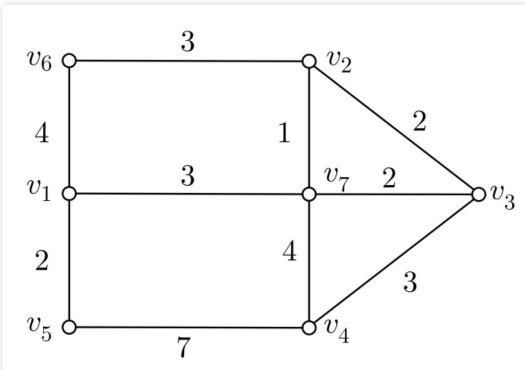
作业10nd

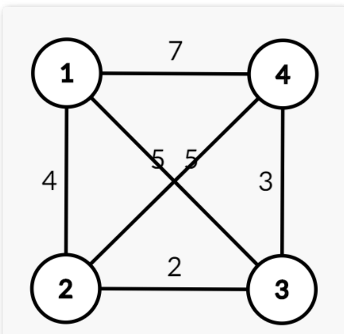
6.7

> 🌈
>
> 给出一个算法，在有$Euler$迹的图中求出一条$Euler$迹

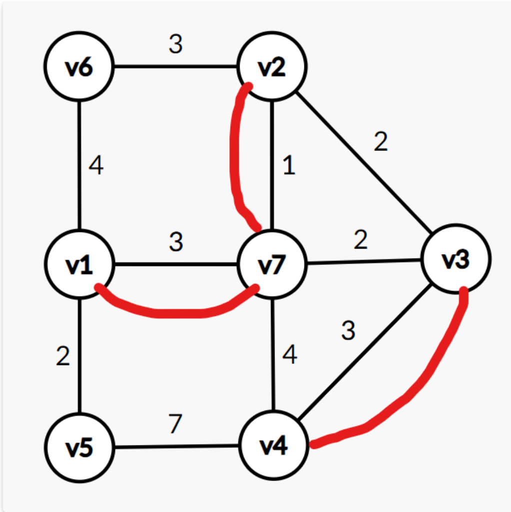
- 若图G存在$Euler$迹，则其中奇度顶点的个数只能为0或2
- 若奇度顶点个数为2，则连接该两点得到图G'，显然图G'有$Euler$回路。
- 使用$Fleury$算法或逐步插入回路法即可得到G'的$Euler$回路P，删除额外添加的边即为G的一条$Euler$迹
- 若奇度顶点个数为0，则直接求$Euler$回路即可

6.8

> 🌈
>
> 求下图的一条最优投递线路
>
> 
>

- 使用$Edmonds-Johnson$算法
  1. 图G的奇度顶点集$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$
  2. 由$Floyd$算法或$Dijkstra$算法得K_4:
     - 

  3. K_4的最优完备匹配$M=\{v_1v_2,v_3v_4\}$
  4. 在G中增加v_1,v_2间最短轨迹$P(v_1,v_2)=v_1v_7v_2$和v_3,v_4间最短轨迹$P(v_3,v_4)=v_3v_4$的平行边，得到G^*
     -

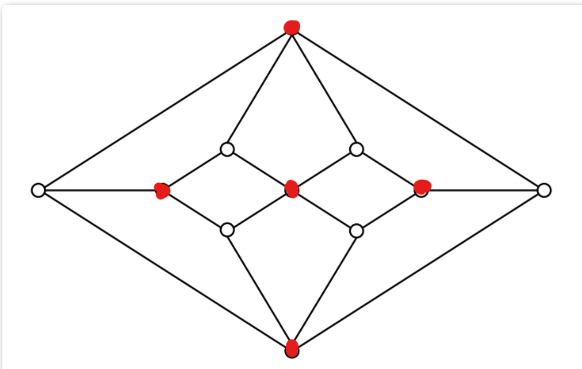


5. 其中一条$Euler$回路为$v_1v_6v_2v_7v_1v_5v_4v_3v_4v_7v_3v_2v_7v_1$，即为一条最优投递路线

6.9

> 🌈
> 设G是二分图，证明：若G是$Hamilton$图，则G必有偶数个顶点。

- 若G有奇数个顶点，则G上的$Hamilton$圈即为奇圈，这与G为二分图矛盾
- 故G必有偶数个顶点

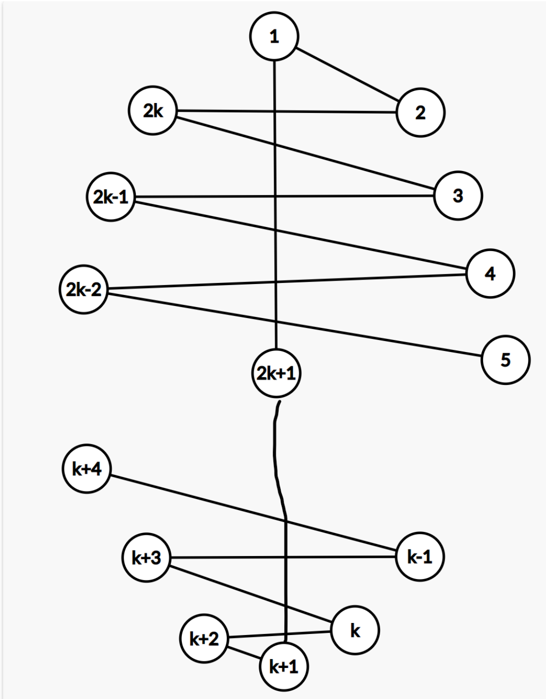
> 🌈
> $Herschel$图是否为$Hamilton$图
>
> 

- 该图为二分图，且有奇数个顶点，故不为$Hamilton$图

6.12

> 🌈
> 求K_n中无公共边的$Hamilton$圈的个数

- 假设无公共边的$Hamilton$圈的个数为m，则$nm \le \frac{1}{2}n(n-1)$，即$m \le \frac{n-1}{2}$
- 若n为奇数，不妨令$n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$)
- 将顶点$1, 2, 3, \cdots, 2k$逆时针排成一圈，$2k+1$置于中央，下图即为一种$Hamilton$圈
-



- 每次旋转外围的$2k$个点，改变$2k+1$相邻的两点，即可得到类似的一共k个无公共边的$Hamilton$圈
- 若n为偶数，不妨令$n=2k+2$（$k \in \mathbb{N}$）
- 则在$n=2k+1$的基础上增加一个点$2k+2$，令其每次在$Hamilton$圈上挑选一对不同的点并插入其之间，可得到一共k个无公共边的$Hamilton$圈
- 则K_n中无公共边的$Hamilton$圈的个数为$\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$

6.17

> 🌈
>
> 设G是ν阶无向简单图，边数$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)+2$

1. **证明：G是$Hamilton$图**
    - 若$\nu=1$，则G显然是$Hamilton$图
    - 对于G中度数最小的两点v_1、v_2，有 $deg(v_1)+deg(v_2) = 2\varepsilon - \sum\limits_{u\in V(G),u\neq v_1 \text{且} u\neq v_2} deg(u) \geq 2\varepsilon - (\nu-2)(\nu-3)-(deg(v_1)+deg(v_2))$
    - 即$deg(v_1)+deg(v_2) \geq \nu$，故$G$中任意两点度数之和不小于$\nu$，则$G$为$Hamilton$图
2. **举例说明，当$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nu-1)(\nu-2)+1$时，$G$不一定是$Hamilton$图**
    - 当$G=K_{1,\nu-1}$时，显然不是$Hamilton$图

6.19

> 🌈
>
> 若围一张圆桌坐着至少六个人，那么一定可以调整他们的位置，使得每个人两侧都挨着新邻居

- 同6.12，当人数$n \geq 5$时，K_n中无公共边的$Hamilton$圈的个数为$\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \geq 2$
- 即存在多种坐法保证任何两人之间为新邻居

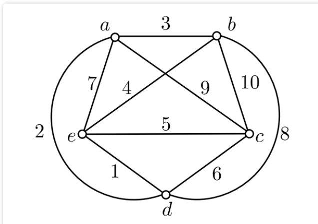
6.20

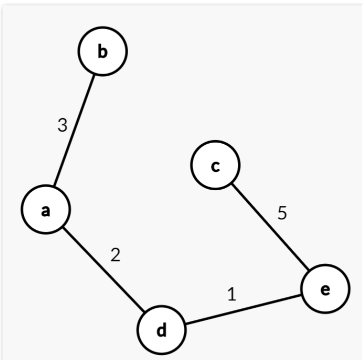
> 🌈

> 今有ν个人，已知他们中的任何两人合起来认识其余的$\nu-2$人。
>
> 证明：当$\nu\geq 3$时，这ν个人能排成一列，使得中间任何人都认识两边的人，而两头的人认识左边（或右边）的人。
>
> 当$\nu\geq 4$时，这ν个人能排成一个圆圈，使得每个人都认识两边的人

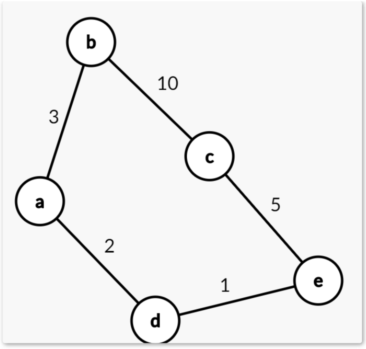
- 将人抽象为顶点，将认识关系抽象为边，则原题可简化为关系网G中是否存在$Hamilton$轨道或$Hamilton$圈
- 当$\nu=3$时，显然存在$Hamilton$轨道，且若$\varepsilon=3$则有$Hamilton$图
- 当$\nu\geq 4$时，若G不存在$Hamiton$圈，则$\exists v_1,v_2\in V(G)$满足$deg(v_1)+deg(v_2)<\nu$
- 而其余的$\nu-2$个点均与该两点中的至少一点相邻，故$\nu>deg(v_1)+deg(v_2)\geq\nu-2$，且易知$v_1$与$v_2$不相邻
- 不妨拆分$V(G)-\{v_1,v_2\}=X\cup Y$，$X=\{u|uv_1\in E(G)\}$，$Y=\{u|uv_2\in E(G)\}$
- $|X\cap Y|=deg(v_1)-deg(v_2)-(\nu-2)\leq 1$
- 由于$\nu\geq 4$，故$|X\cup Y-X\cap Y|\geq 4-2-1=1$
- 若任取$X-X\cap Y$（假设其不为空）中的一点v_3，考虑v_1,v_3，则其均不与v_2相邻，不成立
- 故对于G中任意两点v_1,v_2，都有$deg(v_1)+deg(v_2)\geq\nu$，G为$Hamilton$图

6.22

> 🌈
> 5阶完全加全图如下
>
> 
>

1. **用最近邻法求以a为起点的旅行商问题的近似解**
    - $H=adebca$，$W=26$
2. **用最小生成树法求以a,b为起点的旅行商问题的近似解**
    - 最小生成树T如下，并为各边增加平行边得到G^*
    - 

    - 从a出发，G^*的一条$Euler$回路$C_a=adecedaba$，则$H_a=adecba$，$W_a=21$
    - 从b出发，G^*的一条$Euler$回路$C_b=badecedab$，则$H_b=badecb$，$W_b=21$
3. **用最小权匹配法求旅行商问题的近似解**
    - 最小生成树T中奇度顶点集为$V=\{b,c\}$，其导出子图中最优完备匹配$M=\{bc\}$，将M中各边加入T后得到G^*
    -



- 从任意一点出发，绕一圈即为$Euler$回路和$Hamilton$圈，$W = 21$