高等数学 B 习题课

李晨阳
数学科学学院

2025 年 6 月 13 日

目录

第一讲：空间直角坐标系, 向量及其线性运算 & 向量的数量积和向量积

题 1: 设: $u = a + b + 2c$, $v = -a + 3b - c$，试用 a, b, c 表示 $2u - 3v$。

解: $2u - 3v = 2(a + b + 2c) - 3(-a + 3b - c) = 5a - 7b + 7c.$

题 2: 设点 $P(4, -3, 5)$, 求：

(1) P 到坐标原点的距离；

(2) P 到各坐标轴的距离；

(3) P 到各坐标平面的距离。

解: (1) $d(P, O) = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{16 + 9 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$

(2) $d(P, x\text{轴}) = d(P, (4, 0, 0)) = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$

$d(P, y\text{轴}) = d(P, (0, -3, 0)) = \sqrt{80}.$

$d(P, z\text{轴}) = d(P, (0, 0, 5)) = 5.$

(3) $d(P, Oxy) = d(P, (4, -3, 0)) = 5$, $d(P, Oyz) = d(P, (0, -3, 5)) = 4$,

$d(P, Oxz) = d(P, (4, 0, 5)) = 3$,

题 3: 设一直线过点 $(6, 4, 2)$ 且垂直于坐标面 Oyz，在直线上求一点 P 使它与点 $(0, 4, 0)$ 的距离为 10。

解: 由于直线通过点 $(6, 4, 2)$ 且垂直于坐标面 Oyz，它的坐标可写成 $(x, 4, 2)$，则

$$\sqrt{x^2 + 2^2} = 10$$

得到

$$x = \pm\sqrt{96}$$

所以所求点为 $P_1(4\sqrt{6}, 4, 2)$ 或 $P_2(-4\sqrt{6}, 4, 2)$。

题 4: 证明以三点 $A(1, -1, 3)$, $B(2, 1, 7)$ 和 $C(4, 2, 6)$ 为顶点的三角形是直角三角形，并求此三角形的面积。

解: 证明：

$$|AB|^2 = (2-1)^2 + (1-(-1))^2 + (7-3)^2 = 1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$$

$$|AC|^2 = (4-1)^2 + (2-(-1))^2 + (6-3)^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 = 27$$

$$|BC|^2 = (4-2)^2 + (2-1)^2 + (6-7)^2 = 2^2 + 1^2 + (-1)^2 = 6$$

因此，

$$|AB|^2 + |BC|^2 = 21 + 6 = 27 = |AC|^2$$

由勾股定理知此三角形是直角三角形。

面积计算：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |BC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{21} \cdot \sqrt{6} = \frac{3}{2}\sqrt{14}$$

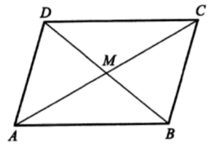

图 1:

题 5: 求一单位向量，使该向量的方向角 α,β,γ 满足关系 $2\alpha=2\beta=\gamma$。

解: 因为

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1 \quad (0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}),$$

得

$$2\cos^2\alpha+(2\cos^2\alpha-1)^2=1,$$

即

$$2\cos^2\alpha(2\cos^2\alpha-1)=0.$$

若 $\cos\alpha=0$, 则有 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$, $\gamma=\pi$, 于是假设 $\cos\alpha=0$, $\cos\gamma=-1$.

若 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 则有 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{2}$, 于是假设 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\gamma=0$.

因此，所求的单位向量是

$$(0,0,-1) \quad \text{或} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right).$$

注: 非零向量 $\mathbf{a}$ 的单位向量

$$\mathbf{a}^0=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}.$$

由此可见，非零向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦就是 $\mathbf{a}$ 的单位向量 $\mathbf{a}^0$ 的坐标。

题 6: 如果平面上一个四边形的对角线相互平分，试用向量证明它是平行四边形。

解: 证明：如图1所示，设四边形 $ABCD$ 中 AC 与 BD 交于点 M，已知

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}, \quad \overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MB}$$

故

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DC}$$

即

$$\overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$$

且

$$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$$

因此四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

题 7: 在 yOz 面上，求与三点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$，和 $C(0,5,1)$ 等距离的点。

解: 所求点在 yOz 面上，不妨设为 $P(0,y,z)$，点 P 与三点 A,B,C 等距离，

$$|PA|=\sqrt{3^2+(y-1)^2+(z-2)^2}$$

$$|PB|=\sqrt{4^2+(y+2)^2+(z+2)^2}$$

$$|PC| = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2}$$

由

$$|PA| = |PB| = |PC|$$

知，

$$\sqrt{3^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = \sqrt{4^2 + (y+2)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(y-5)^2 + (z-1)^2}$$

即

$$\begin{cases} 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16 + (y+2)^2 + (z+2)^2 \\ 9 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (y-5)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

解上述方程组，得

$$y = 1$$

$$z = -2$$

故所求点坐标为 $(0, 1, -2)$。

题 8: 试证明以三点 $A(4,1,9)$, $B(10,-1,6)$, $C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

解: 证明：由

$$\overrightarrow{AB} = \sqrt{(10-4)^2 + (-1-1)^2 + (6-9)^2} = 7$$

$$\overrightarrow{AC} = \sqrt{(2-4)^2 + (4-1)^2 + (3-9)^2} = 7$$

$$\overrightarrow{BC} = \sqrt{(2-10)^2 + (4+1)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

知

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

及

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2$$

故 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形。

题 9: 设已知两点为 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$, $M_2(3, 0, 2)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

解: 向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (3-4, 0-\sqrt{2}, 2-1) = (-1, -\sqrt{2}, 1)$$

其模

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

其方向余弦分别为

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{2}$$

方向角分别为

$$\alpha = \frac{2}{3}\pi$$

$$\beta = \frac{3}{4}\pi$$

$$\gamma = \frac{\pi}{3}$$

题 10: 设向量的方向余弦分别满足

(1) $\cos\alpha = 0$

(2) $\cos\beta = 1$

(3) $\cos\alpha = \cos\beta = 0$

问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

解: (1) 由 $\cos\alpha = 0$ 得知

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

故向量与 x 轴垂直，平行于 yOz 面。

(2) 由 $\cos\beta = 1$ 得知

$$\beta = 0$$

故向量与 y 轴同向，垂直于 xOz 面。

(3) 由 $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ 知

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{2}$$

故向量垂直于 x 轴和 y 轴，即与 z 轴平行，垂直于 xOy 面。

注：若非零向量 $\mathbf{a}$ (即向量 $\overrightarrow{OA}$) 与三个坐标轴正向间的夹角分别为 α、β 与 γ，且规定

$$0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$$

则称 α、β 与 γ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向角，并称三个方向角的余弦 $\cos\alpha$、$\cos\beta$ 与 $\cos\gamma$ 为向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦。非零向量 $\mathbf{a}$ 的方向可用它的方向角或方向余弦来表示。

题 11: 设向量 r 的模是 4, 它与 u 轴的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 r 在 u 轴上的投影。

解: 已知

$$|r| = 4$$

则

$$\mathrm{Prj}_u r = |r|\cos\theta = 4\cos\frac{\pi}{3} = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

题 12: 一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$，它在 x 轴、y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7，求这向量的起点 A 的坐标。

解：设 A 点坐标为 (x, y, z)，则

$$\overrightarrow{AB} = (2 - x, -1 - y, 7 - z)$$

由题意知

$$2 - x = 4$$

$$-1 - y = -4$$

$$7 - z = 7$$

故

$$x = -2$$

$$y = 3$$

$$z = 0$$

因此 A 点坐标为 $(-2, 3, 0)$。

题 13: 设 O 是 A, B 的连线以外的一点，证明 A, B, C 三点共线的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$$

其中

$$\lambda + \mu = 1$$

解: 证明：若点 A, B, C 共线，则有

$$\overrightarrow{BC} = \alpha\overrightarrow{BA}$$

故

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \alpha(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB})$$

即

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB}$$

取 $\lambda = \alpha, \mu = 1 - \alpha$，则

$$\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$$

其中

$$\lambda + \mu = \alpha + 1 - \alpha = 1$$

反之，若 $\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda + \mu = 1$，即

$$\overrightarrow{OC} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB} = \lambda(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OB}$$

即

$$\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \lambda(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}),$$

或

$$\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{BA}$$

因此点 A, B, C 共线

题 14: 设向量 $\vec{a}$ 与三坐标面 Oxy，Oyz，Ozx 的夹角分别为 θ_1，θ_2，θ_3，求 $\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3$。

解: 参考图 2, 设 α, β, γ 是向量 $\vec{a}$ 的方向角，则

$$\alpha + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\beta + \theta_3 = \frac{\pi}{2}$$

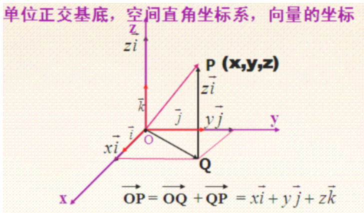

图 2:

$$\gamma + \theta_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

所以

$$\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3 = \sin^2\gamma + \sin^2\alpha + \cos^2\beta$$
$$= 1 - \cos^2\gamma + 1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta = 2$$

题 15: 求与三个坐标轴夹角相等的单位向量。

解: 解：由 $\alpha = \beta = \gamma$，知

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$$

而

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

因此

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以与三个坐标轴夹角相等的单位向量是

$$\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right\} \text{和} \left\{-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

题 16: 已知点 A 坐标为 $(3,2,7)$，$|AB| = 15$，$\overrightarrow{AB}$ 的方向角 α, β, γ 满足关系式：

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 3 : 4 : 5$$

求点 B 坐标。

解: 因为

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$$

得

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \sin\beta = \frac{4}{5}, \sin\gamma = 1, \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\frac{4}{5}, \cos\beta = \pm\frac{3}{5}, \cos\gamma = 0.$$

再利用方向角余弦的定义求得点 B 坐标为 $(15,11,7)$ 或 $(15,-7,7)$ 或 $(-9,11,7)$ 或 $(-9,-7,7)$。

题 17: 设 $\mathbf{a} = 12\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} - 5\hat{k}$ 与 $\mathbf{b} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 5\hat{k}$，求 λ 使得 $\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$ 垂直于 $\mathbf{a}$。

解:

$$(\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}) \cdot \mathbf{a} = \left[(4 - 12\lambda)\hat{\imath} + (3 - 9\lambda)\hat{\jmath} - 5(1 - \lambda)\hat{k}\right] \cdot (12\hat{\imath} + 9\hat{\jmath} - 5\hat{k})$$
$$= 12(4 - 12\lambda) + 9(3 - 9\lambda) + 25(1 - \lambda)$$
$$= 100 - 250\lambda = 0$$
$$\lambda = \frac{2}{5}$$

题 18: 已知 $\mathbf{a} = \{2, -3, 1\}, \mathbf{b} = \{1, -1, 3\}, \mathbf{c} = \{1, -2, 0\}$，求：

1. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

2. $(\mathbf{a})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$

3. $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$

4. $(\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}$

5. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}$

解:

$$(1)\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=\{-8,-5,1\}$$

$$(2)\quad (\mathbf{a})\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=\{-20,-12,4\}$$

$$(3)\quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}=(2+3+3)\mathbf{c}=\{8,-16,0\}$$

$$(4)\quad (\mathbf{a}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & -3 & 1\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}\cdot\mathbf{b}=\{2,1,-1\}\cdot\{1,-1,3\}=2-1-3=-2$$

$$(5)\quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -4 & 4\\ 1 & -2 & 0\end{vmatrix}=\{8,4,-2\}$$

题 19: 设平行四边形相邻边是向量 $\mathbf{a}=\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$ 与 $\mathbf{b}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$，求平行四边形的面积。
解:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=-8\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$$

该平行四边形的面积是

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|=3\sqrt{10}$$

题 20: 求与$\vec{a}=\{1,-3,1\}$、$\vec{b}=\{2,-1,3\}$都垂直的单位向量
解:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}=\{-8,-1,5\}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{64+1+25}=3\sqrt{10}$$

所以所求单位向量是$\left\{-\frac{8}{3\sqrt{10}},-\frac{1}{3\sqrt{10}},\frac{5}{3\sqrt{10}}\right\}$或$\left\{\frac{8}{3\sqrt{10}},\frac{1}{3\sqrt{10}},-\frac{5}{3\sqrt{10}}\right\}$.

题 21: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$.

解：

$$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$$
$$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$$
$$\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$$

运用行列式性质：交换两行位置所得行列式值差一负号.

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3\\a_1&a_2&a_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\c_1&c_2&c_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c_1&c_2&c_3\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

题 22: 已知$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=26,|\vec{a}\times\vec{b}|=72,$求：$\vec{a}\cdot\vec{b}.$
解：　$|\vec{a}\times\vec{b}|=72=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=3\times 26\times\sin\theta$
得

$$\sin\theta=\frac{12}{13}$$
$$\cos\theta=\pm\sqrt{1-\sin^2\theta}=\pm\frac{5}{13}$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\pm 30$$

题 23: 设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$均为非零向量，且

$$\vec{a}=\vec{b}\times\vec{c}$$
$$\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$$
$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

求：$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|.$
解：
注：$|\mathbf{a}|=|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|=|\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin\theta,$　其中 θ是$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$之间的夹角。
从三个等式知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$相互正交，因此

$$|\vec{a}|=|\vec{b}||\vec{c}|$$
$$|\vec{b}|=|\vec{c}||\vec{a}|$$
$$|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|$$

而$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$均为非零向量，解得

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

所以

$$|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=3$$

题 24: 已知：$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=5,|\vec{c}|=6,$且

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$$

求：$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

解： 解：$0=\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$ 所以

$$\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}=-35$$

题 25: 已知$\vec{a}+3\vec{b}$与$7\vec{a}-5\vec{b}$垂直，且$\vec{a}-4\vec{b}$与$7\vec{a}-2\vec{b}$垂直，求$\vec{a},\vec{b}$的夹角.

解： 由题得

$$\begin{cases}(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(7\vec{a}-5\vec{b})=7\vec{a}^2-15\vec{b}^2+21\vec{a}\cdot\vec{b}=0\\(\vec{a}-4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-2\vec{b})=7\vec{a}^2+8\vec{b}^2-28\vec{a}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}\vec{a}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}\\\vec{b}^2=2\vec{a}\cdot\vec{b}\end{cases}$$

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}$$

$$\text{所以}\vec{a},\vec{b}\text{的夹角为}\theta=\frac{\pi}{3}$$

第二讲：平面与空间直线

$$Ax+By+Cz+D=0, \qquad (3-4)$$

当 $D=0$ 时，方程 (3-4) 成为 $Ax+By+Cz=0$，它表示一个通过原点的平面。

当 $A=0$ 时，方程 (3-4) 成为 $By+Cz+D=0$，法向量 $\mathbf{n}=(0,B,C)$ 垂直于 x 轴，方程表示一个平行于（或包含）x 轴的平面。

同样，方程 $Ax+Cz+D=0$ 和 $Ax+By+D=0$ 分别表示一个平行于（或包含）y 轴和 z 轴的平面。

当 $A=B=0$ 时，方程 (3-4) 成为 $Cz+D=0$ 或 $z=-\frac{D}{C}$，法向量 $\mathbf{n}=(0,0,C)$ 同时垂直于 x 轴和 y 轴，方程表示一个平行于（或重合于）xOy 面的平面。

同样，方程 $Ax+D=0$ 和 $By+D=0$ 分别表示一个平行于（或重合于）yOz 面和 zOx 面的平面。

题 26: 设直线 L_1：

$$\begin{cases} x+2y-z=7 \\ -2x+y+z=7 \end{cases} \qquad \text{直线}L_2: \quad \begin{cases} 3x+6y-3z=8 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

证明直线 L_1 与直线 L_2 平行。

解: 由题知直线 L_1 的方向向量

$$\vec{a}=(3,1,5)$$

直线 L_2 的方向向量

$$\vec{b}=(-9,-3,-15)$$

故

$$\vec{b}=-3\vec{a}$$

所以

$$L_1 \parallel L_2$$

题 27: 用点向式方程及参数式方程表示直线 L:$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$

解: 解法一 (1) 任选直线 L 上一点 $\left(0,\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$，可取直线 L 的方向向量

$$\vec{s}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\langle -2,1,3\rangle$$

故 L 的点向式方程为

$$L: \frac{x-0}{-2}=\frac{y-\frac{3}{2}}{1}=\frac{z-\frac{5}{2}}{3}$$

从而 L 的参数式方程为

$$L:\begin{cases}x=-2t\\ y=\frac{3}{2}+t\\ z=\frac{5}{2}+3t\end{cases}$$

解法二：由 L 式可得

$$L:\begin{cases}x=x\\ y=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x\\ z=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}x\end{cases}$$

于是 L 参数式方程为

$$L:\begin{cases}x=t\\ y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}t\\ z=\frac{5}{2}-\frac{3}{2}t\end{cases}$$

从而 L 的点向式方程为

$$L:\frac{x-0}{1}=\frac{y-\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-\frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}}$$

题 28: 求下列各平面的方程:

1. 过点 $(2,1,1)$ 且与直线 $\begin{cases}x+2y-z+1=0\\ 2x+y-z=0\end{cases}$ 垂直.
2. 过两平行直线 $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{-2}=z$ 和 $\frac{x+3}{3}=\frac{y+4}{-2}=z+1$
3. 过直线 $\begin{cases}x+y+z=0\\ 2x-y+3z=0\end{cases}$ 且平行于直线 $x=2y=3z$.

解: (1) 已知直线的方向为

$$\vec{s}=\{1,2,-1\}\times\{2,1,-1\}=\{-1,-1,-3\}$$

由点法式知平面方程为

$$(x-2)+(y-1)+3(z-1)=0$$

即

$$x+y+3z-6=0$$

(2) 所求平面的法向量

$$\vec{n}=\{0,2,1\}\times\{3,-2,1\}=\{4,3,-6\}$$

在第一条直线上取一点 $(-3,-2,0)$，由点法式知平面方程为

$$4(x+3)+3(y+2)-6z=0$$

即

$$4x+3y-6z+18=0$$

(3) 第一条直线的方向为

$$\vec{s_1}=\{1,1,1\}\times\{2,-1,3\}=\{4,-1,-3\}$$

过点 $(0,0,0)$，所以所求平面的法向量

$$\vec{n}=\{4,-1,-3\}\times\{6,3,2\}=\{7,-26,18\}$$

由点法式知平面方程为

$$7x-26y+18z=0$$

题 29: 求过点 (3,0,-1) 且与平面 3x−7y+5z−12=0 平行的平面方程.

解: 所求平面与已知平面 3x−7y+5z−12=0 平行.

因此所求平面的法向量可取为

$$n=(3,-7,5)$$

设所求平面为

$$3x-7y+5z+D=0$$

将点 (3,0,-1) 代入上式得

$$D=-4$$

故所求平面方程为

$$3x-7y+5z-4=0$$

题 30: 求过点 $M_0(2,9,-6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

解: $\overrightarrow{OM_0}=(2,9,-6)$

所求平面与 $\overrightarrow{OM_0}$ 垂直, 可取

$$n=\overrightarrow{OM_0}$$

设所求平面方程为

$$2x+9y-6z+D=0$$

将点 $M_0(2,9,-6)$ 代入上式得

$$D=-121$$

故所求平面方程为

$$2x+9y-6z-121=0$$

题 31: 求过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行的平面方程.

解: 解：所求平面与已知平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行.

因此所求平面的法向量可取为

$$n=(3,-7,5)$$

设所求平面为

$$3x-7y+5z+D=0$$

将点 $(3,0,-1)$ 代入上式得

$$D=-4$$

故所求平面方程为

$$3x-7y+5z-4=0$$

题 32: 求过点 $(1,1,-1)$, $(-2,-2,2)$ 和 $(1,-1,2)$ 三点的平面方程.

解: 由

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ -2-1 & -2-1 & 2+1 \\ 1-1 & -1-1 & 2+1 \end{vmatrix} = 0,$$

得

$$x-3y-2z=0$$

即为所求平面方程.

题 33: 求平面 $2x-2y+z+5=0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

解: 平面的法向量为

$$n=(2,-2,1)$$

设平面与三个坐标面 xOy, yOz, zOx 的夹角分别为 θ_1, θ_2, θ_3. 则根据平面的方向余弦知

$$\cos\theta_1=\cos\gamma=\frac{n\cdot k}{|n||k|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}\cdot 1}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\theta_2=\cos\alpha=\frac{n\cdot i}{|n||i|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(1,0,0)}{3\cdot 1}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\theta_3=\cos\beta=\frac{n\cdot j}{|n||j|}=\frac{(2,-2,1)\cdot(0,1,0)}{3\cdot 1}=-\frac{2}{3}$$

题 34: 设一平面过点 $M_0(1,2,-1)$ 且垂直于平面

$$3x-4y+z+16=0$$

和

$$4x-z+6=0$$

试求这平面方程.

解: 设所求平面的法向量为 n, $M(x,y,z)$ 为平面上任一点, 则向量 $\overrightarrow{M_0M}=(x-1,y-2,z+1)$ 与 n 垂直.

记两已知平面的法向量分别为 n_1, n_2, 则

$$n_1=(3,-4,1),\quad n_2=(4,0,-1)$$

按题意,

$$n\perp n_1,\quad n\perp n_2$$

故可取 $n=n_1\times n_2$, 从而有

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot(n_1\times n_2)=0$$

即向量 $\overrightarrow{M_0M}$, n_1, n_2 共面, 故

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

得所求平面方程为

$$4x+7y+16z-2=0$$

题 35: 求三平面 $x+3y+z=1$, $2x-y-z=0$, $-x+2y+2z=3$ 的交点.

解: 联立三平面方程

$$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y-z=0 \\ -x+2y+2z=3 \end{cases}$$

解此方程组得

$$x=1,\ y=-1,\ z=3$$

故所求交点为 $(1,-1,3)$.

题 36: 分别按下列条件求平面方程:

1. 平行于 xOz 面且经过点 $(2,-5,3)$.
2. 通过 z 轴和点 $(-3,1,-2)$.
3. 平行于 x 轴且经过两点 $(4,0,-2)$ 和 $(5,1,7)$.

解: 1. 所求平面平行于 xOz 面, 故设所求平面方程为

$$By+D=0$$

将点 $(2,-5,3)$ 代入, 得

$$-5B+D=0$$

即

$$D=5B$$

因此所求平面方程为

$$By+5B=0$$

即

$$y+5=0$$

2. 所求平面过 z 轴, 故设所求平面为

$$Ax+By=0$$

将点 $(-3,1,-2)$ 代入, 得

$$-3A+B=0$$

即

$$B=3A$$

因此所求平面方程为

$$Ax+3Ay=0$$

即

$$x+3y=0$$

3. 所求平面平行于 x 轴, 故设所求平面方程为

$$By+Cz+D=0$$

将点 $(4,0,-2)$ 及 $(5,1,7)$ 分别代入方程得

$$-2C+D=0$$

及

$$B+7C+D=0$$

从而解得

$$C=\frac{D}{2}$$

$$B=-\frac{9}{2}D$$

因此, 所求平面方程为

$$-\frac{9}{2}Dy+\frac{D}{2}z+D=0$$

即

$$9y-z-2=0$$

题 37: 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解: 利用点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|1+2\cdot 2+2\cdot 1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-3|}{3}=1$$

题 38: 求平面 $x-2y+2z+21=0$ 与 $7x+24z-5=0$ 的夹角的平分面的方程.

解: 设平分面上任一点为 (x,y,z)，该点到两平面的距离应相等，所以有

$$\frac{|x-2y+2z+21|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|7x+24z-5|}{\sqrt{7^2+24^2}}$$

即有

$$46x-50y+122z+510=0$$

及

$$4x-50y-22z+540=0$$

化简得

$$23x-25y+61z+255=0$$

及

$$2x-25y-11z+270=0$$

题 39: 已知原点到平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 的距离为 d，试证

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}$$

解: 证明：平面方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 变形为

$$bcx+acy+abz-abc=0$$

所以依题意原点到平面 $bcx+acy+abz-abc=0$ 的距离

$$d=\frac{|0\cdot bc+0\cdot ac+0\cdot ad-abc|}{\sqrt{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}}$$

化简得

$$\frac{(bc)^2+(ac)^2+(ab)^2}{a^2b^2c^2}=\frac{1}{d^2}$$

即

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{d^2}$$

故原题得证.

题 40: 若平面 π 到两平行平面

$$\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$$

$$\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$$

的距离相等，求它的方程.

解: 设平面 π 上任一点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到两平行平面

$$\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$$

$$\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$$

的距离相等，因此有

$$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D_1=\pm(Ax_0+By_0+Cz_0+D_2)$$

可得

$$D_1=D_2 \quad (\text{舍去, 因为此时平面 } \pi_1, \pi_2 \text{ 重合})$$

以及

$$2(Ax_0+By_0+Cz_0)=-(D_1+D_2)$$

即

$$Ax_0+By_0+Cz_0+\frac{1}{2}(D_1+D_2)=0$$

故平面 π 的方程为

$$Ax+By+Cz+\frac{1}{2}(D_1+D_2)=0$$

题 41: 求两平行平面

$$Ax+By+Cz+D_1=0$$

与

$$Ax+By+Cz+D_2=0$$

之间的距离.

解: 平面

$$\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0$$

与

$$\pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$$

的法向量均为

$$\vec{n_1}=\vec{n_2}=\{A,B,C\}$$

任取平面 π_1 上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则 π_1 与 π_2 之间的距离即为点 P_0 到平面 π_2 的距离，故由点到平面的距离公式，有

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad ①$$

又因点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 在平面 π_1 上，故

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D_1=0$$

即

$$Ax_0+By_0+Cz_0=-D_1 \quad ②$$

于是将 ② 代入 ① 得到

$$d=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

题 42: 求满足下列条件的平面方程：与坐标轴的截距相同且过点 $(6,2,-4)$.

解：　设所求平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{a}=1$$

将点 $(6,2,-4)$ 代入方程，得

$$\frac{6}{a}+\frac{2}{a}-\frac{4}{a}=1$$

解得

$$a=4$$

故所求方程为

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$$

即

$$x+y+z=4$$

题 43: 求点 $(2,3,-1)$ 到直线 $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=13+4t\end{cases}$ 的距离.

解：　方法一设点 $M_0(2,3,-1)$，已知直线 L 的方向向量

$$s_L=(1,1,4)$$

又

$$M_1(1,2,13)\in L$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}=(1,1,-14)$$

$$|s_L|=\sqrt{1^2+1^2+4^2}=3\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{M_1M_0}\times s_L=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&1&-14\\1&1&4\end{vmatrix}=18(\mathbf{i}+\mathbf{j})$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_0}\times s_L\right|=18\sqrt{2}$$

由点到直线的距离公式

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{M_1M_0}\times s_L\right|}{|s_L|}=\frac{18\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=6$$

方法二

设点 $M_0(2,3,-1)$，已知直线 L 的方向向量

$$s_L=(1,1,4)$$

又

$$M(1+t,2+t,13+4t)\in L$$
$$\overrightarrow{MM_0}=(1-t,1-t,-14-4t)$$

下面求 t 使得 $\overrightarrow{MM_0}\perp s_L$，即

$$\overrightarrow{MM_0}\cdot s_L=0$$

即

$$1\cdot(1-t)+1\cdot(1-t)-4\cdot(14+4t)=0$$

解得

$$t=-3$$

从而得

$$\overrightarrow{MM_0}=(4,4,-2)=2(2,2,-1)$$

所求距离为

$$d=|\overrightarrow{MM_0}|=2\cdot\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=6$$

题 44: 求平面 $x+y-11=0$ 与 $3x+8=0$ 的夹角.

解: 由两平面的余弦表达式得，

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}=\frac{1\times 3}{\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

解得

$$\theta=\frac{\pi}{4}$$

题 45: 求平行于平面 $x+y+z=100$ 且与球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 相切的平面方程.

解: 因为所求切平面与已知平面平行，则切平面方程为

$$x+y+z+D=0$$

由于球心到切平面距离等于 2，于是

$$d=\frac{|D|}{\sqrt{3}}=2$$

从而

$$D=\pm 2\sqrt{3}$$

故所求平面方程为

$$x+y+z+2\sqrt{3}=0$$

和

$$x+y+z-2\sqrt{3}=0$$

题 46: 求满足下列条件的平面方程：过点 $(4,0,-2)$, $(5,1,7)$ 且平行于 x 轴.

解: 设 $A=(4,0,-2)$, $B(5,1,7)$，则

$$\overrightarrow{AB}=(1,1,9)$$

又 x 轴的单位向量为

$$e_x=(1,0,0)$$

由题意可知所求平面的法向量 n 应垂直于 $\overrightarrow{AB}$ 且垂直于 Ox，即

$$n = \overrightarrow{AB} \times e_x = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 9\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

故所求平面的方程为

$$(y-0) \times 9 - (z+2) \cdot 1 = 0$$

即

$$9y - z - 2 = 0$$

题 47: 求点 $(-1,2,0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影点的坐标.

解: 设 $M_0(-1,2,0)$，平面的法向量 $\vec{n} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$，过点 $M_0(-1,2,0)$，取方向向量 $\vec{s} = \vec{n} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ 作直线，其方程为

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-0}{-1} = t$$

得直线的参数方程

$$x = t-1, \quad y = 2t+2, \quad z = -t \quad ①$$

代入已知平面方程解得

$$t = -\frac{2}{3}$$

代入 ①，得

$$x = -\frac{5}{3}, \quad y = \frac{2}{3}, \quad z = \frac{2}{3}$$

即得投影点坐标为 $\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

题 48: 求下列各直线的方程: 1. 过点 $(3,4,-4)$，其方向角为 $60°$、$45°$、$120°$. 2. 过点 $(0,-3,2)$，且与两点 $(3,4,-7)$，$(2,7,-6)$ 的连线平行. 3. 过点 $(2,-3,4)$，且与平面 $3x-y+2z=4$ 垂直. 4. 过点 $(-1,2,1)$，且平行于直线 $\begin{cases} x+y-2z-1=0 \\ x+2y-z+1=0 \end{cases}$. 5. 过点 $(0,2,4)$，且与两平面 $x+2z=1$，$y-3z=0$ 平行.

解: 1. 所求直线的方向向量为

$$\vec{s} = \{\cos 60°, \cos 45°, \cos 120°\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$$

由直线的点向式方程知所求直线方程为

$$x-3 = \frac{y-4}{\sqrt{2}} = -z-4$$

2. 所求直线的方向向量为

$$\vec{s} = \{-1,3,1\}$$

由直线的点向式方程知所求直线方程为

$$-x = \frac{y+3}{3} = z-2$$

(3) 所求直线的方向向量为

$$\vec{s} = \{3,-1,2\}$$

由直线的点向式方程知所求直线方程为

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-4}{2}$$

(4) 所求直线的方向向量为

$$\vec{s}=\{1,1,-2\}\times\{1,2,-1\}=\{3,-1,1\}$$

由直线的点向式方程知所求直线方程为

$$\frac{x+1}{3}=2-y=z-1$$

(5) 所求直线的方向向量为

$$\vec{s}=\{1,0,2\}\times\{0,1,-3\}=\{-2,3,1\}$$

由直线的点向式方程知所求直线方程为

$$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=z-4$$

题 49: 求两平面 $2x-y+z-6=0$ 与 $x+y+2z-5=0$ 的夹角.

解: 两平面的法向量分别为

$$\vec{n}_1=\{2,-1,1\}$$

$$\vec{n}_2=\{1,1,2\}$$

则

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{|2\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot2|}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}}=\frac{1}{2}$$

所以两平面的夹角

$$\theta=\frac{\pi}{3}$$

题 50: 求点 $(1,2,1)$ 到平面 $x+2y+2z-10=0$ 的距离.

解: 利用点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1+2\cdot2+2\cdot1-10|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{|-3|}{3}=1$$

题 51: 求下列各平面的方程:

1. 过点 $(3,0,-1)$ 且与平面 $3x-7y+5z-12=0$ 平行.
2. 过点 $(1,-1,1)$ 且与两平面 $x-y+z-1=0$ 和 $2x+y+z-1=0$ 垂直.
3. 过点 $(5,0,0)$、$(0,-1,0)$ 且平行于 z 轴.
4. 过点 $(1,1,1)$、$(2,2,2)$ 且与平面 $x+y-z=0$ 垂直.
5. 过三点 $(0,0,0)$、$(1,1,1)$、$(2,-1,4)$.
6. 过点 $(1,1,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a}=\{1,2,1\}$，$\vec{b}=\{2,1,1\}$.

解: 解：1. 平面 $3x-7y+5z-12=0$ 的法向量是

$$\vec{n}=\{3,-7,5\}$$

因此所求平面的法向量也为

$$\vec{n}=\{3,-7,5\}$$

由平面的点法式方程知所求平面方程为

$$3(x-3)-7y+5(z+2)=0$$

即

$$3x-7y+5z-4=0$$

2. 所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\{1,-1,1\}\times\{2,1,1\}=\{-2,1,3\}$$

由平面的点法式方程知所求平面方程为

$$-2(x-1)+(y+1)+3(z-1)=0$$

即

$$-2x+y+3z=0$$

3. 所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\{5,1,0\}\times\{0,0,1\}=\{1,-5,0\}$$

由平面的点法式方程知所求平面方程为

$$(x-5)-5y=0$$

即

$$x-5y-5=0$$

4. 所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\{1,1,1\}\times\{1,1,-1\}=\{-2,2,0\}$$

由平面的点法式方程知所求平面方程为

$$(x-1)-(y-1)=0$$

即

$$x-y=0$$

5. 所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\{1,1,1\}\times\{2,-1,4\}=\{5,-2,-3\}$$

由平面的点法式方程知所求平面方程为

$$5x-2y-3z=0$$

6. 所求平面的法向量为

$$\vec{n}=\{1,2,1\}\times\{2,1,1\}=\{1,1,-3\}$$

由平面的点法式方程知所求平面方程为

$$(x-1)+(y-1)-3(z+1)=0$$

即

$$x+y-3z-5=0$$

题 52: 指出在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中下列方程所表示平面的特点:

1. $x=0$;

2. $z=a$;

3. $Ax+By=0$;

4. $Ax+By+D=0$;

5. $Ax+By+Cz=0$;

6. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

解:

1. $x=0$ 表示 Oyz 平面;

2. $z=a$ 表示平行于 Oxy 的平面;

3. $Ax+By=0$ 表示过 z 轴的平面;

4. $Ax+By+D=0$ 表示平行于 z 轴的平面;

5. $Ax+By+Cz=0$ 表示过原点 O 的平面;

6. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 表示在三个坐标轴上的截距分别为 a,b,c 的平面.

题 53: 求通过 x 轴和点 (4, -3, -1) 的平面的方程.

解: 由于平面通过 x 轴,从而它的法向量垂直于 x 轴,于是法向量在 x 轴上的投影为零,即 A = 0; 又由平面通过 x 轴,它必通过原点,于是 D = 0. 因此可设这平面的方程为

$$By+Cz=0.$$

又因这平面通过点 (4, -3, -1),所以有

$$-3B-C=0, \quad \text{或} \quad C=-3B.$$

以此代入所设方程并除以 B (B $\neq 0$),便得所求的平面方程为

$$y-3z=0.$$

题 54: 一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 x+y+z=0,求它的方程.

解: 设所求平面的一个法向量为

$$\mathbf{n}=(A,B,C).$$

因 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,0,-2)$ 在所求平面上,它必与 $\mathbf{n}$ 垂直,所以有 -A - 2C = 0. (3-9)
又因所求的平面垂直于已知平面 x + y + z = 0,所以又有

$$A+B+C=0. \quad \text{(3-10)}$$

由式 (3-9)、式 (3-10) 得到

$$A=-2C, \quad B=C.$$

由平面的点法式方程可知,所求平面方程为

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0.$$

将 A = -2C 及 B = C 代入上式，并约去 C（ C ≠ 0 ），便得

$$-2(x-1)+(y-1)+(z-1)=0,$$

即

$$2x-y-z=0.$$

这就是所求的平面方程.

题 55: 平行于向量 **a**= (2, 1, -1) 且在 x 轴、 y 轴上的截距依次为 3 和 -2.

解: 由平面的截距式，可设平面方程为

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{c}=1$$

由平面平行于向量 **a**，即平面的法向量

$$\mathbf{n}\perp\mathbf{a}$$

从而

$$\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{c}\right)\cdot(2,1,-1)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{c}=0$$

可得

$$c=6$$

从而平面方程为

$$\frac{x}{3}-\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$$

题 56: 求下列特殊位置的平面方程:

1. 平行于 yoz 面且经过点 $(2,-5,3)$；
2. 通过 z 轴和点 $(2,-4,1)$；
3. 平行于 y 轴且经过两点 $(1,-2,3)$ 和 $(-6,-2,7)$；

解: (1) 平行于 yoz 面的平面可设为

$$Ax+D=0$$

由于平面通过点 $(2,-5,3)$，故

$$2A+D=0$$

即

$$D=-2A$$

把上式代入所设方程，得

$$x-2=0$$

(2) 因为所求平面通过 z 轴，必然平行于 z 轴，故

$$C=0$$

又因为平面通过原点，所以

$$D=0$$

于是可设平面方程为

$$Ax+By=0$$

由于平面通过点 $(2,-4,1)$，故

$$2A-4B=0$$

即

$$A=2B$$

把上式代入所设方程，得

$$2x+y=0$$

(3) 因为所求平面平行于 y 轴，于是可设平面方程为

$$Ax+Cz+D=0$$

由于平面经过两点 $(1,-2,3)$ 和 $(-6,-2,7)$，故

$$\begin{aligned} A+3C+D&=0 \\ -6A+7C+D&=0 \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} A&=-\frac{4}{25}D \\ C&=-\frac{7}{25}D \end{aligned}$$

把上式代入所设方程，得

$$4x+7z-25=0$$

题 57: 推导两平行平面 $Ax+By+Cz+D_i=0, i=1,2$ 之间的距离公式；

并求将两平行平面 $x-2y+z-2=0$ 与 $x-2y+z-6=0$ 之间距离分成 $1:3$ 的平面方程.

解: 在平面 $Ax+By+Cz+D_2=0$ 上取一点 $P(x_0,y_0,z_0)$，则两平面的距离为点 P 到平面 $Ax+By+Cz+D_1=0$ 的距离，即

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 满足 $Ax_0+By_0+Cz_0=-D_2$，所以两平面的距离为

$$d=\frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

两已知平面的距离为

$$d=\frac{|-2-(-b)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{6}}$$

设所求平面为

$$x-2y+z+D=0$$

与两已知平面的距离为 $\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ 和 $\dfrac{3}{\sqrt{6}}$，则由

$$\frac{|D+2|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

和

$$\frac{|D+6|}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

解得

$$D=-3$$

或由

$$\frac{|D+2|}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}$$

和

$$\frac{|D+6|}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

解得

$$D=-5$$

从而所求平面方程为

$$x-2y+z-3=0$$

或

$$x-2y+z-5=0$$

题 58: 确定 k 的值，使平面 $x+ky-2z=9$ 满足下列条件之一:

1. 经过点 $(5,-4,-6)$;
2. 与 $2x+4y+3z=3$ 垂直;
3. 与 $3x-7y-6z-1=0$ 平行;
4. 与 $2x-3y+z=0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角;
5. 与原点的距离等于 3;
6. 在 y 轴上的截距为 -3.

解: (1) 将已知点代入题设方程可得

$$k=2$$

(2) 两平面的法向量垂直，故

$$2+4k-6=0$$

所以

$$k=1$$

(3) 两平面的法向量平行，故

$$\frac{1}{3}=\frac{k}{-7}=\frac{-2}{-6}$$

所以

$$k=-\frac{7}{3}$$

(4) $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|2\cdot1-3k-1\cdot2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1}\cdot\sqrt{1+k^2+(-2)^2}}$ 则

$$k=\pm\frac{1}{2}\sqrt{70}$$

(5) 因为

$$3=\frac{|-9|}{\sqrt{1+k^2+2^2}}$$

所以

$$k = \pm 2$$

(6) 化为截距式

$$\frac{x}{9} + \frac{y}{9/k} + \frac{z}{-9/2} = 1$$

则

$$\frac{9}{k} = -3$$

即

$$k = -3$$

第三讲：曲面与空间曲线 & 多元函数

题 59: 求下列球面的球心与半径：(1) $x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z=0$; (2) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$.

解：(1) 原式可化为

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$$

所以球心为 (1,2,3)，半径为 $\sqrt{14}$.

(2) 原式可化为

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=36$$

所以球心为 (1,-2,3)，半径为 6.

题 60: 考察曲面 $x^2+y^2-\frac{z^2}{9}=0$ 在下列平面上的截线:

1. $z=0$;
2. $z=3$;
3. $z=-3$;
4. $x=0$;
5. $x=\frac{1}{3}$.

解：解：(1) 截线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=0 \\ z=0 \end{cases}$$

即为坐标原点.

(2) 截线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{cases}$$

它是平面 $z=3$ 以 $(0,0,3)$ 为圆心的单位圆.

(3) 截线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=-3 \end{cases}$$

它是平面 $z=-3$ 以 $(0,0,-3)$ 为圆心的单位圆.

(4) 截线方程为

$$\begin{cases} 9y^2-z^2=0 \\ x=0 \end{cases}$$

它是平面 Oyz 上的两条直线

$$\begin{cases} 3y+z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} 3y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

.

(5) 截线方程为

$$\begin{cases} z^2-9y^2=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

它是平面 $x=\frac{1}{3}$ 上的一条双曲线.

题 61: 考察曲面 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{4}=1$ 在下列平面上的截线:

1. $y=5$;
2. $z=1$;
3. $z=2$;
4. $z=2\sqrt{2}$.

解: (1) 截线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}+\frac{z^2}{4}=2 \\ y=5 \end{cases}$$

它是平面 $y=5$ 上的一个椭圆.

(2) 截线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=\frac{3}{4} \\ z=1 \end{cases}$$

它是平面 $z=1$ 上的一条双曲线.

(3) 截线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=0 \\ z=2 \end{cases}$$

它是平面 $z=2$ 上的两条直线

$$\begin{cases} 5x+3y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} 5x-3y=0 \\ z=2 \end{cases}$$

(4) 截线方程为:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=-1 \\ z=2\sqrt{2} \end{cases}$$

它是平面 $z=2\sqrt{2}$ 上的一条双曲线.

题 62: 已知柱面的母线平行于 z 轴，准线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1 \\ z=2 \end{cases}$$

求此柱面的方程.

解: 消去 z 得柱面的方程

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\frac{5}{9}$$

即

$$9x^2+4y^2=20$$

题 63: 求平面 $z=0$ 上的圆 $x^2+y^2-4x+3=0$ 绕 y 轴旋转所形成的圆环面的方程.

解: 因为该圆环面上的点 (x,y,z) 与圆 $x^2+y^2-4x+3=0$ 上的点 $(x_0,y,0)$ 到 y 轴的距离相等

即

$$x^2+z^2=x_0^2$$

由于

$$(x_0-2)^2+y^2=1$$

得

$$x_0 \geq 1$$

可取 $x_0=\sqrt{x^2+z^2}$，代入圆方程得

$$x^2+y^2+z^2-4\sqrt{x^2+z^2}+3=0$$

题 64: 求下列曲线在坐标平面 Oxy 上的投影曲线方程:

(1)

$$\begin{cases} x^2+y^2+9z^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} y=2xz \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

解: (1) 消去 z，得投影柱面的方程

$$x^2+y^2=\frac{1}{10}$$

所以此曲线在坐标平面 Oxy 上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{10} \\ z=0 \end{cases}$$

(2) 消去 z 得投影柱面的方程

$$y=2x(1-x-y)$$

所以此曲线在坐标平面 Oxy 上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} y=2x(1-x-y) \\ z=0 \end{cases}$$

题 65: 求两球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 和 $x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ 的交线在坐标平面 Oyz 上的投影曲线方程，并说明投影是什么曲线.

解: 消去 x，得投影柱面的方程

$$y+z-1=0$$

所以此曲线在坐标平面 Oyz 上的投影曲线方程为

$$\begin{cases} y+z-1=0 \\ x=0 \quad (0\le y,z\le 1) \end{cases}$$

这是坐标平面 Oyz 上的直线段.

题 66: 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$$

的柱面方程.

解: 在

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$$

中消去 x，得

$$3y^2-z^2=16$$

即为母线平行于 x 轴且通过已知曲线的柱面方程.

在

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+z^2-y^2=0 \end{cases}$$

中消去 y，得

$$3x^2+2z^2=16$$

即为母线平行于 y 轴且通过已知曲线的柱面方程.

题 67: 求下列两曲面的交线在 xOy 面上的投影的方程:

(1) 球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 与平面 $x+z=1$;

(2) 椭球面 $x^2+y^2+4z^2=1$ 与圆锥面 $z^2=x^2+y^2$.

解: (1) 在

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ x+z=1 \end{cases}$$

中消去 z，得

$$2x^2-2x+y^2=8$$

它表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面，故两曲面的交线在 xOy 面上的投影的方程为

$$\begin{cases} 2x^2-2x+y^2=8 \\ z=0 \end{cases}$$

(2) 在

$$\begin{cases} x^2+y^2+4z^2=1 \\ z^2=x^2+y^2 \end{cases}$$

中消去 z，得

$$x^2+y^2=\frac{1}{5}$$

它表示母线平行于 z 轴的圆柱面，故两曲面的交线在 xOy 面上的投影的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2=\frac{1}{5}\\z=0\end{cases}$$

题 68: 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

(1)

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9\\y=x\end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\\z=0\end{cases}$$

解: (1) 将 $y=x$ 代入 $x^2+y^2+z^2=9$，得

$$2x^2+z^2=9$$

取 $x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t$，则

$$z=3\sin t$$

从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t\\y=\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t,\quad(0\le t<2\pi)\\z=3\sin t\end{cases}$$

(2) 将 $z=0$ 代入 $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$，得

$$(x-1)^2+y^2=3$$

取 $x-1=\sqrt{3}\cos t$，则

$$y=\sqrt{3}\sin t$$

从而可得该曲线的参数方程

$$\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos t\\y=\sqrt{3}\sin t\quad(0\le t<2\pi)\\z=0\end{cases}$$

题 69: 求螺旋线

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=a\sin\theta\\z=b\theta\end{cases}$$

在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

解: 由 $x=a\cos\theta$, $y=a\sin\theta$, 得

$$x^2+y^2=a^2$$

故该螺旋线在 xOy 面上的投影曲线的直角坐标方程为

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2 \\ z=0 \end{cases}$$

由 $y=a\sin\theta$, $z=b\theta$, 得

$$y=a\sin\frac{z}{b}$$

故该螺旋线在 yOz 面上的投影曲线的直角坐标方程为

$$\begin{cases} y=a\sin\frac{z}{b} \\ x=0 \end{cases}$$

由 $x=a\cos\theta$, $z=b\theta$, 得

$$x=a\cos\frac{z}{b}$$

故该螺旋线在 xOz 面上的投影曲线的直角坐标方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\frac{z}{b} \\ y=0 \end{cases}$$

题 70: 求与坐标原点 O 及点 (2,3,4) 的距离之比为 1:2 的点的全体所组成的曲面的方程.

解: 设点 (x,y,z) 满足题意，依题意有

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2},$$

化简整理，得到球心为 $\left(-\frac{2}{3},-1,-\frac{4}{3}\right)$，半径为 $\frac{2\sqrt{29}}{3}$ 的球面方程:

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{4}{3}\right)^2=\frac{116}{9}.$$

题 71: 求下列极限:

(1) $\lim_{(x,y)\to(-1,-2)}\frac{x-y+1}{xy-1}$. (2) $\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{x^2+y^2}$.

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$. (4) $\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sin xy}{x}$.

(5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}$. (6) $\lim_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解: (1) $\lim_{(x,y)\to(-1,-2)}\frac{x-y+1}{xy-1}=\frac{-1+2+1}{-1\times(-2)-1}=2$

(2) $\lim_{(x,y)\to(1,0)}\frac{\ln(x+e^y)}{x^2+y^2}=\ln 2$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1})^2-1}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2\end{aligned}$$

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{\sin xy}{x}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\left(\frac{\sin xy}{xy}y\right)=1$

(5) 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0,\quad \left|\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}\right|\le 1$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{y}=0$$

(6) 因为

$$\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \le \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$$

题 72: 讨论下列函数的连续性:

(1) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(2) $z = \frac{2}{\sin x \sin y}$.

解: (1) 因为 $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是由初等函数复合而成，只要考虑它的定义域的边界点，即 $(0,0)$ 点。由于

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = +\infty$$

故函数 $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 在平面上除原点 $(0,0)$ 外连续.

(2) 函数 $z = \frac{2}{\sin x \sin y}$ 在平面上除直线 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 和 $y = l\pi, l \in \mathbb{Z}$ 外连续.

题 73: 证明：当 $(x,y) \to (0,0)$ 时，$f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ 的极限不存在。

解: 证明：当沿 $y = k\sqrt{x}\,(k \neq 0)$ 趋于 $(0,0)$ 时，

$$f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3} = \frac{k^4}{(1+k^4)^3}$$

随 k 变化，所以 $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ 在 $(0,0)$ 处的极限不存在。

题 74: 设 $f\left(x+y, \frac{y}{x}\right) = x^2 - y^2$，求 $f(x,y)$.

解: 令 $u = x+y$，$v = \frac{y}{x}$，解得

$$x = \frac{u}{1+v}$$

$$y = \frac{uv}{1+v}$$

所以

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{1+y}\right)^2 - \left(\frac{xy}{1+y}\right)^2 = \frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

题 75: 已知函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy\tan\frac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解: $f(tx,ty) = (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty}$

$$= t^2\left(x^2 + y^2 - xy\tan\frac{x}{y}\right)$$

$$= t^2 f(x,y)$$

题 76: 试证函数 $F(x,y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv) = F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v)$$

解: 证明：$F(xy,uv) = \ln(xy)\cdot\ln(uv) = (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v)$

$$= \ln x \cdot \ln u + \ln x \cdot \ln v + \ln y \cdot \ln u + \ln y \cdot \ln v$$

$$= F(x,u) + F(x,v) + F(y,u) + F(y,v)$$

题 77: 求下列各函数的定义域:

(1) $z = \ln(y^2 - 2x + 1)$.

(2) $z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

(3) $z = \sqrt{x - \sqrt{y}}$.

(4) $z = \ln(y - x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

(5) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\ (R > r > 0)$.

(6) $u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解: (1) $\{(x, y) \mid y^2 - 2x + 1 > 0\}$

(2) $\{(x, y) \mid x + y > 0, x - y > 0\}$

(3) $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}$

(4) $\{(x, y) \mid y - x > 0, x \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}$

(5) $\{(x, y, z) \mid r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$

(6) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 \geq 0, x^2 + y^2 \neq 0\}$

题 78: 求下列各极限:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2}$.

(2) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1}$.

(5) $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\tan(xy)}{y}$.

(6) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解: (1) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1$

(2) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}} = \ln 2$

(3)

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

(4)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{1-e^{xy}} \cdot (\sqrt{2-e^{xy}}+1) = -1 \cdot 2 = -2$$

(5)

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\tan(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\tan(xy)}{xy} \cdot x = 1 \cdot 2 = 2$$

(6)

$$\begin{aligned}&\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} \\ =& \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

题 79: 证明下列极限不存在:

(1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$;

(2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$;

(3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$;

(4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{(x+y)xy}$.

解: 证明: (1) 当 (x, y) 沿着直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = \lim_{x\to0} \frac{(1+k)x}{(1-k)x} = \frac{1+k}{1-k}, \quad (k \neq 1)$$

虽然它是随着 k 的值不同而改变的，故所求极限不存在。

(2) 依次取 $(x,y)\to(0,0)$ 的两种方式：

$y=x$

$y=-x$

分别求极限：

$$\lim_{y=x}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4}=1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4+4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+4}=0$$

两种方式求得的极限值不同，故所求极限不存在.

(3) 取 $y=x$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=0$$

取 $y=-x+x^2$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x(-x+x^2)}{x^2}=-1$$

两种方式求得的极限值不同，故所求极限不存在.

(4) 取 $y=x$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x+y)}{(x+y)xy}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{2x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{2x^3}=\infty$$

故所求极限不存在.

题 80: 证明 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

解： 证明：因为

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|\le\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

要使

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$$

只要

$$\sqrt{x^2+y^2}<2\varepsilon$$

所以 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，就有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon$$

成立，即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

题 81: 10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbb{R}$，$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续。

解： 证明：设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$，因为 $f(x)$ 在 x_0 处连续，所以

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\ \text{当}|x-x_0|<\delta\ \text{时，有}$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

从而，当 $P(x, y) \in U(P_0, \delta)$ 时，

$$|x - x_0| \leq \rho(P, P_0) < \delta$$

因而有

$$|F(x, y) - F(x_0, y_0)| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

即 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续。

第四讲：多元函数的偏导数与全微分

题 82: 求下列函数对于每一个自变量的偏导数：

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad z = x^2 \ln(x^2 + y^2).\\
&(2)\quad z = xy + \frac{x}{y}.\\
&(3)\quad z = e^{xy}.\\
&(4)\quad z = e^x(\cos y + x \sin y).\\
&(5)\quad u = \ln(1 + x + y^2 + z^3).\\
&(6)\quad u = z^{xy}.\\
&(7)\quad u = \sin\frac{y}{x}\cos\frac{z}{y}.\\
&(8)\quad u = x^{\frac{y}{z}}.
\end{aligned}
$$

解：

$$
\begin{aligned}
(1)\quad & z'_x = 2x\ln(x^2+y^2) + x^2\frac{2x}{x^2+y^2} \\
& = 2x\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^3}{x^2+y^2} \\
& z'_y = x^2\frac{2y}{x^2+y^2} = \frac{2x^2y}{x^2+y^2} \\
(2)\quad & z'_x = y + \frac{1}{y} \\
& z'_y = x - \frac{x}{y^2} \\
(3)\quad & z'_x = ye^{xy} \\
& z'_y = xe^{xy} \\
(4)\quad & z'_x = e^x(\cos y + \sin y + x\sin y) \\
& z'_y = e^x(-\sin y + x\cos y) \\
(5)\quad & u'_x = \frac{1}{1+x+y^2+z^3} \\
& u'_y = \frac{2y}{1+x+y^2+z^3} \\
& u'_z = \frac{3z^2}{1+x+y^2+z^3} \\
(6)\quad & u'_x = z^{xy}y\ln z \\
& u'_y = z^{xy}x\ln z \\
& u'_z = xyz^{xy-1} \\
(7)\quad & u'_x = \cos\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cos\frac{z}{y} = -\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}\cos\frac{z}{y} \\
& u'_y = \cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\cos\frac{z}{y} + \sin\frac{y}{x}\left(-\sin\frac{z}{y}\right)\left(-\frac{z}{y^2}\right) \\
& = \frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}\cos\frac{z}{y} + \frac{z}{y^2}\sin\frac{y}{x}\sin\frac{z}{y} \\
& u'_z = \sin\frac{y}{x}\left(-\sin\frac{z}{y}\right)\frac{1}{y} = -\frac{1}{y}\sin\frac{y}{x}\sin\frac{z}{y} \\
(8)\quad & u'_x = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1} \\
& u'_y = x^{\frac{y}{z}}\frac{\ln x}{z} \\
& u'_z = -x^{\frac{y}{z}}\frac{y\ln x}{z^2}
\end{aligned}
$$

题 83: 求下列函数在指定点处的偏导数：

(1) $z = x + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $z'_x(x,1)$、$z'_y(1,y)$。

(2) $z = \arctan\frac{x+y}{1+xy}$，求 $z'_x(0,0)$、$z'_y(1,1)$。

解： (1) $z(x,1) = x$

$$z'_x(x,1) = 1$$

$$z(1,y) = 1 + (y-1)\arcsin\sqrt{\frac{1}{y}}$$

$$z'_y(1,y)=\arcsin\sqrt{\frac{1}{y}}+(y-1)\frac{-\frac{1}{2}y^{-3/2}}{\sqrt{1-\frac{1}{y}}}=\arcsin\sqrt{\frac{1}{y}}-\frac{\sqrt{y-1}}{2y}$$

(2) $z(x,0)=\arctan x$

$$z'_x(x,0)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$z'_x(0,0)=1$$

$$z(1,y)=\arctan\frac{1+y}{1+y}=\frac{\pi}{4}$$

$$z'_y(1,y)=0$$

$$z'_y(1,1)=0$$

题 84: 求曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{4}$ 与平面 $y=4$ 的交线在 $x=2$ 处的切线与 Ox 轴的交角。

解: 设该角为 α，根据偏导数的几何意义知，切线对 Ox 轴的斜率为

$$z_x(2,4)=\frac{x}{2}\Big|_{(2,4)}=1$$

即

$$\tan\alpha=1$$

即

$$\alpha=\frac{\pi}{4}$$

所以切线与 Ox 轴的交角为

$$\alpha=\frac{\pi}{4}$$

题 85: 求曲线

$$\begin{cases}x=1,\\ z=\sqrt{x^2+y^2+1}\end{cases}$$

在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴的正向之间的夹角。

解: $z(1,y)=\sqrt{2+y^2}$

$$z'_y(1,y)=\frac{y}{\sqrt{2+y^2}}$$

$$z'_y(1,1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta=\frac{\pi}{6}$$

即所求夹角为

$$\theta=\frac{\pi}{6}$$

题 86: 设 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$，求行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

的值。

解:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

题 87: 求下列函数的二阶偏导数:

1. $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.
2. $z = x^y$.
3. $z = \sin^2(ax + by)$.
4. $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解:

1. $z'_x = 4x^3 - 8xy^2$

$$z'_y = 4y^3 - 8x^2y$$

$$z''_{xx} = 12x^2 - 8y^2$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = -16xy$$

$$z''_{yy} = 12y^2 - 8x^2$$

2. $z'_x = yx^{y-1}$

$$z'_y = x^y \ln x$$

$$z''_{xx} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x$$

$$z''_{yy} = x^y(\ln x)^2$$

3. $z'_x = 2\sin(ax + by)\cos(ax + by) \cdot a = a\sin 2(ax + by)$

$$z'_y = b\sin 2(ax + by)$$

$$z''_{xx} = 2a^2\cos 2(ax + by)$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = 2ab\cos 2(ax + by)$$

$$z''_{yy} = 2b^2\cos 2(ax + by)$$

(4)

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{x}{x^2+y^2+z^2} \\
u'_y &= \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \\
u'_z &= \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \\
u''_{xx} &= \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
u''_{xy} &= u''_{yx} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
u''_{yy} &= \frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
u''_{xz} &= u''_{zx} = \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
u''_{zy} &= u''_{yz} = \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
u''_{zz} &= \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}
\end{aligned}
$$

题 88: 设 $z = x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$。

解:

$$
\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + 1
$$

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{y}
$$

$$
\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 0
$$

$$
\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -\frac{1}{y^2}
$$

题 89: 设 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$，求证 $l\frac{\partial T}{\partial l} + g\frac{\partial T}{\partial g} = 0$。

解: 因为

$$
\frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \frac{1}{g} = \frac{\pi}{\sqrt{gl}}
$$

$$
\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{l}{g}}} \cdot \left(-\frac{l}{g^2}\right) = -\frac{\pi\sqrt{l}}{g\sqrt{g}}
$$

所以

$$
l\frac{\partial T}{\partial l} + g\frac{\partial T}{\partial g} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}} - \pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 0
$$

题 90: 设 $z = e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$，求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$。

解: 因为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{x^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{y^2}e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}
\end{aligned}
$$

所以

$$
x^2\frac{\partial z}{\partial x} + y^2\frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} = 2z
$$

题 91: 求下列函数的全微分:

1. $z = x^2y^3$.

2. $z = e^{\frac{y}{x}}$.

3. $z = \ln(3x - 2y)$.

4. $z = \arcsin \frac{y}{x}$.

5. $z = \frac{xy}{x-y}$.

6. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

解:

1. $z'_x = 2xy^3$

$$z'_y = 3x^2y^2$$

$$dz = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy$$

2. $z'_x = -\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}}$

$$z'_y = \frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}$$

$$dz = e^{\frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy\right)$$

3. $z'_x = \frac{3}{3x-2y}$

$$z'_y = \frac{-2}{3x - 2y}$$

$$dz = \frac{3dx - 2dy}{3x - 2y}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad & z'_x = -\frac{y}{x^2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \\
& z'_y = \frac{1}{x\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \\
& dz = \frac{-ydx + xdy}{x^2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}} \\
(5) \quad & z'_x = \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = -\frac{y^2}{(x-y)^2} \\
& z'_y = \frac{x^2}{(x-y)^2} \\
& dz = \frac{-y^2dx + x^2dy}{(x-y)^2} \\
(6) \quad & u'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}} \\
& u'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}} \\
& u'_z = \frac{-z}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}} \\
& du = -\frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}}
\end{aligned}$$

题 92: 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1$、$y=2$ 时的全微分。

解:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{1+x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

全微分是

$$dz\Big|_{(1,2)}=\frac{1}{3}(dx+2dy)$$

题 93: 求函数 $z=\frac{y}{x}$ 当 $x=2$、$y=1$、$\Delta x=0.1$、$\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分。

解: 全增量是

$$\Delta z=\frac{1-0.2}{2+0.1}-\frac{1}{2}=-\frac{5}{42}$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

全微分是

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$
$$dz\Big|_{\substack{\Delta x=0.1\\ \Delta y=-0.2}}=-\frac{1}{2^2}\cdot 0.1+\frac{1}{2}\cdot(-0.2)=-\frac{5}{40}$$

题 94: 用全微分求下列各数的近似值:

1. $\sqrt{1.02^3+1.97^3}$.
2. $\ln\left(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1\right)$.

解: (1) 令

$$f(x,y)=\sqrt{x^3+y^3}$$

取 $x_0=1$, $y_0=2$, $\Delta x=0.02$, $\Delta y=-0.03$，求得

$$f(1,2)=\sqrt{1^3+2^3}=3$$
$$f'_x(1,2)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Bigg|_{(1,2)}=\frac{1}{2}$$
$$f'_y(1,-2)=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}\Bigg|_{(1,2)}=2$$

所以

$$\sqrt{1.02^3+1.97^3}\approx 3+0.5\times 0.02-2\times 0.03=2.95$$

(2) 令

$$f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1\right)$$

取 $x_0=1$, $y_0=1$, $\Delta x=0.03$, $\Delta y=-0.02$，求得

$$f(1,1)=0$$
$$f'_x(1,1)=\frac{\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\Bigg|_{(1,1)}=\frac{1}{3}$$
$$f'_y(1,1)=\frac{\frac{1}{4}y^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{y}-1}\Bigg|_{(1,1)}=\frac{1}{4}$$

所以

$$\ln\left(\sqrt[3]{1.03}+\sqrt[4]{0.98}-1\right)\approx\frac{1}{3}\times 0.03-\frac{1}{4}\times 0.02=0.005$$

题 95: 当圆柱体的半径 R 由 200 毫米增加到 200.5 毫米，高 H 由 1000 毫米减少到 995 毫米时，利用全微分求体积 V 变化的近似值。

解： $V=\pi R^2 H$，$dV=\pi(2RHdR+R^2dH)$

体积 V 变化的近似值为

$$\Delta V\approx\pi\left(2\times 200\times 1000\times 0.5-200^2\times 5\right)=0$$

知识点回顾：

- 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和。
- 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和
- 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和。

题 96: 在物理学中，用公式 $g=\frac{4\pi^2 l}{T^2}$ 计算重力加速度。设测得 $l=100$ 厘米，$T=2$ 秒，测量时绝对误差限为 $|\Delta l|=0.1$ 厘米，$|\Delta T|=0.004$ 秒。

求由上述公式计算重力加速度 g 的绝对误差限和相对误差限。

解：

$$\frac{\partial g}{\partial l}=\frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial T}=-\frac{8\pi^2 l}{T^3}$$

绝对误差限为

$$\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\cdot|\Delta l|+\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\cdot|\Delta T|=\frac{4\pi^2}{2^2}\times 0.1+\frac{8\pi^2\times 100}{2^3}\times 0.004=\frac{\pi^2}{2}$$

相对误差限为

$$\frac{\left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\cdot|\Delta l|+\left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\cdot|\Delta T|}{g}=\frac{1}{l}|\Delta l|+\frac{2}{T}|\Delta T|=\frac{1}{100}\times 0.1+\frac{2}{2}\times 0.004=\frac{1}{200}$$

题 97: 验证：

1. $y=e^{-kn^2t}\sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.
2. $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

解： (1) 因为

$$\frac{\partial y}{\partial t}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-kn^2t}\cos nx$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(ne^{-kn^2t}\cos nx\right)=-n^2e^{-kn^2t}\sin nx$$

所以

$$\frac{\partial y}{\partial t}=k\left(-n^2e^{-kn^2t}\sin nx\right)=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(2) 因为

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

由函数关于自变量的对称性，得

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{r^2 - y^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - z^2}{r^3}$$

所以

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} = \frac{2}{r}$$

题 98: 设 $f(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^4}}$，求 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$。

解:

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\sqrt{(\Delta x)^2}} - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{|\Delta x|} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

上述极限不存在，所以 $f_x(0,0)$ 不存在；

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{\sqrt{(\Delta y)^4}} - 1}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{(\Delta y)^2} - 1}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y} = 0$$

题 99: 求函数 $z = e^{xy}$ 当 $x = 1$，$y = 1$，$\Delta x = 0.15$，$\Delta y = 0.1$ 时的全微分。

解: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = ye^{xy}\Delta x + xe^{xy}\Delta y$

当 $x = 1$，$y = 1$，$\Delta x = 0.15$，$\Delta y = 0.1$ 时，全微分

$$dz = e\cdot 0.15 + e\cdot 0.1 = 0.25e$$

题 100: 计算 $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$ 的近似值。

解: 设 $z = \sqrt{x^3 + y^3}$，则

$$\sqrt{(x+\Delta x)^3 + (y+\Delta y)^3} = \sqrt{x^3+y^3} + \Delta z \approx \sqrt{x^3+y^3} + dz$$

$$= \sqrt{x^3+y^3} + \frac{3x^2\Delta x + 3y^2\Delta y}{2\sqrt{x^3+y^3}}$$

取 $x = 1$，$y = 2$，$\Delta x = 0.02$，$\Delta y = -0.03$ 可得

$$\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3} \approx \sqrt{1+2^3} + \frac{3\cdot 1\cdot 0.02 + 3\cdot 2^2\cdot(-0.03)}{2\sqrt{1+2^3}} = 2.95$$

题 101: 已知边长为 $x = 6m$ 与 $y = 8m$ 的矩形，如果 x 边增加 5cm 而 y 边减少 10cm，问这个矩形的对角线的近似变化怎么样?

解: 矩形的对角线的长为

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

则

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x\Delta x + y\Delta y)$$

当 $x = 6$，$y = 8$，$\Delta x = 0.05$，$\Delta y = -0.1$ 时，

$$\Delta z \approx \frac{1}{\sqrt{6^2+8^2}}(6\cdot 0.05 - 8\cdot 0.1) = -0.05$$

即这个矩形的对角线的长减少大约 5cm。

题 102: 设 $f(x,y)=|x-y|\varphi(x,y)$，其中 $\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某邻域内连续。试问 (1) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件时，$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 存在? (2) $\varphi(x,y)$ 满足什么条件时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处是可微的?

解: (1) 由于

$$
\begin{aligned}
f'_x(0,0) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|\varphi(x,0)}{x} \\
&= \begin{cases} \varphi(0,0), & x\to 0^+ \\ -\varphi(0,0), & x\to 0^- \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'_y(0,0) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{|y|\varphi(0,y)}{y} \\
&= \begin{cases} \varphi(0,0), & y\to 0^+ \\ -\varphi(0,0), & y\to 0^- \end{cases}
\end{aligned}
$$

所以当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 存在。(2) 由上面的讨论知：当 $\varphi(0,0)\neq 0$ 时，$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 不存在，故此时 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处是不可微的。

当 $\varphi(0,0)=0$ 时，因为

$$f'_x(0,0)=0$$

$$f'_y(0,0)=0$$

$\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续，且

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\Delta f - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}\right| &= \left|\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \\
&= \left|\frac{\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| |\varphi(\Delta x,\Delta y)| \\
&\le \frac{|\Delta x|+|\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}|\varphi(\Delta x,\Delta y)| \\
&\le \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}|\varphi(\Delta x,\Delta y)| \\
&= \sqrt{2}|\varphi(\Delta x,\Delta y)|
\end{aligned}
$$

所以

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f - f'_x(0,0)\Delta x - f'_y(0,0)\Delta y}{\rho}=0$$

故当 $\varphi(0,0)=0$ 时，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微。

第五讲：复合函数和隐函数的求导法则

题 103: 设$z=u^2\ln v$，而$u=\frac{x}{y}$, $v=3x-2y$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.
解:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3\\
&=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{(3x-2y)y^2}\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)\\
&=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{(3x-2y)y^2}
\end{aligned}$$

题 104: 设$z=\arcsin(x-y)$，而$x=3t$, $y=4t^3$，求$\frac{dz}{dt}$.
解:

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dt}&=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 3+\frac{(-1)}{\sqrt{1-(x-y)^2}}\cdot 12t^2\\
&=\frac{3(1-4t^2)}{\sqrt{1-(3t-4t^3)^2}}
\end{aligned}$$

题 105: 设 $u=\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y=a\sin x$, $z=\cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.
解:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dx}&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}\\
&=\frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x+\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot(-1)\cdot(-\sin x)\\
&=\frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\sin x-a\cos x+a\cos x+\sin x)\\
&=e^{ax}\sin x
\end{aligned}$$

题 106: 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$, 而 $x=u+v$, $y=u-v$, 验证$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}$
解:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}&=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)\\
&=\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot 1+\frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot(-1)\\
&=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}
\end{aligned}$$

故等式成立.

题 107: 求下列函数的一阶偏导数 (其中f具有一阶连续偏导数):

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad u=f(x^2-y^2,e^{xy}).\\
&(2)\quad u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right).\\
&(3)\quad u=f(x,xy,xyz).
\end{aligned}
$$

解:

(1) 将中间变量 x^2-y^2, e^{xy} 依次编为 1, 2 号, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial x}(e^{xy})=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_1'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2-y^2)+f_2'\cdot\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$$

(2) 令 $s=\dfrac{x}{y}$, $t=\dfrac{y}{z}$, 则

$$u=f(s,t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{1}{y}f_s'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}f_x'+\frac{1}{z}f_t'$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}f_t'$$

(3) 将中间变量 x, xy, xyz 依次编为 1, 2, 3 号, 则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot 1+f_2'\cdot y+f_3'\cdot yz=f_1'+yf_2'+yzf_3'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\cdot x+f_3'\cdot xz=xf_2'+xzf_3'$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=f_3'\cdot xy=xyf_3'$$

题 108: 设 $z=f(x^2+y^2)$, 其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解:

令 $u=x^2+y^2$, 则 $z=f(u)$

记

$$f'=f'(u)$$

$$f''=f''(u)$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2xf'$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2yf'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2f'+4x^2f''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=4xyf''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+2yf''\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2f'+4y^2f''$$

题 109: 设 $\sin y+e^x-xy^2=0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

解:

$$
\begin{aligned}
&\text{设}\\
&F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2\\
\text{则}\quad &F_x=e^x-y^2\\
&F_y=\cos y-2xy\\
\text{当}\quad &F_y\neq 0\text{时, 有}\\
&\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{e^x-y^2}{\cos y-2xy}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}
\end{aligned}
$$

题 110: 设$\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$, 求$\frac{dy}{dx}$.

解:

$$
\begin{aligned}
&\text{设}\\
&F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

则一阶偏导数分别为

$$
\begin{aligned}
&F_x=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{x+y}{x^2+y^2}\\
&F_y=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y-x}{x^2+y^2}\\
\text{当}\quad &F_y\neq 0\text{时, 有}\\
&\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{\frac{x+y}{x^2+y^2}}{\frac{y-x}{x^2+y^2}}=\frac{x+y}{x-y}
\end{aligned}
$$

题 111: 设$x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解:

$$
\begin{aligned}
\text{解:}\quad &\text{设}\\
&F(x,y,z)=x+2y+z-2\sqrt{xyz}\\
\text{则}\quad &F_x=1-\frac{yz}{\sqrt{xyz}}\\
&F_y=2-\frac{xz}{\sqrt{xyz}}\\
&F_z=1-\frac{xy}{\sqrt{xyz}}
\end{aligned}
$$

于是当$F\neq 0$时, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\\
&\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}
\end{aligned}
$$

题 112: 设$2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

解:

$$
\begin{aligned}
\text{证明: }&\text{设}\\
&F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z\\
\text{则 }&F_x=2\cos(x+2y-3z)-1\\
&F_y=2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2=2F_x\\
&F_z=2\cos(x+2y-3z)\cdot(-3)+3=-3F_x
\end{aligned}
$$

故当 $F_z\neq 0$ 时, 有

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_x}{F_z}-\frac{F_y}{F_z}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

题 113: 设 $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$ 都是由方程$F(x,y,z)=0$所确定的具有连续偏导数的函数, 证明 : $\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=-1$

解:

$$
\begin{aligned}
&\text{因为}\\
&\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_x}\\
&\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F_z}{F_y}\\
&\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}\\
\text{所以 }&\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\cdot\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\cdot\left(-\frac{F_x}{F_z}\right)=-1
\end{aligned}
$$

题 114: 设 $\Phi(u,v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程$\Phi(cx-az,cy-bz)=0$所确定的函数 $z=f(x,y)$ 满足$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c$

解:

$$
\begin{aligned}
\text{证明: }&\text{令}\\
&u=cx-az\\
&v=cy-bz\\
\text{则 }&\Phi_x=\Phi_u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=c\Phi_u\\
&\Phi_y=\Phi_v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=c\Phi_v\\
&\Phi_z=\Phi_u\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\Phi_v\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=-a\Phi_u-b\Phi_v
\end{aligned}
$$

故当 $\Phi_z\neq 0$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\Phi_x}{\Phi_z}=\frac{c\Phi_u}{a\Phi_u+b\Phi_v}\\
&\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\Phi_y}{\Phi_z}=\frac{c\Phi_v}{a\Phi_u+b\Phi_v}\\
\text{于是 }&a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=a\cdot\frac{c\Phi_u}{a\Phi_u+b\Phi_v}+b\cdot\frac{c\Phi_v}{a\Phi_u+b\Phi_v}=c
\end{aligned}
$$

题 115: 设 $e^z-xyz=0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解:

$$
\begin{aligned}
&\text{设}\, F(x,y,z) = e^z - xyz,\ \text{则} \\
&F_x = -yz \\
&F_z = e^z - xy
\end{aligned}
$$

于是当 $F_z \neq 0$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{e^z - xy} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{y\frac{\partial z}{\partial x}(e^z - xy) - yz\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x} - y\right)}{(e^z - xy)^2} \\
&= \frac{y^2 z - yz\left(e^z \cdot \frac{yz}{e^z - xy} - y\right)}{(e^z - xy)^2} \\
&= \frac{2y^2 z e^z - 2xy^3 z - y^2 z^2 e^z}{(e^z - xy)^3}
\end{aligned}
$$

题 116: 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解:

$$
\begin{aligned}
&\text{设}\, F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3,\ \text{则} \\
&F_x = -3yz \\
&F_y = -3xz \\
&F_z = 3z^2 - 3xy
\end{aligned}
$$

于是当 $F_z \neq 0$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z} = \frac{yz}{z^2 - xy} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z} = \frac{xz}{z^2 - xy} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2 - xy}\right) \\
&= \frac{\left(z + y\frac{\partial z}{\partial y}\right)(z^2 - xy) - yz\left(2z\frac{\partial z}{\partial y} - x\right)}{(z^2 - xy)^2} \\
&= \frac{\left(z + \frac{xyz}{z^2 - xy}\right)(z^2 - xy) - yz\left(\frac{2xz^2 - x}{z^2 - xy}\right)}{(z^2 - xy)^2} \\
&= \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}
\end{aligned}
$$

题 117: 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

$$
(1) \quad \text{设} \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases},\text{求} \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}.
$$

$$
(2) \quad \text{设} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases},\text{求} \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}.
$$

解:

(1) 分别在两个方程两端对 x 求导，得

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx} \\ 2x + 4y\frac{dy}{dx} + 6z\frac{dz}{dx} = 0 \end{cases}$$

移项，得

$$\begin{cases} 2y\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} = -2x \\ 2y\frac{dy}{dx} + 3z\frac{dz}{dx} = -x \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 3z \end{vmatrix} = 6yz + 2y \neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -2x & -1 \\ -x & 3z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-6xz - x}{6yz + 2y} = \frac{-x(6z+1)}{2y(3z+1)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} 2y & -2x \\ 2y & -x \end{vmatrix}}{D} = \frac{2xy}{6yz + 2y} = \frac{x}{3z+1}$$

(2) 所给方程组确定两个一元隐函数：

$$x = x(z)$$

$$y = y(z)$$

将所给方程的两端分别对 z 求导并移项，得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} = -1 \\ 2x\frac{dx}{dz} + 2y\frac{dy}{dz} = -2z \end{cases}$$

当 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2(y - x) \neq 0$ 时，解方程组得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2z & 2y \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2y + 2z}{2(y-x)} = \frac{y-z}{x-y}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2x & -2z \end{vmatrix}}{D} = \frac{-2z + 2x}{2(y-x)} = \frac{z-x}{x-y}$$

题 118: 设 $z = f(x, v)$, $v = g(x, y)$，其中 f，g 都具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$。
解:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_v g'_y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(f''_{vx} + f''_{vv} g'_x\right) g'_y + f'_v g''_{yx}$$

题 119: 设 $u = xy^2z^3$，而 x, y, z 又满足方程：

$$y^3 - z^3 + (x-1)yz = 0 \quad (*)$$

若 y 是方程 (*) 所确定的隐函数，求 $\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{\substack{x=1 \\ z=1}}$；

解： 令 $F(x,y,z)=y^3-z^3+(x-1)yz$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=yz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=3y^2+(x-1)z$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{yz}{3y^2+(x-1)z}$$

当 $x=1,z=1$ 时，

$$y=1$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\z=1}}=\left[y^2z^3+2xyz^3\frac{\partial y}{\partial x}\right]_{\substack{x=1\\z=1}}=\frac{1}{3}$$

题 120: 函数 $u=f(x,y,z)$ 有一阶连续偏导数，$y=y(x)$，$z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^z-xz=0$ 所确定，求 $\frac{du}{dx}$。

解： 由 $e^{xy}-y=0$，$e^{xy}(y+xy')-y'=0$，得

$$y'=\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}=\frac{y^2}{1-xy}$$

由 $e^z-xz=0$，$e^zz'-z-xz'=0$，$z'=\frac{z}{e^z-x}$，得

$$\frac{du}{dx}=f'_x+f'_yy'+f'_zz'=f'_x+f'_y\frac{y^2}{1-xy}+f'_z\frac{z}{e^z-x}$$

题 121: (1) 设 $e^z-xyz=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

(2) 设 $z^3-3xyz=a^3$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解： (1) 令 $F(x,y,z)=e^z-xyz$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-yz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-xz$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=e^z-xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{yz}{e^z-xy}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{e^z-xy}\right)=y\frac{z'_x(e^z-xy)-z(e^zz'_x-y)}{(e^z-xy)^2}$$

$$=\frac{y^2z\left[(2-z)e^z-2xy\right]}{(e^z-xy)^3}$$

(2) 令 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-3yz$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-3xz$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=3z^2-3xy$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=\frac{yz}{z^2-xy}$$

$$
\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=\frac{xz}{z^2-xy}
$$

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{(z+yz_y')(z^2-xy)-yz(2zz_y'-x)}{(z^2-xy)^2}
$$

$$
=\frac{z^5-2xyz^3-x^2y^2z}{(z^2-xy)^3}
$$

题 122: 求下列复合函数的偏导数或导数:

(1) $z=u^2\ln v$，$u=\frac{y}{x}$，$v=x^2+y^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$、$\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) $u=\frac{y-z}{a^2+1}e^{ax}$，$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\frac{du}{dx}$。

解: (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\left(-\frac{y}{x^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot 2x$

$$
=-\frac{2y^2}{x^3}\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^2}{x(x^2+y^2)}
$$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\frac{1}{x}+\frac{u^2}{v}\cdot 2y$

$$
=\frac{2y}{x^2}\ln(x^2+y^2)+\frac{2y^3}{x^2(x^2+y^2)}
$$

(2) $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dx}+\frac{\partial u}{\partial x}$

$$
=\frac{e^{ax}}{a^2+1}a\cos x-\frac{e^{ax}}{a^2+1}(-\sin x)+a\frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}
$$

$$
=e^{ax}\sin x
$$

题 123: 设变换

$$
\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}
$$

可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，求常数 a。

解:

$$
\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}
$$

$$
\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}
$$

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
$$

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot a+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot(-2)+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot a=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
$$

$$
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot(-2)-2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot a+a\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot(-2)+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot a=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
$$

代入原方程，化简得

$$
(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0
$$

则

$$
\begin{cases} 6+a-a^2=0 \\ 10+5a\neq 0 \end{cases}
$$

解得

$$
a=3
$$

第六讲：偏导数 & 全微分 & 求导法则

题 124: 设函数 $f(x,y)$ 关于自变量 x 连续, 又存在常数 $L>0$, 使得对于任意两点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, 有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|$$

则函数 $f(x,y)$ 连续.

解: 任意取点 (x_0,y_0), 由于对给定的 y, 函数关于自变量 x 连续, 故对于任意给定的 $\varepsilon>0$, $\exists\delta_1>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时, 总有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

取 $\delta=\min\left\{\delta_1,\frac{\varepsilon}{2L}\right\}$, 则当 $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ 时, 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|(f(x,y)-f(x,y_0))+(f(x,y_0)-f(x_0,y_0))|$$

$$\leq|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$

$$\leq L|y-y_0|+\frac{\varepsilon}{2}<L\delta+\frac{\varepsilon}{2}\leq\varepsilon$$

故 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续。由 (x_0,y_0) 的任意性, 得 $f(x,y)$ 是连续函数.

题 125: $\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

解: $\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{x}{x+y}}$

$$=\lim_{(x,y)\to(\infty,a)}e^{\frac{x}{x+y}}=e^0$$

题 126: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

解: 令$x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, 则$(x,y)\to(0,0)$ 时,

$$\rho\to 0$$

故

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{\rho\to0}\frac{\rho^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}{\rho^2}$$

$$=\lim_{\rho\to0}\rho(\cos^3\theta+\sin^3\theta)$$

$$=0$$

(因 $\lim_{\rho\to0}\rho=0$, 而$|\cos^3\theta+\sin^3\theta|\leq2$)

题 127: $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy^2\sin(xy)}{x^2+y^4}$

解:

(方法一)　由于$0\leqslant\left|\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$,即为有界量，而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin xy=0$,即为无穷小量，则

原式$=0$.

(方法二)　由于$0\leqslant\left|\dfrac{xy^2\sin xy}{x^2+y^4}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}|\sin xy|$,而$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1}{2}|\sin xy|=0$,由夹逼原理知

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2\sin xy}{x^2+y^4}=0$.

(方法三)　由于当$x\to 0,y\to 0$ 时，$\sin xy\sim xy$,则$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2\sin xy}{x^2+y^4}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^4}$,

$0\leq\left|\dfrac{x^2y^3}{x^2+y^4}\right|\leq\left|y^3\right|$.　　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2\sin xy}{x^2+y^4}=0$.

题 128: 证明极限不存在 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$

解:　取直线 $y=kx$, 则

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^3}{x^2+k^4x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x}{1+k^4x^2}=0.$$

这说明沿任何一条过原点的直线 $y=kx$ (不包括 y 轴) 趋于 $(0,0)$ 点时，极限存在且都为零，并且若沿 y 轴趋于 $(0,0)$ 点极限也为零，事实上

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=0.$$

这能否说明重极限 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 存在且为零呢? 不能! 事实上若沿过原点的抛物线 $x=y^2$ 趋于 $(0,0)$ 点时，就有

$$\lim_{\substack{x=y^2\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2},$$

故极限 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

题 129:　设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点

(A) 不连续.

(B) 连续但偏导数不存在.

(C) 偏导数存在但不可微.

(D) 可微.

解:　由于 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0=f(0,0)$, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续, 故 (A) 不正确.

由偏导数定义知

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0,$$

但

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{[f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)]-[f_x'(0,0)\Delta x+f_y'(0,0)\Delta y]}{\rho}$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta y(\Delta x)^2}{[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]^{\frac{3}{2}}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0^+\\ \Delta y=k\Delta x}}\frac{k(\Delta x)^3}{[(\Delta x)^2+k^2(\Delta x)^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{k}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

与 k 有关，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点不可微, 应选 (C).

题 130: 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

讨论:

1. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续?
2. 偏导数 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 是否存在?
3. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微分?

解: (1) 因为

$$0\leq\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

又

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

由夹逼准则得

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$$

故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

(2) 由偏导数定义，有

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{x}=0$$

类似得 $f_y(0,0)=0$ 故 $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 均存在.

(3) 在点 $(0,0)$ 处，由

$$f_x(0,0)=0\quad f_y(0,0)=0$$

有

$$\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)=\frac{|\Delta x\Delta y|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

由于

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)}{\rho}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{|\Delta x\Delta y|}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

不存在，说明当 $\rho\to 0$ 时，$\Delta z-(f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y)$ 不是 ρ 的高阶无穷小，因此，函数在点 $(0,0)$ 处是不可微分的.

题 131: 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|x|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 求 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$.

解: 由于 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}\sin(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|}}{\Delta x}=\infty$,

则 $f'_x(0,0)$ 不存在. 而

$$f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0.$$

题 132: 若函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$, 且 $f(x,1)=x+2$, 又 $f'_y(x,1)=x+1$, 则 $f(x,y)$ 等于

(A) $y^2+(x-1)y-2$.

(B) $y^2+(x+1)y+2$.

(C) $y^2+(x-1)y+2$.

(D) $y^2+(x+1)y-2$.

解: （方法一） 容易验证，只有 (C) 选项中的函数同时满足题设中的三个条件，故应选 (C).

（方法二） 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2$ 知 $\frac{\partial z}{\partial y}=\int 2\,dy=2y+\varphi(x)$. 由题设条件 $f'_y(x,1)=1+x$ 知,

$$1+x=2+\varphi(x)\Rightarrow\varphi(x)=x-1\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=2y+x-1,$$

$$\Rightarrow z=\int(2y+x-1)\,dy=y^2+(x-1)y+\psi(x).$$

由 $f(x,1)=x+2$ 知 $x+2=1+(x-1)+\psi(x)$, 从而 $\psi(x)=2$.

则 $z=y^2+y(x-1)+2$. 故应选 (C).

题 133: 已知 $(axy^3-y^2\cos x)\,dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)\,dy$ 是某一函数的全微分，则 a，b 取值分别为

(A) -2 和 2.

(B) 2 和 -2.

(C) -3 和 3.

(D) 3 和 -3.

解: 由题设可知，存在可微函数 $f(x,y)$，使

$$\mathrm{d}f(x,y)=(axy^3-y^2\cos x)\,dx+(1+by\sin x+3x^2y^2)\,dy,$$

则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=axy^3-y^2\cos x,\frac{\partial f}{\partial y}=1+by\sin x+3x^2y^2,$$

从而有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3axy^2-2y\cos x,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=by\cos x+6xy^2.$$

$$\text{由于}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\text{和}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\text{都连续，从而有}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x},\text{即}$$

$$3axy^2-2y\cos x=by\cos x+6xy^2,$$

$$\text{则}\begin{cases}3a=6,\\ b=-2,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}a=2,\\ b=-2.\end{cases}\quad\text{故应选 (B).}$$

题 134: 证明函数 $u=\frac{1}{r}$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

其中

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

解: 证明: $\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3x^2}{r^5}$$

由函数关于自变量的对称性，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=-\frac{3}{r^3}+\frac{3r^2}{r^5}=0$$

题 135: 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$, 则 $\mathrm{d}f(1,1)=$

(A) $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

(B) $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

(C) $\mathrm{d}y$.

(D) $-\mathrm{d}y$.

解: 等式 $f(x+1,e^x)=x(x+1)^2$ 两端对 x 求导得

$$f_1'(x+1,e^x)+f_2'(x+1,e^x)e^x=(x+1)^2+2x(x+1),$$

上式中令 $x=0$ 得

$$f_1'(1,1)+f_2'(1,1)=1.$$

等式 $f(x,x^2)=2x^2\ln x$ 两端对 x 求导得

$$f_1'(x,x^2)+2xf_2'(x,x^2)=4x\ln x+2x,$$

上式中令 $x=1$ 得

$$f_1'(1,1)+2f_2'(1,1)=2,$$

从而可得 $f_1'(1,1)=0, f_2'(1,1)=1$, 则 $\mathrm{d}f(1,1)=\mathrm{d}y$. 故应选 (C).

题 136: 设 $f(x,y)$ 可微, 又 $f(0,0)=0, f_x'(0,0)=a, f_y'(0,0)=b$ 且 $g(t)=f[t,f(t,t^2)]$, 求 $g'(0)$.

解:

$$g'(t)=f_1'[t,f(t,t^2)]+f_2'[t,f(t,t^2)]\cdot[f_1'(t,t^2)+f_2'(t,t^2)\cdot 2t],$$

$$g'(0)=a+b(a+0\times b)=a(1+b).$$

题 137: 设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且满足

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

确定 a,b 的值，使等式在变换 $\xi=x+ay, \eta=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

解:

（方法一）　变量之间的关系如图

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 1=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot 1+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 1\\&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot a+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot b=a\frac{\partial u}{\partial \xi}+b\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot a+a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot b+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot a+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot b\\&=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2ab\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot a+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}\cdot b+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}\cdot a+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot b\\&=a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+b\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.\end{aligned}$$

将以上三个二阶偏导数代入等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 得

$$(5a^2+12a+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+[10ab+12(a+b)+8]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(5b^2+12b+4)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

由题设知 $5a^2+12a+4=0$，但 $10ab+12(a+b)+8\neq 0$. 解得

$$\begin{cases}a=-2,\\ b=-\frac{2}{5}\ \text{或} a=-\frac{2}{5},\\ b=-2.\end{cases}$$

（方法二）　由 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 解得

$$\begin{cases}x=\frac{a\eta-b\xi}{a-b},\\ y=\frac{\xi-\eta}{a-b}.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi}&=\frac{-b}{a-b}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{a-b}\frac{\partial u}{\partial y},\\ \frac{\partial u}{\partial \eta}&=\frac{-a}{a-b}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{a-b}\frac{\partial u}{\partial y},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}&=\frac{-b}{a-b}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{a}{a-b}+\frac{-b}{a-b}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{-1}{a-b}+\frac{1}{a-b}\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\frac{a}{a-b}+\frac{1}{a-b}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{-1}{a-b}\\&=\frac{-ab}{(a-b)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{(a+b)}{(a-b)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{-1}{(a-b)^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

欲使 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$, 即

$$-ab\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(a+b)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

与已知关系式比较得　$\frac{-ab}{4}=\frac{a+b}{12}=\frac{-1}{5}$,

由此解得

$$\begin{cases}a=-2,\\ b=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a = -\frac{2}{5}, \\ b = -2. \end{cases}$$

题 138: 若函数 $f(x,y,z)$ 对任意实数 t 满足关系式

$$f(tx,ty,tz) = t^k f(x,y,z)$$

则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数。设 $f(x,y,z)$ 可微，试证 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数的必要条件是

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = kf(x,y,z)$$

解: 令 $u = tx$, $v = ty$, $w = tz$, 对方程式

$$f(tx,ty,tz) = t^k f(x,y,z)$$

两边关于 t 求导，得

$$x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v} + z\frac{\partial f}{\partial w} = kt^{k-1}f$$

令 $t=1$，则

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = kf(x,y,z)$$

反之不一定成立.

例对 $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}^3$, 有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot 2x = 3x\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

以及

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

所以

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 3\left(x^2+y^2+z^2\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 3f(x,y,z)$$

但 $f(x,y,z)$ 不是 3 次齐次函数, 因为

$$f(tx,ty,tz) = |t|^3 f(x,y,z)$$

题 139: 设 $z = z(x,y)$ 由方程 $z + e^z = xy$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解: **(方法一)** 由 $z+e^z = xy$ 知, $z + e^z - xy = 0$. 由隐函数求导公式可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{-y}{1+e^z} = \frac{y}{1+e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-x}{1+e^z} = \frac{x}{1+e^z}.$$

(方法二) 等式 $z+e^z = xy$ 两端分别对 x,y 求偏导得

$$(1+e^z)\frac{\partial z}{\partial x} = y, (1+e^z)\frac{\partial z}{\partial y} = x,$$

由以上两式解得 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{1+e^z}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{1+e^z}$.

(方法三) 等式 $z+e^z = xy$ 两端求微分得

$$\mathrm{d}z + e^z\mathrm{d}z = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y,$$

则

$$\mathrm{d}z=\frac{y}{1+e^{z}}\mathrm{d}x+\frac{x}{1+e^{z}}\mathrm{d}y,$$

从而有 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{1+e^{z}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{1+e^{z}}$.

题 140: 设 $y=f(x,t)$, 且方程 $F(x,y,t)=0$ 确定了函数 $t=t(x,y)$, 其中 f,F 都具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解: （方法一） 将 $t=t(x,y)$ 代入 $y=f(x,t)$ 得 $y=f(x,t(x,y))$, 这是一个关于 x,y 的二元方程, 它可确定 y 是 x 的函数.

等式 $y=f(x,t(x,y))$ 两端对 x 求导得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right),$$

而 $t=t(x,y)$ 由 $F(x,y,t)=0$ 所确定, 则

$$\frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial t}},\frac{\partial t}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial t}},$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\partial F}{\partial t}}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial t}}.$$

（方法二） 根据微分形式不变性, 由 $y=f(x,t)$ 知 $\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$.

由 $F(x,y,t)=0$ 知 $\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial t}\mathrm{d}t=0$.

解得 $\mathrm{d}t=-\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial t}}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y\right)$. 将此的表达式代入 $\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial t}\mathrm{d}t$ 并整理可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial t}}.$$

题 141: 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $f_y'\neq 0$. 证明: 对任意常数 C, $f(x,y)=C$ 为一条直线 $\Leftrightarrow (f_2')^2f_{11}'''-2f_1'f_2'f_{12}''+(f_1')^2f_{22}''=0$.

解: 证明 由原题设条件知 $f(x,y)=C$ 可确定隐函数 $y=y(x)$, 从而 $f(x,y)=C$ 为一条直线的充要条件是 $y=y(x)$ 是线性函数 (即 $y=ax+b$), 而 $y=y(x)$ 是线性函数的充要条件是 $y''=0$.

等式 $f(x,y)=C$ 两端对 x 求导得

$$f_1'+f_2'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f_1'}{f_2'},$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f_1'}{f_2'}\right)=-\frac{\left(f_{11}''+f_{12}''\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f_2'-\left(f_{21}''+f_{22}''\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f_1'}{f_2'^2}.$$

必要性　若 f(x,y) = C 是一条直线，则由 f(x,y) = C 所确定的函数 y = y(x) 应为线性函数 (即 y = ax + b), 则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$,从而有

$$f_2'^2f_{11}''-2f_1'f_2'f_{12}''+f_1'^2f_{22}''=0.$$

充分性　若 $f_2'^2f_{11}''-2f_1'f_2'f_{12}''+f_1'^2f_{22}''=0$, 则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$, 从而有 $y=ax+b$, 即 $f(x,y)=C$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 为线性函数.

故 f(x,y) = C 表示一条直线.

第七讲：多元函数的几何应用 & 多元函数的极值

题 142: 求曲线 $y^2=2mx$，$z^2=m-x$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线及法平面方程。

解：设曲线的参数方程中的参数为 x，将方程 $y^2=2mx$ 和 $z^2=m-x$ 两端分别对 x 求导，得

$$2y\frac{dy}{dx}=2m$$

$$2z\frac{dz}{dx}=-1$$

即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{m}{y}$$

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2z}$$

所以曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 的切向量为

$$T=\left(1,\frac{m}{y_0},-\frac{1}{2z_0}\right)$$

于是在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\frac{m}{y_0}}=\frac{z-z_0}{-\frac{1}{2z_0}}$$

法平面方程为

$$(x-x_0)+\frac{m}{y_0}(y-y_0)-\frac{1}{2z_0}(z-z_0)=0$$

题 143: 求曲面 $ax^2+by^2+cz^2=1$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面及法线方程

解：令

$$F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2-1$$

则曲面在点 (x,y,z) 处的一个法向量

$$n=(F_x,F_y,F_z)=(2ax,2by,2cz)=2(ax,by,cz)$$

在点 (x_0,y_0,z_0) 处的一个法向量为 (ax_0,by_0,cz_0)。

故曲面在该点处的切平面方程为

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0$$

即

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{ax_0} = \frac{y - y_0}{by_0} = \frac{z - z_0}{cz_0}$$

题 144: 在曲线 $z = xy$ 上求一点，使这点处法线垂直于平面

$$x + 3y + z + 9 = 0$$

并写出这法线的方程。

解: 设所求点为 $M = (x_0, y_0, z_0)$ 曲面在该点处的一个法向量为

$$n = (y_0, x_0, -1)$$

平面的法向量为 $(1, 3, 1)$。

按题意，n 垂直于平面，故有

$$\frac{y_0}{1} = \frac{x_0}{3} = \frac{-1}{1}$$

求得

$$x_0 = -3y_0 = -1z_0 = x_0y_0 = 3$$

于是所求点为 $M(-3, 1, 3)$，法线方程为

$$\frac{x + 3}{1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 3}{1}$$

题 145: 证明：椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在其上任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$$

解: 令 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$，则

$$F'_x = \frac{2x}{a^2} F'_y = \frac{2y}{b^2} F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

即

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$$

题 146: 求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$，上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦。

解: 令

$$F(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 16$$

曲面的法向量为

$$n = (F_x, F_y, F_z) = (6x, 2y, 2z)$$

曲面在点 $(-1, -2, 3)$ 处的法向量为

$$n_1 = n\big|_{(-1,-2,3)} = (-6, -4, 6)$$

xOy 面的法向量为

$$n_2 = (0, 0, 1)$$

记 n_1 与 n_2 的夹角为 γ，则所求的余弦值为

$$\cos\gamma = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{6}{\sqrt{6^2+4^2+6^2} \cdot 1} = \frac{3}{\sqrt{22}}$$

题 147: 求曲线

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-3x=0 \\ 2x-3y+5z-4=0 \end{cases}$$

在点 (1,1,1) 处的切线及法平面方程。

解: 所求曲线的切线，也就是曲面 $x^2+y^2+z^2-3x=0$ 在点 (1,1,1) 处的切平面与平面 $2x-3y+5z=4$ 的交线，利用曲面的切平面方程得所求切线为

$$\begin{cases} -(x-1)+2(y-1)+2(z-1)=0 \\ 2x-3y+5z=4 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -x+2y+2z=3 \\ 2x-3y+5z=4 \end{cases}$$

这切线的方向向量为 (16,9,-1)，于是所求法平面方程为

$$16(x-1)+9(y-1)-(z-1)=0$$

即

$$16x+9y-z-24=0$$

题 148: 证明曲面 $xyz=a^3$ $(a>0)$ 上任意一点处的切平面与三个坐标面围成的四面体体积为 $\frac{9}{2}a^3$。

解: 设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则曲面在点 M_0 的法向量为

$$n=(y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0)$$

切平面方程为

$$y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3a^3$$

其截距式为

$$\frac{x}{\frac{3a^3}{y_0z_0}}+\frac{y}{\frac{3a^3}{x_0z_0}}+\frac{z}{\frac{3a^3}{x_0y_0}}=1$$

该平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距分别是 $\frac{3a^3}{y_0z_0},\frac{3a^3}{x_0z_0},\frac{3a^3}{x_0y_0}$，所以切平面与三个坐标面围成的四面体体积为

$$V=\frac{1}{6}\cdot\frac{27a^9}{(x_0y_0z_0)^2}=\frac{9a^9}{2a^6}=\frac{9}{2}a^3$$

题 149: 求函数 $z=x^2+y^2$ 在点 (1,2) 处沿从点 (1,2) 到点 $(2,2+\sqrt{3})$ 的方向导数。

解: 按题意，方向

$$l=(1,\sqrt{3})$$

$$e_l=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

又

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial y}=2y$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 2\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = 4$$

故

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,2)} = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + 2\sqrt{3}$$

题 150: 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 (1,1,2) 处沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}$，$\beta = \frac{\pi}{4}$，$\gamma = \frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数。

解: 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 - yz \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy - xz \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - xy$$

所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,2)} = -1\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,2)} = 0\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,2)} = 11$$

又

$$e_l = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \cos\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(1,1,2)} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 11 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

题 151: 设

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

求 $\text{grad}f(0,0,0)$ 及 $\text{grad}f(1,1,1)$。

解: $\text{grad}f(x,y,z) = f_x\mathbf{i} + f_y\mathbf{j} + f_z\mathbf{k}$

$$= (2x + y + 3)\mathbf{i} + (4y + x - 2)\mathbf{j} + (6z - 6)\mathbf{k}$$

$$\text{grad}f(0,0,0) = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$$

$$\text{grad}f(1,1,1) = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

题 152: 设 $u = \ln\frac{1}{r}$，其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$。求 u 的梯度，并指出在空间哪些点上 $|\text{grad}u| = 1$。

解: $u'_x = -\frac{1}{r}\frac{x-a}{r} = \frac{a-x}{r^2}$

$$u'_y = \frac{b-y}{r^2}$$

$$u'_z = \frac{c-z}{r^2}$$

所以

$$\text{grad}u = \frac{1}{r^2}\{a-x, b-y, c-z\}$$

$$|\text{grad}u| = \frac{1}{r}$$

在球面 $\{(x,y,z)|(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1\}$ 上

$$|\text{grad}u| = 1$$

题 153: 求函数 $f(x,y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值。

解： 解方程组

$$\begin{cases} f_x = (6-2x)(4y-y^2) = 0 \\ f_y = (4x-x^2)(4-2y) = 0 \end{cases}$$

求得以下五组解：

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 3 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = 6 \\ y_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 = 6 \\ y_5 = 4 \end{cases}$$

于是，得驻点 $(0,0)$，$(0,4)$，$(3,2)$，$(6,0)$，$(6,4)$。又

$$f_{xx}(x,y) = -2(4y-y^2) f_{xy}(x,y) = -4(3-x)(2-y) f_{yy}(x,y) = -2(6x-x^2)$$

由判定极值的充分条件知：

题 154: 4. 求两直线

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = x+1 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} y = x+3 \\ z = x \end{cases}$$

之间的最短距离。

解： 设 (x_1,y_1,z_1)，(x_2,y_2,z_2) 分别为两直线上的点，则两点之间的距离为

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

记

$$u = d^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 = (x_2-x_1)^2 + (x_2-2x_1+3)^2 + (x_2-x_1-1)^2$$

令

$$\begin{cases} u_{x_1} = 12x_1 - 8x_2 - 10 = 0 \\ u_{x_2} = -8x_1 + 6x_2 + 4 = 0 \end{cases}$$

即有

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 5 = 0 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$x_1 = \frac{7}{2}, x_2 = 4$$

因为两直线之间的最短距离必定存在，求得的驻点唯一，所以当 $x_1 = \frac{7}{2}$，$x_2 = 4$ 时，u 有极小值，也是最小值，即

$$d_{\min} = \sqrt{\left(4 - \frac{7}{2}\right)^2 + (4-7+3)^2 + \left(4 - \frac{7}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

题 155: 6. 从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形。

解: 设直角三角形的两直角边之长分别为 x，y，则周长

$$S = x + y + l \quad (0 < x < l, 0 < y < l)$$

本题是求周长 S 在 $x^2 + y^2 = l^2$ 条件下的条件极值问题。作拉格朗日函数

$$L(x,y) = x + y + l + \lambda(x^2 + y^2 - l^2)$$

令

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 1 + 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

解得

$$x = y = -\frac{1}{2\lambda}$$

代入 $x^2 + y^2 = l^2$，得

$$\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{2l}$$

于是

$$x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 是唯一可能的极值点，根据问题性质可知，这种最大周长的直角三角形一定存在，所以在斜边之长为 l 的一切直角三角形中，周长最大的是等腰直角三角形。

题 156: 设有一圆板占有平面闭区域 $|(x,y)|\, x^2 + y^2 \leq 1$，该圆板被加热，以致在点 (x,y) 的温度是

$$T = x^2 + 2y^2 - x$$

求该圆板的最热点和最冷点。

解: 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 2x - 1 = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} = 4y = 0 \end{cases}$$

求得驻点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$。

$$T_1 = T\Big|_{\left(\frac{1}{2},0\right)} = -\frac{1}{4}$$

在边界 $x^2 + y^2 = 1$ 上，

$$T = 2 - (x^2 + x) = \frac{9}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时，有边界上的最大值

$$T_2 = \frac{9}{4}$$

当 $x=1$ 时，有边界上的最小值

$$T_3 = 0$$

比较 T_1，T_2 及 T_3 的值知，最热点在 $\left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，即

$$T_{\max} = \frac{9}{4}$$

最冷点在 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$，

$$T_{\min} = -\frac{1}{4}$$

题 157: 设 $e_l = (\cos\theta, \sin\theta)$，求函数 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 (1,1) 沿方向 l 的方向导数，并分别确定角 θ，使这导数有 (1) 最大值；(2) 最小值；(3) 等于 0。

解:

注: 辅助角公式的内容如下。对于 a, b, x ∈ ℝ，$a > 0$，有:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$$

其中

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \tan\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y$$

则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 1 \ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 1$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}\cos\theta + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}\sin\theta = \cos\theta + \sin\theta$$

因为

$$\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

所以 (1) 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，方向导数最大，其最大值为 $\sqrt{2}$。

(2) 当 $\theta = \frac{5}{4}\pi$ 时，方向导数最小，其最小值为 $-\sqrt{2}$。

(3) 当 $\theta = \frac{3}{4}\pi$ 或 $\frac{7}{4}\pi$ 时，方向导数为 0

题 158: 求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点。

解: 设交线上的点 $M(x,y,z)$，它到 xOy 面上距离的平方为 z^2，问题就成为求函数 z^2 在约束条件 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最小值问题，作拉格朗日函数

$$L = z^2 + \lambda\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} - 1\right) + \mu(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\begin{cases} L_x = \frac{\lambda}{3} + 2\mu x = 0 \\ L_y = \frac{\lambda}{4} + 2\mu y = 0 \\ L_z = 2z + \frac{\lambda}{5} = 0 \end{cases}$$

又由约束条件，有

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1, \quad x^2 + y^2 = 1$$

解此方程组，得

$$x=\frac{4}{5}, y=\frac{3}{5}, z=\frac{35}{12}$$

于是，得可能的极值点 $M_0\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{35}{12}\right)$，由问题本身可知距离最短的点必定存在，因此 M_0 就是所求的点。

题 159: 求函数 $z=x^2-y^2$ 在圆域 $x^2+y^2\leq 4$ 中的最大值与最小值。

解: 用 $x^2\leq 4-y^2$ 代入 $z=x^2-y^2$，得

$$z\leq 4-2y^2\leq 4$$

且

$$z(2,0)=4$$

用 $-y^2\geq x^2-4$ 代入 $z=x^2-y^2$，得

$$z\geq 2x^2-4\geq -4$$

且

$$z(0,2)=-4$$

所以函数 $z=x^2-y^2$ 在圆域 $x^2+y^2\leq 4$ 中的最大值为 4，最小值为 -4。

题 160: 求椭圆抛物面 $z=x^2+y^2$ 到平面 $x+y-z=1$ 的最短距离。

解: 设 $M(x,y,z)$ 是曲面 $z=x^2+y^2$ 上的任一点，点 M 到平面 $x+y-z=1$ 的距离为

$$d=\frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{3}}$$

构造 Lagrange 函数

$$F=\frac{1}{3}(x+y-z-1)^2+\lambda(x^2+y^2-z)$$

解方程组

$$\begin{cases}\frac{2}{3}(x+y-z-1)+2\lambda x=0\\ \frac{2}{3}(x+y-z-1)+2\lambda y=0\\ -\frac{2}{3}(x+y-z-1)-\lambda=0\\ x^2+y^2=z\end{cases}$$

得到方程组的解为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$。

由于 d 的最小值一定存在，且驻点唯一，故 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 就是所求的最小值点，所求的最短距离为 $d=\frac{\sqrt{3}}{6}$。

题 161: 要制造一个无盖的圆柱形容器，其容积为 V，要求表面积 A 最小，问该容器的高度 H 和底半径 R 应各是多少?

解: 面积为

$$A=\pi R^2+2\pi RH\quad (R>0,H>0)$$

约束条件为

$$V=\pi R^2H$$

作拉格朗日函数

$$F(R,H,\lambda)=\pi R^2+2\pi RH+\lambda(\pi R^2H-V)$$

解方程组

$$\begin{cases}F'_R=2\pi R+2\pi H+2\lambda\pi RH=0\\ F'_H=2\pi R+\lambda\pi R^2=0\\ F'_\lambda=\pi R^2H-V=0\end{cases}$$

得

$$R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\lambda = -\frac{2}{R}$$

事实上:

$$A = \pi R^2 + 2\frac{V}{R}$$

当 $R \to +\infty$ 或 $R \to 0$ 时,

$$A \to +\infty$$

所以当 $R = H = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ 时，$A = 3\pi^{1/3}V^{2/3}$ 是最小值。

题 162: 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$ 位于第一卦限的部分上，求一点 P，使过点 P 的切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积最小。

解: 令

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

则

$$F'_x = \frac{2x}{a^2} F'_y = \frac{2y}{b^2} F'_z = \frac{2z}{c^2}$$

所以点 (x_0, y_0, z_0) 处切平面方程为

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

即

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$$

此切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积为

$$V = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0y_0z_0}$$

因此问题就化为求函数 $V = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$ 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

位于第一卦限上的最小值。

作拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda) = \frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz} + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

解方程组

$$\begin{cases} F'_x = -\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x^2yz} + \lambda\frac{2x}{a^2} = 0 \\ F'_y = -\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xy^2z} + \lambda\frac{2y}{b^2} = 0 \\ F'_z = -\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{xyz^2} + \lambda\frac{2z}{c^2} = 0 \\ F'_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\sqrt{3}} \\ y = \frac{b}{\sqrt{3}} \\ z = \frac{c}{\sqrt{3}} \\ \lambda = \frac{3\sqrt{3}}{4}abc \end{cases}$$

在点 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 处函数 V 取值 $\frac{\sqrt{3}}{2}abc$，在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

位于第一卦限的边界处 V 趋于无穷大，所以点 P 坐标为 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$。

第八讲：重积分的概念与性质

题 163: 设有一平面薄板（不计其厚度），占有 xOy 面上的闭区域 D，薄板上分布有面密度为 $\mu=\mu(x,y)$ 的电荷，且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表达该薄板上的全部电荷 Q。

解： 用一组曲线网将 D 分成 n 个小闭区域 $\Delta\sigma_i$，其面积也记为 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\ldots,n)$。

任取一点 $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$，则 $\Delta\sigma_i$ 上分布的电荷

$$\Delta Q_i\approx\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

通过求和、取极限，使得得到该板上的全部电荷为

$$Q=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint_D\mu(x,y)\,d\sigma$$

其中

$$\lambda=\max_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}$$

题 164: 利用二重积分的几何意义计算二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma$，其中

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$$

解： 被积函数 $\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的图形是球心在坐标原点，半径为 1 的上半球面，而二重积分的几何意义知，此二重积分的值即为上半球体的体积，即

$$\iint_D\sqrt{1-x^2-y^2}\,d\sigma=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 1=\frac{2}{3}\pi$$

题 165: 利用被积函数的对称性及区域的对称性确定下列二重积分的值：

1. $\iint\limits_D yf(x^2+y^2)\,d\sigma$，其中 D 是矩形域 $0\le x\le 1,-1\le y\le 1$，f 是连续函数；
2. $\iint\limits_D\cos x\sin y\,d\sigma$，其中 D 是圆域 $x^2+y^2\le 1$。

解：

1. 由于 D 关于 x 轴对称，且 $yf(x^2+y^2)$ 是 y 的奇函数，所以

$$\iint_D yf(x^2+y^2)\,d\sigma=0$$

2. 由于 D 关于 x 轴对称，且 $\cos x\sin y$ 是 y 的奇函数，所以

$$\iint_D\cos x\sin y\,d\sigma=0$$

题 166: 设 $I_1 = \iint\limits_{D_1} (x^2+y^2)^3\, d\sigma$，其中

$$D_1 = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$$

又

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} (x^2+y^2)^3\, d\sigma$$

其中

$$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$$

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系。

解: 由二重积分的几何意义知:

I_1 表示底为 D_1，顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_1 的体积;

I_2 表示底为 D_2，顶为曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 的曲顶柱体 Ω_2 的体积)。

由于位于 D_1 上方的曲面 $z=(x^2+y^2)^3$ 关于 yOz 面和 zOx 面均对称，故 yOz 面和 zOx 面将 Ω_1 分成四个等级的部分，其中位于第一卦限的部分即为 Ω_2。由此可知

$$I_1 = 4I_2$$

题 167: 利用二重积分定义证明:

1. $\iint\limits_D d\sigma = \sigma$（其中 σ 为 D 的面积）。
2. $\iint\limits_D kf(x,y)\, d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)\, d\sigma$（其中 k 为常数）。
3. $\iint\limits_D f(x,y)\, d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, d\sigma$，其中 $D = D_1 \cup D_2$，D_1, D_2 为两个无公共内点的闭区域。

解: (1) 由于被积函数 $f(x,y)=1$

$$\iint\limits_D d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i = \lim_{\lambda\to 0}\sigma = \sigma$$

(2) $\iint\limits_D kf(x,y)\, d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n kf(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

$$= k\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = k\iint\limits_D f(x,y)\, d\sigma$$

(3) 因为函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上可积，故不论把 D 怎样分割，积分和的极限总是不变的。因此在分割 D 时，可以使 D_1, D_2 的公共边界永远是一条分割线。这样 $f(x,y)$ 在 $D_1\cup D_2$ 上的积分和就等于 D_1 上的积分和加上 D_2 上的积分和，记为

$$\sum_{D_1\cup D_2} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i = \sum_{D_1} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i + \sum_{D_2} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

令所有 $\Delta\sigma_i$ 的直径的最大值 $\lambda\to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2} f(x,y)\, d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\, d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\, d\sigma$$

题 168: 试确定积分区域 D，使二重积分 $\iint\limits_D (1-2x^2-y^2)\, dx\, dy$ 达到最大值。

解: 由二重积分的性质可知，当积分区域 D 包含了所有使被积函数 $1-2x^2-y^2$ 大于等于零的点，而不包含使被积函数 $1-2x^2-y^2$ 小于零的点。

即当 D 是椭圆 $2x^2+y^2=1$ 所围成的平面闭区域时，此二重积分的值达到最大。

题 169: 利用二重积分的性质估计下列二重积分的值:

1. $\iint\limits_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$，其中 D 是菱形域 $|x|+|y|\leq 1$

2. $\iint\limits_D \sin^2 x\cos^2 y\, d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|0\leq x\leq \pi, 0\leq y\leq \pi\}$

3. $\iint\limits_D (x+xy-x^2-y^2)\, d\sigma$，其中 D 是矩形域 $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 2$

4. $\iint\limits_D (x+y+10)\, d\sigma$，其中 D 是圆域 $x^2+y^2\leq 4$。

解：

1. 因为

$$\frac{1}{102}\leq \frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leq \frac{1}{100}$$

D 的面积为

$$\sigma(D)=2$$

所以

$$\frac{1}{51}\leq \iint\limits_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\leq \frac{1}{50}$$

2. 因为

$$0\leq \sin^2 x\cos^2 y\leq 1$$

D 的面积为

$$\sigma(D)=\pi^2$$

所以

$$0\leq \iint\limits_D \sin^2 x\cos^2 y\, d\sigma\leq \pi^2$$

3. 设 $f(x,y)=x+xy-x^2-y^2$，则

$$f_x=1+y-2x$$

$$f_y=x-2y$$

得驻点 $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，且

$$f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

在 $C_1=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, y=0\}$ 上，

$$f(x,0)=x-x^2=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$0\leq f(x,0)\leq \frac{1}{4}$$

在 $C_2=\{(x,y)|x=1, 0\leq y\leq 2\}$ 上，

$$f(1,y)=y-y^2=\frac{1}{4}-\left(y-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$-2\leq f(1,y)\leq \frac{1}{4}$$

在 $C_3=\{(x,y)|0\leq x\leq 1, y=2\}$ 上，

$$f(x,2)=-4+3x-x^2=-\frac{7}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

$$-4 \le f(x,2) \le -2$$

在 $C_4 = \{(x,y)|x=0, 0 \le y \le 2\}$ 上，

$$f(0,y) = -y^2$$

$$-4 \le f(0,y) \le 0$$

所以在 D 上，

$$-4 \le f(x,y) \le \frac{1}{3}$$

得

$$-8 \le \iint_D (x+xy-x^2-y^2)\,d\sigma \le \frac{2}{3}$$

4. $f(x,y) = x+y+10$ 在 D 内无稳定点，最大、最小值在边界上取到。

令 $F(x,y,\lambda) = x+y+10+\lambda(x^2+y^2-4)$，求驻点方程

$$\begin{cases} F_x = 1+2x\lambda = 0 \\ F_y = 1+2y\lambda = 0 \\ F_\lambda = x^2+y^2-4 = 0 \end{cases}$$

得解

$$\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \\ \lambda = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

所以

$$10-2\sqrt{2} = f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) \le f(x,y) \le f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 10+2\sqrt{2}$$

而 D 的面积为

$$\sigma(D) = 4\pi$$

所以

$$8(5-\sqrt{2})\pi \le \iint_D (x+y+10)\,d\sigma \le 8(5+\sqrt{2})\pi$$

题 170: 根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint\limits_D (x+y)^2\,d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\,d\sigma$，其中积分区域 D 是由 x 轴、y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成。

(2) $\iint\limits_D (x+y)^2\,d\sigma$ 与 $\iint\limits_D (x+y)^3\,d\sigma$，其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成。

(3) $\iint\limits_D \ln(x+y)\,d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,d\sigma$，其中 D 是三角形闭区域，三顶点分别为 $(1,0),(1,1),(2,0)$。

(4) $\iint\limits_D \ln(x+y)\,d\sigma$ 与 $\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\,d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid 3 \le x \le 5, 0 \le y \le 1\}$

解：(1) 在积分区域 D 上，

$$0 \le x+y \le 1$$

故有

$$(x+y)^3 \le (x+y)^2$$

根据二重积分的性质 4，可得

$$\iint_D (x+y)^3\,d\sigma \le \iint_D (x+y)^2\,d\sigma$$

(2) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x,y) \mid x+y \geq 1\}$ 内，故在 D 上有

$$(x+y)^2 \leq (x+y)^3$$

从而

$$\iint\limits_D (x+y)^2\, d\sigma \leq \iint\limits_D (x+y)^3\, d\sigma$$

(3) 由于积分区域 D 位于条形区域 $\{(x,y) \mid 1 \leq x+y \leq 2\}$ 内，故在区域 D 上的点满足

$$0 \leq \ln(x+y) \leq 1$$

从而有

$$[\ln(x+y)]^2 \leq \ln(x+y)$$

因此

$$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\, d\sigma \leq \iint\limits_D \ln(x+y)\, d\sigma$$

(4) 由于积分区域 D 位于半平面 $\{(x,y) \mid x+y \geq e\}$ 内，故在 D 上有

$$\ln(x+y) \geq 1$$

从而有

$$[\ln(x+y)]^2 \geq \ln(x+y)$$

因此

$$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2\, d\sigma \geq \iint\limits_D \ln(x+y)\, d\sigma$$

题 171: 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I = \iint\limits_D xy(x+y)\, d\sigma$，其中

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

(2) $I = \iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y\, d\sigma$，其中

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$$

(3) $I = \iint\limits_D (x+y+1)\, d\sigma$，其中

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

(4) $I = \iint\limits_D (x^2+4y^2+9)\, d\sigma$，其中

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 4\}$$

解: (1) 在积分区域 D 上，

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$$

从而

$$0 \leq xy(x+y) \leq 2$$

又 D 的面积等于 1，因此

$$0 \leq \iint\limits_D xy(x+y)\, d\sigma \leq 2$$

(2) 在积分区域 D 上，

$$0 \le \sin x \le 1$$

$$0 \le \sin y \le 1$$

从而

$$0 \le \sin^2 x \sin^2 y \le 1$$

又 D 的面积等于 π^2，因此

$$0 \le \iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y \, d\sigma \le \pi^2$$

(3) 在积分区域 D 上，

$$1 \le x + y + 1 \le 4$$

D 的面积等于 2，因此

$$2 \le \iint\limits_D (x + y + 1) \, d\sigma \le 8$$

(4) 在积分区域 D 上，

$$0 \le x^2 + y^2 \le 4$$

所以有

$$9 \le x^2 + 4y^2 + 9 \le 4(x^2 + y^2) + 9 \le 25$$

又 D 的面积等于 4π，因此

$$36\pi \le \iint\limits_D (x^2 + 4y^2 + 9) \, d\sigma \le 100\pi$$

题 172: 计算 $\iint\limits_D (2 + y \cos x + xy \sin y) \, d\sigma$，其中

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$$

解： 由于 $y \cos x$ 是 y 的奇函数，$xy \sin y$ 是 x 的奇函数，积分区域 D 关于 x 轴、y 轴都对称，故

$$\iint\limits_D y \cos x \, d\sigma = 0$$

$$\iint\limits_D xy \sin y \, d\sigma = 0$$

因此

$$\iint\limits_D (2 + y \cos x + xy \sin y) \, d\sigma = \iint\limits_D 2 \, d\sigma = 2 \times (\pi \times 1^2) = 2\pi$$

题 173: 求极限 $\lim\limits_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint\limits_{D_\rho} f(x, y) \, d\sigma$，其中 D_ρ 为圆域

$$x^2 + y^2 \le \rho^2$$

$f(x, y)$ 是 D_ρ 上的连续函数。

解： 由积分中值定理知存在 $(\xi, \eta) \in D_\rho$，使得

$$\iint\limits_{D_\rho} f(x, y) \, d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma(D_\rho) = f(\xi, \eta) \pi \rho^2$$

所以

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint\limits_{D_\rho} f(x,y)\,d\sigma=\lim_{\rho\to 0}f(\xi,\eta)=f(0,0)$$

题 174:

计算极限 $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}\cos(x+y)\,d\sigma$ 的值，其中

$$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\right\}$$

解: 根据二重积分性质可知

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}\cos(x+y)\,d\sigma=\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)}e^{\xi^2+\eta^2}\cos(\xi+\eta)=1$$

题 175: 计算：$\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,d\sigma$，其中

$$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\right\}$$

解: 区域 D 的面积

$$\sigma=\pi r^2$$

由中值定理，因 $f(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(x+y)$ 在有界闭区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le r^2\}$ 上连续，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint\limits_{D} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)\cdot\pi r^2$$

即

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)$$

而当 $r\to 0$ 时，

$$(\xi,\eta)\to(0,0)$$

而 $f(x,y)$ 是连续函数，故

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{D} e^{x^2-y^2}\cos(x+y)\,d\sigma=\lim_{r\to 0}f(\xi,\eta)=f\left(\lim_{r\to 0}(\xi,\eta)\right)=f(0,0)=1$$

题 176: 证明：若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，$g(x,y)$ 在 D 上可积且不变号，则存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$\iint\limits_{D} f(x,y)g(x,y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_{D} g(x,y)\,d\sigma$$

解: 函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，必存在最大值 M 与最小值 m，使 $\forall(x,y)\in D$，有

$$m\le f(x,y)\le M$$

从而

$$m\iint\limits_{D} g(x,y)\,dx\,dy\le\iint\limits_{D} f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy\le M\iint\limits_{D} g(x,y)\,dx\,dy$$

若 $\iint\limits_{D} g(x,y)\,dx\,dy=0$，则

$$\iint\limits_{D} f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy=f(\xi,\eta)\iint\limits_{D} g(x,y)\,dx\,dy=D$$

即对任意 $(\xi,\eta)\in D$，等式成立。

若 $\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy>0$，有

$$m\le\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy}\le M$$

由介值定理，存在 $(\xi,\eta)\in D$，使

$$f(\xi,\eta)=\frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_D g(x,y)\,dx\,dy}$$

等式得证。

同理当 $g(x,y)<0$ 时，则

$$-g(x,y)>0$$

证明同上，等式也成立，

综上所述，

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\,d\sigma=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\,d\sigma$$

第九讲：二重积分的计算

题 177: 画出积分区域, 并计算下列二重积分:

1. $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,d\sigma$，其中
   D 是由两条抛物线 $y=\sqrt{x}$，$y=x^2$ 所围成的闭区域.

2. $\iint\limits_D xy^2\,d\sigma$，其中
   D 是由圆周 $x^2+y^2=4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域.

3. $\iint\limits_D e^{x+y}\,d\sigma$，其中
   $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$

4. $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\,d\sigma$，其中
   D 是由直线 $y=2$，$y=x$ 及 $y=2x$ 所围成的闭区域.

解: (1)D 可用不等式表示为
$x^2\le y\le\sqrt{x}$
$0\le x\le 1$ 于是

$$\iint\limits_D x\sqrt{y}\,d\sigma=\int_0^1 x\,dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\sqrt{y}\,dy=\frac{2}{3}\int_0^1 x\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\left(x^{\frac{7}{4}}-x^4\right)\,dx=\frac{6}{55}$$

(2) D 用不等式可表示为

$$0\le x\le\sqrt{4-y^2},\ -2\le y\le 2$$

$$\text{故}\iint\limits_D xy^2\,d\sigma=\int_{-2}^{2}y^2\,dy\int_0^{\sqrt{4-y^2}}x\,dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}y^2(4-y^2)\,dy=\frac{64}{15}$$

(3). 其中

$$D_1=\{(x,y)\mid -x-1\le y\le x+1,-1\le x\le 0\}$$

$$D_2=\{(x,y)\mid x-1\le y\le -x+1,0\le x\le 1\}$$

因此

$$\iint\limits_D e^{x+y}\,d\sigma=\iint\limits_{D_1}e^{x+y}\,d\sigma+\iint\limits_{D_2}e^{x+y}\,d\sigma$$

$$=\int_{-1}^{0}e^x\,dx\int_{-x-1}^{x+1}e^y\,dy+\int_0^1 e^x\,dx\int_{x-1}^{-x+1}e^y\,dy$$

$$=\int_{-1}^{0}(e^{2x+1}-e^{-1})\,dx+\int_0^1(e-e^{2x-1})\,dx$$

$$=e-e^{-1}$$

(4) $D: \frac{y}{2} \le x \le y, 0 \le y \le 2$ （图下图所示）

故 $\iint\limits_D (x^2+y^2-x)\,d\sigma = \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{y} (x^2+y^2-x)\,dx = \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{2}}^{y} dy = \int_0^2 \left(\frac{19}{24}y^3 - \frac{3}{8}y^2\right) dy = \frac{13}{6}$

题 178: 如果二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ 的被积函数 $f(x,y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积，即

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

积分区域

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

证明这个二重积分等于两个单积分的乘积，即

$$\iint\limits_D f_1(x) \cdot f_2(y)\,dx\,dy = \left[\int_a^b f_1(x)\,dx\right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y)\,dy\right]$$

解: $\iint\limits_D f_1(x) \cdot f_2(y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y)\,dy\right] dx$

在上式右端的第一次单积分 $\int_c^d f_1(x) \cdot f_2(y)\,dy$ 中，$f_1(x)$ 与积分变量 y 无关，可视为常数提到积分号外，因此上式右端等于 $\int_a^b f_1(x) \cdot \left[\int_c^d f_2(y)\,dy\right] dx$。

而在这个积分中，由于 $\int_c^d f_2(y)\,dy$ 为常数，故又可提到积分号外，从而得到

$$\iint\limits_D f_1(x) \cdot f_2(y)\,dx\,dy = \left[\int_c^d f_2(y)\,dy\right] \cdot \left[\int_a^b f_1(x)\,dx\right]$$

$$= \left[\int_a^b f_1(x)\,dx\right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y)\,dy\right]$$

证毕。

题 179: 化二重积分 $I = \iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$ 为二次积分（分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分），其中积分区域 D 是:

1. 由直线 $y = x$ 及抛物线 $y^2 = 4x$ 所围成的闭区域;
2. 由 x 轴及半圆周 $x^2 + y^2 = r^2 (y \ge 0)$ 所围成的闭区域;
3. 由直线 $y = x$，$x = 2$ 及双曲线 $y = \frac{1}{x}(x > 0)$ 所围成的闭区域;

解:

(1) 直线$y = x$ 及抛物线$y^2 = 4x$ 的交点为$(0,0)$ 和$(4,4)$

于是

$$I = \int_0^4 dx \int_x^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy$$

或

$$I = \int_0^4 dy \int_{\frac{y^2}{4}}^{y} f(x,y)\,dx$$

(2) 将 D 用不等式表示为

$$0 \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}, \quad -r \le x \le r$$

于是可将 I 化为如下的先对 y、后对 x 的二次积分:

$$I = \int_{-r}^{r} dx \int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} f(x,y)\,dy$$

如将 D 用不等式表示为

$$-\sqrt{r^2-y^2} \le x \le \sqrt{r^2-y^2}, \quad 0 \le y \le r$$

则可将 I 化为如下的先对 x、后对 y 的二次积分：

$$I = \int_0^r dy \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} f(x,y)\,dx$$

(3). 三条边界曲线两两相交，先求得 3 个交点为 (1,1), $\left(2,\frac{1}{2}\right)$, (2,2)，于是

$$I = \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)\,dy$$

或

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^2 f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y)\,dx$$

题 180: 交换下次二次积分的积分次序：

1. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x,y)\,dx$.
2. $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx$.
3. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx$.
4. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy$.
5. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x,y)\,dy$.
6. $\int_0^\pi dx \int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\,dy$.

解： (1) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$，其中

$$D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le y, 0 \le y \le 1\}$$

D 可改写为

$$\{(x,y) \mid x \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$$

于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dx \int_x^1 f(x,y)\,dy$$

(2) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$，其中

$$D = \{(x,y) \mid y^2 \le x \le 2y, 0 \le y \le 2\}$$

D 可表示为

$$\left\{(x,y) \middle| \frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}, 0 \le x \le 4\right\}$$

(如下图所示), 于是

$$\text{原式} = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$$

(3) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$，其中

$$D = \left\{(x,y) \middle| -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2}, 0 \le y \le 1\right\}$$

又 D 可表示为

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le y\le\sqrt{1-x^2},-1\le x\le 1\right\}$$

(如下图所示), 因此

$$原式=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dy$$

(4) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$，其中

$$D=\left\{(x,y)\,\middle|\,2-x\le y\le\sqrt{2x-x^2},1\le x\le 2\right\}$$

D 可表示为

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,2-y\le x\le 1+\sqrt{1-y^2},0\le y\le 1\right\}$$

(如下图所示), 于是

$$原式=\int_{0}^{1}dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,dx$$

(5) 所给二次积分等于二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le\ln x,1\le x\le e\}$$

D 可表示为

$$\{(x,y)\mid e^y\le x\le e,0\le y\le 1\}$$

(如下图所示), 于是

$$原式=\int_{0}^{1}dy\int_{e^y}^{e}f(x,y)\,dx$$

(6) 如下图所示，将积分区域 D 表示为 $D_1\cup D_2$，其中

$$D_1=\{(x,y)\,|\arcsin y\le x\le\pi-\arcsin y,0\le y\le 1\}$$

$$D_2=\{(x,y)\,|-2\arcsin y\le x\le\pi,-1\le y\le 0\}$$

于是

$$原式=\int_{0}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\,dx+\int_{-1}^{0}dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\,dx$$

题 181: 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x+y=2$，$y=x$ 和 x 轴所围成，它的面密度

$$\mu(x,y)=x^2+y^2$$

求该薄片的质量。

解: 解: D 如下图所示，所求薄片的质量

$$M=\iint\limits_D\mu(x,y)\,d\sigma=\int_{0}^{1}dy\int_{y}^{2-y}f(x^2+y^2)\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{3}x^3+xy^2\right]_{y}^{2-y}dy$$

$$=\int_{0}^{1}\left[\frac{1}{3}(2-y)^3+2y^2-\frac{7}{3}y^3\right]dy$$

$$=\left[-\frac{1}{12}(2-y)^4+\frac{2}{3}y^3-\frac{7}{12}y^4\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3}$$

题 182: 计算由四个平面 $x = 0$，$y = 0$，$x = 1$，$y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及 $2x + 3y + z = 6$ 截得的立体的体积。

解: 此立体为一曲顶柱体，它的底是 xOy 面上的闭区域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

顶是曲面 $z = 6 - 2x - 3y$（如下图）。

因此所求立体的体积

$$V = \iint_D (6 - 2x - 3y)\, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (6 - 2x - 3y)\, dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{9}{2} - 2x\right) dx = \frac{7}{2}$$

题 183: 求由平面 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及抛物面 $x^2 + y^2 = 6 - z$ 截得的立体的体积。

解: 此立体为一曲顶柱体，它的底是 xOy 面上的闭区域

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1 - x, 0 \le x \le 1\}$$

顶是曲面 $z = 6 - (x^2 + y^2)$（如下图所示）

因此所求立体的体积

$$V = \iint_D \left[6 - (x^2 + y^2)\right] dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(6 - x^2 - y^2\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left[6(1 - x) - x^2 + x^3 - \frac{1}{3}(1 - x)^3\right] dx$$

$$= \frac{17}{6}$$

题 184: 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积。

解: 由

$$\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 6 - 2x^2 - y^2 \end{cases}$$

消去 z，得

$$x^2 + y^2 = 2$$

故所求立体在 xOy 面上的投影区域为

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 2\}$$

(如下图所示)

所求立体的体积等于两个曲顶柱体体积的差:

$$V = \iint_D (6 - 2x^2 - y^2)\, d\sigma - \iint_D (x^2 + 2y^2)\, d\sigma$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_D (6-3x^2-3y^2)\,d\sigma \\
&= \iint\limits_D (6-3r^2)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (6-3r^2)\,r\,dr \\
&= 6\pi
\end{aligned}
$$

题 185: 画出积分区域，把积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ 表示为极坐标形式的二次积分，其中积分区域 D 是:

1. $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\}(a>0)$;
2. $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 2x\}$;
3. $\{(x,y) \mid a^2 \le x^2+y^2 \le b^2\}$，其中 $0<a<b$;
4. $\{(x,y) \mid 0 \le y \le 1-x, 0 \le x \le 1\}$.

解: (1) 如下图所示，

在极坐标系中，

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le a, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

故

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr
\end{aligned}
$$

(2) 如下图所示， 在极坐标系中，

$$D = \left\{(r,\theta) \middle| 0 \le r \le 2\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

故

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr
\end{aligned}
$$

(3) 如下图所示，

在极坐标系中，

$$D = \{(r,\theta) \mid a \le r \le b, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

故

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy &= \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b (r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr
\end{aligned}
$$

(4) D 如下图所示，在极坐标系中，直线 $x+y=1$ 的方程为

$$r = \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}$$

故

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\le r\le\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta},0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

于是

$$\iint\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}(r\cos\theta,r\sin\theta)\,r\,dr$$

题 186: 利用极坐标计算下列各题:

1. $\iint\iint_D e^{x^2+y^2}\,d\sigma$，其中

$$D\text{ 是由圆周}x^2+y^2=4\text{ 所围成的闭区域.}$$

2. $\iint\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,d\sigma$，其中

$$D\text{ 是由圆周}x^2+y^2=1\text{ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.}$$

3. $\iint\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,d\sigma$，其中

$$D\text{ 是由圆周}x^2+y^2=4,\ x^2+y^2=1\text{ 及直线}y=0,\ y=x\text{ 所围成的在第一象限内的闭区域.}$$

解: (1) 在极坐标系中，积分区域

$$D=\{(r,\theta)\,|0\le r\le 2,0\le\theta\le 2\pi\}$$

于是

$$\iint\iint_D e^{x^2+y^2}\,d\sigma=\iint\iint_D e^{r^2}\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 e^{r^2}\cdot r\,dr$$
$$=2\pi\cdot\left[\frac{e^{r^2}}{2}\right]_0^2$$
$$=\pi(e^4-1)$$

(2) 在极坐标系中，积分区域

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\le r\le 1,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

于是

$$\iint\iint_D \ln(1+x^2+y^2)\,d\sigma=\iint_D \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\theta$$
$$=\iint_D \ln(1+r^2)\cdot r\,dr\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 \ln(1+r^2)\cdot r\,dr$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+r^2)\,d(1+r^2)$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[(1+r^2)\ln(1+r^2)\right]_0^1-\int_0^1 2r\,dr$$

$$=\frac{\pi}{4}(2\ln 2-1)$$

(3) 在极坐标系中，积分区域

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|1\le r\le 2,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\arctan\frac{y}{x}=\theta$$

于是

$$\iint\iint_D \arctan\frac{y}{x}\,d\sigma=\iint_D \theta\cdot r\,dr\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\theta\,d\theta\int_1^2 r\,dr$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{2}(2^2-1)$$

$$=\frac{3}{64}\pi^2$$

题 187: 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma$, 其中

D 是由直线$x=2,y=x$ 及曲线$xy=1$ 所围成的闭区域.

(2)$\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}d\sigma$, 其中

D 是由圆周$x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

(3)$\iint_D (x^2+y^2)d\sigma$, 其中

D 是由直线$y=x$, $y=x+a$, $y=a$, $y=3a(a>0)$ 所围成的闭区域.

(4)$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$, 其中 D 是圆环形闭区域

$$\left\{(x,y)\mid a^2\le x^2+y^2\le b^2\right\}$$

(5)$\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}d\sigma$,其中 D 是圆形闭区域

$$\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le ax\right\}(a>0)$$

解: (1) D 如下图所示.

根据 D 的形状，选用直角坐标较宜。

$$D=\left\{(x,y)\mid\frac{1}{x}\le y\le x,1\le x\le 2\right\}$$

故

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}d\sigma=\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int_1^2\left(-x+x^3\right)dx=\frac{9}{4}$$

(2) 根据积分区域 D 的形状和被积函数的特点，选用极坐标为宜。

$$D=\left\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 1,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

故

$$\text{原式}=\iint_D\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdrd\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}rdr$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^4}}dr - \int_0^1 \frac{r^3}{\sqrt{1-r^4}}dr\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}dr^2 + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}d(1-r^4)\right] \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\arcsin r^2\Big|_0^1 + \frac{1}{2}\sqrt{1-r^4}\Big|_0^1\right) \\
&= \frac{\pi}{8}(\pi-2)
\end{aligned}
$$

(3) D 如下图所示. 选用直角坐标系为宜。又根据 D 的边界曲线的情况，宜采用先对 x，后对 y 的积分次序。于是

$$
\begin{aligned}
\iint_D (x^2+y^2)d\sigma &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^{y} (x^2+y^2)dx \\
&= \int_a^{3a}\left(2ay^2 - a^2y + \frac{a^3}{3}\right)dy \\
&= 14a^4
\end{aligned}
$$

(4) 本题显然适于用极坐标计算

$$D = \{(r,\theta) \mid a \le r \le b, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

则

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma = \iint_D r \cdot r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^b r^2 dr \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{3}(b^3-a^3) \\
&= \frac{2\pi}{3}(b^3-a^3)
\end{aligned}
$$

(5) 利用极坐标，区域

$$D = \left\{(\rho,\theta) \mid 0 \le \rho \le a\cos\theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

得

$$
\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}d\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} \sqrt{a^2-\rho^2}\cdot \rho d\rho \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3}(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-|\sin\theta|^3)d\theta \\
&= \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)d\theta \\
&= \frac{2a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{3\pi-4}{9}a^3
\end{aligned}
$$

题 188: 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2+y^2=ax$ 围成的闭区域为底，而以曲面 $z=x^2+y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积。

解: 解：如下图所示，设

$$D_1 = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \sqrt{ax-x^2}, 0 \le x \le a\right\}$$

$$= \left\{ (r,\theta) \mid 0 \le r \le a\cos\theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \right\}$$

由于曲顶柱体关于 zOx 面对称，故

$$V = 2\iint_{D_1} (x^2+y^2)dxdy = 2\iint_{D_1} r^2 \cdot rdrd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\cos\theta} r^3 dr$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = \frac{a^4}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3}{32}\pi a^4$$

第十讲：三重积分的计算及重积分的应用

题 189: 化三重积分 $I=\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 分别是

(1) 由双曲抛物面 $xy=z$ 及平面 $x+y-1=0, z=0$ 所围成的闭区域;

(2) 由曲面 $z=x^2+y^2$ 及平面 $z=1$ 所围成的闭区域;

(3) 由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及 $z=2-x^2$ 所围成的闭区域;

(4) 由曲面 $cz=xy(c>0)$，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=0$ 所围成的在第 I 卦限内的闭区域。

解:

题 190: 计算 $\iiint_\Omega xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是由曲面 $z=xy$，平面 $y=x, x=1$ 和 $z=0$ 所围成的闭区域。

解:

题 191: 计算 $\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 Ω 为平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体。

解:

题 192: 计算 $\iiint_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 及三个坐标面所围成的在第 I 卦限内的闭区域。

解:

题 193: 计算 $\iiint_\Omega xz\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是由平面 $z=0, z=y, y=1$ 以及抛物柱面 $y=x^2$ 所围成的闭区域。

解:

题 194: 计算 $\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是由锥面 $z=\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=h(R>0,h>0)$ 所围成的闭区域。

解:

题 195: 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1)$\iiint_\Omega z\,dV$，其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dV$，其中 Ω 是由曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的闭区域。

解:

题 196: 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1)$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dV$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_\Omega 4V$ 其中闭区域 $\Omega=\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2, x^2+y^2\le z^2\}$。

解:

题 197: 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_\Omega xy\,dV$，其中 Ω 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=1, z=0, x=0, y=0$ 所围成的在第 I 卦限内的闭区域;

(2) $\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$，其中 Ω 是由球面 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的闭区域;

(3)$\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dV$，其中 Ω 是由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 及平面 $z=5$ 所围成的闭区域;

(4) $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dV$ 其中闭区域 $\Omega=\{(x,y,z) \mid 0<a\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}\le A, z\ge 0\}$;

(5)$\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\,dV$ 其中 Ω 是由抛物面 $x=y^2+z^2$ 与圆锥面 $x=2-\sqrt{y^2+z^2}$ 所围成的闭区域。

解:

题 198: 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

(1) $z=6-x^2-y^2$ 及$z=\sqrt{x^2+y^2}$

(2) $x^2+y^2+z^2=2az(a>0)$ 及$x^2+y^2=z^2$(含有z 轴的部分)

(3) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及$z=x^2+y^2$

解:

题 199: 求上、下分别为球面 $x^2+y^2+z^2=2$ 和抛物面$z=x^2+y^2$ 所围立体的体积。

解:

题 200: 求球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 含在圆柱面$x^2+y^2=ax$ 内部的那部分面积。

解:

题 201: 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面$z^2=2x$ 所割下部分的曲面面积。

解:

题 202: 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 及$x^2+z^2=R^2$ 所围立体的表面积。

解:

题 203: 设薄片所占的闭区域 D 如下，求均匀薄片的质心:

(1) D 由 $y=\sqrt{2px}, x=x_0, y=0$ 所围成;

(2) D 是半椭圆形闭区域$\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1, y\ge 0\right\}$

(3) D 是界于两个圆 $\rho=a\cos\theta, \rho=b\cos\theta(0<a<b)$ 之间的闭区域。

解:

题 204: 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y=x^2$ 及直线 y = x 所围成，它在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x,y)=x^2y$ ，求该薄片的质心。

解:

题 205: 一个由圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 z = 1 所围成的漏斗中盛满液体。假定漏斗内点 (x, y) 处液体密度为

$$\mu=\frac{1}{x^2+y^2+1}$$

求漏斗中液体的重心。

解:

第十一讲：第一型曲线积分

题 206: 利用对弧长的曲线积分的定义证明： 设在 L 上 $f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\,ds \le \int_L g(x,y)\,ds.$$

特别地，有

$$\left|\int_L f(x,y)\,ds\right| \le \int_L |f(x,y)|\,ds.$$

解:

证 设将积分弧段 L 任意分割成 n 个小弧段，第 i 个小弧段的长度为 Δs_i，(ξ_i,η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点. 按假设，有

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \le g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \quad (i=1,2,\cdots,n),$$
$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

令$\lambda=\max\{\Delta s_i\}\to 0$, 上式两端同时取极限，即得

$$\int_L f(x,y)\,ds \le \int_L g(x,y)\,ds.$$

又$f(x,y)\le |f(x,y)|, -f(x,y)\le |f(x,y)|$，利用以上结果，得

$$\int_L f(x,y)\,ds \le \int_L |f(x,y)|\,ds,$$

$$-\int_L f(x,y)\,ds \le \int_L |f(x,y)|\,ds,$$

即

$$\left|\int_L f(x,y)\,ds\right| \le \int_L |f(x,y)|\,ds.$$

题 207: 计算下列对弧长的曲线积分：

1. $\oint_L (x^2+y^2)^n\,ds$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t, y=a\sin t(0\le t\le 2\pi)$；
2. $\int_L (x+y)\,ds$，其中 L 为连接 $(1,0)$ 及 $(0,1)$ 两点的直线段；
3. $\oint_L x\,ds$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界；
4. $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$，直线 $y=x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界；
5. $\int_\Gamma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,ds$，其中 Γ 为曲线 $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, z=e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧；

6. $\int_\Gamma x^2yz\,ds$, 其中 Γ 为折线 $ABCD$, 这里 A,B,C,D 依次为点 $(0,0,0),(0,0,2),(1,0,2),(1,3,2)$;

7. $\int_L y^2\,ds$，其中 L 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)(0\le t\le 2\pi)$;

8. $\int_L (x^2+y^2)\,ds$，其中 L 为曲线 $x=a(\cos t+t\sin t), y=a(\sin t-t\cos t)(0\le t\le 2\pi)$

解： (1)

$$\begin{aligned}&\oint_L (x^2+y^2)^n\,ds\\&=\int_0^{2\pi}\left(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t\right)^n\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt\\&=\int_0^{2\pi}a^{2n+1}\,dt=2\pi a^{2n+1}.\end{aligned}$$

(2) 直线 L 的方程为 $y=1-x(0\le x\le 1)$.

$$\int_L (x+y)\,ds=\int_0^1[x+(1-x)]\sqrt{1+(-1)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}.$$

(3) L 由 L_1 和 L_2 两段组成，其中 $L_1: y=x(0\le x\le 1), L_2: y=x^2(0\le x\le 1)$. 于是

$$\begin{aligned}\oint_L x\,ds=\int_{L_1}x\,ds+\int_{L_2}x\,ds&=\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\,dx\\&=\int_0^1\sqrt{2}x\,dx+\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx\\&=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}+6\sqrt{2}-1).\end{aligned}$$

(4) L 由线段 $OA: y=0\,(0\le x\le a)$，圆弧 $AB: x=a\cos t, y=a\sin t\left(0\le t\le\frac{\pi}{4}\right)$ 和线段 $OB: y=x\left(0\le x\le\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 组成（图 11-1）.

$$\int_{OA}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=\int_0^a e^x\,dx=e^a-1,$$

$$\begin{aligned}\int_{AB}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^a\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2}\,dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}ae^a\,dt=\frac{\pi}{4}ae^a,\end{aligned}$$

$$\int_{OB}e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}e^{\sqrt{2}x}\sqrt{1+1^2}\,dx=e^a-1,$$

于是

$$\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds=e^a-1+\frac{\pi}{4}ae^a+e^a-1=e^a\left(2+\frac{\pi a}{4}\right)-2.$$

$$\begin{aligned}(5)\quad ds&=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\sqrt{\left(e^t\cos t-e^t\sin t\right)^2+\left(e^t\sin t+e^t\cos t\right)^2+\left(e^t\right)^2}\,dt\\&=\sqrt{3}e^t\,dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_\Gamma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,ds&=\int_0^2\frac{1}{e^{2t}\cos^2 t+e^{2t}\sin^2 t+e^{2t}}\cdot\sqrt{3}e^t\,dt\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 e^{-t}\,dt=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2}).\end{aligned}$$

(6) Γ 由直线段 AB, BC 和 CD 组成，其中

$$\begin{aligned} AB: &\quad x=0, y=0, z=t \quad (0 \le t \le 2); \\ BC: &\quad x=t, y=0, z=2 \quad (0 \le t \le 1); \\ CD: &\quad x=1, y=t, z=2 \quad (0 \le t \le 3). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_\Gamma x^2yz\,ds &= \int_{AB} x^2yz\,ds + \int_{BC} x^2yz\,ds + \int_{CD} x^2yz\,ds \\ &= \int_0^2 0\,dt + \int_0^1 0\,dt + \int_0^3 2t\,dt = 9. \end{aligned}$$

(7)

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,dt,$$

$$\int_L y^2\,ds = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

$$= \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{5}{2}}\,dt = \sqrt{2}a^3\int_0^{2\pi}\left(2\sin^2\frac{t}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\,dt$$

令 $u = \frac{t}{2}$，则

$$= 16a^3\int_0^{\pi}\sin^5 u\,du$$

$$= 32a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 u\,du^{1} = 32a^3 \cdot \frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{256}{15}a^3.$$

(8)

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$= \sqrt{(a\cos t)^2 + (a\sin t)^2}\,dt = a\,dt,$$

$$\int_L (x^2+y^2)\,ds = \int_0^{2\pi}[a^2(\cos t + t\sin t)^2 + a^2(\sin t - t\cos t)^2]\cdot a\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^3(1+t^2)\,dt = 2\pi^2a^3(1+2\pi^2).$$

题 208: 求圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 被球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所截的部分的面积。

解: 圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 与 Oxy 平面的交线方程是

$$L: \begin{cases} x = \frac{a}{2}(1+\cos t) \\ y = \frac{a}{2}\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

则

$$A = 2\int_L \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,ds = 2\int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{a^2}{2}(1-\cos t)}\frac{a}{2}\,dt$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|\,dt = 4a^2$$

题 209:

(1) 对于密度为 $\mu(x,y,z)$ 的非均匀空间曲线 L，写出它的重心公式；

(2) 试求螺旋线

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = ht \end{cases}$$

上对应于 $0 \le t \le m$ 的一段弧的重心。

解： (1)

$$\left(\frac{\int_L x\mu(x,y,z)\,ds}{\int_L \mu(x,y,z)\,ds}, \frac{\int_L y\mu(x,y,z)\,ds}{\int_L \mu(x,y,z)\,ds}, \frac{\int_L z\mu(x,y,z)\,ds}{\int_L \mu(x,y,z)\,ds}\right).$$

(2)

$$\begin{aligned} m = \int_L \mu(x,y,z)\,ds &= \int_0^m \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2 + h^2}\,dt \\ &= \int_0^m \sqrt{a^2+h^2}\,dt = m\sqrt{a^2+h^2} \end{aligned}$$

$$\int_L x\mu(x,y,z)\,ds = \int_0^m a\cos t\sqrt{a^2+h^2}\,dt = a\sqrt{a^2+h^2}\sin m$$

$$\int_L y\mu(x,y,z)\,ds = \int_0^m a\sin t\sqrt{a^2+h^2}\,dt = a\sqrt{a^2+h^2}(1-\cos m)$$

$$\int_L z\mu(x,y,z)\,ds = \int_0^m ht\sqrt{a^2+h^2}\,dt = \frac{1}{2}h\sqrt{a^2+h^2}m^2$$

所求重心是 $\left(\frac{a\sin m}{m}, \frac{a(1-\cos m)}{m}, \frac{1}{2}mh\right)$。

第十二讲：第二型曲线积分

题 210: 设 L 为 xOy 面内直线 $x=a$ 上的一段，证明：

$$\int_L P(x,y)\,dx = 0.$$

解： **证**将 L 的方程表达为如下的参数形式：

$$\begin{cases} x = a, \\ y = t, \end{cases} \qquad t \text{ 从}\alpha \text{ 变到}\beta.$$

于是由第二类曲线积分的计算公式，得

$$\int_L P(x,y)\,dx = \int_\alpha^\beta P(a,t)\cdot 0\,dt = 0.$$

注本题给出了第二类曲线积分的一个重要性质：

如果 L 为垂直于 x 轴的有向线段，则 $\int_L P(x,y)\,dx = 0$；如果 L 为垂直于 y 轴的有向线段，则 $\int_L Q(x,y)\,dy = 0$。这一性质常被用来简化第二类曲线积分的计算。

题 211: 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a,0)$ 到点 $(b,0)$ 的一段直线，证明：

$$\int_L P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,0)\,dx.$$

解： 将 L 的方程表达为如下的参数形式：

$$\begin{cases} x = x, \\ y = 0, \end{cases} \qquad x \text{ 从}a \text{ 变到}b,$$

于是

$$\int_L P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,0)\,dx.$$

题 212: 计算下列对坐标的曲线积分：

1. $\int_L (x^2-y^2)\,dx$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(2,4)$ 的一段弧；
2. $\oint_L xy\,dx$，其中 L 为圆周 $(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界（按逆时针方向绕行）；
3. $\int_L y\,dx + x\,dy$，其中 L 为圆周 $x=R\cos t, y=R\sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧；
4. $\oint_L \frac{(x+y)\,dx-(x-y)\,dy}{x^2+y^2}$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2$（按逆时针方向绕行）；
5. $\int_\Gamma x^2\,dx + z\,dy - y\,dz$，其中 Γ 为曲线 $x=k\theta, y=a\cos\theta, z=a\sin\theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧；
6. $\int_\Gamma x\,dx + y\,dy + (x+y-1)\,dz$，其中 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线；

7. $\oint_\Gamma dx - dy + y\,dz$，其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$，这里的 A,B,C 依次为点 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$；

8. $\int_L (x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧。

解：

(1)

$$\int_L (x^2-y^2)\,dx = \int_0^2 (x^2-x^4)2x\,dx = .$$

(2) L 由 L_1 和 L_2 所组成，其中 L_1 为有向半圆弧：

$$\begin{cases} x = a + a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} \qquad t \text{ 从0 变到}\pi;$$

L_2 为有向线段 $y=0, x$ 从 0 变到 $2a$. 于是

$$\oint_L xy\,dx = \int_{L_1} xy\,dx + \int_{L_2} xy\,dx$$

$$= \int_0^\pi a(1+\cos t)\cdot a\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt + 0$$

$$= -a^3\left(\int_0^\pi \sin^2 t\,dt + \int_0^\pi \sin^2 t\cos t\,dt\right)$$

$$= -a^3\left(\frac{\pi}{2}+0\right) = -\frac{\pi}{2}a^3.$$

(3)

$$\int_L y\,dx + x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [R\sin t\cdot(-R\sin t) + R\cos t\cdot R\cos t]\,dt$$

$$= R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt = 0.$$

(4) L 的参数方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t, t$ 从 0 变到 2π. 于是

$$原式 = \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} [a(\cos t+\sin t)\cdot(-a\sin t) - a(\cos t-\sin t)\cdot a\cos t]\,dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi} (-a^2)\,dt = -2\pi.$$

(5)

$$\int_\Gamma x^2\,dx + z\,dy - y\,dz$$

$$= \int_0^\pi \left[k^2\theta^2\cdot k + a\sin\theta\cdot(-a\sin\theta) - a\cos\theta\cdot(a\cos\theta)\right]d\theta$$

$$= \int_0^\pi (k^3\theta^2 - a^2)\,d\theta = \frac{1}{3}k^3\pi^3 - a^2\pi.$$

(6) 直线 Γ 的参数方程为 $x=1+t, y=1+2t, z=1+3t, t$ 从 0 变到 1. 于是

$$原式 = \int_0^1 [(1+t)\cdot 1 + (1+2t)\cdot 2 + (1+t+1+2t-1)\cdot 3]\,dt$$

$$= \int_0^1 (6+14t)\,dt = 13.$$

(7) Γ 由有向线段 AB, BC, CA 依次连接而成，其中

$$AB: \quad x=1-t, y=t, z=0, t \text{ 从0 变到1;}$$
$$BC: \quad x=0, y=1-t, z=t, t \text{ 从0 变到1;}$$
$$CA: \quad x=t, y=0, z=1-t, t \text{ 从0 变到1.}$$

$$\int_{AB} dx-dy+y\,dz=\int_0^1 [(-1)-1+0]\,dt=-2,$$

$$\int_{BC} dx-dy+y\,dz=\int_0^1 [0-(-1)+(1-t)\cdot 1]\,dt=\int_0^1 (2-t)\,dt=\frac{3}{2},$$

$$\int_{CA} dx-dy+y\,dz=\int_0^1 (1-0+0)\,dt=1,$$

因此

$$\oint_\Gamma dx-dy+y\,dz=-2+\frac{3}{2}+1=\frac{1}{2}.$$

(8)

$$\int_L (x^2-2xy)\,dx+(y^2-2xy)\,dy$$

$$\begin{aligned}
&=\int_{-1}^1 \left[(x^2-2x\cdot x^2)+(x^4-2x\cdot x^2)\cdot 2x\right] dx\\
&=\int_{-1}^1 (2x^5-4x^4-2x^3+x^2)\,dx\\
&=2\int_0^1 (-4x^4+x^2)\,dx=-\frac{14}{15}.
\end{aligned}$$

题 213:

1. 计算 $\int_L (x+y)\,dx+(y-x)\,dy$，其中 L 是
   (a) 抛物线 $y^2=x$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧；
   (b) 从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的直线段；
   (c) 先沿直线从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$，然后再沿直线到点 $(4,2)$ 的折线；
   (d) 曲线 $x=2t^2+t+1, y=t^2+1$ 上从点 $(1,1)$ 到点 $(4,2)$ 的一段弧。

解: (1) 化为对 y 的定积分. $L: x=y^2, y$ 从1 变到2，

$$\text{原式}=\int_1^2 [(y^2+y)\cdot 2y+(y-y^2)\cdot 1]\,dy$$

$$=\int_1^2 (2y^3+y^2+y)\,dy=\frac{34}{3}.$$

(2) L 的方程为 $y-1=\frac{2-1}{4-1}(x-1)$，即 $x=3y-2, y$ 从 1 变到 2. 化为对 y 的定积分计算，有

$$\text{原式}=\int_1^2 [(3y-2+y)\cdot 3+(y-3y+2)\cdot 1]\,dy$$

$$=\int_1^2 (10y-4)\,dy=11.$$

(3) 记 L_1 为从点 $(1,1)$ 到点 $(1,2)$ 的有向线段，L_2 为从点 $(1,2)$ 到点 $(4,2)$ 的有向线段. 则 $L_1: x=1, y$ 从 1 变到 2; $L_2: y=2, x$ 从 1 变到 4. 在 L_1 上，$dx=0$; 在 L_2 上，$dy=0$. 于是

$$\int_{L_1}(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=\int_1^2(y-1)\,dy=\frac{1}{2},$$

$$\int_{L_2}(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=\int_1^4(x+2)\,dx=\frac{27}{2},$$

因此

$$原式=\frac{1}{2}+\frac{27}{2}=14.$$

(4) 由 $\begin{cases}2t^2+t+1=1,\\ t^2+1=1\end{cases}$，可得 $t=0$; 由 $\begin{cases}2t^2+t+1=4,\\ t^2+1=2\end{cases}$，可得 $t=1$. 因此

$$原式=\int_0^1\left[(2t^2+t+1+t^2+1)\cdot(4t+1)+(t^2+1-2t^2-t-1)\cdot 2t\right]dt$$

$$=\int_0^1(10t^3+5t^2+9t+2)\,dt=\frac{32}{3}.$$

题 214: 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy$ 化成对弧长的曲线积分，其中 L 为

1. 在 xOy 面内沿直线从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$;
2. 沿抛物线 $y=x^2$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$;
3. 沿上半圆周 $x^2+y^2=2x$ 从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$。

解: (1) L 为从点 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的有向线段，其上任一点处的切向量的方向余弦满足 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，于是

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]\,ds$$

$$=\int_L\frac{P(x,y)+Q(x,y)}{\sqrt{2}}\,ds.$$

(2) L 由如下的参数方程给出：$x=x, y=x^2, x$ 由小到大地从 0 变到 1，故 L 的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,y'(x))=(1,2x)$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}},\quad \cos\beta=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}},$$

于是

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_L\frac{P(x,y)+2xQ(x,y)}{\sqrt{1+4x^2}}\,ds.$$

(3) L 由如下的参数方程给出：$x=x, y=\sqrt{2x-x^2}, x$ 由小到大地从 0 变到 1，故 L 的切向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}}=\sqrt{2x-x^2},$$

$$\cos\beta=\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}=\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\cdot\sqrt{2x-x^2}=1-x,$$

于是

$$\int_L P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_L[\sqrt{2x-x^2}\,P(x,y)+(1-x)Q(x,y)]\,ds.$$

第十二讲：格林公式及其应用

题 215: 计算下列曲线积分，并验证格林公式的正确性：

1. $\oint_L (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$，其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的正向边界曲线；

2. $\oint_L (x^2 - xy^3)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$，其中 L 是四个顶点分别为 $(0,0),(2,0),(2,2)$ 和 $(0,2)$ 的正方形区域的正向边界。

解： (1) 先按曲线积分的计算公式直接计算. 记 $L_1 : y = x^2, x$ 从 0 变到 1; $L_2 : x = y^2, y$ 从 1 变到 0 （图 11-4）. 于是

$$原式 = \int_{L_1} (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy + \int_{L_2} (2xy - x^2)\,dx + (x + y^2)\,dy$$

$$= \int_0^1 [(2x^3 - x^2) + (x + x^4) \cdot 2x]\,dx + \int_1^0 [(2y^3 - y^2) \cdot 2y + (y^2 + y^2)]\,dy$$

$$= \int_0^1 (2x^5 + 2x^3 + x^2)\,dx + \int_1^0 (-2y^5 + 4y^4 + 2y^2)\,dy$$

$$= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}.$$

又，$P = 2xy - x^2, Q = x + y^2, \frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$，

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_D (1 - 2x)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 (1 - 2x)\,dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (1 - 2x)(\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

$$= \int_0^1 (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}} - x^2 + 2x^3)\, dx = \frac{1}{30}.$$

可见

$$\oint_L P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

(2) 如图 11-5.L 由有向线段OA, AB, BC 和CO 组成.

$$\int_{\partial A} (x^2 - xy^3)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy = \int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3},$$

$$\int_{AB} (x^2 - xy^3)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy = \int_0^2 (y^2 - 4y)\, dy = \frac{8}{3} - 8,$$

$$\int_{BC} (x^2 - xy^3)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy = \int_2^0 (x^2 - 8x)\, dx = 16 - \frac{8}{3},$$

$$\int_{CO} (x^2 - xy^3)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy = \int_0^0 y^2\, dy = -\frac{8}{3},$$

于是

$$\text{原式} = \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3} - 8 \right) + \left(16 - \frac{8}{3} \right) + \left(-\frac{8}{3} \right) = 8.$$

又

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -3xy^2,$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy = \iint_D (-2y + 3xy^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^2 (-2y + 3xy^2)\, dy$$

$$= \int_0^2 (8x - 4)\, dx = 8,$$

可见

$$\oint_L P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

题 216: 利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积:

1. 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$;

2. 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$。

解:

(1)

$$\text{正向椭圆} 9x^2 + 16y^2 = 144 \text{ 的参数方程为}$$

$$x = 4\cos t, y = 3\sin t, t \text{ 从} 0 \text{ 变到} 2\pi.$$

$$A = \frac{1}{2} \oint_L x\, dy - y\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [4\cos t \cdot 3\cos t - 3\sin t \cdot (-4\sin t)]\, dt$$

$$= 6 \int_0^{2\pi} dt = 12\pi.$$

(2)

$$\text{正向圆周}x^2+y^2=2ax\text{，即}(x-a)^2+y^2=a^2\text{ 的参数方程为}$$
$$x=a+a\cos t, y=a\sin t, t\text{ 从}0\text{ 变到}2\pi.$$
$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\,dy-y\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(a+a\cos t)a\cos t-a\sin t(-a\sin t)]\,dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos t)\,dt=\pi a^2.$$

题 217: 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值：

1. $\int_{(1,1)}^{(2,3)}(x+y)\,dx+(x-y)\,dy$；
2. $\int_{(1,2)}^{(3,4)}(6xy^2-y^3)\,dx+(6x^2y-3xy^2)\,dy$；
3. $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)\,dx+(x^2-4xy^3)\,dy$.

解: 解 (1) 函数 P = x + y, Q = x - y 在整个 xOy 面这个单连通区域内，具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关。取折线积分路径 MRN, ，其中 M 为 (1,1), R 为 (2,1), N 为 (2,3), ，则有

$$\text{原式}=\int_1^2(x+1)\,dx+\int_1^3(2-y)\,dy$$
$$=\frac{5}{2}+0=\frac{5}{2}.$$

(2) 函数 $P=6xy^2-y^3, Q=6x^2y-3xy^2$ 在 xOy 面这个单连通区域内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy-3y^2=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关。取折线积分路径 MRN, ，其中 M 为 (1,2), R 为 (3,2), N 为 (3,4), ，则有

$$\text{原式}=\int_1^3(24x-8)\,dx+\int_2^4(54y-9y^2)\,dy$$
$$=80+156=236.$$

(3) 函数$P=2xy-y^4+3, Q=x^2-4xy^3$ 在 xOy 面这个单连通区域内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3=\frac{\partial P}{\partial y},$$

故曲线积分在 xOy 面内与路径无关。取折线积分路径 MRN, ，其中 M 为 (1,0), R 为 (2,0), N 为 (2,1), ，则

$$\text{原式}=\int_1^2 3\,dx+\int_0^1(4-8y^3)\,dy=3+2=5.$$

题 218: 利用格林公式，计算下列曲线积分：

1. $\oint_L(2x-y+4)\,dx+(5y+3x-6)\,dy$，其中 L 为三角形分割为 $(0,0),(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界；
2. $\oint_L x^2y\cos x+2xy\sin x-y^2e^x\,dx+(x^2\sin x-2ye^x)\,dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}=a^{\frac{3}{2}}(a>0)$；

3. $\oint_L (2y^2 - y^2\cos x)\,dx + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\,dy$，其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2},1)$ 的一段弧；

4. $\oint_L (x^2 - y)\,dx - (x + \sin^2 y)\,dy$，其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧。

解： (1) 设 D 为 L 所围的三角形闭区域，则由格林公式，

$$\oint_L (2x - y + 4)\,dx + (5y + 3x - 6)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy$$

$$= \iint_D [3 - (-1)]\,dx\,dy = 4\iint_D dx\,dy$$

$$= 4 \times (D \text{ 的面积}) = 4 \times 3 = 12.$$

(2) 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\sin x + x^2\cos x - 2ye^x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^2\cos x + 2x\sin x - 2ye^x,$$

故由格林公式得

$$\oint_L \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dx\,dy = \iint_D dx\,dy = 0.$$

(3) 由于 $P = 2xy^2 - y^2\cos x, Q = 1 - 2y\sin x + 3x^2y^2$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2y\cos x + 6xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关，于是将原积分路径 L 改变为折线路径 OKN, 其中 O 为

$$(0,0), R \text{ 为} \left(\frac{\pi}{2},0\right), N \text{ 为} \left(\frac{\pi}{2},1\right) \text{（图 11-7），得}$$

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \cdot dx + \int_0^1 \left(1 - 2y\sin\frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{\pi^2}{4}y^2\right)\,dy$$

$$= \int_0^1 \left(1 - 2y + \frac{3}{4}\pi^2y^2\right)\,dy = \frac{\pi^2}{4}.$$

(4) 由于 $P = x^2 - y, Q = -(x + \sin^2 y)$ 在 xOy 面内具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -1 = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给曲线积分与路径无关。于是将原积分路径 L 改为折线路径 ORN, 其中 O 为 (0,0), R 为 (1,0), N 为 (1,1)（图 11-8），得

$$\text{原式} = \int_0^1 x^2\,dx - \int_0^1 (1 + \sin^2 y)\,dy$$

$$= \frac{1}{3} - 1 - \int_0^1 \frac{1 - \cos 2y}{2}\,dy$$

$$= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin 2 = -\frac{7}{6} + \frac{1}{4}\sin 2.$$

题 219: 验证下列 $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ 在整个 xOy 面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求这样的一个 $u(x,y)$:

1. $(x + 2y)\,dx + (2x + y)\,dy$;

2. $2xy\,dx + x^2\,dy$;

3. $4\sin x\sin 3y\cos x\,dx - 3\cos 3y\cos 2x\,dy$;

4. $(3x^2y + 8xy^2)\,dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^2)\,dy$;

5. $(2x\cos y + y^2\cos x)\,dx + (2y\sin x - x^2\sin y)\,dy$。

解: 解 (1) 在整个 xOy 面内，函数 P = x + 2y, Q = 2x + y 具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2 = \frac{\partial P}{\partial y}$, 因此所给表达式是某一函数 u(x, y) 的全微分。取$(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (x+2y)\,dx + (2x+y)\,dy = \int_0^x dx + \int_0^{(2x+y)} dy$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{y^2}{2}.$$

(2) 在整个 xOy 面内，函数 P = 2xy 和 $Q = x^2$ 具有一阶连续偏导数，且 $\frac{\partial P}{\partial x} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial y}$,故所给表达式是某一函数 u(x, y) 的全微分。取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 2xy\,dx + x^2\,dy = \int_0^2 x\,0\,dx + \int_0^y x^2\,dy = x^2y.$$

(3) 在整个 xOy 面内， $P = 4\sin x\sin 3y\cos x$ 和$Q = -3\cos 3y\cos 2x$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6\cos 3y\sin 2x = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 u(x, y) 的全微分。取$(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} 4\sin x\sin 3y\cos x\,dx - 3\cos 3y\cos 2x\,dy$$

$$= \int_0^x 0\,dx + \int_0^{(-3\cos 3y\cos 2x)} dy = -\cos 2x\sin 3y.$$

(4) 在整个 xOy 面内，函数 $P = 3x^2y + 8xy^2$ 和$Q = x^3 + 8x^2y + 12ye^2$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2 + 8xy^2 = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + 16xy = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式为某一函数 u(x, y) 的全微分。取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2y + 8xy^2)\,dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^2)\,dy$$

$$= \int_0^x 0\,dx + \int_0^y (x^3 + 8x^2y + 12ye^2)\,dy$$

$$= x^3y + 4x^2y^2 + 12(ye^2 - e^y).$$

(5) 解法一在整个 xOy 面内， $P = 2x\cos y + y^2\cos x$ 和$Q = 2y\sin x - x^2\sin y$ 具有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y\cos x - 2x\sin y = \frac{\partial P}{\partial y},$$

故所给表达式是某一函数 u(x, y) 的全微分。取 $(x_0, y_0) = (0, 0)$, 则有

$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2x\cos y + y^2\cos x)\,dx + (2y\sin x - x^2\sin y)\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^x 2x\,dx + \int_0^y (2y\sin x - x^2\sin y)\,dy \\
&= y^2\sin x + x^2\cos y.
\end{aligned}
$$

注在已经证明了所给表达式 P(x, y) dx + Q(x, y) dy 是某一函数 u(x, y) 的全微分后，为了求 u(x, y), 除了采用上面题解中的曲线积分方法外，还可用以下两种方法：解法二（偏积分法）因函数 u(x, y) 满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) = 2x\cos y + y^2\cos x,$$

故

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \int (2x\cos y + y^2\cos x)\,dx \\
&= x^2\cos y + y^2\sin x + \varphi(y),
\end{aligned}
$$

其中 $\varphi(y)$ 是 y 的某个可导函数，由此得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2\sin y + 2y\sin x + \varphi'(y),$$

又 u(x, y) 必须满足

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) = 2y\sin x - x^2\sin y,$$

从而得 $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C$(C 为任意常数). 因此

$$u(x,y) = x^2\cos y + y^2\sin x + C,$$

取 C = 0, 就得到满足要求的一个 u(x, y).

第十三讲：第一型曲面积分

题 220: 按对曲面的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,dS$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的。

解： 由于 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上可积，故不论把 Σ 如何分割，积分和的极限总是不变的，因此在分割 Σ 时，可以使 Σ_1 和 Σ_2 的公共边界曲线永远作为一条分割线，这样，$f(x,y,z)$ 在 $\Sigma = \Sigma_1+\Sigma_2$ 上的积分和等于 Σ_1 上的积分和加上 Σ_2 上的积分和，记为

$$\sum_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i = \sum_{\Sigma_1} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i + \sum_{\Sigma_2} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

令 $\lambda = \max\{\Delta S_i\text{的直径}\} \to 0$，上式两端同时取极限，即得

$$\iint_{\Sigma_1+\Sigma_2} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,dS + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,dS$$

题 221: 当 Σ 是 xOy 面内的一个封闭区域时，曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS \quad \text{与二重积分有什么关系?}$$

解： 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，Σ 的方程为

$$z = 0$$

因此在 Σ 上取值的 $f(x,y,z)$ 恒为 $f(x,y,0)$，且

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy = dxdy$$

又 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 Σ 自身，因此有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS = \iint_{\Sigma} f(x,y,0)\,dxdy$$

题 222: 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,dS$。

其中 Σ 为抛物面 $z = 2-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，分别如下：

1. $f(x,y,z) = 1$;
2. $f(x,y,z) = x^2+y^2$;
3. $f(x,y,z) = 3z$.

解： 抛物面 Σ 与 xOy 面交线为

$$x^2+y^2 = 2$$

故 Σ 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2\}$$

又

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dxdy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

于是

1. $\iint_\Sigma 1 \cdot dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{12}(1 + 4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{26}{6}\pi$$

(2)

$$\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, dS = \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

极坐标

$$= \iint_{D_{xy}} \rho^2 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2}\, d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi \frac{1}{16}\int_0^{\arctan\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan^3 t\, dt$$

$$= \frac{\pi}{8}\int_0^{\arctan\sqrt{2}} \sec^2 t(\sec^2 t - 1)\, d\sec t$$

$$= \frac{\pi}{8} \cdot \frac{596}{15} = \frac{149}{30}\pi$$

(3)

$$\iint_\Sigma 3z\, dS = 3\iint_{D_{xy}} [2 - (x^2 + y^2)]\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy$$

极坐标

$$= 3\iint_{D_{xy}} (2 - \rho^2)\sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (2 - \rho^2)\sqrt{1 + 4\rho^2}\, \rho\, d\rho$$

$$= 6\pi\left(\frac{1}{2}\int_0^{\arctan\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan t\, dt - \frac{1}{16}\int_0^{\arctan\sqrt{2}} \sec^3 t \cdot \tan^3 t\, dt\right)$$

$$= 6\pi\left(\frac{1}{2}\int_0^{\arctan\sqrt{2}} \sec^2 t\, d(\sec t) - \frac{1}{16}\int_0^{\arctan\sqrt{2}} \sec^2 t(\sec^2 t - 1)\, d(\sec t)\right)$$

$$= 6\pi\left(\frac{13}{3} - \frac{149}{60}\right) = \frac{111}{10}\pi$$

题 223: 计算 $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\, dS$，其中 Σ 是:

1. 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

2. 锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分。

解: (1) Σ 由 Σ_1 和 Σ_2 组成，其中 Σ_1 为平面 $z=1$ 上被圆周 $x^2+y^2=1$ 所围的部分，Σ_2 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$

在 Σ_1 上，

$$dS=dxdy$$

在 Σ_2 上，

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$$

Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 均为

$$x^2+y^2\le 1$$

因此

$$\iint_\Sigma(x^2+y^2)\,dS=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,dS+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\,dS$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,dxdy+\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy$$

极坐标

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3\,d\rho+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^3\,d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$$

(2) 由题设，Σ 的方程为

$$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\sqrt{1+\frac{9x^2}{3(x^2+y^2)}+\frac{9y^2}{3(x^2+y^2)}}\,dxdy$$

$$=2\,dxdy$$

又由 $z^2=3(x^2+y^2)$ 和 $z=3$，消去 z 得

$$x^2+y^2=3$$

故 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为

$$x^2+y^2\le 3$$

于是

$$\iint_\Sigma(x^2+y^2)\,dS=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 2\,dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3\,d\rho=9\pi$$

题 224: 计算下列对面积的曲面积分：

1. $\iint_\Sigma\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS$，其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限中的部分。

2. $\iint_\Sigma(2xy-2x^2-x+z)\,dS$，其中 Σ 为平面 $2x+2y+z=6$ 在第一卦限中的部分。

3. $\iint_\Sigma(x+y+z)dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上柱面 $z\ge h$ $(0<h<a)$ 的部分。

4. $\iint_\Sigma(xy+yz+zx)dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分。

解： (1) 在 Σ 上，

$$z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为由 x 轴、y 轴和直线 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 所围成的三角形闭区域，因此

$$\iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y\right) dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[\left(4 - 2x - \frac{4}{3}y\right) + 2x + \frac{4}{3}y\right] \sqrt{1 + (-2)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2}\, dxdy$$

$$= \iint_{D_{xy}} 4 \cdot \sqrt{61}\, dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3} \cdot (D_{xy}\text{的面积})$$

(2) 在 Σ 上，

$$z = 6 - 2x - 2y$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域为由 x 轴、y 轴和直线 $x + y = 3$ 所围成的三角形闭区域，因此

$$\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z)\, dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[2xy - 2x^2 - x + (6 - 2x - 2y)\right] \sqrt{1 + (-2)^2 + (-2)^2}\, dxdy$$

$$= 3\int_0^3 dx \int_0^{3-x} (6 - 3x - 2x^2 + 2xy - 2y)\, dy$$

$$= 3\int_0^3 \left[(6 - 3x - 2x^2)(3 - x) + x(3 - x)^2 - (3 - x)^2\right] dx$$

$$= 3\int_0^3 (3x^3 - 10x^2 + 9)\, dx$$

$$= -\frac{27}{4}$$

(3) 在 Σ 上，

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy} = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2 - h^2\right\}$$

由于积分曲面 Σ 关于 yOz 面和面均对称，故有

$$\iint_{\Sigma} x\, dS = 0$$

$$\iint_{\Sigma} y\, dS = 0$$

于是

$$\iint_{\Sigma} (x + y + z)\, dS = \iint_{\Sigma} z\, dS$$

$$= \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, dxdy$$

$$= a\iint_{D_{xy}} dxdy$$

$$= a\pi(a^2 - h^2)$$

(4) Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为圆域

$$x^2+y^2\le 2ax$$

由于 Σ 关于 zOx 面对称，而函数 xy 和 yz 关于 y 均为奇函数，故

$$\iint_\Sigma xy\,dS=0$$

$$\iint_\Sigma yz\,dS=0$$

于是

$$\iint_\Sigma (xy+yz+zx)\,dS=\iint_\Sigma zx\,dS=\iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}} x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

极坐标

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho\cos\theta\cdot\rho\cdot\rho\,d\rho$$

$$=8\sqrt{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\,d\theta$$

$$=8\sqrt{2}a^4\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

$$=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

题 225: 求抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 1)$ 的质量，此壳的面积密度为 $\mu=z$。

解： $\Sigma: Z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)(0\le z\le 1)$ 在 xOy 面上的投影区域为

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2\}$$

又

$$z_x=x\quad 和\quad z_y=y$$

故

$$dS=\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

因此

$$M=\iint_\Sigma z\,dS=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy$$

极坐标

$$=\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}\rho^2\sqrt{1+\rho^2}\cdot\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^2 t\sqrt{1+t}\,dt$$

分部积分法

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2-\frac{2}{3}\int_0^2(1+t)^{\frac{3}{2}}\,dt\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{4}{3}\cdot 3^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{15}\left(3^{\frac{5}{2}}-1\right)\right]$$

$$=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1)$$

第十四讲：第二型曲面积分

题 226: 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]\,dV=\iint_{\Sigma}P_1(x,y,z)\,dV\pm\iint_{\Sigma}P_2(x,y,z)\,dV$$

解： 把 Σ 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i（其面积也记为 ΔS_i），ΔS_i 在 yOz 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{yz}$，在 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i)。

设 λ 是各小块曲面的直径的最大值，则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}[P_1(x,y,z)\pm P_2(x,y,z)]\,dydz\\ &=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\pm P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)]\,(\Delta S_i)_{yz}\\ &=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_1(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\pm\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P_2(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}\\ &=\iint_{\Sigma}P_1(x,y,z)\pm\iint_{\Sigma}P_2(x,y,z)\,dydz\end{aligned}$$

题 227: 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,dxdy$$

与二重积分有什么关系?

解： 此时 Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 就是 Σ 自身（但不定侧），且在 Σ 上，

$$z=0$$

因此

$$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)\,dxdy=\pm\iint_{D_{xy}}R(x,y,0)\,dxdy$$

当 Σ 取上侧时为正号，取下侧时为负号。

题 228: 计算下列对坐标的曲面积分：

1. $\iint_{\Sigma}x^2y^2z\,dxdy$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的下半部分的下侧。
2. $\iint_{\Sigma}z\,dxdy+x\,dydz+y\,dzdx$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截得的在第一卦限内的部分的前侧。
3. $\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\,dydz+[2f(x,y,z)+y]\,dzdx+[f(x,y,z)+z]\,dxdy$。其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧。
4. $\iint_{\Sigma}xz\,dxdy+xy\,dydz+yz\,dzdx$，其中 Σ 是平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧。

解: (1) Σ 在 xOy 面上的投影区域

$$D_{xy}=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\right\}$$

在 Σ 上，

$$z=-\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

因此 Σ 取下侧，故

$$\iint_{\Sigma} x^2y^2z\,dxdy=-\iint_{D_{xy}} x^2y^2\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)dxdy$$

极坐标

$$=\iint_{D_{xy}}\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta\cdot\int_0^R\rho^5\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho$$

令 $\rho=R\sin t$，则 $d\rho=R\cos t\,dt$，因此

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^5\sin^5 t\cdot R\cos t\cdot R\cos t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 t-\sin^7 t)\,dt$$

$$=\frac{\pi}{4}R^7\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}-\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{2}{105}\pi R^7$$

(2) 由于柱面 $x^2+y^2=1$ 在 xOy 面上的投影为零，因此

$$\iint_{\Sigma} z\,dxdy=0$$

又

$$D_{yz}=\{(y,z)\mid 0\le y\le 1,0\le z\le 3\}$$

$$D_{xz}=\{(x,z)\mid 0\le z\le 3,0\le y\le 1\}$$

因 Σ 取前侧，所以

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}xdydz+\iint_{\Sigma}ydzdx=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2}\,dydz+\iint_{D_{xz}}\sqrt{1-x^2}\,dzdx$$

$$=\int_0^3dz\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy+\int_0^3dz\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=2\cdot 3\left[\frac{y}{2}\sqrt{1-y^2}+\frac{1}{2}\arcsin y\right]_0^1$$

$$=\frac{3}{2}\pi$$

(3) 在 Σ 上，

$$z=1-x+y$$

由于 Σ 取上侧，故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$$

由两类曲面积分之间的联系，可得

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} [(f+x)\cos\alpha + (2f+y)\cos\beta + (f+z)\cos\gamma]\, dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} [(f+x) - (2f+y) + (f+z)]\, dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} (x-y+z)\, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Sigma\text{的面积}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(4) **解法一**

$$
\iint_{\Sigma} xz\, dxdy = \iint_{D_{xy}} x(1-x-y)\, dxdy = \int_0^1 x\, dx \int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy = \frac{1}{24}
$$

由被积函数和积分曲面关于积分变量的对称性可得

$$
\iint_{\Sigma} xy\, dydz = \iint_{\Sigma} yz\, dzdx = \iint_{\Sigma} xz\, dxdy = \frac{1}{24}
$$

因此

$$
\iint_{\Sigma} xz\, dxdy + xy\, dydz + yz\, dzdx = 3 \cdot \frac{1}{24} = \frac{1}{8}
$$

解法二

利用两类曲面积分的联系，将 $\iint_{\Sigma} xy\, dydz$ 和 $\iint_{\Sigma} yz\, dzdx$ 转化为关于坐标 x 和 y 的曲面积分计算。

由于 $\Sigma' : x+y+z=1$ 取上侧，故 Σ' 在任一点处的单位法向量

$$
\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)
$$

于是

$$
\iint_{\Sigma} xy\, dydz = \iint_{\Sigma} xy\cos\alpha\, dS = \iint_{\Sigma} xy \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\, dxdy = \iint_{\Sigma} xy\, dxdy
$$

$$
\iint_{\Sigma} yz\, dzdx = \iint_{\Sigma} yz\cos\beta\, dS = \iint_{\Sigma} yz \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\, dxdy = \iint_{\Sigma} yz\, dxdy
$$

$$
\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} xz\, dxdy + xy\, dydz + yz\, dzdx &= \iint_{\Sigma} (xz+xy+yz)\, dxdy \\
&= \iint_{D_{xy}} [x(1-x-y) + y(1-x-y)]\, dxdy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (-x^2 - y^2 - xy + x + y)\, dy \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}
$$

题 229: 把对坐标的曲面积分

$$
\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\, dydz + Q(x,y,z)\, dzdx + R(x,y,z)\, dxdy
$$

化成对面积的曲面积分，其中:

1. Σ 是平面 $3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 在第一卦限的部分的上侧;

2. Σ 是抛物面 $z=8-(x^2+y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧。

解： (1) 由于 $\Sigma: 3x+2y+2\sqrt{3}z=6$ 取上侧，故 Σ 在任一点处的单位法向量为

$$\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{3^2+2^2+(2\sqrt{3})^2}}(3,2,2\sqrt{3})=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy&=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS\\&=\iint_\Sigma\left(\frac{3}{5}P+\frac{2}{5}Q+\frac{2\sqrt{3}}{5}R\right)dS\end{aligned}$$

(2) 由于 $\Sigma: z=8-(x^2+y^2)$ 取上侧，故 Σ 在其上任一点 (x,y,z) 处的单位法向量为

$$\mathbf{n}=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}(-z_x,-z_y,1)=\frac{1}{\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}}(2x,2y,1)$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy&=\iint_\Sigma(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,dS\\&=\iint_\Sigma\frac{2xP+2yQ+R}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dS\end{aligned}$$

第十五讲：斯托克斯公式

题 230: 试对曲面 $\Sigma : z = x^2 + y^2,\, x^2 + y^2 \le 1,\, P = y^2,\, Q = x,\, R = z^2$ 验证斯托克斯公式。

解： 按右手法则，Σ 取上侧，Σ 的边界 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$，$z = 1$ 从 z 轴正向看去，取逆时针方向

$$\iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = \iint\limits_{\Sigma} (1 - 2y)\, dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} (1 - 2y)\, dxdy$$

极坐标

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - 2\rho \sin\theta)\rho\, d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{2}{3}\rho^3 \sin\theta\right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin\theta\right) d\theta \\ &= \pi \end{aligned}$$

Γ 的参数方程可取为

$$x = \cos t,\, y = \sin t,\, z = 1$$

t 从 0 变到 2π。故

$$\oint\limits_{\Gamma} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + \cos^2 t)\, dt = \pi$$

两者相等，斯托克斯公式得到验证。

题 231: 利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分：

1. $\oint_\Gamma y\, dx + z\, dy + x\, dz$。其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$，$x + y + z = 0$，若从 x 轴的正向看去，这圆周是取逆时针方向。

2. $\oint_\Gamma (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz$。其中 Γ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2$，$\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1\ (a > 0, b > 0)$，若从 x 轴正向看去，这椭圆是取逆时针方向。

3. $\oint_\Gamma 3y\, dx - xz\, dy + yz^2\, dz$。其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 = 2z$，$z = 2$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向。

4. $\oint_\Gamma 2y\, dx + 3x\, dy - z^2\, dz$。其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$，$z = 0$，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向。

解： (1) 取 Σ 为平面 $x + y + z = 0$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，则 Σ 的面积为 πa^2，Σ 的单位法向量为

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

（下图）由斯托克斯公式，

$$\oint_\Gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS$$

$$= \iint_\Sigma \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) dS$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma dS$$

$$= -\sqrt{3}\pi a^2$$

(2) 取 Σ 为平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，Σ 的单位法向量

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

由斯托克斯公式

$$\oint_\Gamma (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$$

$$= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS$$

$$= \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \iint_\Sigma dS \quad (*)$$

现在用两种方式来求 $\iint\int_\Sigma dS$。

解法一由于

$$\iint\int_\Sigma dS = \text{是}\Sigma\text{的面积}A$$

而

$$A \cdot \cos\gamma = A \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \Sigma\text{在}xOy\text{面上的投影区域的面积}$$

$$= \pi a^2$$

故

$$\iint\int_\Sigma dS = \pi a^2 / \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pi a\sqrt{a^2+b^2}$$

解法二用曲面积分计算法。

由于在 Σ 上，

$$z = b - \frac{b}{a}x$$

$$dS = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy = \sqrt{1+\left(-\frac{b}{a}\right)^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

又

$$D_{xy} = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le a^2\right\}$$

故

$$\iint\int_\Sigma dS = \iint\int_{D_{xy}} \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\,dxdy = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \cdot \pi a^2 = \pi a\sqrt{a^2+b^2}$$

将所求得的 $\iint\limits_{\Sigma} dS$ 带入 (*) 式，

$$\text{原式} = \frac{-2(a+b)}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \pi a\sqrt{a^2+b^2} = -2\pi a(a+b)$$

(3) 取 Σ 为平面 $z=2$ 的上侧被 Γ 所围成的部分，则 Σ 的单位法向量为

$$\mathbf{n} = (0,0,1)$$

Σ 在 xOy 面上的投影区域 D_{xy} 为

$$x^2+y^2 \le 4$$

于是由斯托克斯公式，

$$\oint_{\Gamma} 3y\,dx - xz\,dy + yz^2\,dz = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3y & -xz & yz^2 \end{vmatrix} dS$$

$$= -\iiint\limits_{\Sigma} (z+3)\,dS = -\iiint\limits_{D_{xy}} (2+3)\,dxdy$$

$$= -5\cdot\pi\cdot 2^2 = -20\pi$$

(4) Γ 即为 xOy 面上的圆周

$$x^2+y^2=9$$

取 Σ 为圆域 $x^2+y^2 \le 9$ 的上侧，则由斯托克斯公式

$$\oint_{\Gamma} 2y\,dx + 3x\,dy - z^2\,dz = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 3x & -z^2 \end{vmatrix} dS = \iint\limits_{\Sigma} dxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} dxdy = 9\pi$$

题 232: 利用斯托克斯公式计算 $\oint_C ydx + zdy + xdz$。

其中 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+2y+z=0$ 的交线，且 C 的正向由 $x+2y+z=0$ 上侧的法线方向按右手法则来确定。

解: 设 S 是平面 $x+2y+z=0$ 上 C 内的圆盘，方向为上侧，即指向 $\{1,2,1\}$，因此方向余弦是

$$\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \{1,2,1\}/\sqrt{6}$$

且 S 的面积为

$$\sigma(S) = \pi a^2$$

由斯托克斯公式知

$$\oint_C ydx + zdy + xdz = \iint_S ((R_y - Q_z)dydz + (P_z - R_x)dzdx + (Q_x - P_y)dxdy)$$

$$= -\iint_S dydz + dzdx + dxdy = -\sigma(S)(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$$

$$= -\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi a^2$$

题 233: 利用斯托克斯公式计算

$$\oint_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(y^2+x^2)dz$$

其中 C 是平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面的交线，且从原点看去取逆时针方向。

解: 设 S 是平面 $x+y+z=1$ 上 C 内的三角形，方向为上侧，由斯托克斯公式知

$$\oint_S (R_y-Q_z)\,dydz+(P_z-R_x)\,dzdx+(Q_x-P_y)\,dxdy$$

$$=-2\iint_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$\iint_S (x-y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(x-y)dy=-\int_0^1\left(\frac{1}{2}-2x+\frac{3}{2}x^2\right)dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left[x-2x^2+x^3\right]_0^1=0$$

由对称性知

$$\iint_S (y-z)dydz=\iint_S (z-x)dydx=0$$

所以

$$\oint_C (y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(y^2+x^2)dz=0$$

题 234: 利用斯托克斯公式计算 $\oint_C x^2y^3dx+dy+zdz$。

其中 C 是平面 $y^2+z^2=1$ 与 $x=y$ 所交椭圆的正向。

解: 设 S 是所交椭圆，由斯托克斯公式知

$$\iint_S (R_y-Q_z)\,dydz+(P_z-R_x)\,dzdx+(Q_x-P_y)\,dxdy$$

$$=\iint_S 3x^2y^2dxdy=0$$

(S 在 Oxy 平面上的投影是一条直线)

第十六讲：高斯公式

题 235: 利用高斯公式计算曲面积分：

1. $\iint_\Sigma x^2\,dydz + y^2\,dzdx + z^2\,dxdy$。其中 Σ 为平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=a$，$y=a$，$z=a$ 所围成的立体的表面的外侧。
2. $\iint_\Sigma x^3\,dydz + y^3\,dzdx + z^3\,dxdy$。其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧。
3. $\iint_\Sigma xz^2\,dydz + (x^2y-z^3)\,dzdx + (2xy+y^2z)\,dxdy$。其中 Σ 为上半球体 $0 \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}$，$x^2+y^2 \le a^2$ 的表面的外侧。
4. $\iint_\Sigma x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy$。其中 Σ 是界于 $z=0$ 和 $z=3$ 之间的圆柱体 $x^2+y^2 \le 9$ 的整个表面的外侧。
5. $\iint_\Sigma 4xz\,dydz - y^2\,dzdx + yz\,dxdy$。其中 Σ 是平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x=1$，$y=1$，$z=1$ 所围成的立方体的全表面的外侧。

解： (1) 原式

$$= \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$$

$$= 2\iiint\limits_\Omega (x+y+z)\,dV$$

对称性

$$\Longrightarrow\ 6\iiint\limits_\Omega z\,dV$$

$$= 6\int_0^a dx\int_0^a dy\int_0^a dz$$

$$= 6\cdot a\cdot a\cdot \frac{a^2}{2} = 3a^4$$

(2) 原式

$$= \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = 3\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

球面坐标

$$\Longrightarrow\ 3\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^a r^2\cdot r^2\sin\varphi\,dr$$

$$= 3\cdot 2\pi\cdot 2\cdot\frac{a^5}{5} = \frac{12}{5}\pi a^5$$

(3) 原式

$$= \iiint\limits_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

球面坐标

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 \cdot r^2 \sin\varphi \, dr$$

$$= 2\pi \cdot 1 \cdot \frac{a^5}{5} = \frac{2}{5}\pi a^5$$

(4) 原式

$$= \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iiint\limits_{\Omega} (1+1+1) \, dV$$

$$= 3 \iiint\limits_{\Omega} dV = 3 \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 3$$

$$= 81\pi$$

(5) 原式

$$= \iiint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV = \iiint\limits_{\Omega} (4z - 2y + y) \, dV$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (4z - y) \, dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 (2 - y) \, dy$$

$$= \frac{3}{2}$$

题 236: 利用高斯公式计算

$$\iint_S (x + yz) dydz + (y + zx) dzdx + (z + xy) dxdy$$

其中 S 是由平面 $x = 0, \, y = 0, \, z = 0, \, x + y + z = 1$ 所围立体表面的外侧。

解: 令 Ω 是所围立体，由于

$$P_x + Q_y + R_z = 3$$

利用高斯公式

$$\iint_S (x + yz) dydz + (y + zx) dzdx + (z + xy) dxdy = \iiint_\Omega 3dV = \frac{1}{2}$$

题 237: 利用高斯公式计算

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy.$$

其中 S 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = h(h > 0)$ 所围立体表面的外侧。

解: 令 Ω 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = h(h > 0)$ 所围立体，由于

$$P_x + Q_y + R_z = 2(x + y + z)$$

利用高斯公式及对称性

$$\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = 2 \iiint_\Omega (x + y + z) dV$$

$$= 2 \iiint_\Omega z dV = 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r dr \int_r^h z dz$$

$$= 2\pi \int_0^h (h^2 r - r^3) dr$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2}h^2r^2 - \frac{1}{4}r^4\right]_0^h$$
$$= \frac{1}{2}\pi h^4$$

题 238: 利用高斯公式计算

$$\iint_S (x^3 + y^2)dydz + y^3dzdx + z^3dxdy.$$

其中 S 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧。

解: 令 Ω 是上半球体

$$x^2 + y^2 + z^2 \le a^2, \quad z \ge 0$$

S_1 为圆盘

$$x^2 + y^2 \le a^2, \quad z = 0$$

由于

$$P_x + Q_y + R_z = 3(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$\iint_{S_1} (x^3 + y^2)dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = 0$$

利用高斯公式

$$\iint_S (x^3 + y^2)dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = 3\iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)dV$$
$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\phi d\phi \int_0^a \rho^2 \cdot \rho^2 d\rho$$
$$= \frac{6}{5}\pi a^5$$

题 239: 利用高斯公式计算

$$\iint_S 4xzdydz - 2yzdzdx + (1 - z^2)dxdy.$$

其中 S 为 Oyz 平面上曲线 $z = e^v(0 \le v \le a)$ 绕 z 轴旋转所成曲面的下侧。

解: 令 Ω 是旋转体，在顶部 $S_1 : z = e^a(x^2 + y^2 \le a^2)$，方向取上侧，则

$$\iint_{S_1} 4xzdydz - 2yzdzdx + (1 - z^2)dxdy = \iint_{S_1} (1 - e^{2a})dxdy$$
$$= \pi a^2(1 - e^{2a})$$

由于

$$P_x + Q_y + R_z = 0$$

利用高斯公式

$$\iint_S 4xzdydz - 2yzdzdx + (1 - z^2)dxdy$$
$$= -\iint_{S_1} 4xzdydz - 2yzdzdx + (1 - z^2)dxdy$$
$$= \pi a^2(e^{2a} - 1)$$