目录

1 格兰格因果性

1.1 介绍

考虑两个时间序列之间的因果性。这里的因果性指的是时间顺序上的关系，如果 $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ 对 Y_t 有作用，而 $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$ 对 X_t 没有作用，则称 $\{X_t\}$ 是 $\{Y_t\}$ 的格兰格原因，而 $\{Y_t\}$ 不是 $\{X_t\}$ 的格兰格原因。如果 $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ 对 Y_t 有作用，$Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$ 对 X_t 也有作用，则在没有进一步信息的情况下无法确定两个时间序列的因果性关系。

注意这种因果性与采样频率有关系，在日数据或者月度数据中能发现的领先——滞后性质的因果关系，到年度数据可能就以及混杂在以前变成同步的关系了。

1.2 格兰格因果性的定义

设 $\{\xi_t\}$ 为一个时间序列，$\{\eta_t\}$ 为向量时间序列，记

$$\bar{\eta}_t = \{\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots\}$$

记 $\text{Pred}(\xi_t|\bar{\eta}_t)$ 为基于 $\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots$ 对 ξ_t 作的最小均方误差无偏预报，其解为条件数学期望 $E(\xi_t|\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots)$，在一定条件下可以等于 ξ_t 在 $\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots$ 张成的线性 Hilbert 空间的投影（比如，(ξ_t, η_t) 为平稳正态多元时间序列），即最优线性预测。直观理解成基于过去的 $\{\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots\}$ 的信息对当前的 ξ_t 作的最优预测。

令一步预测误差为

$$\varepsilon(\xi_t|\bar{\eta}_t) = \xi_t - \text{Pred}(\xi_t|\bar{\eta}_t)$$

令一步预测误差方差，或者均方误差，为

$$\sigma^2(\xi_t|\bar{\eta}_t) = \text{Var}(\varepsilon_t(\xi_t|\bar{\eta}_t)) = E\left[\xi_t - \text{Pred}(\xi_t|\bar{\eta}_t)\right]^2$$

考虑两个时间序列 $\{X_t\}$ 和 $\{Y_t\}$，$\{(X_t, Y_t)\}$ 宽平稳或严平稳。

- 如果
$$\sigma^2(Y_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) < \sigma^2(Y_t|\bar{Y}_t)$$
则称 $\{X_t\}$ 是 $\{Y_t\}$ 的**格兰格原因**，记作 $X_t \Rightarrow Y_t$。这不排除 $\{Y_t\}$ 也可以是 $\{X_t\}$ 的格兰格原因。

- 如果 $X_t \Rightarrow Y_t$，而且 $Y_t \Rightarrow X_t$，则称互相有**反馈**关系，记作 $X_t \Leftrightarrow Y_t$。
- 如果

  $$\sigma^2(Y_t|\bar{Y}_t, X_t, \bar{X}_t) < \sigma^2(Y_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t)$$

  即除了过去的信息，增加同时刻的 X_t 信息后对 Y_t 预测有改进，则称 $\{X_t\}$ 对 $\{Y_t\}$ 有瞬时因果性。这时 $\{Y_t\}$ 对 $\{X_t\}$ 也有瞬时因果性。
- 如果 $X_t \Rightarrow Y_t$，则存在最小的正整数 m，使得

  $$\sigma^2(Y_t|\bar{Y}_t, X_{t-m}, X_{t-m-1}, \dots) < \sigma^2(Y_t|\bar{Y}_t, X_{t-m-1}, X_{t-m-2}, \dots)$$

  称 m 为**因果性滞后值** (causality lag)。如果 $m > 1$，这意味着在已有 $Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots$ 和 $X_{t-m}, X_{t-m-1}, \dots$ 的条件下，增加 X_{t-1}, ..., X_{t-m+1} 不能改进对 Y_t 的预测。

例 1.1. 设 $\{\varepsilon_t, \eta_t\}$ 是相互独立的零均值白噪声列，$\text{Var}(\varepsilon_t) = 1$, $\text{Var}(\eta_t) = 1$, 考虑

$$\begin{aligned} Y_t =& X_{t-1} + \varepsilon_t \\ X_t =& \eta_t + 0.5\eta_{t-1} \end{aligned}$$

用 $L(\cdot|\cdot)$ 表示最优线性预测，则

$$\begin{aligned} & L(Y_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) \\ =& L(X_{t-1}|X_{t-1}, \dots, Y_{t-1}, \dots) + L(\varepsilon_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) \\ =& X_{t-1} + 0 \\ =& X_{t-1} \\ \sigma(Y_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) =& \text{Var}(\varepsilon_t) = 1 \end{aligned}$$

而

$$Y_t = \eta_{t-1} + 0.5\eta_{t-2} + \varepsilon_t$$

有

$$\gamma_Y(0) = 2.25, \gamma_Y(1) = 0.5, \gamma_Y(k) = 0, k \geq 2$$

所以 $\{Y_t\}$ 是一个 MA(1) 序列，设其方程为

$$Y_t = \zeta_t + b\zeta_{t-1}, \zeta_t \sim \text{WN}(0, \sigma_\zeta^2)$$

可以解出

$$\begin{aligned} \rho_Y(1) =& \frac{\gamma_Y(1)}{\gamma_Y(0)} = \frac{2}{9} \\ b =& \frac{1 - \sqrt{1 - 4\rho_Y^2(1)}}{2\rho_Y(1)} \approx 0.2344 \\ \sigma_\zeta^2 =& \frac{\gamma_Y(1)}{b} \approx 2.1328 \end{aligned}$$

于是

$$\sigma(Y_t|\bar{Y}_t) = \sigma_\zeta^2 = 2.1328$$

所以

$$\sigma(Y_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) = 1 < 2.1328 = \sigma(Y_t|\bar{Y}_t)$$

即 X_t 是 Y_t 的格兰格原因。

反之，X_t 是 MA(1) 序列，有

$$\eta_t = \frac{1}{1+0.5B}X_t = \sum_{j=0}^{\infty}(-0.5)^j X_{t-j}$$

其中 B 是推移算子（滞后算子）。于是

$$\begin{aligned}
L(X_t|\bar{X}_t) =& L(\eta_t|\bar{X}_t) + 0.5L(\eta_{t-1}|\bar{X}_t) \\
=& 0.5\sum_{j=0}^{\infty}(-0.5)^j X_{t-1-j} \\
=& -\sum_{j=1}^{\infty}(-0.5)^j X_{t-j} \\
\sigma(X_t|\bar{X}_t) =& \mathrm{Var}(X_t - L(X_t|\bar{X}_t)) \\
=& \mathrm{Var}(\eta_t) = 1
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
L(X_t|\bar{X}_t, \bar{Y}_t) =& L(\eta_t|\bar{X}_t, \bar{Y}_t) + 0.5L(\eta_{t-1}|\bar{X}_t, \bar{Y}_t) \\
=& 0 + 0.5L(\sum_{j=0}^{\infty}(-0.5)^j X_{t-1-j}|\bar{X}_t, \bar{Y}_t) \\
=& -\sum_{j=1}^{\infty}(-0.5)^j X_{t-j} \\
=& L(X_t|\bar{X}_t)
\end{aligned}$$

所以 Y_t 不是 X_t 的格兰格原因。

考虑瞬时因果性。

$$\begin{aligned}
L(Y_t|\bar{X}_t, \bar{Y}_t, X_t) =& X_{t-1} + 0(\text{注意}\varepsilon_t\text{与}\{X_s, \forall s\}\text{不相关} \\
=& L(Y_t|\bar{X}_t, \bar{Y}_t)
\end{aligned}$$

所以 X_t 不是 Y_t 的瞬时格兰格原因。

例 1.2. 在例1.1中，如果模型改成

$$\begin{aligned}
Y_t =& X_t + \varepsilon_t \\
X_t =& \eta_t + 0.5\eta_{t-1}
\end{aligned}$$

有怎样的结果?

这时

$$Y_t = \varepsilon_t + \eta_t + 0.5\eta_{t-1}$$

仍有

$$\gamma_Y(0) = 2.25, \gamma_Y(1) = 0.5, \gamma_Y(k) = 0, k \geq 2$$

所以 Y_t 还服从 MA(1) 模型

$$Y_t = \zeta_t + b\zeta_{t-1}, b \approx 0.2344, \sigma_\zeta^2 \approx 2.1328$$

$$\begin{aligned}
L(Y_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) =& L(X_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) + 0 \\
=& L(\eta_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) + 0.5L(\eta_{t-1}|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) \\
=& 0 + 0.5L(\sum_{j=0}^{\infty}(-0.5)^j X_{t-1-j}|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) \\
=& -\sum_{j=1}^{\infty}(-0.5)^j X_{t-j} \\
=& X_t - \eta_t \\
\sigma(Y_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) =& \mathrm{Var}(\varepsilon_t + \eta_t) = 2
\end{aligned}$$

而

$$\sigma(Y_t|\bar{Y}_t) = \sigma_\zeta^2 \approx 2.1328 > \sigma(Y_t|\bar{Y}_t, \bar{X}_t) = 2$$

所以 X_t 是 Y_t 的格兰格原因。

反之，

$$\begin{aligned}
L(X_t|\bar{X}_t, \bar{Y}_t) =& -\sum_{j=1}^{\infty}(-0.5)^j X_{t-j} \\
=& L(X_t|\bar{X}_t)
\end{aligned}$$

所以 Y_t 不是 X_t 的格兰格原因。

考虑瞬时因果性。

$$\begin{aligned}
L(Y_t|\bar{X}_t, \bar{Y}_t, X_t) =& X_t + 0(\text{注意}\varepsilon_t\text{与}\{X_s, \forall s\}\text{不相关} \\
=& X_t \\
\sigma(Y_t|\bar{X}_t, \bar{Y}_t, X_t) =& \mathrm{Var}(\varepsilon) \\
=& 1 < 2 = \sigma(Y_t|\bar{X}_t, \bar{Y}_t)
\end{aligned}$$

所以 X_t 是 Y_t 的瞬时格兰格原因。

$[aaa]$