作业9nd

五.11：设G是顶点集合划分为X和Y的二分图，则G的最大匹配中边数等于$|X|-\max\limits_{S\subset X}(|S|-|N(S)|)$

- 由$K\ddot{o}nig-Egerv\acute{a}ry$定理知二分图$G$中有$\alpha(G)=\beta(G)$
- 对于G的某个覆盖C，不妨设$S=X-C\cap X$，$T=C\cap Y$
- 则$\forall uv\in E(G)$且$u\in S$，$v\in Y$，都有$v\in T$
- 即$N(S)\subseteq T$
- 故 $\beta(G)=\min\limits_{S\subseteq X,N(S)\subseteq T,T\subseteq Y}\{|X|-|S|+|T|\}=\min\limits_{S\subseteq X}\{|X|-|S|+|N(S)|\}=|S|-\max\limits_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$
- 即$\alpha(G)=|X|-\max\limits_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\}$

五.13：用$Tutte$定理来证明$Hall$定理

- 充分性：
  - 当二分图G中存在将X中顶点都许配的匹配M
  - 则$\forall S\subseteq X$，S内的点都被M许配，故$|N(S)|\geq|S|$
- 必要性：
  - 若对于二分图G，$\forall S\subseteq X$都有$|N(S)|\geq|S|$
  - 则显然有$|Y|\geq|N(X)|\geq|X|$
  - 若二分图G中不存在将X中顶点都许配的匹配，则$\forall Y'\subseteq Y$且$|Y'|=|X|$，均满足由点$X+Y'$及其内部边构成的子图G'无完备匹配
  - 且$\forall S\subseteq X$都有$|N'(S)|\geq|S|$
  - 由$Tutte$定理知$\exists S\subseteq V(G)$，有$o(G'-(X-S))>|X-S|$
  - 则$|Y'-N'(S)|+o(S+N'(S))>|X-S|$，即$o(S+N'(S))+S>N'(S)$
  - 对于$S+N'(S)$点生成子图G''，记其中奇片分别为$G_1,G_2,\cdots,G_n$
  - 则显然对于任意奇片G_i，都有$|V(G_i)\cap S|<|V(G_i)\cap N'(S)|$
  - 则$N'(S)\geq o(S+N'(S))+S$，矛盾
  - 故$\forall Y'\subseteq Y$且$|Y'|=|X|$，均不存在使$o(G'-(X-S))>|X-S|$的S
  - 由$Tutte$定理知，二分图G中存在将X都许配的匹配

五.14：若G时$k-1$边连通，且$\nu(G)$是偶数，则G有完备匹配

- 当$k=1$时结论显然成立
- 当$k\geq 2$时，任取$S\subseteq V(G)$
- 若$S=\emptyset$，由于$\nu(G)$为偶数，故$o(G-S)=0\leq|S|=0$
- 若$S\neq\emptyset$，记$G-S$中的奇片分别为$G_1,G_2,\cdots,G_n$，并定义 $m_i=|\{uv|u\in G_i,v\in S且uv\in E(G)\}|$
- 由于$\kappa'(G)=k-1$，故$m_i\geq\kappa'(G)=k-1$
- 若对于某个奇片G_p，其满足$m_p=k-1$
- 则$m_p=\sum\limits_{v\in V(G_p)}\deg_G(v)-2\varepsilon(G_p)=k\nu(G_p)-2\varepsilon(G_p)=k-1$
- 即$2\varepsilon(G_p)=k(\nu(G_p)-1)+1$，而由于$G_p$为奇片，故等式无法成立
- 则对于所有奇片G_i都有$m_i\geq k$

- 故有$k|S| \geq \sum_{i=1}^{n} m_i \geq kn$
- 即$|S| \geq o(G-S)$
- 综上，由$Tutte$定理知，原命题成立。

五.16：由a,b,c,d,e,f六个人组成检查团，检查5个单位的工作。若某单位与某人有过工作联系，则不能选派此人到该单位去检查工作。已知第一单位与b,c,d有过联系，第二单位与a,e,f有过联系，第三单位与a,b,e,f，第四单位与a,b,d,f，第五单位与a,b,c有过联系，请列出去各个单位进行检查的人员名单。

-

一	二	三	四	五
a	b	d	e	f

五.19：证明：$Kuhn-Munkreas$算法中修改顶标后，$\hat{l}$仍然是可行顶标

- 若存在$x \in X$，$y \in Y$满足$\hat{l}(x)+\hat{l}(y) < w(xy)$
- 则显然$\hat{l}(x) = l(x) - \alpha_l$，$\hat{l}(y) = l(y)$且$x \in S$，$y \notin T$
- 故$\min\limits_{x_i \in S, y_j \notin T} \{l(x_i)+l(y_j)-w(x_iy_j)\} = \alpha_l > l(x)+l(y)-w(xy)$，矛盾
- 故$\hat{l}$任然是可行顶标

五.20：$Kuhn-Munkreas$算法种修改顶标后，由可行顶标$\hat{l}$得到相等子图$G_{\hat{l}}$。证明：在算法的第(3)步，在$G_{\hat{l}}$上找到的顶点子集T包含了在G_l上找到的顶点子集T，且至少多一个顶点。由此可知，$kuhn-Munkreas$算法最终能够找到某个相等子图，该相等子图有完美匹配，从而说明$Kuhn-Munkreas$算法的正确性

- 不妨假设$\alpha_l = l(x)+l(y)-w(xy)$，其中$x \in S$，$y \in \complement_Y T$
- 则修改后$\hat{l}(x)+\hat{l}(y) = l(x)-\alpha_l+l(y) = w(xy)$，
- 不妨记u到x的交错轨道为$P(u,x) = uy_1x_1y_2x_2\cdots x$，则$M' = M \oplus E(P(u,x)) + \{xy\}$即为更大的匹配
- 则在$G_{\hat{l}}$上找到的顶点子集T将至少比在G_l上找到的顶点子集T多一个点y，原题得证

六.3：设G是恰有$2k$个奇度顶点的连通图，证明：G中存在k条边不重的形迹$P_1,P_2,\cdots,P_k$，使得$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(P_i)$

- 不妨记G中$2k$个奇度顶点分别为$v_1,v_2,\cdots,v_{2k}$，定义图G'满足$V(G') = V(G)$，$E(G') = E(G) + \sum_{i=1}^{k} \{v_{2i-1}v_{2i}\}$
- 则G'中所有顶点度数均为偶数，存在$Euler$回路，不妨记其为P
- 在P中删除边$\{v_1v_2\},\{v_3v_4\},\cdots,\{v_{2k-1}v_{2k}\}$后将分为$k$段边不重的形迹，即为所求

六.5：如何将9个α，9个β，9个γ排成一个圆形，使得由这些α,β,γ产生的27个长为3的符号串在其中都只出现且只出现一次?

- 定义包含27个点的有向图D，其中$V(D) := \{x_0, x_1, \cdots, x_{26}\}$
- 对于点x_i和x_j，$i \neq j$，设i和j的三进制表示分别为$(i_2 i_1 i_0)_3$和$(j_2 j_1 j_0)_3$，边$x_i x_j$存在当且仅当满足$i_1 = j_2$和$i_0 = j_1$
- 则$\forall v \in V(D)$，都有$\deg^+(v) = 3 = \deg^-(v)$，则$D$是$Euler$图
- 可构造$\alpha\alpha\alpha\beta\alpha\alpha\gamma\alpha\beta\beta\alpha\beta\gamma\alpha\gamma\beta\alpha\gamma\gamma\beta\beta\beta\gamma\beta\gamma\gamma\gamma$