

高等数学 B 习题课

李晨阳
数学科学学院

2025 年 5 月 26 日

目录

第一讲：空间直角坐标系，向量及其线性运算 & 向量的数量积和向量积	5
第二讲：平面与空间直线	13
第三讲：曲面与空间曲线 & 多元函数	27
第四讲：多元函数的偏导数与全微分	35
第五讲：复合函数和隐函数的求导法则	43
第六讲：偏导数 & 全微分 & 求导法则	51
第七讲：多元函数的几何应用 & 多元函数的极值	59
第八讲：重积分的概念与性质	67
第九讲：二重积分的计算	73
第十讲：三重积分的计算及重积分的应用	79
第十一讲：第一型曲线积分	85
第十二讲：第二型曲线积分	87
第十二讲：格林公式及其应用	91
第十三讲：第一型曲面积分	95
第十四讲：第二型曲面积分	99
第十五讲：斯托克斯公式	101
第十六讲：高斯公式	103

第一讲：空间直角坐标系，向量及其线性运算 & 向量的数量积和向量积

题 1：设: $u = a + b + 2c, v = -a + 3b - c$, 试用 a, b, c 表示 $2u - 3v$ 。

答:

题 2：设点 $P(4, -3, 5)$, 求:

- (1) P 到坐标原点的距离;
- (2) P 到各坐标轴的距离;
- (3) P 到各坐标平面的距离。

答:

题 3：设一直线过点 $(6, 4, 2)$ 且垂直于坐标面 Oyz , 在直线上求一点 P 使它与点 $(0, 4, 0)$ 的距离为 10。

答: $P_1(4\sqrt{6}, 4, 2)$ 或 $P_2(-4\sqrt{6}, 4, 2)$ 。

题 4: 证明以三点 $A(1, -1, 3)$, $B(2, 1, 7)$ 和 $C(4, 2, 6)$ 为顶点的三角形是直角三角形，并求此三角形的面积。

答: $\frac{3}{2}\sqrt{14}$

题 5: 求一单位向量，使该向量的方向角 α, β, γ 满足关系 $2\alpha = 2\beta = \gamma$ 。

答: $(0, 0, -1)$ 或 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

题 6: 如果平面上一个四边形的对角线相互平分，试用向量证明它是平行四边形。

答:

题 7: 13. 在 yOz 面上，求与三点 $A(3, 1, 2)$, $B(4, -2, -2)$, 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点。

答: $(0, 1, -2)$

题 8: 试证明以三点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形。

答：

题 9: 设已知两点为 $M_1(4, \sqrt{2}, 1)$, $M_2(3, 0, 2)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的模、方向余弦和方向角。

答：

题 10: 设向量的方向余弦分别满足

- (1) $\cos \alpha = 0$
- (2) $\cos \beta = 1$
- (3) $\cos \alpha = \cos \beta = 0$

问这些向量与坐标轴或坐标面的关系如何?

答：

题 11: 设向量 r 的模是 4, 它与 u 轴的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求 r 在 u 轴上的投影。

答： 2

题 12：一向量的终点在点 $B(2, -1, 7)$ ，它在 x 轴、 y 轴和 z 轴上的投影依次为 4, -4 和 7，求这向量的起点 A 的坐标。

答： A 点坐标为 $(-2, 3, 0)$ 。

题 13：设 O 是 A, B 的连线以外的一点，证明 A, B, C 三点共线的充分必要条件是

$$\overrightarrow{OC} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$$

其中

$$\lambda + \mu = 1$$

答：

题 14：设向量 \vec{a} 与三坐标面 Oxy , Oyz , Ozx 的夹角分别为 θ_1 , θ_2 , θ_3 ，求 $\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3$ 。

答： 2

题 15：求与三个坐标轴夹角相等的单位向量。

答： $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$ 和 $\left\{ -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$ 。

题 16：已知点 A 坐标为 $(3, 2, 7)$, $|AB| = 15$, \overrightarrow{AB} 的方向角 α, β, γ 满足关系式：

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = 3 : 4 : 5$$

求点 B 坐标。

答： 点 B 坐标为 $(15, 11, 7)$ 或 $(15, -7, 7)$ 或 $(-9, 11, 7)$ 或 $(-9, -7, 7)$ 。

题 17：设 $\mathbf{a} = 12\hat{i} + 9\hat{j} - 5\hat{k}$ 与 $\mathbf{b} = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, 求 λ 使得 $\mathbf{b} - \lambda\mathbf{a}$ 垂直于 \mathbf{a} 。

答： $\lambda = \frac{2}{5}$

题 18: 已知 $\mathbf{a} = \{2, -3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, -1, 3\}$, $\mathbf{c} = \{1, -2, 0\}$, 求:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
2. $(2\mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{c})$
3. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}$
5. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

答: (1) $\{-8, -5, 1\}$

(2) $\{-20, -12, 4\}$

(3) $\{8, -16, 0\}$

(4) -2

(5) $\{8, 4, -2\}$

题 19: 设平行四边形相邻边是向量 $\mathbf{a} = \hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ 与 $\mathbf{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, 求平行四边形的面积。

答:

$$3\sqrt{10}$$

题 20: 求与 $\vec{a} = \{1, -3, 1\}$ 、 $\vec{b} = \{2, -1, 3\}$ 都垂直的单位向量

答: 单位向量是 $\left\{-\frac{8}{3\sqrt{10}}, -\frac{1}{3\sqrt{10}}, \frac{5}{3\sqrt{10}}\right\}$ 或 $\left\{\frac{8}{3\sqrt{10}}, \frac{1}{3\sqrt{10}}, -\frac{5}{3\sqrt{10}}\right\}$.

题 21: 证明: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$.

答:

题 22: 已知 $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 26$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$, 求: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

答: ± 30

题 23: 设 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为非零向量, 且

$$\vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

求: $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}|$.

答: $|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| = 3$

题 24: 已知: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 6$, 且

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

求: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

答: -35

题 25: 已知 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 与 $7\vec{a} - 5\vec{b}$ 垂直, 且 $\vec{a} - 4\vec{b}$ 与 $7\vec{a} - 2\vec{b}$ 垂直, 求 \vec{a}, \vec{b} 的夹角.

答: \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 $\theta = \frac{\pi}{3}$

第二讲：平面与空间直线

题 26: 设直线 L_1 :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7 \\ -2x + y + z = 7 \end{cases} \quad \text{直线 } L_2 : \quad \begin{cases} 3x + 6y - 3z = 8 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

证明直线 L_1 与直线 L_2 平行。

答:

题 27: 用点向式方程及参数式方程表示直线 L :
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 4 \end{cases}$$

答: L 的参数式方程为

$$L : \begin{cases} x = -2t \\ y = \frac{3}{2} + t \\ z = \frac{5}{2} + 3t \end{cases}$$

L 的点向式方程为

$$L : \frac{x - 0}{1} = \frac{y - \frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{z - \frac{5}{2}}{-\frac{3}{2}}$$

题 28: 求下列各平面的方程:

1. 过点 $(2, 1, 1)$ 且与直线 $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ 垂直.
2. 过两平行直线 $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{-2} = z$ 和 $\frac{x+3}{3} = \frac{y+4}{-2} = z + 1$
3. 过直线 $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$ 且平行于直线 $x = 2y = 3z$.

答: (1)

$$x + y + 3z - 6 = 0$$

(2)

$$4x + 3y - 6z + 18 = 0$$

(3)

$$7x - 26y + 18z = 0$$

题 29: 求过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程.

答:

$$3x - 7y + 5z - 4 = 0$$

题 30: 求过点 $M_0(2, 9, -6)$ 且与连接坐标原点及点 M_0 的线段 OM_0 垂直的平面方程.

答:

$$2x + 9y - 6z - 121 = 0$$

题 31: 求过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行的平面方程.

答:

$$3x - 7y + 5z - 4 = 0$$

题 32: 求过点 $(1, 1, -1)$, $(-2, -2, 2)$ 和 $(1, -1, 2)$ 三点的平面方程.

答:

$$x - 3y - 2z = 0$$

题 33: 求平面 $2x - 2y + z + 5 = 0$ 与各坐标面的夹角的余弦.

答:

题 34: 设一平面过点 $M_0(1, 2, -1)$ 且垂直于平面

$$3x - 4y + z + 16 = 0$$

和

$$4x - z + 6 = 0$$

试求这平面方程.

答:

$$4x + 7y + 16z - 2 = 0$$

题 35: 求三平面 $x + 3y + z = 1$, $2x - y - z = 0$, $-x + 2y + 2z = 3$ 的交点.

答: $(1, -1, 3)$.

题 36: 分别按下列条件求平面方程:

1. 平行于 xOz 面且经过点 $(2, -5, 3)$.
2. 通过 z 轴和点 $(-3, 1, -2)$.
3. 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$.

答: 1.

$$y + 5 = 0$$

2.

$$x + 3y = 0$$

3.

$$9y - z - 2 = 0$$

题 37: 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离.

答: 1

题 38: 求平面 $x - 2y + 2z + 21 = 0$ 与 $7x + 24z - 5 = 0$ 的夹角的平分面的方程.

答:

$$2x - 25y - 11z + 270 = 0$$

题 39: 已知原点到平面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 的距离为 d , 试证

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{d^2}$$

答:

题 40: 若平面 π 到两平行平面

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

的距离相等, 求它的方程.

答:

$$Ax + By + Cz + \frac{1}{2}(D_1 + D_2) = 0$$

题 41: 求两平行平面

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

与

$$Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

之间的距离.

答:

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

题 42: 求满足下列条件的平面方程：与坐标轴的截距相同且过点 $(6, 2, -4)$.

答：

$$x + y + z = 4$$

题 43: 求点 $(2, 3, -1)$ 到直线 $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 13 + 4t \end{cases}$ 的距离.

答： 6

题 44: 求平面 $x + y - 11 = 0$ 与 $3x + 8 = 0$ 的夹角.

答：

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

题 45: 求平行于平面 $x + y + z = 100$ 且与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 相切的平面方程.

答:

$$x + y + z + 2\sqrt{3} = 0$$

和

$$x + y + z - 2\sqrt{3} = 0$$

题 46: 求满足下列条件的平面方程: 过点 $(4, 0, -2), (5, 1, 7)$ 且平行于 x 轴.

答:

$$9y - z - 2 = 0$$

题 47: 求点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x + 2y - z + 1 = 0$ 上的投影点的坐标.

答: $(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

题 48: 求下列各直线的方程: 1. 过点 $(3, 4, -4)$, 其方向角为 $60^\circ, 45^\circ, 120^\circ$. 2. 过点 $(0, -3, 2)$, 且与两点 $(3, 4, -7), (2, 7, -6)$ 的连线平行. 3. 过点 $(2, -3, 4)$, 且与平面 $3x - y + 2z = 4$ 垂直. 4. 过点 $(-1, 2, 1)$, 且平行于直线 $\begin{cases} x + y - 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$. 5. 过点 $(0, 2, 4)$, 且与两平面 $x + 2z = 1, y - 3z = 0$ 平行.

答: 1.

$$x - 3 = \frac{y - 4}{\sqrt{2}} = -z - 4$$

2.

$$-x = \frac{y + 3}{3} = z - 2$$

(3)

$$\frac{x - 2}{3} = \frac{y + 3}{-1} = \frac{z - 4}{2}$$

(4)

$$\frac{x + 1}{3} = 2 - y = z - 1$$

(5)

$$\frac{x}{-2} = \frac{y - 2}{3} = z - 4$$

题 49: 求两平面 $2x - y + z - 6 = 0$ 与 $x + y + 2z - 5 = 0$ 的夹角.

答:

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

题 50: 求点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x + 2y + 2z - 10 = 0$ 的距离.

答: 1

题 51: 求下列各平面的方程:

1. 过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行.
2. 过点 $(1, -1, 1)$ 且与两平面 $x - y + z - 1 = 0$ 和 $2x + y + z - 1 = 0$ 垂直.
3. 过点 $(5, 0, 0)$ 、 $(0, -1, 0)$ 且平行于 z 轴.
4. 过点 $(1, 1, 1)$ 、 $(2, 2, 2)$ 且与平面 $x + y - z = 0$ 垂直.
5. 过三点 $(0, 0, 0)$ 、 $(1, 1, 1)$ 、 $(2, -1, 4)$.
6. 过点 $(1, 1, -1)$ 且平行于向量 $\vec{a} = \{1, 2, 1\}$, $\vec{b} = \{2, 1, 1\}$.

答: 解: 1.

$$3x - 7y + 5z - 4 = 0$$

2.

$$-2x + y + 3z = 0$$

3.

$$x - 5y - 5 = 0$$

4.

$$x - y = 0$$

5.

$$5x - 2y - 3z = 0$$

6.

$$x + y - 3z - 5 = 0$$

题 52: 指出在空间直角坐标系 $O - xyz$ 中下列方程所表示平面的特点:

1. $x = 0$;
2. $z = a$;
3. $Ax + By = 0$;
4. $Ax + By + D = 0$;
5. $Ax + By + Cz = 0$;
6. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

答:

题 53: 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面的方程.

答:

$$y - 3z = 0.$$

题 54: 一平面通过两点 $M_1(1, 1, 1)$ 和 $M_2(0, 1, -1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$, 求它的方程.

答:

$$2x - y - z = 0.$$

题 55: 平行于向量 $\mathbf{a} = (2, 1, -1)$ 且在 x 轴、 y 轴上的截距依次为 3 和 -2.

答:

$$\frac{x}{3} - \frac{y}{2} + \frac{z}{6} = 1$$

题 56: 求下列特殊位置的平面方程:

1. 平行于 yoz 面且经过点 $(2, -5, 3)$;
2. 通过 z 轴和点 $(2, -4, 1)$;
3. 平行于 y 轴且经过两点 $(1, -2, 3)$ 和 $(-6, -2, 7)$;

答: (1)

$$x - 2 = 0$$

(2)

$$2x + y = 0$$

(3)

$$4x + 7z - 25 = 0$$

题 57: 推导两平行平面 $Ax + By + Cz + D_i = 0, i = 1, 2$ 之间的距离公式;

并求将两平行平面 $x - 2y + z - 2 = 0$ 与 $x - 2y + z - 6 = 0$ 之间距离分成 $1:3$ 的平面方程.

答:

$$x - 2y + z - 3 = 0$$

或

$$x - 2y + z - 5 = 0$$

题 58: 确定 k 的值, 使平面 $x + ky - 2z = 9$ 满足下列条件之一:

1. 经过点 $(5, -4, -6)$;
2. 与 $2x + 4y + 3z = 3$ 垂直;
3. 与 $3x - 7y - 6z - 1 = 0$ 平行;
4. 与 $2x - 3y + z = 0$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角;
5. 与原点的距离等于 3;
6. 在 y 轴上的截距为 -3.

答:

第三讲：曲面与空间曲线 & 多元函数

题 59: 求下列球面的球心与半径: (1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$; (2) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 22 = 0$.

答:

题 60: 考察曲面 $x^2 + y^2 - \frac{z^2}{9} = 0$ 在下列平面上的截线:

1. $z = 0$;
2. $z = 3$;
3. $z = -3$;
4. $x = 0$;
5. $x = \frac{1}{3}$.

答:

题 61: 考察曲面 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1$ 在下列平面上的截线:

1. $y = 5$;
2. $z = 1$;
3. $z = 2$;
4. $z = 2\sqrt{2}$.

答:

题 62: 已知柱面的母线平行于 z 轴, 准线方程为

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

求此柱面的方程.

答:

$$9x^2 + 4y^2 = 20$$

题 63: 求平面 $z = 0$ 上的圆 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 绕 y 轴旋转所形成的圆环面的方程.

答:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4\sqrt{x^2 + z^2} + 3 = 0$$

题 64: 求下列曲线在坐标平面 Oxy 上的投影曲线方程:

(1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 9z^2 = 1 \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} y = 2xz \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

答:

题 65: 求两球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和 $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 1$ 的交线在坐标平面 Oyz 上的投影曲线方程，并说明投影是什么曲线.

答:

题 66: 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴而且通过曲线

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

的柱面方程.

答:

题 67: 求下列两曲面的交线在 xOy 面上的投影的方程:

- (1) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 与平面 $x + z = 1$;
- (2) 椭球面 $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$ 与圆锥面 $z^2 = x^2 + y^2$.

答:

题 68: 将下列曲线的一般方程化为参数方程:

(1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y = x \end{cases}$$

(2)

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

答:

题 69: 求螺旋线

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = a \sin \theta \\ z = b\theta \end{cases}$$

在三个坐标面上的投影曲线的直角坐标方程.

答:

题 70: 求与坐标原点 O 及点 (2,3,4) 的距离之比为 1:2 的点的全体所组成的曲面的方程.

答:

题 71: 求下列极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,-2)} \frac{x-y+1}{xy-1}. \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{x^2+y^2}.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}. \quad (4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sin xy}{x}.$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x+y) \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y}. \quad (6) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2+y^2} \right)^{x^2}.$$

答:

题 72: 讨论下列函数的连续性:

$$(1) z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$(2) z = \frac{2}{\sin x \sin y}.$$

答:

题 73: 证明: 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^2)^3}$ 的极限不存在。
答:

题 74: 设 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

答:

$$f(x, y) = \left(\frac{x}{1+y}\right)^2 - \left(\frac{xy}{1+y}\right)^2 = \frac{x^2(1-y)}{1+y}$$

题 75: 已知函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 试求 $f(tx, ty)$.

答:

题 76: 试证函数 $F(x, y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v)$$

答:

题 77: 求下列各函数的定义域:

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1).$$

$$(2) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}}.$$

$$(3) z = \sqrt{x - \sqrt{y}}.$$

$$(4) z = \ln(y - x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

$$(5) u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}} (R > r > 0).$$

$$(6) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

答:

题 78: 求下列各极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2}.$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}.$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{2-e^{xy}-1}}.$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\tan(xy)}{y}.$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}.$$

答:

题 79: 证明下列极限不存在：

- (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y};$
- (2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2};$
- (3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y};$
- (4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{(x+y)xy}.$

答：

题 80: 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$

答：

题 81: 10. 设 $F(x, y) = f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处连续, 证明: 对任意 $y_0 \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续。

答：

第四讲：多元函数的偏导数与全微分

题 82: 求下列函数对于每一个自变量的偏导数：

$$(1) \quad z = x^2 \ln(x^2 + y^2).$$

$$(2) \quad z = xy + \frac{x}{y}.$$

$$(3) \quad z = e^{xy}.$$

$$(4) \quad z = e^x(\cos y + x \sin y).$$

$$(5) \quad u = \ln(1 + x + y^2 + z^3).$$

$$(6) \quad u = z^{xy}.$$

$$(7) \quad u = \sin \frac{y}{x} \cos \frac{z}{y}.$$

$$(8) \quad u = x^{\frac{y}{z}}.$$

答：

题 83: 求下列函数在指定点处的偏导数：

$$(1) \quad z = x + (y - 1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}}, \text{ 求 } z'_x(x, 1), z'_y(1, y).$$

$$(2) \quad z = \arctan \frac{x+y}{1+xy}, \text{ 求 } z'_x(0, 0), z'_y(1, 1).$$

答：

题 84: 求曲面 $z = \frac{x^2+y^2}{4}$ 与平面 $y = 4$ 的交线在 $x = 2$ 处的切线与 Ox 轴的交角。

答:

题 85: 求曲线

$$\begin{cases} x = 1, \\ z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \end{cases}$$

在点 $(1, 1, \sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴的正向之间的夹角。

答:

题 86: 设 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 求行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

的值。

答:

题 87: 求下列函数的二阶偏导数:

1. $z = x^4 + y^4 - 4x^2y^2.$

2. $z = x^y.$

3. $z = \sin^2(ax + by).$

4. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$

答:

题 88: 设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}.$

答:

题 89: 设 $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, 求证 $l \frac{\partial T}{\partial l} + g \frac{\partial T}{\partial g} = 0.$

答:

题 90: 设 $z = e^{-(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})}$, 求证 $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ 。

答:

题 91: 求下列函数的全微分:

1. $z = x^2 y^3$.

2. $z = e^{\frac{y}{x}}$.

3. $z = \ln(3x - 2y)$.

4. $z = \arcsin \frac{y}{x}$.

5. $z = \frac{xy}{x-y}$.

6. $u = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

答:

题 92: 求函数 $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$ 当 $x = 1$ 、 $y = 2$ 时的全微分。

答:

题 93: 求函数 $z = \frac{y}{x}$ 当 $x = 2$ 、 $y = 1$ 、 $\Delta x = 0.1$ 、 $\Delta y = -0.2$ 时的全增量和全微分。

答：

题 94: 用全微分求下列各数的近似值：

1. $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$.
2. $\ln(\sqrt[3]{1.03} + \sqrt[4]{0.98} - 1)$.

答：

题 95: 当圆柱体的半径 R 由 200 毫米增加到 200.5 毫米，高 H 由 1000 毫米减少到 995 毫米时，利用全微分求体积 V 变化的近似值。

答：

知识点回顾：

- 两数之和的绝对误差等于它们各自的绝对误差之和。
- 乘积的相对误差等于各因子的相对误差之和
- 商的相对误差等于被除数及除数的相对误差之和。

题 96: 在物理学中, 用公式 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ 计算重力加速度。设测得 $l = 100$ 厘米, $T = 2$ 秒, 测量时绝对误差限为 $|\Delta l| = 0.1$ 厘米, $|\Delta T| = 0.004$ 秒。

求由上述公式计算重力加速度 g 的绝对误差限和相对误差限。

答:

题 97: 验证:

1. $y = e^{-kn^2 t} \sin nx$ 满足 $\frac{\partial y}{\partial t} = k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

2. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 满足 $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{2}{r}$.

答:

题 98: 设 $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 求 $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ 。

答:

题 99: 求函数 $z = e^{xy}$ 当 $x = 1, y = 1, \Delta x = 0.15, \Delta y = 0.1$ 时的全微分。

答：

题 100: 计算 $\sqrt{(1.02)^3 + (1.97)^3}$ 的近似值。

答：

题 101: 已知边长为 $x = 6m$ 与 $y = 8m$ 的矩形，如果 x 边增加 5cm 而 y 边减少 10cm，问这个矩形的对角线的近似变化怎么样？

答：

题 102: 设 $f(x, y) = |x - y|\varphi(x, y)$ ，其中 $\varphi(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的某邻域内连续。试问 (1) $\varphi(x, y)$ 满足什么条件时， $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$ 存在？(2) $\varphi(x, y)$ 满足什么条件时， $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点处是可微的？

答：

第五讲：复合函数和隐函数的求导法则

题 103: 设 $z = u^2 \ln v$, 而 $u = \frac{x}{y}$, $v = 3x - 2y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

答：

题 104: 设 $z = \arcsin(x - y)$, 而 $x = 3t$, $y = 4t^3$, 求 $\frac{dz}{dt}$.

答：

题 105: 设 $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, 而 $y = a \sin x$, $z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$.

答：

题 106: 设 $z = \arctan \frac{x}{y}$, 而 $x = u + v$, $y = u - v$, 验证 $\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{u-v}{u^2+v^2}$

答:

题 107: 求下列函数的一阶偏导数 (其中 f 具有一阶连续偏导数):

$$(1) \quad u = f(x^2 - y^2, e^{xy}).$$

$$(2) \quad u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$$

$$(3) \quad u = f(x, xy, xyz).$$

答:

题 108: 设 $z = f(x^2 + y^2)$, 其中 f 具有二阶导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

答:

题 109: 设 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

答：

题 110: 设 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

答：

题 111: 设 $x + 2y + z - 2\sqrt{xyz} = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

答：

题 112: 设 $2 \sin(x + 2y - 3z) = x + 2y - 3z$, 证明 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

答：

题 113: 设 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ 都是由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的具有连续偏导数的函数,
证明: $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$

答:

题 114: 设 $\Phi(u, v)$ 具有连续偏导数, 证明由方程 $\Phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 所确定的函数 $z = f(x, y)$ 满足 $a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c$

答:

题 115: 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

答:

题 116: 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

答:

题 117: 求由下列方程组所确定的函数的导数或偏导数:

$$(1) \text{ 设 } \begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20 \end{cases}, \text{ 求 } \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}.$$

$$(2) \text{ 设 } \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}, \text{ 求 } \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}.$$

答:

题 118: 设 $z = f(x, v)$, $v = g(x, y)$, 其中 f , g 都具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ 。

答:

题 119: 设 $u = xy^2z^3$, 而 x, y, z 又满足方程:

$$y^3 - z^3 + (x - 1)yz = 0 \quad (*)$$

若 y 是方程 (*) 所确定的隐函数, 求 $\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{z=1}$;

答:

题 120: 函数 $u = f(x, y, z)$ 有一阶连续偏导数, $y = y(x)$, $z = z(x)$ 分别由方程 $e^{xy} - y = 0$ 和 $e^z - xz = 0$ 所确定, 求 $\frac{du}{dx}$ 。

答:

题 121: (1) 设 $e^z - xyz = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

(2) 设 $z^3 - 3xyz = a^3$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

答:

题 122: 求下列复合函数的偏导数或导数:

(1) $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) $u = \frac{y-z}{a^2+1} e^{ax}$, $y = a \sin x$, $z = \cos x$, 求 $\frac{du}{dx}$ 。

答:

题 123: 设变换

$$\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + ay \end{cases}$$

可把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 简化为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a 。

答:

第六讲：偏导数 & 全微分 & 求导法则

题 124: 设函数 $f(x, y)$ 关于自变量 x 连续, 又存在常数 $L > 0$, 使得对于任意两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

则函数 $f(x, y)$ 连续.

答:

题 125: $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, a)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$.

答:

题 126: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

答:

题 127: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2 \sin(xy)}{x^2 + y^4}$

答:

题 128: 证明极限不存在 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

答:

题 129: 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点

- (A) 不连续.
- (B) 连续但偏导数不存在.
- (C) 偏导数存在但不可微.
- (D) 可微.

答:

题 130: 设函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

讨论:

1. 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?
2. 偏导数 $f_x(0, 0), f_y(0, 0)$ 是否存在?
3. 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微分?

答:

题 131: 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|x|}}{x^2+y^2} \sin(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 求 $f'_x(0, 0)$ 和 $f'_y(0, 0)$.

答:

题 132: 若函数 $z = f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$, 且 $f(x, 1) = x + 2$, 又 $f'_y(x, 1) = x + 1$, 则 $f(x, y)$ 等于

(A) $y^2 + (x - 1)y - 2.$

(B) $y^2 + (x + 1)y + 2.$

(C) $y^2 + (x - 1)y + 2.$

(D) $y^2 + (x + 1)y - 2.$

答：

题 133：已知 $(axy^3 - y^2 \cos x) dx + (1 + by \sin x + 3x^2y^2) dy$ 是某一函数的全微分，则 a, b 取值分别为

(A) -2 和 2 .

(B) 2 和 -2 .

(C) -3 和 3 .

(D) 3 和 -3 .

答：

题 134：证明函数 $u = \frac{1}{r}$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

其中

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

答：

题 135: 设函数 $f(x, y)$ 可微, 且 $f(x+1, e^x) = x(x+1)^2$, $f(x, x^2) = 2x^2 \ln x$, 则 $df(1, 1) =$

(A) $dx + dy$.

(B) $dx - dy$.

(C) dy .

(D) $-dy$.

答:

题 136: 设 $f(x, y)$ 可微, 又 $f(0, 0) = 0$, $f'_x(0, 0) = a$, $f'_y(0, 0) = b$ 且 $g(t) = f[t, f(t, t^2)]$, 求 $g'(0)$.

答:

题 137: 设函数 $u = f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 12\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

确定 a, b 的值, 使等式在变换 $\xi = x + ay, \eta = x + by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

答:

题 138: 若函数 $f(x, y, z)$ 对任意实数 t 满足关系式

$$f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$$

则称 $f(x, y, z)$ 为 k 次齐次函数。设 $f(x, y, z)$ 可微，试证 $f(x, y, z)$ 是 k 次齐次函数的必要条件是

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = k f(x, y, z)$$

答：

题 139: 设 $z = z(x, y)$ 由方程 $z + e^z = xy$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

答：

题 140: 设 $y = f(x, t)$, 且方程 $F(x, y, t) = 0$ 确定了函数 $t = t(x, y)$, 其中 f, F 都具有一阶连续偏导数, 求 $\frac{dy}{dx}$.

答：

题 141: 设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $f'_y \neq 0$. 证明: 对任意常数 C , $f(x, y) = C$ 为一条直线 $\Leftrightarrow (f'_2)^2 f'''_{11} - 2f'_1 f'_2 f''_{12} + (f'_1)^2 f''_{22} = 0$.

答:

第七讲：多元函数的几何应用 & 多元函数的极值

题 142: 求曲线 $y^2 = 2mx, z^2 = m - x$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切线及法平面方程。

答：

题 143: 求曲面 $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面及法线方程

答：

题 144: 在曲线 $z = xy$ 上求一点，使这点处法线垂直于平面

$$x + 3y + z + 9 = 0$$

并写出这法线的方程。

答：

题 145: 证明: 椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 在其上任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面方程为

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} + \frac{z_0z}{c^2} = 1$$

答:

题 146: 求旋转椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$, 上点 $(-1, -2, 3)$ 处的切平面与 xOy 面的夹角的余弦。

答:

题 147: 求曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 3x = 0 \\ 2x - 3y + 5z - 4 = 0 \end{cases}$$

在点 $(1, 1, 1)$ 处的切线及法平面方程。

答:

题 148: 证明曲面 $xyz = a^3$ ($a > 0$) 上任意一点处的切平面与三个坐标面围成的四面体体积为 $\frac{9}{2}a^3$ 。

答：

题 149: 求函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 $(1,2)$ 处沿从点 $(1,2)$ 到点 $(2, 2 + \sqrt{3})$ 的方向导数。

答：

题 150: 求函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{3}$ 的方向的方向导数。

答：

题 151: 设

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

求 $\text{grad } f(0, 0, 0)$ 及 $\text{grad } f(1, 1, 1)$ 。

答：

题 152: 设 $u = \ln \frac{1}{r}$, 其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ 。求 u 的梯度, 并指出在空间哪些点上 $|\text{grad } u| = 1$ 。

答：

题 153: 求函数 $f(x, y) = (6x - x^2)(4y - y^2)$ 的极值。

答：

题 154: 求两直线

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = x + 1 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ z = x \end{cases}$$

之间的最短距离。

答：

题 155：从斜边之长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形。

答：

题 156：设有一圆板占有平面闭区域 $|(x, y)| x^2 + y^2 \leq 1$ ，该圆板被加热，以致在点 (x, y) 的温度是

$$T = x^2 + 2y^2 - x$$

求该圆板的最热点和最冷点。

答：

题 157: 设 $e_l = (\cos \theta, \sin \theta)$, 求函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1,1)$ 沿方向 l 的方向导数, 并分别确定角 θ , 使这导数有 (1) 最大值; (2) 最小值; (3) 等于 0。

答:

题 158: 求平面 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$ 和柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 的交线上与 xOy 平面距离最短的点。

答:

题 159: 求函数 $z = x^2 - y^2$ 在圆域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 中的最大值与最小值。

答:

题 160: 求椭圆抛物面 $z = x^2 + y^2$ 到平面 $x + y - z = 1$ 的最短距离。

答:

题 161: 要制造一个无盖的圆柱形容器，其容积为 V ，要求表面积 A 最小，问该容器的高度 H 和底半径 R 应各是多少？

答：

题 162: 在椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) 位于第一卦限的部分上，求一点 P ，使过点 P 的切平面与三个坐标平面所围成的四面体体积最小。

答：

第八讲：重积分的概念与性质

题 163: 设有一平面薄板（不计其厚度），占有 xOy 面上的闭区域 D ，薄板上分布有面密度为 $\mu = \mu(x, y)$ 的电荷，且 $\mu(x, y)$ 在 D 上连续，试用二重积分表达该薄板上的全部电荷 Q 。

答：

题 164: 利用二重积分的几何意义计算二重积分 $\iint_D \sqrt{1 - x^2 - y^2} d\sigma$ ，其中

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

答：

题 165: 利用被积函数的对称性及区域的对称性确定下列二重积分的值：

1. $\iint_D y f(x^2 + y^2) d\sigma$ ，其中 D 是矩形域 $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ ， f 是连续函数；
2. $\iint_D \cos x \sin y d\sigma$ ，其中 D 是圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 。

答：

题 166: 设 $I_1 = \iint_{D_1} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$, 其中

$$D_1 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2\}$$

又

$$I_2 = \iint_{D_2} (x^2 + y^2)^3 d\sigma$$

其中

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

试利用二重积分的几何意义说明 I_1 与 I_2 之间的关系。

答：

题 167: 利用二重积分定义证明：

1. $\iint_D d\sigma = \sigma$ (其中 σ 为 D 的面积)。
2. $\iint_D kf(x, y) d\sigma = k \iint_D f(x, y) d\sigma$ (其中 k 为常数)。
3. $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$, 其中 $D = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 为两个无公共内点的闭区域。

答：

题 168: 试确定积分区域 D , 使二重积分 $\iint_D (1 - 2x^2 - y^2) dx dy$ 达到最大值。

答：

题 169: 利用二重积分的性质估计下列二重积分的值:

1. $\iint_D \frac{d\sigma}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}$, 其中 D 是菱形域 $|x|+|y|\leq 1$
2. $\iint_D \sin^2 x \cos^2 y d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$
3. $\iint_D (x+xy-x^2-y^2) d\sigma$, 其中 D 是矩形域 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
4. $\iint_D (x+y+10) d\sigma$, 其中 D 是圆域 $x^2+y^2 \leq 4$ 。

答:

题 170: 根据二重积分的性质, 比较下列积分的大小:

- (1) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中积分区域 D 是由 x 轴、 y 轴与直线 $x+y=1$ 所围成。
- (2) $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$, 其中积分区域 D 是由圆周 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$ 所围成。
- (3) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 其中 D 是三角形闭区域, 三顶点分别为 $(1,0), (1,1), (2,0)$ 。
- (4) $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$ 与 $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$, 其中 $D = \{(x,y) | 3 \leq x \leq 5, 0 \leq y \leq 1\}$

答:

题 171: 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $I = \iint_D xy(x+y) d\sigma$, 其中

$$D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

(2) $I = \iint_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$, 其中

$$D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$$

(3) $I = \iint_D (x + y + 1) d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$$

(4) $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$$

答:

题 172: 计算 $\iint_D (2 + y \cos x + xy \sin y) d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

答:

题 173: 求极限 $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{D_\rho} f(x, y) d\sigma$, 其中 D_ρ 为圆域

$$x^2 + y^2 \leq \rho^2$$

$f(x, y)$ 是 D_ρ 上的连续函数。

答:

题 174:

计算极限 $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2+y^2} \cos(x+y) d\sigma$ 的值, 其中

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

答:

题 175: 计算: $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) d\sigma$, 其中

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$$

答:

题 176: 证明: 若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, $g(x, y)$ 在 D 上可积且不变号, 则存在一点 $(\xi, \eta) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x, y)g(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \iint_D g(x, y) d\sigma$$

答:

第九讲：二重积分的计算

题 177：画出积分区域，并计算下列二重积分：

1. $\iint_D x\sqrt{y} d\sigma$, 其中
 D 是由两条抛物线 $y = \sqrt{x}$, $y = x^2$ 所围成的闭区域.
2. $\iint_D xy^2 d\sigma$, 其中
 D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 及 y 轴所围成的右半闭区域.
3. $\iint_D e^{x+y} d\sigma$, 其中
 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$
4. $\iint_D (x^2 + y^2 - x) d\sigma$, 其中
 D 是由直线 $y = 2$, $y = x$ 及 $y = 2x$ 所围成的闭区域.

答：

题 178：如果二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 的被积函数 $f(x, y)$ 是两个函数 $f_1(x)$ 及 $f_2(y)$ 的乘积，即

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

积分区域

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

证明这个二重积分等于两个单积分的乘积，即

$$\iint_D f_1(x) \cdot f_2(y) dx dy = \left[\int_a^b f_1(x) dx \right] \cdot \left[\int_c^d f_2(y) dy \right]$$

答：

题 179: 化二重积分 $I = \iint_D f(x, y) d\sigma$ 为二次积分（分别列出对两个变量先后次序不同的两个二次积分），其中积分区域 D 是：

1. 由直线 $y = x$ 及抛物线 $y^2 = 4x$ 所围成的闭区域；
2. 由 x 轴及半圆周 $x^2 + y^2 = r^2 (y \geq 0)$ 所围成的闭区域；
3. 由直线 $y = x$, $x = 2$ 及双曲线 $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 所围成的闭区域；

答：

题 180: 交换下次二次积分的积分次序：

1. $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx.$
2. $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx.$
3. $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$
4. $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$
5. $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$
6. $\int_0^\pi dx \int_{-\sin \frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) dy.$

答：

题 181: 设平面薄片所占的闭区域 D 由直线 $x + y = 2$, $y = x$ 和 x 轴所围成，它的面密度

$$\mu(x, y) = x^2 + y^2$$

求该薄片的质量。

答：

题 182: 计算由四个平面 $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及 $2x + 3y + z = 6$ 截得的立体的体积。

答：

题 183: 求由平面 $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ 所围成的柱体被平面 $z = 0$ 及抛物面 $x^2 + y^2 = 6 - z$ 截得的立体的体积。

答：

题 184: 求由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 6 - 2x^2 - y^2$ 所围成的立体的体积。

答：

题 185: 画出积分区域, 把积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$ 表示为极坐标形式的二次积分, 其中积分区域 D 是:

1. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} (a > 0);$
2. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\};$
3. $\{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}, \text{ 其中 } 0 < a < b;$
4. $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}.$

答:

题 186: 利用极坐标计算下列各题:

1. $\iint_D \iint e^{x^2+y^2} d\sigma, \text{ 其中}$

D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 所围成的闭区域.

2. $\iint_D \iint \ln(1 + x^2 + y^2) d\sigma, \text{ 其中}$

D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

3. $\iint_D \iint \arctan \frac{y}{x} d\sigma, \text{ 其中}$

D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 0, y = x$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

答:

题 187: 选用适当的坐标计算下列各题:

(1) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} d\sigma$, 其中

D 是由直线 $x = 2, y = x$ 及曲线 $xy = 1$ 所围成的闭区域.

(2) $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$, 其中

D 是由圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

(3) $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中

D 是由直线 $y = x, y = x + a, y = a, y = 3a (a > 0)$ 所围成的闭区域.

(4) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆环形闭区域

$$\{(x, y) \mid a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$$

(5) $\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} d\sigma$, 其中 D 是圆形闭区域

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq ax\} (a > 0)$$

答:

题 188: 计算以 xOy 面上的圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 围成的闭区域为底, 而以曲面 $z = x^2 + y^2$ 为顶的曲顶柱体的体积。

答:

第十讲：三重积分的计算及重积分的应用

题 189: 化三重积分 $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ 为三次积分，其中积分区域 Ω 分别是

- (1) 由双曲抛物面 $xy = z$ 及平面 $x + y - 1 = 0, z = 0$ 所围成的闭区域；
- (2) 由曲面 $z = x^2 + y^2$ 及平面 $z = 1$ 所围成的闭区域；
- (3) 由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 及 $z = 2 - x^2$ 所围成的闭区域；
- (4) 由曲面 $cz = xy(c > 0)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = 0$ 所围成的在第 I 卦限内的闭区域。

答：

题 190: 计算 $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = xy$, 平面 $y = x, x = 1$ 和 $z = 0$ 所围成的闭区域。

答：

题 191: 计算 $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 其中 Ω 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的四面体。

答：

题 192: 计算 $\iiint_{\Omega} xyz \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 及三个坐标面所围成的在第 I 卦限内的闭区域。

答:

题 193: 计算 $\iiint_{\Omega} xz \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 是由平面 $z = 0, z = y, y = 1$ 以及抛物柱面 $y = x^2$ 所围成的闭区域。

答:

题 194: 计算 $\iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$, 其中 Ω 是由锥面 $z = \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = h(R > 0, h > 0)$ 所围成的闭区域。

答:

题 195: 利用柱面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} z \, dV$, 其中 Ω 是由曲面 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z$ 及平面 $z = 2$ 所围成的闭区域。

答:

题 196: 利用球面坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dV$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 所围成的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} 4V$ 其中闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + (z - a)^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2\}$ 。

答:

题 197: 选用适当的坐标计算下列三重积分:

(1) $\iiint_{\Omega} xy dV$, 其中 Ω 为柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 及平面 $z = 1, z = 0, x = 0, y = 0$ 所围成的在第 I 卦限内的闭区域;

(2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV$, 其中 Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 所围成的闭区域;

(3) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$, 其中 Ω 是由曲面 $4z^2 = 25(x^2 + y^2)$ 及平面 $z = 5$ 所围成的闭区域;

(4) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dV$ 其中闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 < a \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq A, z \geq 0\}$;

(5) $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) dV$ 其中 Ω 是由抛物面 $x = y^2 + z^2$ 与圆锥面 $x = 2 - \sqrt{y^2 + z^2}$ 所围成的闭区域。

答:

题 198: 利用三重积分计算下列由曲面所围成的立体的体积:

- (1) $z = 6 - x^2 - y^2$ 及 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
- (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0)$ 及 $x^2 + y^2 = z^2$ (含有 z 轴的部分)
- (3) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$

答:

题 199: 求上、下分别为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ 和抛物面 $z = x^2 + y^2$ 所围立体的体积。

答:

题 200: 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 含在圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 内部的那部分面积。

答:

题 201: 求锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $z^2 = 2x$ 所割下部分的曲面面积。

答:

题 202: 求底圆半径相等的两个直交圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 及 $x^2 + z^2 = R^2$ 所围立体的表面积。

答：

题 203: 设薄片所占的闭区域 D 如下，求均匀薄片的质心：

- (1) D 由 $y = \sqrt{2px}$, $x = x_0$, $y = 0$ 所围成；
- (2) D 是半椭圆形闭区域 $\left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, y \geq 0 \right\}$
- (3) D 是界于两个圆 $\rho = a \cos \theta$, $\rho = b \cos \theta (0 < a < b)$ 之间的闭区域。

答：

题 204: 设平面薄片所占的闭区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成，它在点 (x, y) 处的面密度 $\mu(x, y) = x^2y$ ，求该薄片的质心。

答：

题 205: 一个由圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与平面 $z = 1$ 所围成的漏斗中盛满液体。假定漏斗内点

(x, y) 处液体密度为

$$\mu = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

求漏斗中液体的重心。

答：

第十一讲：第一型曲线积分

题 206: 利用对弧长的曲线积分的定义证明： 设在 L 上 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds \leq \int_L g(x, y) ds.$$

特别地，有

$$\left| \int_L f(x, y) ds \right| \leq \int_L |f(x, y)| ds.$$

答：

题 207: 计算下列对弧长的曲线积分：

1. $\oint_L (x^2 + y^2)^n ds$, 其中 L 为圆周 $x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$;
2. $\int_L (x + y) ds$, 其中 L 为连接 $(1, 0)$ 及 $(0, 1)$ 两点的直线段;
3. $\oint_L x ds$, 其中 L 为由直线 $y = x$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域的整个边界;
4. $\oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限内所围成的扇形的整个边界;
5. $\int_{\Gamma} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} ds$, 其中 Γ 为曲线 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ 上相应于 t 从 0 变到 2 的这段弧;
6. $\int_{\Gamma} x^2 yz ds$, 其中 Γ 为折线 $ABCD$, 这里 A, B, C, D 依次为点 $(0, 0, 0), (0, 0, 2), (1, 0, 2), (1, 3, 2)$;
7. $\int_L y^2 ds$, 其中 L 为摆线的一拱 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$;
8. $\int_L (x^2 + y^2) ds$, 其中 L 为曲线 $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$

答：

题 208: 求圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 被球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截的部分的面积。

答：

题 209:

(1) 对于密度为 $\mu(x, y, z)$ 的非均匀空间曲线 L , 写出它的重心公式;

(2) 试求螺旋线

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = ht \end{cases}$$

上对应于 $0 \leq t \leq m$ 的一段弧的重心。

答：

第十二讲：第二型曲线积分

题 210: 设 L 为 xOy 面内直线 $x = a$ 上的一段，证明：

$$\int_L P(x, y) dx = 0.$$

答：

题 211: 设 L 为 xOy 面内 x 轴上从点 $(a, 0)$ 到点 $(b, 0)$ 的一段直线，证明：

$$\int_L P(x, y) dx = \int_a^b P(x, 0) dx.$$

答：

题 212: 计算下列对坐标的曲线积分：

1. $\int_L (x^2 - y^2) dx$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(2, 4)$ 的一段弧；
2. $\oint_L xy dx$, 其中 L 为圆周 $(x - a)^2 + y^2 = a^2 (a > 0)$ 及 x 轴所围成的在第一象限内的区域的整个边界（按逆时针方向绕行）；

3. $\int_L y \, dx + x \, dy$, 其中 L 为圆周 $x = R \cos t, y = R \sin t$ 上对应 t 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段弧;
4. $\oint_L \frac{(x+y) \, dx - (x-y) \, dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ (按逆时针方向绕行);
5. $\int_{\Gamma} x^2 \, dx + z \, dy - y \, dz$, 其中 Γ 为曲线 $x = k\theta, y = a \cos \theta, z = a \sin \theta$ 上对应 θ 从 0 到 π 的一段弧;
6. $\int_{\Gamma} x \, dx + y \, dy + (x + y - 1) \, dz$, 其中 Γ 是从点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(2, 3, 4)$ 的一段直线;
7. $\oint_{\Gamma} dx - dy + y \, dz$, 其中 Γ 为有向闭折线 $ABCA$, 这里的 A, B, C 依次为点 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$;
8. $\int_L (x^2 - 2xy) \, dx + (y^2 - 2xy) \, dy$, 其中 L 是抛物线 $y = x^2$ 上从点 $(-1, 1)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段弧。

答:

题 213: 计算 $\int_L (x + y) \, dx + (y - x) \, dy$, 其中 L 是

1. 抛物线 $y^2 = x$ 上从点 $(1, 1)$ 到点 $(4, 2)$ 的一段弧;
2. 从点 $(1, 1)$ 到点 $(4, 2)$ 的直线段;
3. 先沿直线从点 $(1, 1)$ 到点 $(1, 2)$, 然后再沿直线到点 $(4, 2)$ 的折线;
4. 曲线 $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$ 上从点 $(1, 1)$ 到点 $(4, 2)$ 的一段弧。

答:

题 214: 把对坐标的曲线积分 $\int_L P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy$ 化成对弧长的曲线积分, 其中 L 为

1. 在 xOy 面内沿直线从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;

2. 沿抛物线 $y = x^2$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$;
3. 沿上半圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 。

答：

第十二讲：格林公式及其应用

题 215: 计算下列曲线积分，并验证格林公式的正确性：

1. $\oint_L (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy$, 其中 L 是由抛物线 $y = x^2$ 和 $y^2 = x$ 所围成的区域的正向边界曲线；
2. $\oint_L (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$, 其中 L 是四个顶点分别为 $(0, 0), (2, 0), (2, 2)$ 和 $(0, 2)$ 的正方形区域的正向边界。

答：

题 216: 利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

1. 椭圆 $9x^2 + 16y^2 = 144$ ；
2. 圆 $x^2 + y^2 = 2ax$ 。

答：

题 217: 证明下列曲线积分在整个 xOy 面内与路径无关，并计算积分值：

1. $\int_{(1,1)}^{(2,3)} (x+y) dx + (x-y) dy;$
2. $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3) dx + (6x^2y - 3xy^2) dy;$
3. $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy.$

答:

题 218: 利用格林公式, 计算下列曲线积分:

1. $\oint_L (2x - y + 4) dx + (5y + 3x - 6) dy$, 其中 L 为三角形分割为 $(0,0)$, $(3,0)$ 和 $(3,2)$ 的三角形正向边界;
2. $\oint_L x^2y \cos x + 2xy \sin x - y^2 e^x dx + (x^2 \sin x - 2ye^x) dy$, 其中 L 为正向星形线 $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$ ($a > 0$);
3. $\oint_L (2y^2 - y^2 \cos x) dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2 y^2) dy$, 其中 L 为在抛物线 $2x = \pi y^2$ 上由点 $(0,0)$ 到 $(\frac{\pi}{2}, 1)$ 的一段弧;
4. $\oint_L (x^2 - y) dx - (x + \sin^2 y) dy$, 其中 L 是在圆周 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 上由点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧。

答:

题 219: 验证下列 $P(x,y) dx + Q(x,y) dy$ 在整个 xOy 面内是某一函数 $u(x,y)$ 的全微分, 并求这样的一个 $u(x,y)$:

1. $(x + 2y) dx + (2x + y) dy;$

2. $2xy \, dx + x^2 \, dy;$
3. $4 \sin x \sin 3y \cos x \, dx - 3 \cos 3y \cos 2x \, dy;$
4. $(3x^2y + 8xy^2) \, dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^2) \, dy;$
5. $(2x \cos y + y^2 \cos x) \, dx + (2y \sin x - x^2 \sin y) \, dy.$

答:

第十三讲：第一型曲面积分

题 220: 按对曲面的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS + \iint_{\Sigma_2} f(x, y, z) dS$$

其中 Σ 是由 Σ_1 和 Σ_2 组成的。

答：

题 221: 当 Σ 是 xOy 面内的一个封闭区域时，曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \quad \text{与二重积分有什么关系?}$$

答：

题 222: 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS$ 。

其中 Σ 为抛物面 $z = 2 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分，分别如下：

1. $f(x, y, z) = 1;$

2. $f(x, y, z) = x^2 + y^2$;

3. $f(x, y, z) = 3z$.

答:

题 223: 计算 $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS$, 其中 Σ 是:

1. 锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域的整个边界曲面;

2. 锥面 $z^2 = 3(x^2 + y^2)$ 被平面 $z = 0$ 和 $z = 3$ 所截得的部分。

答:

题 224: 计算下列对面积的曲面积分:

1. $\iint_{\Sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限中的部分。

2. $\iint_{\Sigma} (2xy - 2x^2 - x + z) dS$, 其中 Σ 为平面 $2x + 2y + z = 6$ 在第一卦限中的部分。

3. $\iint_{\Sigma} (x + y + z) dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 上柱面 $z \geq h$ ($0 < h < a$) 的部分。

4. $\iint_{\Sigma} (xy + yz + zx) dS$, 其中 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所截得的有限部分。

答:

题 225: 求抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ($0 \leq z \leq 1$) 的质量, 此壳的面积密度为 $\mu = z$ 。
答:

第十四讲：第二型曲面积分

题 226: 按对坐标的曲面积分的定义证明公式

$$\iint_{\Sigma} [P_1(x, y, z) \pm P_2(x, y, z)] dV = \iint_{\Sigma} P_1(x, y, z) dV \pm \iint_{\Sigma} P_2(x, y, z) dV$$

答：

题 227: 当 Σ 为 xOy 面内的一个闭区域时，曲面积分

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy$$

与二重积分有什么关系？

答：

题 228: 计算下列对坐标的曲面积分：

1. $\iint_{\Sigma} x^2 y^2 z dxdy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的下半部分的下侧。
2. $\iint_{\Sigma} z dxdy + x dydz + y dzdx$, 其中 Σ 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截得的第一卦限内的部分的前侧。

3. $\iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy$ 。其中 $f(x, y, z)$ 为连续函数， Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分的上侧。
4. $\iint_{\Sigma} xz dx dy + xy dy dz + yz dz dx$ ，其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧。

答：

题 229: 把对坐标的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy$$

化成对面积的曲面积分，其中：

1. Σ 是平面 $3x + 2y + 2\sqrt{3}z = 6$ 在第一卦限的部分的上侧；
2. Σ 是抛物面 $z = 8 - (x^2 + y^2)$ 在 xOy 面上方的部分的上侧。

答：

第十五讲：斯托克斯公式

题 230: 试对曲面 $\Sigma: z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1, P = y^2, Q = x, R = z^2$ 验证斯托克斯公式。

答：

题 231: 利用斯托克斯公式，计算下列曲线积分：

1. $\oint_{\Gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz$ 。其中 Γ 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$ ，若从 x 轴的正向看去，这圆周是取逆时针方向。
2. $\oint_{\Gamma} (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - y) \, dz$ 。其中 Γ 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1 (a > 0, b > 0)$ ，若从 x 轴正向看去，这椭圆是取逆时针方向。
3. $\oint_{\Gamma} 3y \, dx - xz \, dy + yz^2 \, dz$ 。其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$ ，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向。
4. $\oint_{\Gamma} 2y \, dx + 3x \, dy - z^2 \, dz$ 。其中 Γ 是圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0$ ，若从 z 轴正向看去，这圆周是取逆时针方向。

答：

题 232: 利用斯托克斯公式计算 $\oint_C ydx + zdy + xdz$ 。

其中 C 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + 2y + z = 0$ 的交线，且 C 的正向由 $x + 2y + z = 0$ 上侧的法线方向按右手法则来确定。

答：

题 233: 利用斯托克斯公式计算

$$\oint_C (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (y^2 + x^2)dz$$

其中 C 是平面 $x + y + z = 1$ 与三个坐标平面的交线，且从原点看去取逆时针方向。

答：

题 234: 利用斯托克斯公式计算 $\oint_C x^2y^3dx + dy + zdz$ 。

其中 C 是平面 $y^2 + z^2 = 1$ 与 $x = y$ 所交椭圆的正向。

答：

第十六讲：高斯公式

题 235: 利用高斯公式计算曲面积分：

1. $\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dx dy$ 。其中 Σ 为平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x = a, y = a, z = a$ 所围成的立体的表面的外侧。
2. $\iint_{\Sigma} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dx dy$ 。其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外侧。
3. $\iint_{\Sigma} xz^2 dydz + (x^2 y - z^3) dzdx + (2xy + y^2 z) dx dy$ 。其中 Σ 为上半球体 $0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, x^2 + y^2 \leq a^2$ 的表面的外侧。
4. $\iint_{\Sigma} x dydz + y dzdx + z dx dy$ 。其中 Σ 是界于 $z = 0$ 和 $z = 3$ 之间的圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 9$ 的整个表面的外侧。
5. $\iint_{\Sigma} 4xz dydz - y^2 dzdx + yz dx dy$ 。其中 Σ 是平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x = 1, y = 1, z = 1$ 所围成的立方体的全表面的外侧。

答：

题 236: 利用高斯公式计算

$$\iint_S (x + yz) dydz + (y + zx) dzdx + (z + xy) dx dy$$

其中 S 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围立体表面的外侧。

答：

题 237: 利用高斯公式计算

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy.$$

其中 S 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 与平面 $z = h (h > 0)$ 所围立体表面的外侧。

答：

题 238: 利用高斯公式计算

$$\iint_S (x^3 + y^2) dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy.$$

其中 S 是上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧。

答：

题 239: 利用高斯公式计算

$$\iint_S 4xz dy dz - 2yz dz dx + (1 - z^2) dx dy.$$

其中 S 为 Oyz 平面上曲线 $z = e^v (0 \leq v \leq a)$ 绕 z 轴旋转所成曲面的下侧。

答：