deg(f) \geq 3\phi \\
3\nu - 6 \geq \varepsilon \\
\delta\nu \leq 2\varepsilon \leq 6\nu - 12 \\
\delta \leq 5
\end{gathered}
$$

二分图无奇圈，$deg(f) \geq 4$，$\varepsilon \leq 2\nu - 4$

🌈

通过最小覆盖证明最大匹配$\beta(G) = \min\{|X| - |S| + |N(S)|\}$

- 对于G的某个覆盖C，不妨设$S = X - C \cap X$，$T = C \cap Y$
- 则$\forall uv \in E(G)$且$u \in S$，$v \in Y$，都有$v \in T$
- 即$N(S) \subseteq T$
- 故 $\beta(G) = \min\limits_{S \subseteq X, N(S) \subseteq T, T \subseteq Y} \{|X| - |S| + |T|\} = \min\limits_{S \subseteq X} \{|X| - |S| + |N(S)|\} = |X| - \max\limits_{S \subseteq X} \{|S| - |N(S)|\}$
- 即$\alpha(G) = |X| - \max\limits_{S \subseteq X} \{|S| - |N(S)|\}$

🌈

证明$c(G) = K_\nu$

假设$c(G) \neq K_\nu$，则$\exists uv \notin E(c(G))$，不妨记$u'v'$为其中$deg_{c(G)}(u') + deg_{c(G)}(v')$最大的点对

$V_0 := \{v | v \in V(G), vv' \notin E(c(G))\}$，$V_1 := \{v | v \in v(G), vv' \in E(c(G))\}$

则$|V_0| = \nu - 1 - deg_{c(G)}(v')$，$V_1 = deg_{c(G)}(v')$

有$deg_{c(G)}(v) + deg_{c(G)}(v') \leq deg_{c(G)}(u') + deg_{c(G)}(v')$，即$deg_{c(G)}(v) \leq deg_{c(G)}(u')$

则$|\{v|deg_{c(G)}(v)\le deg_{c(G)}(u')\}|=\nu-1-deg_{c(G)}(v')$

由$deg_{c(G)}(u')+deg_{c(G)}(v')\le \nu-1$得$|\{v|deg_{c(G)}(v)\le deg_{c(G)}(u')\}|\ge deg_{c(G)}(u')$

🌈

定理 7.3 若 G 是二分图, 则 $\chi'(G)=\Delta(G)$.

证明 显然 $\chi'(G)\geqslant\Delta(G)$. 下证二分图 G 可 $\Delta(G)$-边着色. 反证, 假设 $\chi'(G)>\Delta(G)$, 且设 $\mathcal{C}$ 是 G 的一个最佳 $\Delta(G)$-边着色. 由于 $\mathcal{C}$ 不是最佳着色, 所以存在顶点 v, 使得 $c(v)<\deg(v)\leqslant\Delta(G)$. 因而在顶点 v 关联的边中, 有一种颜色没有出现, 且有两条边着相同的颜色. 由引理 7.2 知, G 中含有奇圈, 与 G 是二分图矛盾. 故对每个顶点都有 $c(v)=\deg(v)$, 所以 $\mathcal{C}$ 是 G 的正常 $\Delta(G)$-边着色, 故 $\chi'(G)\leqslant\Delta(G)$. 综上, $\chi'(G)=\Delta(G)$. 证毕.

🌈

证明$\chi'\le\Delta+1$，反证$\chi'>\Delta+1$，对于最佳$\Delta+1-$边着色，存在$c(u)<deg(u)<\Delta+1$

则存在两种颜色i_0,i_1，满足i_0不出现在u的邻边中，而i_1至少出现了两次

不妨记边uv_1为i_1色，有$deg(v)<\Delta+1$

故v邻边中缺少颜色i_2，且i_2一定出现在u的邻边中，否则可将边uv_1换为i_2，为更优的着色方案

🌈

18.若G中任二奇圈皆有公共顶点,则$\chi(\mathrm{G})\le 5$.

①.若$\chi(\mathrm{G})\ge 6$, 设G的χ顶正常着色为$(\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2,..,\mathrm{V}_\chi)$.
②.$\mathrm{G}'=\mathrm{G}[\mathrm{V}_1\cup\mathrm{V}_2\cup\mathrm{V}_3]$为G的导出子图, $\chi(\mathrm{G}')=3\to\mathrm{G}'$不是二分图$\to\mathrm{G}'$存在奇圈$\mathrm{C}_1$.
③同理.令$\mathrm{G}''=\mathrm{G}[\mathrm{V}_4\cup\mathrm{V}_5\cup\ldots\cup\mathrm{V}_\chi]$,有$\chi(\mathrm{G}'')\ge 3\to\mathrm{G}'$不是二分图$\to\mathrm{G}'$存在奇圈$\mathrm{C}_2$.
④则G中存在两个奇圈$\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2$且$\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2$无公共顶点,与已知矛盾.
故假设①不成立.原命题成立.

🌈

给出求二分图正常Δ边着色的算法。

设$G(X,Y,E)$为二分图，且$|X|\ge|Y|$，该二分图正常Δ边着色算法如下：

1. 加顶点扩充Y，使得$|X|=|Y|$，添加边使G，变成Δ次正则二分图，记为G^*。
2. 利用匈牙利算法主次求其完备匹配，直至求出G^*的Δ个边不重的完备匹配，每个完备匹配着上一个颜色。
3. 去掉扩充的顶点及边。

🌈

证明：若二分图的顶点的最小次数为$\delta>0$，则对边进行δ着色时，能使每个顶点所关联的边中皆出现δ种颜色。

考虑$\mathbb{C}=(E_1,E_2,\cdots,E_\delta)$是二分图$G$的一个最佳$\delta-$边着色，如果存在一个顶点$v_0$和和两种颜色$i$与$j$，使得$i$色不在$v_0$关联的边种出现，但$j$色在$v_0$关联的边中至少出现两次，则边导出子图$G[E_i\bigcup E_j]$种含$v_0$的联通篇是一个奇圈，与二分图$G$不含奇圈矛盾。故所有$\delta$种颜色在每个顶点关联的边中出现。

图的基本概念

图的定义：$G=(V(G),E(G),\psi_G)$

- 顶点集合$V(G)\neq\emptyset$
- 边集合$E(G)$
- 关联函数$\psi_G: E(G)\to\{(u,v)|u,v\in V(G)\}$
- 阶$\nu(G)=|V(G)|$：无限图、有限图
- $\varepsilon(G)=|E(G)|$
- 环：自环，边e的两个端点重合
- 简单图：无自环无重边
- 完全图K_n：简单图，任意两顶点相邻
- 二分图：顶点集合拆分为两部分X和Y，使得两集合内部均无连边
  - 完全二分图$K_{|X|,|Y|}$：X与Y两两相邻
- 星图：$K_{1,n-1}$或$K_{n-1,1}$
- 零图：$\varepsilon=0$
- 度数：顶点度数$deg(v)$，图最小度数$\delta(G)$，最大度数$\Delta(G)$
- 子图：$G=(V(G),E(G))$和$H(V(H),E(H))$满足$V(H)\subseteq V(G)$和$E(H)\subseteq E(G)$
  - 真子图：$H\subset G$
  - 生成子图：$H\subseteq G$且$V(H)=V(G)$
  - 顶点导出子图：$G[V']=(V',E')$，$V'\subseteq V(G)$，$E'=\{uv|uv\in E(G),u,v\in V'\}$
  - 边导出子图：$G[E']=(V',E')$，$E'\subseteq E(G)$，$V'=\{v|\text{存在边}uv\in E'\}$
- 补图：$G^c=(V(G^c),E(G^c))$，$V(G^c)=V(G)$，
  $E(G^c)=\{uv|u,v\in V(G^c)=V(G)\text{且}uv\notin E(G)\}$
- 边图：$L(G)=(V(L(G)),E(L(G)))$，$V(L(G))=E(G)$，
  $E(L(G))=\{e_1e_2|e_1,e_2\in E(G)\text{且}e_1,e_2\text{在}G\text{中相邻}\}$，顶点和边互换关系
- 并$G\cup H$
- 交$G\cap H$
- 积$G\times H=(V',E')$，$V'=V(G)\times V(H)=\{(u,v)|u\in V(G),v\in V(H)\}$，
  $E'=\{(u_1,v_1)(u_2,v_2)|u_1=u_2\text{且}v_1v_2\in E(H);\text{或}v_1=v_2\text{且}u_1u_2\in E(G);\text{或}u_1u_2\in E(G)\text{且}v_1v_2\in E(H$
- 路径：$W=v_0e_1v_1e_2\cdots e_kv_k$
- 行迹：边不重复的路径
- 轨道：顶点不重复的路径，一定是行迹和路径
- 回路：起点和终点相同的路径
- 圈：除了起点和终点外，没有相同顶点的回路
- 距离$\mathrm{dist}(u,v)$：最短距离
  - 不连通时$\mathrm{dist}(u,v)=\infty$
- 连通片：$G[V_i],1\leq i\leq\omega$
  - $G=\sum G[V_i]$
  - 连通片个数$\omega(G)$
- 图同构：

- 对于图$G=(V(G),E(G),\psi_G)$，$H=(V(H),E(H),\psi_H)$，若存在一一映射$\begin{cases}\theta:V(G)\to V(H)\\ \varphi:E(G)\to E(H)\end{cases}$
  使得$\forall e\in E(G)$，当且仅当$\psi_G(e)=uv$时，有$\psi_H(\varphi(e))=\theta(u)\theta(v)$，记作$G\cong H$
- $Ulam$猜想：共同砍去一个点或边后仍同构
  - 若$|V(G)|=|V(H)|$，且存在一一映射$\theta:V(G)\to V(H)$，使得$\forall v\in V(G)$，有$G-v\cong H-\theta(v)$，则$G\cong H$
  - 若$|E(G)|=|E(H)|$，且存在一一映射$\varphi:E(G)\to E(H)$，使得$\forall e\in E(G)$，有$E(G)-e\cong H(G)-\varphi(e)$，$G\cong H$

- 有向图：$D=(V(D),E(D),\psi_D)$
  - 端点：起点（尾），终点（头）
  - 入度$deg^+(u)$，出度$deg^-(u)$，$deg(u)=deg^+(u)+deg^-(u)$
    - $\sum deg^+(u)=\sum deg^-(u)=|E(D)|=\varepsilon(D)$

树

- 连通无圈图
- 树叶/分支点，树枝，森林（连通片），平凡树（孤立点）
- 连通图$\varepsilon(G)\geq\nu(G)-1$
- 离心率：$l(v)=\max\{dist(u,v)\}$
- 半径：$r(G)=\min\{l(v)|v\in V\}$
- 中心点：$l(v)=r(G)$
- 中心：$\{v|l(v)=r(G)\}$
- 生成树/生成森林：T是树或森林且$T\subseteq G$
  - 弦：非生成树边
  - 余树：T_G^c
- 连通图的充要条件是有生成树
- 生成树计数$(Gayley)$：$e\in E(G)$且不是环，$\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)$
  - $G\cdot e$表示将e的端点缩为一点后的图
  - $\tau(K_n)=n^{n-2}$
- 最小生成树
  - $Kruskal$
  - $Prim$
  - 破圈法：删除最大圈内边

有根树：

- 根：$deg^+=0$
- 树叶：$deg^+=1$，$deg^-=0$
  - $n_1=\sum_{i=3}^{k}(i-2)n_i+2\geq(\Delta(T)-2)\cdot 1+2=\Delta(T)$
- 内点：$deg^+=1$，$deg^-\neq 0$
- 分支点：内点和根
- 深度：$L(v)$，$L(根)=0$
- 树高：$h(T)$，最大深度

- 有序树：所有分支点的孩子都从左到右规定了次序
- r叉树：
  - r叉正则树：每个分支点都恰好有r个儿子
  - r叉完全正则树：所有树叶深度等于树高
  - r叉有序树
- $Huffman$树：
  - 加权路径长度：$WPL(T)=\sum_{树叶} w_i L(v_i)$
  - 最优二叉树：加权路径长度最小
  - 前缀码

平面图

- 可嵌入平面
  - 可嵌入曲面S，S嵌入
  - 可嵌入平面$\Leftrightarrow$可嵌入球面，多面体图皆为平面图
- 平面图划分平面为若干连通闭区域「面」，面集合$F(G)$，数量$\phi(G)$
  - 恰存在一个无界面：外部面
- 分割：若e为桥，则只有一个面与e关联，否则有两个面和e关联。
- 面度数$deg(f)$为关联边数，即$b(f)$中边数，桥计算两次
  - $\sum\limits_{f\in F(G)} deg(f)=2\varepsilon$
- $Euler$公式：
  - 平面图中，$\nu-\varepsilon+\phi=2$
  - 多面体：$\nu\geq 4$，$\phi\geq 4$
    - 除$n=7$外，对于所有$n\geq 6$，都存在有n条棱的多面体
  - $\nu\geq 3$的连通简单平面图中有$\varepsilon\leq 3\nu-6$
    - $deg(f)\geq 3\Rightarrow 2\varepsilon=\sum\limits_{f\in F(G)} deg(f)\geq 3\phi$
  - 连通简单平面图中有$\delta\leq 5$
    - $\delta\nu\leq 2\varepsilon\leq 2(3\nu-6)$
  - K_5是非平面图：$\varepsilon>3\nu-6$
  - $K_{3,3}$是非平面图：
    - 二分图，不含奇圈，故无长度小于4的圈，$\min deg(f)\geq 4$
- 极大平面图：$\nu\geq 3$的平面图，任加一条边后均不再是平面图
  - 极大平面图的充要条件
    - 平面嵌入的每个面都是三角形
    - $\varepsilon=3\nu-6$
  - $\nu\geq 4$的极大平面图中$\delta\leq 3$
- $\nu-\varepsilon+\phi=\omega+1$

匹配理论

匹配

- G的一个边子集M，满足M内任意两条边在G中都不相邻，称M为G的一个匹配
- M中相邻的点称为在M中相配
- M中边的端点称为被M许配
- 完备匹配：G中所有端点都被M许配
- 最大匹配：边数最多的匹配，匹配数$\alpha(G)=|M|$
- 交错轨道（圈）：G中的轨道（圈）P的边在M与$E(G)-M$中交替出现
- 可增广轨道：$P=v_0e_1v_1e_2\cdots e_{2k+1}v_{2k+1}$，其中$e_1,e_3,\cdots,e_{2k+1}\notin M$，$e_2,\cdots,e_{2k}\in M$，且$v_0$和$v_{2k+1}$没有被$M$许配
    - 交换P中所有边所属的边集，可使$|M|$增加1
- 最大匹配当且仅当G中没有关于M的可增广轨道

二分图匹配

- $Hall$定理：设二分图点集划分为X和Y，则G中存在将X中顶点都许配的匹配，当且仅当任给$S\subseteq X$都有$|N(S)|\geq|S|$（$N(S)$为邻顶集合）
- k次正则二分图G有完备匹配
    - $EN(S)$表示与S中某点相邻的边集
    - $EN(S)\subseteq EN(N(S))$
    - 则$k\times|S|=|EN(S)|\leq|EN(N(S))|=k\times|N(S)|$
- 覆盖：点子集C满足G中任意一条边均与C相连
    - 极小覆盖，覆盖数$\beta(G)$
- 恒有$|C|\geq|M|$，且$|C|=|M|$时C是最小覆盖，M是最大匹配
    - $E(M)$中任意一条边e_i均有一个端点属于C
- $K\ddot{o}nig-Egerv\acute{a}ry$：二分图中$\alpha(G)=\beta(G)$

任意图的完备匹配：

- 奇/偶片：连通片G'点数$\nu(G')$为奇/偶数
    - $o(G)$表示G中奇片个数
- $Tutte$定理：有完备匹配当且仅当任给$S\subseteq V(G)$，都有$o(G-S)\leq|S|$
- $Petersen$定理：无桥的三次正则图有完备匹配

最大匹配算法：

- 交错树算法：
    - 设u为G中没有被M许配的顶点，若包含u的子图T为树且$\forall v\in V(T)$，T中从u到v的轨道均为交错轨道，则称T是G中关于M的$u-$交错树
    - 若除u外，T中所有顶点均被M许配，则称T为被M许配的$u-$交错树，否则T中从u到v的轨道为可增广轨道

$Euler$图与$Hamilton$图

$Euler$图

- $Euler$迹：经过图G每条边的形迹
- $Euler$回路：闭$Euler$迹
- $Euler$图，连通图中的等价命题
  1. G的每个顶点的度数都是偶数
  2. G可以表示成无公共边的圈之并
- 平面$Euler$图至多是$\nu(G)-2$个无公共边的圈的并
- $Euler$迹存在当且仅当最多有两个度数为奇数的点
- 有向图D连通，有以下等价命题：
  - D是$Euler$图
  - $\forall v\in V(D)$，$\deg^{+}(v)=\deg^{-}(v)$
  - D可以表示成无公共边的有向圈之并
- $Fleury$算法：
  - 每次尽量选择剩余边图的非桥边
  - 时间复杂度：$O(\varepsilon^2\nu)$
- 逐步插入回路法：
  - $O(\varepsilon+\nu^2)$

中国邮递员问题

- 最优投递线路，回路权和最小
- $Edmonds-Johnson$算法：
  - $O(\nu^4)$
  - 对所有奇度顶点构造最短距离作为边权的加权完全图，求加权完全图总权最小的完备匹配（$O(\nu^4)$），即为需要额外重复走的边，增加后求$Euler$回路

$Hamilton$图

- $Hamilton$轨道：经过图G每个顶点的轨道
- $Hamilton$圈
- $Hamilton$图：含有$Hamilton$圈的图
  - 正十二面体、平凡图、完全图……
- 点数为奇数的二分图不可能是$Hamilton$图
- $Hamilton$图中，对$V(G)$的每个非空真子集S，均有$\omega(G-S)\le|S|$（连通片个数）
  - 假设H为$Hamilton$圈，则$\omega(G-S)\le\omega(H-S)\le|S|$
- $Petersen$图不是$Hamilton$图
- $Dirac$定理：若简单图满足$\nu(G)\ge 3$，$\delta(G)\ge\frac{\nu(G)}{2}$，则$G$是$Hamilton$图
  - 若对于某对不相邻顶点有$deg(u)+deg(v)\ge\nu(G)$，则G是$Hamilton$图当且仅当$G+uv$是$Hamilton$图
  - 简单图G是$Hamilton$图，当且仅当它的闭包$c(G)$是$Hamilton$图

- 闭包$c(G)$：反复连接G中度数之和不小于$\nu(G)$的不相邻点对，直至无法连接为止
  - 闭包唯一确定
- 若$\nu(G) \geq 3$，对G的任意一对顶点u, v，若$deg(u) + deg(v) \geq \nu(G) - 1$，则$G$有$Hamilton$轨道；若$deg(u) + deg(v) \geq \nu(G)$，则$G$是$Hamilton$图

旅行商问题

- 最小$Hamilton$圈
- 针对完全图
- 最近邻法
  - 每次挑选一个最近的未遍历点
  - 对于满足三角不等式的完全加权图，$\frac{d}{d_0} \leq \frac{1}{2}(\lceil \log_2 n \rceil + 1)$
- 最小生成树法：
  - 求得最小生成树T，为树上每一条边添加一条与原边同权的平行边，求树上的$Euler$回路
  - 在补充后的图上，沿回路顺序遍历，若遍历至已遍历过的点，则直接跳过并走原图的边
  - 对于满足三角不等式的完全正加权图，$\frac{d}{d_0} < 2$
- 最小权匹配法：
  - 在最小生成树上的奇度顶点求总权最小的完备匹配，增加相应的边，求$Euler$回路
  - $O(\nu^3)$，$\frac{d}{d_0} < \frac{3}{2}$

图的着色

点着色

- $k-$顶点着色
  - 正常$k-$顶点着色：相邻顶点颜色不同
- 顶点色数$\chi(G)$：最少颜色数
  - $\chi(G) = 1$时为零图
  - $\chi(G) = \nu$时为完全图
  - $\chi(G) = 2$时为有边二分图
  - $\chi(C_v) = \begin{cases} 2, \nu\text{为偶数} \\ 3, \nu\text{为奇数} \end{cases}$
- 子图$\chi(H) \leq \chi(G)$
- $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
  - 完全图和奇圈中等号成立
- $Brooks$定理：$\nu \geq 3$阶非完全图、非奇圈的连通图，$\chi(G) \leq \Delta(G)$
- 存在奇圈时$\chi(G) \geq 3$

边着色

- $k-$边着色
- 边色数$\chi'(G)$

- $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \varepsilon(G)$
- 若G不是奇圈，则存在一种$2-$边着色使得所用的两种颜色在每个度数不小于2的顶点处都出现
- $c(v)$：v点关联的边的颜色数
- 最佳$k-$边着色：
  - $\sum c(v)$最大
  - 正常$k-$边着色一定有$deg(v) = c(v)$
- 对于最佳$k-$着色$\mathcal{C} = (E_1, E_2, \cdots, E_k)$，若存在一个顶点$v_0$和两种颜色$i$与$j$使得$i$色不在$v_0$关联的边中出现，且$j$色至少出现了两次，则边导出子图$G[E_i \cup E_j]$中含$v_0$的连通片是一个奇圈
- $Vizing$：最大重边数$\mu(G)$，有$\Delta \leq \chi' \leq \Delta + \mu$
- 一般图中有$\chi'(G) = \Delta(G)$或$\chi'(G) = \Delta(G) + 1$
  - 第一类图$\chi'(G) = \Delta(G)$
    - 二分图
  - 第二类图$\chi'(G) = \Delta(G) + 1$
    - $Petersen$图
- 对于两个无公共边的匹配M和N，且$|M| > |N|$，则存在无公共边的匹配M'和N'使得$|M'| = |M| - 1$，$|N'| = |N| + 1$，$M' \cup N' = M \cup N$
- 若$\Delta \leq p$，则存在p个不相交匹配$M_1, M_2, \cdots M_p$使得$E(G) = \bigcup\limits_{i=1}^{p} M_i$且$\forall i \in [1, p]$有 $\left\lfloor \frac{\varepsilon}{p} \right\rfloor \leq |M_i| \leq \left\lceil \frac{\varepsilon}{p} \right\rceil$
  - 任意两个匹配的边数最多相差1

平面图着色

- 正常面着色：
  - 相邻两面颜色不同，$k-$面着色
- 面色数$\chi_*(G) = k$
- 对偶图G^*
  - 同构图的对偶图不一定同构
  - G'中的环对应G^*中的桥，G'中的桥对应G^*中的环
  - 顶点数n^*，边数m^*，面数ϕ^*
    - $n^* = \phi$，$m^* = m$，$\phi^* = n$
  - $\deg_{G^*}(f^*) = \deg_G(f)$
- 可$k-$面着色等价于对偶图可$k-$顶点着色
- 四色定理$\Longrightarrow \chi(\text{平面图}) \leq 4$
- 任何平面都是可$5-$顶点着色的
  - 平面图中$\delta(G) \leq 5$

有向图

有向图

- 底图$\xrightarrow{\text{定向}}$定向图

- 有向边(u,v)
  - v是u的外邻顶点，u是v的内邻顶点
  - 内邻集$N_D^+(u)=\{v|(u,v)\in E(D)\}$
  - 外邻集$N_D^-(u)=\{v|(v,u)\in E(D)\}$

连通性

- u可达v
- 强连通：$\forall u,v\in V(D)$，u可达v且v可达u
  - 等价于存在有向生成回路
  - 连通无向图可定向为强连通有向图当且仅当无向图中无桥
- 单向连通：$\forall u,v\in V(D)$，u可达v或v可达u
  - $\forall S\subseteq V(D)$，$S\neq\emptyset$，都$\exists v\in S$满足v可达S中所有顶点
  - 等价于存在有向生成路径
- 弱连通：底图连通

竞赛图

- 竞赛图：完全图的定向图，有2^ε种
- 有向图D中含有长度为$\chi(G)-1$的有向轨道
- 竞赛图中含有长度为$\chi(K_\nu)-1=\nu-1$的有向轨道，即$Hamilton$轨道

网络流理论

网络与流函数

- 网络$N=(D,s,t,c)$
  - 源s，汇t，容量函数$c(e)\geq 0$
- 流函数$f(e)$
  - $c(e)\geq f(e)\geq 0$
  - $\forall v\in V(D)-\{s,t\}$，$\sum\limits_{e\in\alpha(v)}f(e)-\sum\limits_{e\in\beta(v)}f(e)=0$
  - 流量$\mathrm{Val}(f)=\sum\limits_{e\in\alpha(t)}f(e)-\sum\limits_{e\in\beta(t)}f(e)=\sum\limits_{e\in\beta(s)}f(e)-\sum\limits_{e\in\alpha(s)}f(e)$
  - 最大流$\mathrm{Val}(f^*)=\max\mathrm{Val}(f)$
- 截$(S,\bar{S})=\{e=(u,v)|e\in E(D),u\in S,v\in\bar{S}\}$
  - 其中$S\subset V(D)$且$s\in S$，$t\in\bar{S}$
  - 截量$C(S,\bar{S})=\sum\limits_{e\in(S,\bar{S})}c(e)$
  - 最小截
  - $\mathrm{Val}(f)=\sum\limits_{e\in(S,\bar{S})}f(e)-\sum\limits_{e\in(\bar{S},S)}f(e)\leq C(S,\bar{S})$
    - 等号成立时分别为最大流和最小截

Ford-Fulkerson算法

- 未满载边：e是$P(s,u)$的正向边且$f(e) < c(e)$
- 满载边：e是$P(s,u)$的正向边且$f(e) = c(e)$
- 零载边：e是$P(s,u)$的反向边且$f(e) = 0$
- 正载边：e是$P(s,u)$的正向边且$f(e) = 0$
- 可增载量$l(e) = \begin{cases} c(e) - f(e), & e\text{是正向边} \\ f(e), & e\text{是反向边} \end{cases}$
  - 轨道可增载量$l(P) = \min\limits_{e \in E(P)} l(e)$
- 未满载轨道：$l(P) > 0$
- 满载轨道：$l(P) = 0$
- 可增载轨道：$l(P) > 0$且$v = t$，即$P(s,t)$
- $\bar{f}(e) = \begin{cases} f(e) + l(P), & e\text{是正向边} \\ f(e) - l(P), & e\text{是反向边} \\ f(e), & \text{otherwise} \end{cases}$，$\mathrm{Val}(\bar{f}) = \mathrm{Val}(f) + l(P)$

容量有上下界的网络最大流

- $N = (D, s, t, c, b)$
- $c(e) \geq f(e) \geq b(e)$
- 伴随网络：
  - $N' = (D', s', t', c')$
  - $V(D') = V(D) \cup \{s', t'\}$
  - $E(D') = E(D) \cup \{(s', v), (v, t') | v \in V(D)\} \cup \{(s,t), (t,s)\}$
  - $c'(e) = \begin{cases} c(e) - b(e), & e \in E(D) \\ \sum_{e \in \alpha(v)} b(e), & e = (s', v), v \in V(D) \\ \sum_{e \in \beta(v)} b(e), & e = (v, t'), v \in V(D) \\ +\infty, & e = (s,t)\text{或}(t,s) \end{cases}$
- 存在可行流要求伴随网络最大流使得所有边(s', v)、(v, t')满载

有供需需求的网络流

- $N = (D, X, Y, \sigma, \rho, c)$
  - 源集合X，产量σ，$\sum\limits_{e \in \beta(x_i)} f(e) - \sum\limits_{e \in \alpha(x_i)} f(e) \leq \sigma(x_i)$
  - 汇集合Y，需求量ρ，$\sum\limits_{e \in \alpha(y_j)} f(e) - \sum\limits_{e \in \beta(y_j)} f(e) \geq \rho(y_j)$
- 存在可行流要求$\forall S \subseteq V(D)$，满足$C((S, \bar{S})) \geq \rho(Y \cap \bar{S}) - \sigma(X \cup \bar{S})$
- 附加网络
  - $N' = (D', x_0, y_0, c')$
  - $V(D') = V(D) \cup \{x_0, y_0\}$
  - $E(D') = E(D) \cup \{(x_0, x_i) | x_i \in X\} \cup \{(y, y_j) | y_j \in Y\}$
  - $c'(e) = \begin{cases} c(e), & e \in E(D) \\ \sigma(x_i), & e = (x_0, x_i), x_i \in X \\ \rho(y_j), & e = (y_j, y_0), y_j \in Y \end{cases}$

- 存在可行流要求存在最大流满足(y_j,y_0)满载

图矩阵与图空间

线性空间

- 要求：
  - 向量加法：
    1. $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$，都满足$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$
    2. $\forall\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in V$，都满足$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$
    3. $\exists\vec{0}$，使得$\forall\vec{\alpha}\in V$，都满足$\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$
    4. $\forall\vec{\alpha}\in V$，$\exists\vec{\beta}\in V$使$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\vec{0}$，$\vec{\beta}$称为$\vec{\alpha}$的逆元，记为$-\vec{\alpha}$
  - 数乘：
    1. $\forall\vec{\alpha}\in V$，满足$1\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$
    2. $\forall k,l\in F$，$\forall\vec{\alpha}\in V$，都满足$(kl)\vec{\alpha}=k(l\vec{\alpha})$
    3. $\forall k,l\in F$，$\forall\vec{\alpha}\in V$，都满足$(k+l)\vec{\alpha}=k\vec{\alpha}+l\vec{\alpha}$
    4. $\forall k\in F$，$\forall\vec{\alpha},\vec{\beta}\in V$，都满足$k(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=k\vec{\alpha}+k\vec{\beta}$
- 集合$F_2=\{0,1\}$：
  - $$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

图的空间

- 边空间：$\mathcal{E}(G)=\{E'\text{对应的向量}|E'\subseteq E\}$
  - 边子集对称差：$\{e_1,e_2\}\oplus\{e_1,e_3\}=\{e_2,e_3\}$
- 圈空间：$\mathcal{C}(G)=\{\text{圈}C\text{对应的向量}|C\subseteq E\}$
  - 基本圈组：连通图G的生成树T，设$e_1,e_2,\cdots,e_{\varepsilon-\nu+1}\in E(G)-E(T)$，记$T+e_1,T+e_2,\cdots,T+e_{\varepsilon-\nu+1}$上所含的圈分别为$C_1,C_2,\cdots,C_{\varepsilon-\nu+1}$
    - 基本圈组为$\mathcal{C}(G)$的一组基，即$\mathcal{C}(G)$维数为$\varepsilon-\nu+1$
- 断集空间：$\mathcal{S}(G)=\{\text{断集}(V',\overline{V'})\text{对应的向量}|V'\subset V\text{且}V'\neq\emptyset\}$
  - $\mathcal{S}(G)$是$\mathcal{E}(G)$的线性子空间
- 割集：$G-E'$不连通，且$\forall E''\subset E'$满足$G-E''$连通
  - $G-E'$恰有两个连通片
  - 割集一定是断集
- 基本割集组：给定连通图G的生成树T，则G的任一割集必含树T上的恰好一条边。记$E(T)=\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}$，含有边$e_i$的割集为$S_i$，则其为断集空间$\mathcal{S}(G)$的一组基，维数为$\nu-1$