

螞蟻演算法基礎

Foundations of Ant Algorithm

授課教師：陳士杰

國立聯合大學 資訊管理學系



■ ANT ALGORITHM緣起

- **Dorigo**等人在**1996**年利用了螞蟻群體合作尋找食物的行為，設計出一個用於處理最佳化問題的螞蟻演算法 (**Ant Algorithm**)。
- **Dorigo**應用螞蟻演算法與遺傳演算法(**GA**)、模擬退火法(**SA**)等啓發式演算法，以**TSPLIB**國際例題進行比較，結果顯示**AA**優於其他演算法，其結果與最佳解誤差皆小於**3.5%**。
- 本章將以下述兩種**Ant Algorithm**理論模型為講授對象：
 - **螞蟻系統 (Ant System; AS)**是**Ant algorithm**理論模型發展過程中最早被提出的模型，此理論也是現今其它模型的基礎。
 - **螞蟻族群系統 (Ant Colony System; ACS)**是所有**Ant algorithm**理論模型中應用較為廣泛的模型。



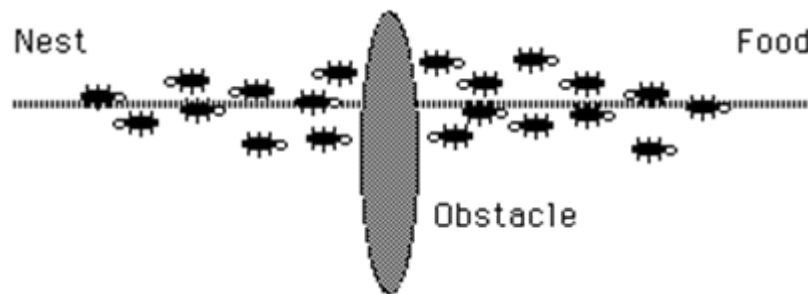


螞蟻覓食行為

- 自然界螞蟻出外覓食時，會在行經的路徑上留下一種叫**費洛蒙 (Pheromone)**的物質，以利後續出發的螞蟻決定是否依循此路徑前進
- 覓食初期蟻群會漫無目的地隨機四處移動，並留下費洛蒙，當螞蟻遇到費洛蒙路徑時，會判斷是否依循前進：
 - **YES** ⇨ 他們也會留下費洛蒙，該路徑費洛蒙濃度增強
 - **NO** ⇨ 該路徑費洛蒙濃度將隨揮發機制而減少
 - 路徑愈短，螞蟻會較快地往返巢穴與覓食處，所留下費洛蒙濃度愈高，則此路徑將會吸引更多螞蟻循此路覓食，最後所有螞蟻均循該路線覓食
- 基本上，螞蟻路線選擇行為主要取決於**費洛蒙濃度**，因此費洛蒙可為是螞蟻間之溝通管道



螞蟻覓食路徑選擇



Pheromone



● 上圖中

- 當路線剛出現障礙物時，螞蟻選擇上、下兩條路線的機率是相同的
- 費洛蒙會隨著時間逐漸消失，圖(b)中的下方路徑因為路徑較長，費洛蒙濃度因揮發而相對較淡，選擇這條路徑的螞蟻亦相對變少，長此以往，此路徑便不再被選擇
- 由於上方路徑較短，費洛蒙濃度強烈，吸引愈來愈多螞蟻往這條路走，更加強費洛蒙濃度，最後形成覓食的最佳路徑 (即最佳解)

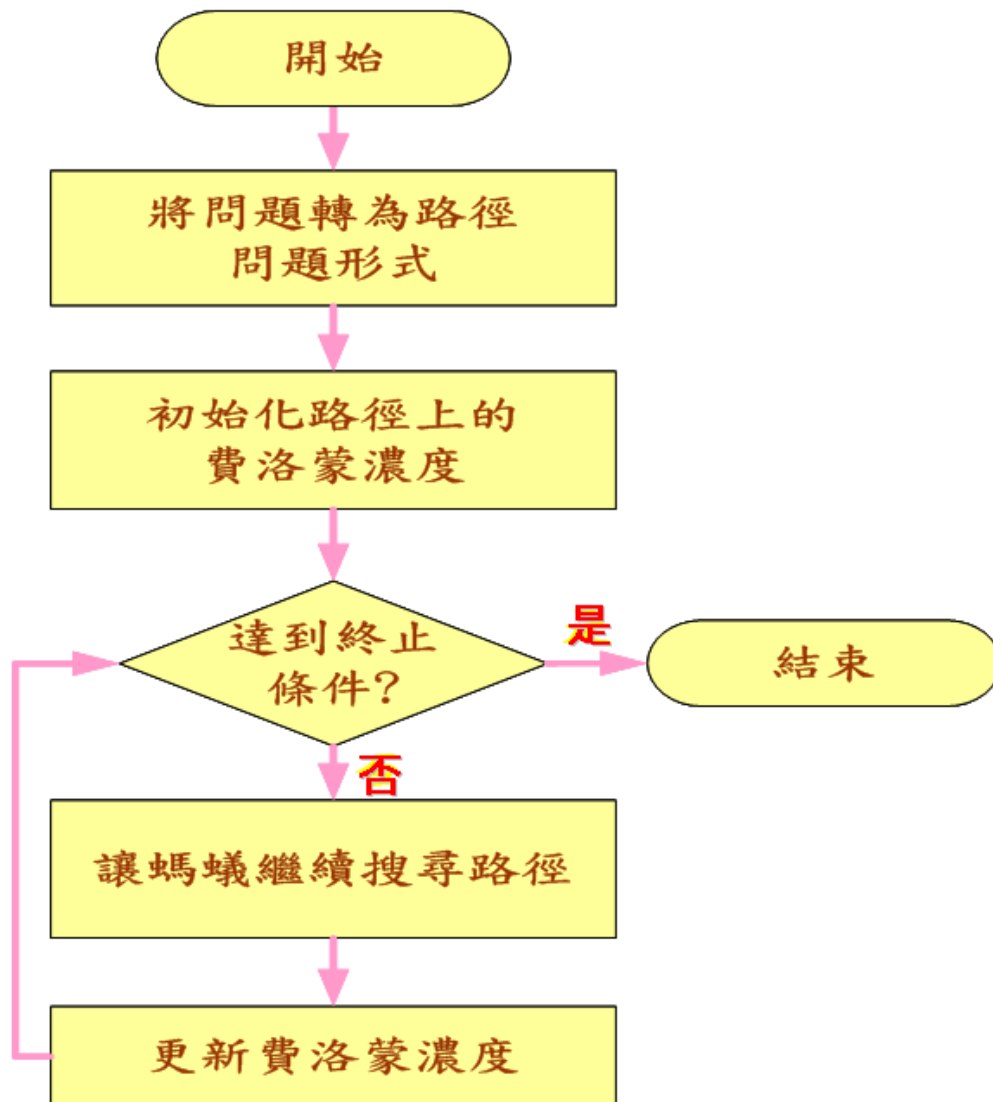


■ ANT ALGORITHM 基本概念

- **AS**利用螞蟻覓食的基本概念尋找問題最佳解，最早最直接的應用即在求解**TSP**問題，其原則為
 - 將一定數量的人工螞蟻隨機放在**TSP**的節點上
 - 每隻螞蟻以轉換機率隨機選擇下一個拜訪節點
 - 一旦螞蟻完成拜訪所有節點時，便計算其行經路徑之長度
 - 依每一路徑總長度之長短績效，在行經路徑的每一線段上均加上一定比例的費洛蒙
 - 以揮發機制定期降低所有路徑一定數量的費洛蒙
 - 每隻螞蟻選擇下一節點的轉換機率，與該連接線段之長度成反比，與費洛蒙的濃度成正比。長度愈短，費洛蒙濃度愈高的線段被選擇的機率愈高



螞蟻演算法之流程





■ 重要名詞

- 人工螞蟻(**artificial ants**)
- 費洛蒙 (**Pheromone**)
- 期望值 (**Desirability Values**)
- 轉換機率 (**Transition Probability**)
- 揮發機制 (**Evaporation Mechanism**)



人工螞蟻(ARTIFICIAL ANTS)

- 人工螞蟻是**AS**進行隨機尋優的基本單位，具備下列功能
 - 留下費洛蒙
 - 感知費洛蒙濃度
 - 判斷線段長短
 - 選擇下一個拜訪節點，並移動到該節點
- 人工螞蟻為因應電腦及程式之操作，與自然螞蟻之差別
 - 人工螞蟻具某種程度之記憶
 - 人工螞蟻不完全是瞎的 (∴有視覺能力)
 - **AS**中時間的推移是離散的，以方便費洛蒙濃度與螞蟻位置的更新
 - 在單處理機系統，人工螞蟻之運作基本上是一隻一隻依序進行



- 在同一時間內，**AS**會派出多隻螞蟻進行路線尋優。至於要派出螞蟻數量，目前並沒有明確的準則：
 - 若一次派出太多螞蟻，可能會使次佳路徑的費洛蒙濃度被過度強化，而提早收斂於局部解。
 - 若螞蟻數量太少，則可能因為費洛蒙無法獲得及時的加強而消失。
 - **Dorigo**等人建議，螞蟻數量 $S = \text{節點總數量 } A$ 。



- 由於螞蟻是靠費洛蒙溝通，因此都具有遺留及感知費洛蒙的能力。而螞蟻殘留有費洛蒙之路徑稱為費洛蒙路徑(Pheromone Trail)，以與無螞蟻走過或費洛蒙已揮發完畢之路徑作為區分。
- 各路徑線段之費洛蒙更新方式的概念如下：

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}$$

- $\tau_{ij}(t)$ 與 $\tau_{ij}(t+1)$ 為線段(i, j)在時間 t 與 $t+1$ 之費洛蒙濃度。
- ρ 為費洛蒙衰退比例參數； $(1-\rho)$ 為費洛蒙殘留因子。 $0 < \rho < 1$
- 各種螞蟻演算法的改進版本，於費洛蒙之更新作法皆有所不同。



■ $\Delta\tau_{ij}$ 為此次循環中，在線段(i, j)上的費洛蒙增量

$$\Delta\tau_{ij} = \begin{cases} Q / L^s & \text{if 線段 (i, j) } \in L^s \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

● L^s 為某隻螞蟻 s 所完成之路徑總長度

● Q 為一參數值，表示費洛蒙的強度，此參數一定程度上會影響到收斂速度，一般設為**100**





揮發機制 (EVAPORATION MECHANISM)

- 揮發機制主要的功能是令所有路徑上的費洛蒙濃度以一定程度進行揮發，以避免部份路段的費洛蒙不斷累積，導致所有螞蟻均依循相同路徑而無法發揮尋優功能。
- **停滯(Stagnation)**: 若部份路段費洛蒙濃度過高，將完全左右所有螞蟻的選擇行為，致使所有螞蟻均依循相同路徑而無法搜尋其他可能路徑的現象。
- **AS**在進行費洛蒙更新時，通常都會納入費洛蒙揮發機制。如前述公式中的 ρ ，即為費洛蒙的衰退參數，其值愈高衰退幅度愈大



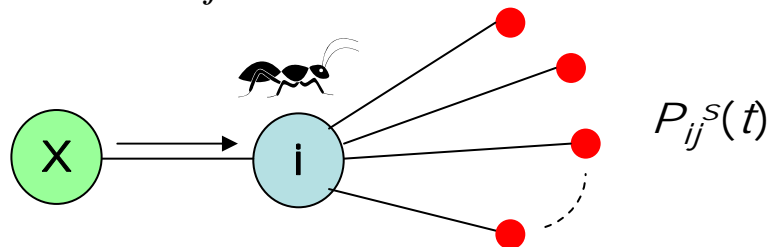
期望值 (DESIRABILITY VALUES)

- 或稱能見度 (Visibility), 代表某一個線段優劣的參數
 - 若AS應用在求解最短路徑的TSP時, 各線段之期望值係以距離長度的倒數表示, 通常以 η_{ij} 表之, 用以代表位於 i 點的螞蟻選擇下一個拜訪節點的偏好, 其值愈高則獲選之機率愈高
- 期望值為靜態值, 不會隨尋優過程變動



轉換機率(TRANSITION PROBABILITY)

- AS是一種機率尋優方法，其路徑尋優係利用轉換機率 (transition probability) $P_{ij}^s(t)$ 進行下一節點之選擇。



- 轉換機率考慮因素有費洛蒙濃度 τ 及線段長度 (即: 期望值 η)

$$P_{ij}^s(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \times [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{u \in J_s(i)} [\tau_{iu}(t)]^\alpha \times [\eta_{iu}]^\beta} & \text{if } j \in J_s(i) \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

- $\tau_{ij}(t)$: 線段 ij 在時間 t 之費洛蒙濃度
- $J_s(i)$: 位於節點 i 之螞蟻 s 尚未拜訪過的鄰近節點集合
- η_{ij} : 代表期望值, 通常為線段 ij 長度之倒數
- α, β : 用以決定費洛蒙與距離相對重要性之參數



- 若 $\alpha = 0$ ，則螞蟻選擇距離最短的鄰近節點作為下一個拜訪節點 (即：貪心解法(greedy heuristic, GH))
- 若 $\beta = 0$ ，則螞蟻選擇下一拜訪節點時完全不考量其間距離長短，僅以費洛蒙濃度作為選擇下一個拜訪節點之依據。
 - 當在起始狀態時，由於各線段尚未有費洛蒙之累積，因此螞蟻是以隨機的方式選擇拜訪節點。因此當 $\beta = 0$ 時，即為隨機尋優法(random search, RS)
- 一般操作AS時都會設定 $\alpha \neq 0$ 、 $\beta \neq 0$
- $J_s(i)$ 記錄著螞蟻s尚未拜訪過的節點，而不屬於 $J_s(i)$ 之節點、或是拜訪過的節點，其選擇機率為0。這樣的設計可避免螞蟻重複經過同一節點之情形
 - $J_s(i)$ 之功能類似Tabu search中禁忌清單的觀念。



■ 基本特性

- 以費洛蒙濃度與線段距離長短作為下一節點選擇依據，因此具備隨機尋優及貪心解法兩種啟發式解法之特質。
- 具有**GAs**的**多點尋優**功能，每次循環中的每一隻螞蟻都具有獨立平行尋優的能力，彼此互不影響。
- 透過留下費洛蒙的機制，將經驗承傳給後面的螞蟻，以作為下一個節點的選擇依據。
- 具**GAs**之直接尋優功能，即直接以費洛蒙與距離長短作為下一節點選擇依據，無須其他資訊。
- **AS**利用螞蟻留下費洛蒙的**正回饋機制 (Positive Feedback)**，將不錯的可行解加以強化；此外，費洛蒙揮發機制（即：**負回饋機制(Negative Feedback)**）之設計，可避免不錯的解（非最佳解）太過左右後面螞蟻的選擇行為，而陷於提早收斂（即停滯）的問題



■ 操作步驟

● 茲應用TSP問題說明AS運作方式與流程

1. 起始狀態及參數設定

- 各線段費洛蒙起始值(τ_0)、費洛蒙衰退參數(ρ)、螞蟻隻數(S)、 α 及 β 值、執行期間(t_{\max})。一般而言：
 - 費洛蒙起始值可設定為 $\tau_{ij} = \tau_0 = (NL_{nn})^{-1}$, N 為總線段數, L_{nn} 是以某個最快的方式(貪心解法)所求出的一個可能路徑之路徑總距離, 而此一路徑作為AS解決TSP問題時的起始路徑。
 - ρ 可設為0.8 ~ 0.9之間;
 - 可令螞蟻數量 = 節點總數量;
 - α 及 β 由試誤法嘗試, 通常 β 值較大

2. 建構TSP路徑

- 將 S 隻螞蟻隨機放在節點上, 每隻螞蟻即自該節點出發, 透過轉換機率之求算, 以選擇下一個到訪節點。反覆進行以逐步完成一趟完整的里程



- 轉換機率之計算方式如前所述
- 每隻螞蟻對下一節點之選擇，並非選擇機率最高者，而是另外產生一個隨機亂數，以機率方式選擇下一節點

3. 更新費洛蒙濃度

- 當所有螞蟻均完成一趟的旅程後，便執行「**整體更新法**」，即依據他們的表現進行費洛蒙的更新
- 線段 ij 上殘留費洛蒙量之計算如下

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \sum_{s=1 \sim n} \Delta\tau_{ij}^s$$

- 其中：

- $\Delta\tau_{ij}^s$ 為在時間 $t \rightarrow t+1$ 時，第 s 隻螞蟻在線段 ij 留下費洛蒙的量
- 若線段 (i, j) 為螞蟻 s 所曾走過的線段 (即： $ij \in L^s$)，則 $\Delta\tau_{ij}^s = Q/L^s$ ；否則 $\Delta\tau_{ij}^s = 0$
- L^s 為螞蟻 s 所建構之路徑總長度
- $\sum_{s=1 \sim n} \Delta\tau_{ij}^s$ 為在時間 $t \rightarrow t+1$ 時，所有螞蟻在線段 ij 留下費洛蒙的量



4. 更新最佳路徑

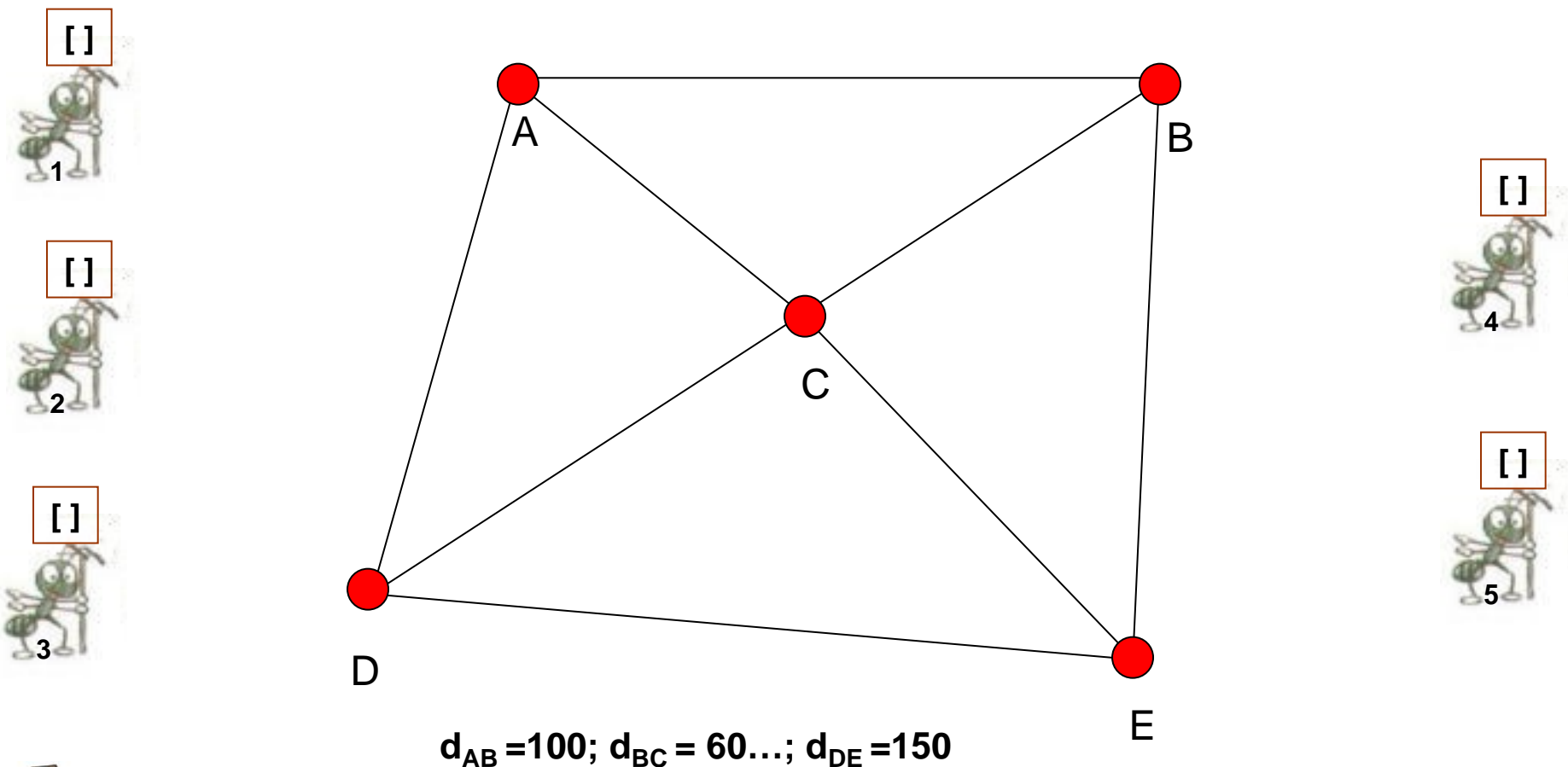
- 所有螞蟻找出的路徑中，挑出總長度最小者 $\min\{L^s\}$
 - 假設螞蟻 s 所找到的路徑其總長度最小
- 若 $\min\{L^s\} < L^+$ ，則令 $L^+ = L^s$ ， $T^+ = T_s$ 。其中：
 - L^+ 為先前所找到之最佳路徑總長度
 - T^+ 為先前所找到之最佳路徑
- 更新時間： $t = t + 1$

5. 測試停止條件

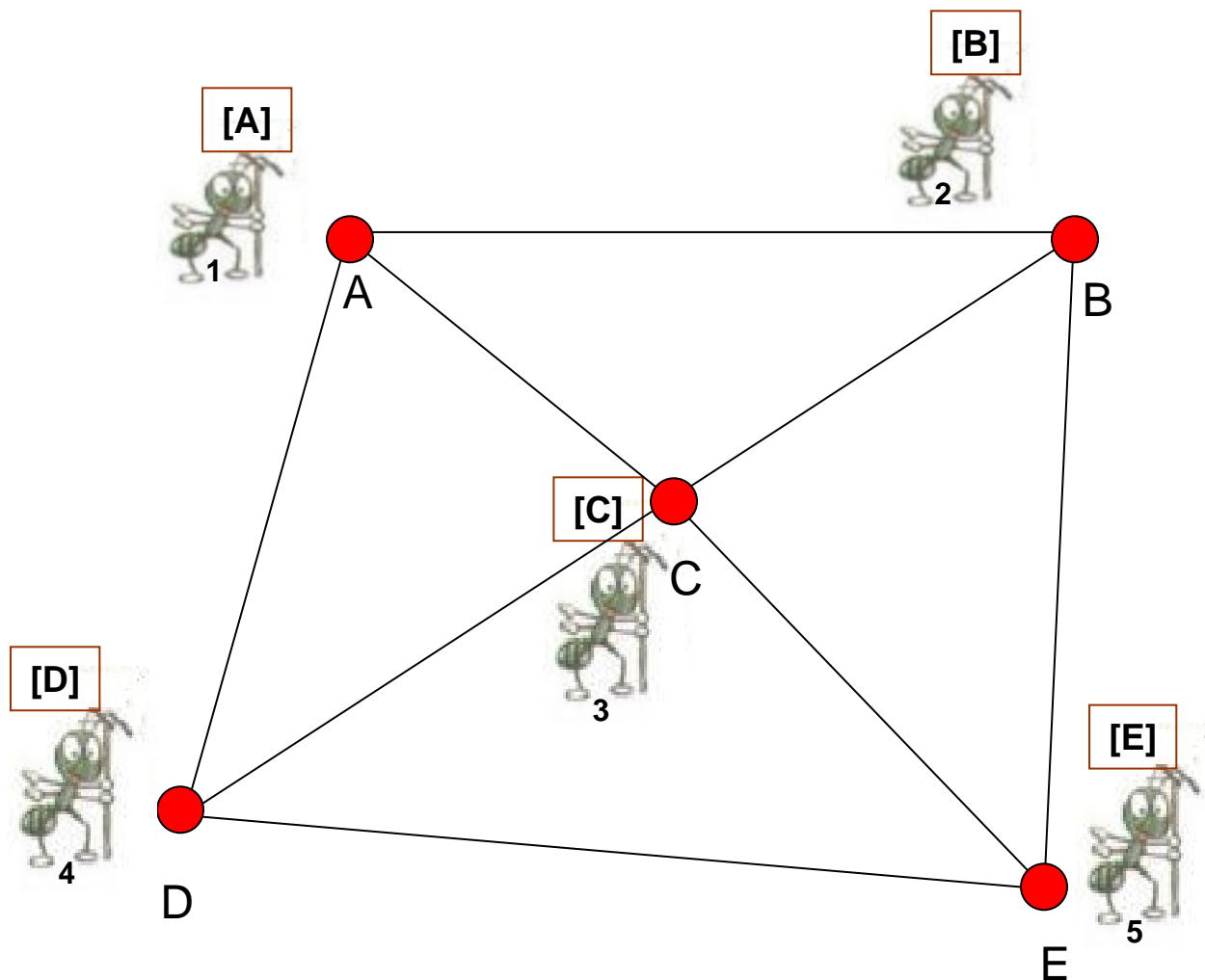
- AS 的停止條件一般設定為時間到達時間上限時(t_{\max})停止，即當 $t \geq t_{\max}$ 時停止；此時， T^+ 為找到的最佳路徑， L^+ 為其總長度；否則回到 step 2
- 由 step 4 可知，時間的推移是指當所有螞蟻均完成一趟路徑建構，且做完費洛蒙的更新後，才推移一個時間單位。即：若 $t_{\max} = 100$ ，表示步驟將重複 100 次才會到達時間上限。
 - 因此，本步驟所指的時間相當於迭代次數。



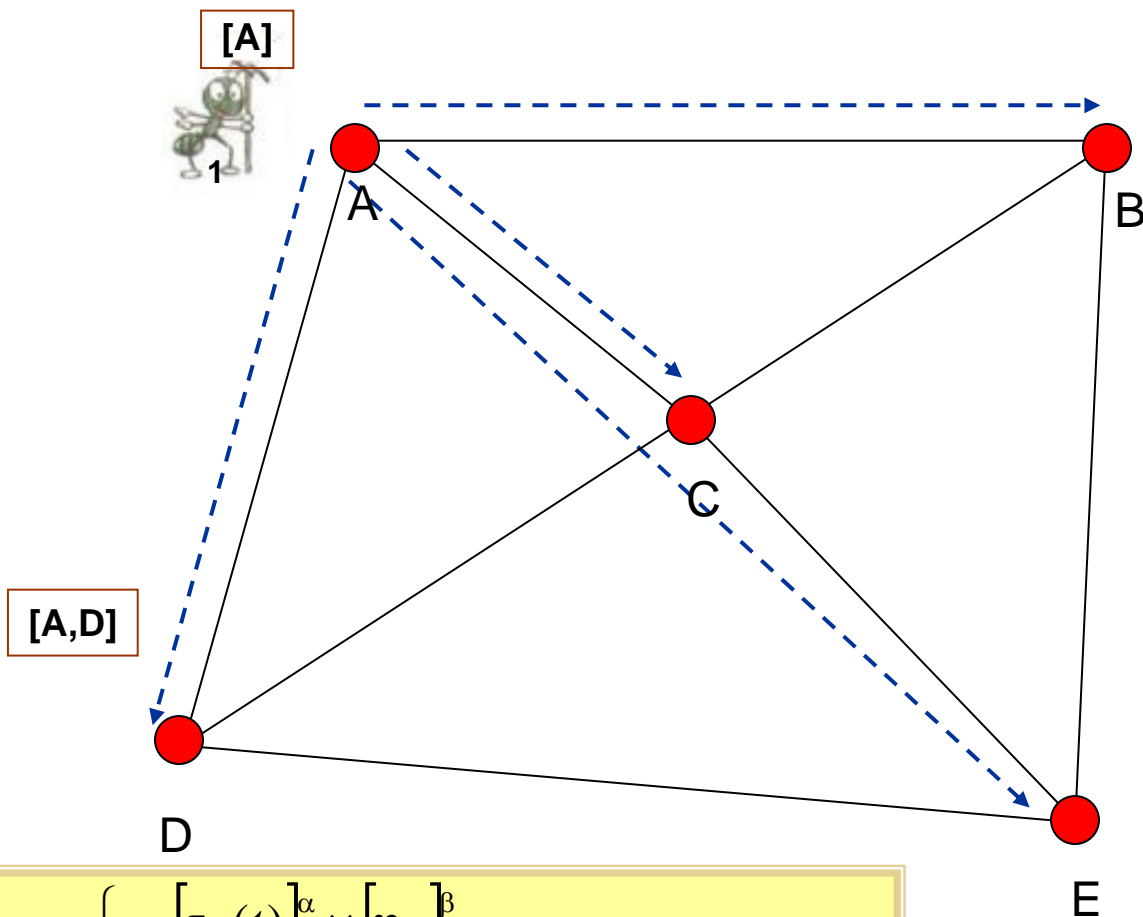
1. 起始狀態及參數設定



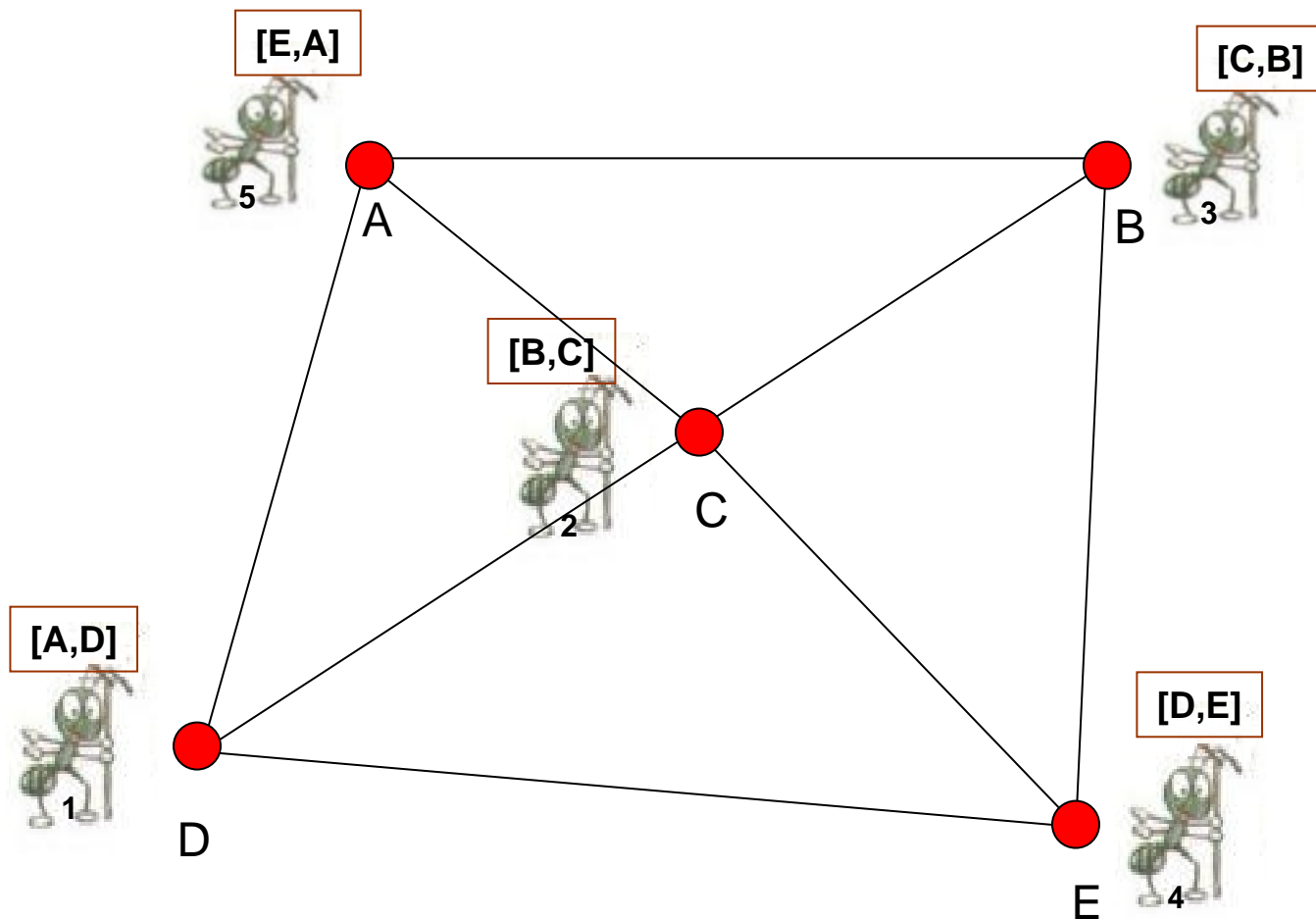
2. 建構TSP路徑

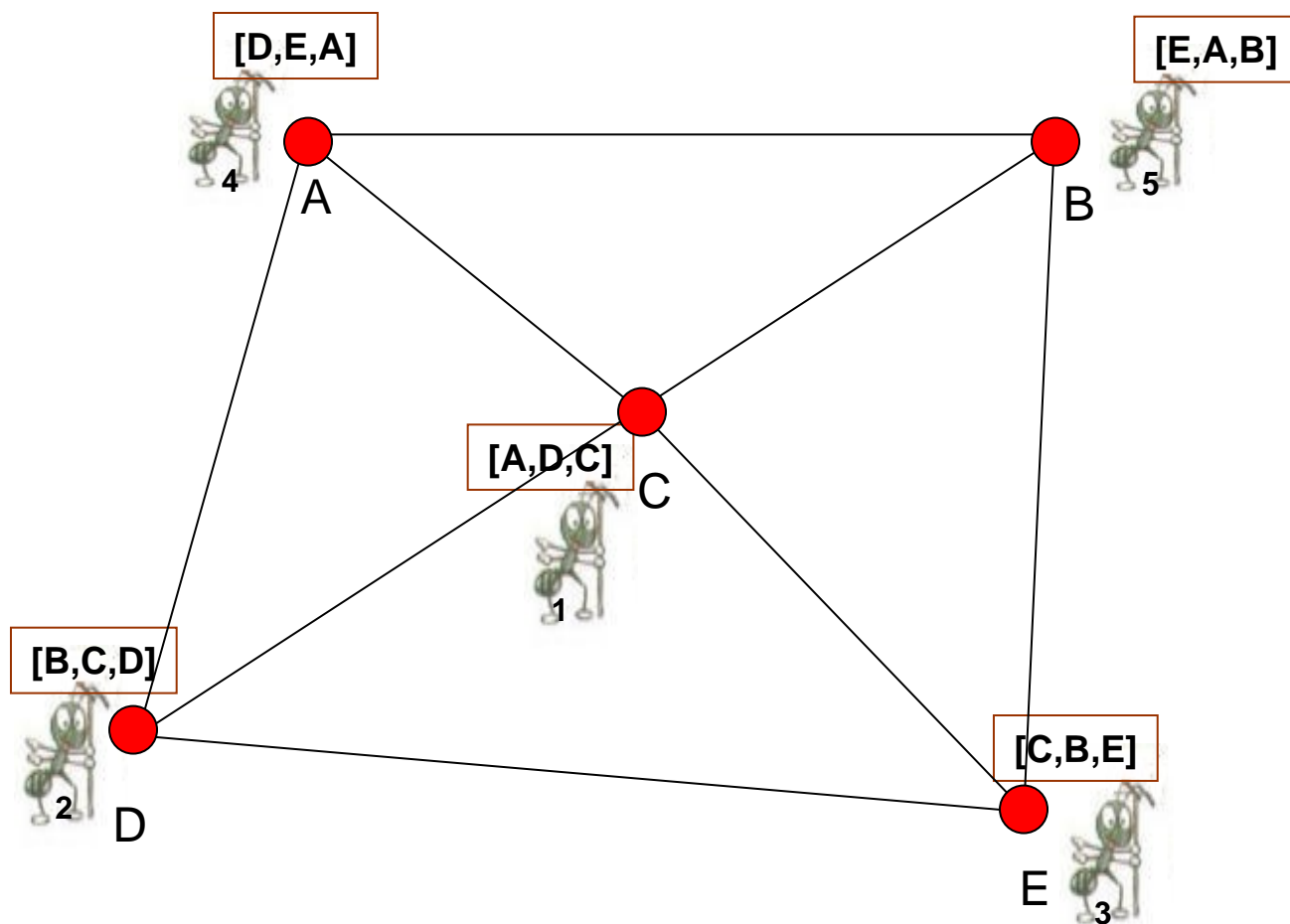


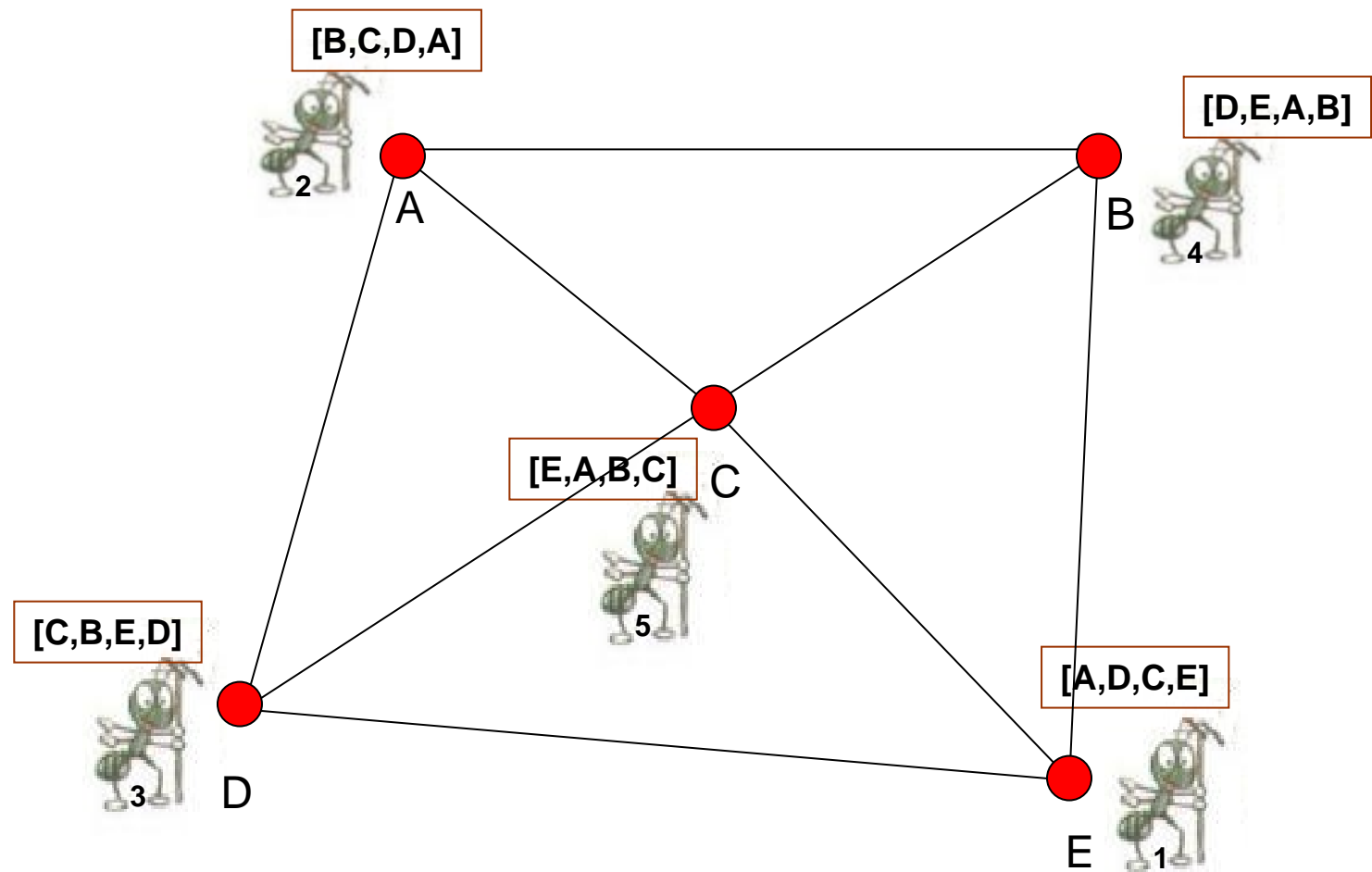
如何選擇下一個拜訪節點？

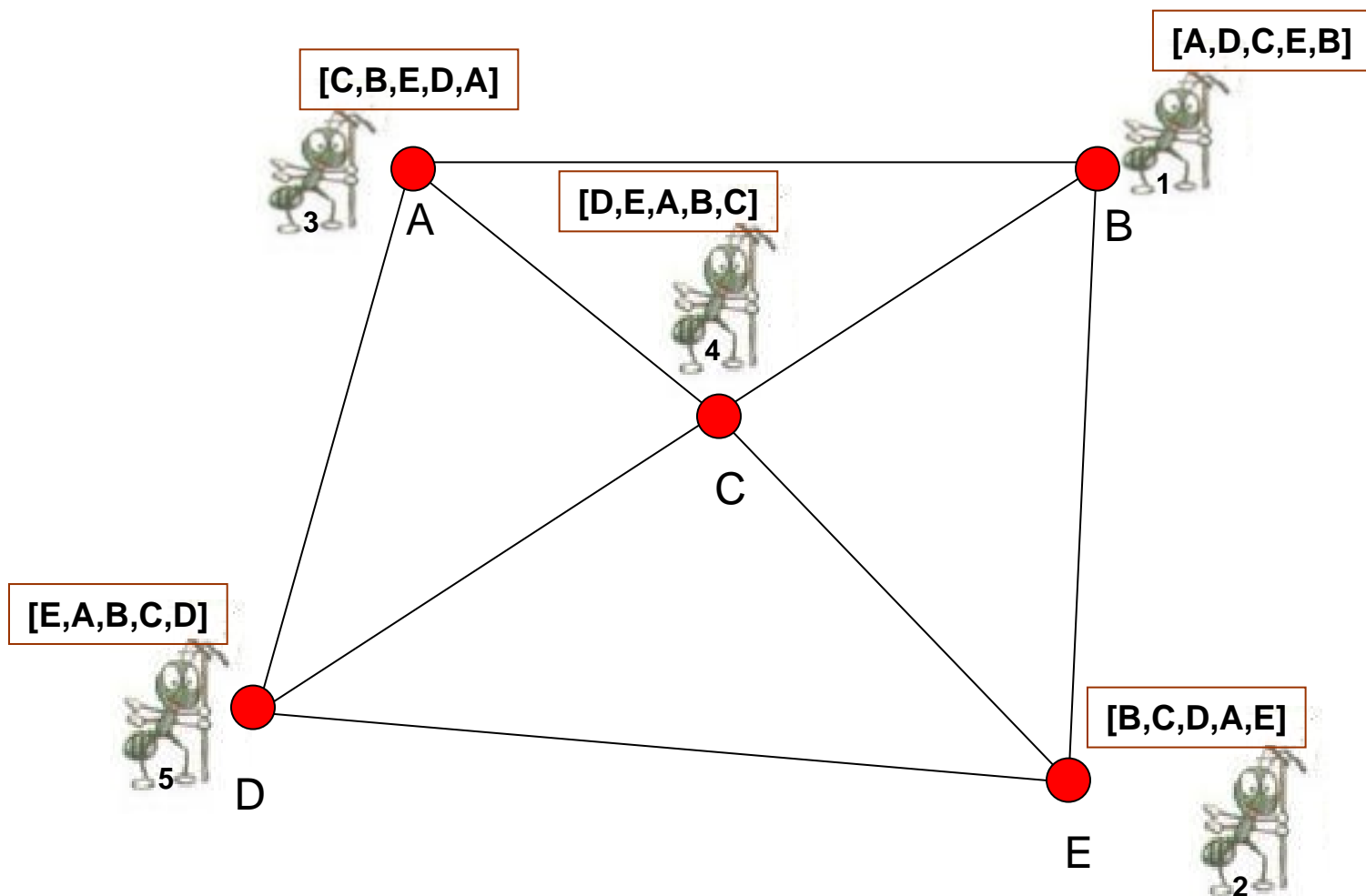


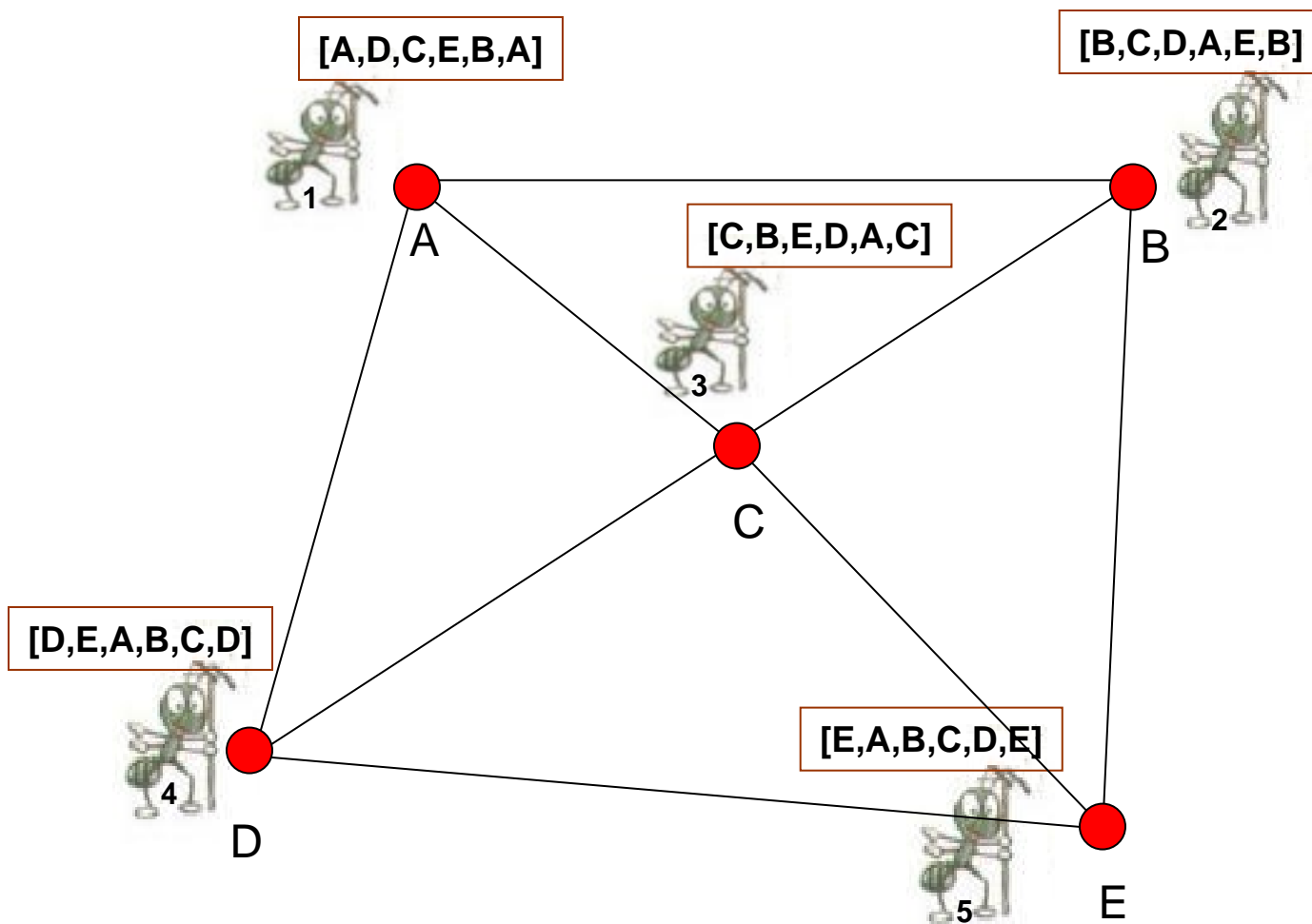
$$P_{ij}^s(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \times [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{u \in J_s(i)} [\tau_{iu}(t)]^\alpha \times [\eta_{iu}]^\beta} & \text{if } j \in J_s(i) \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

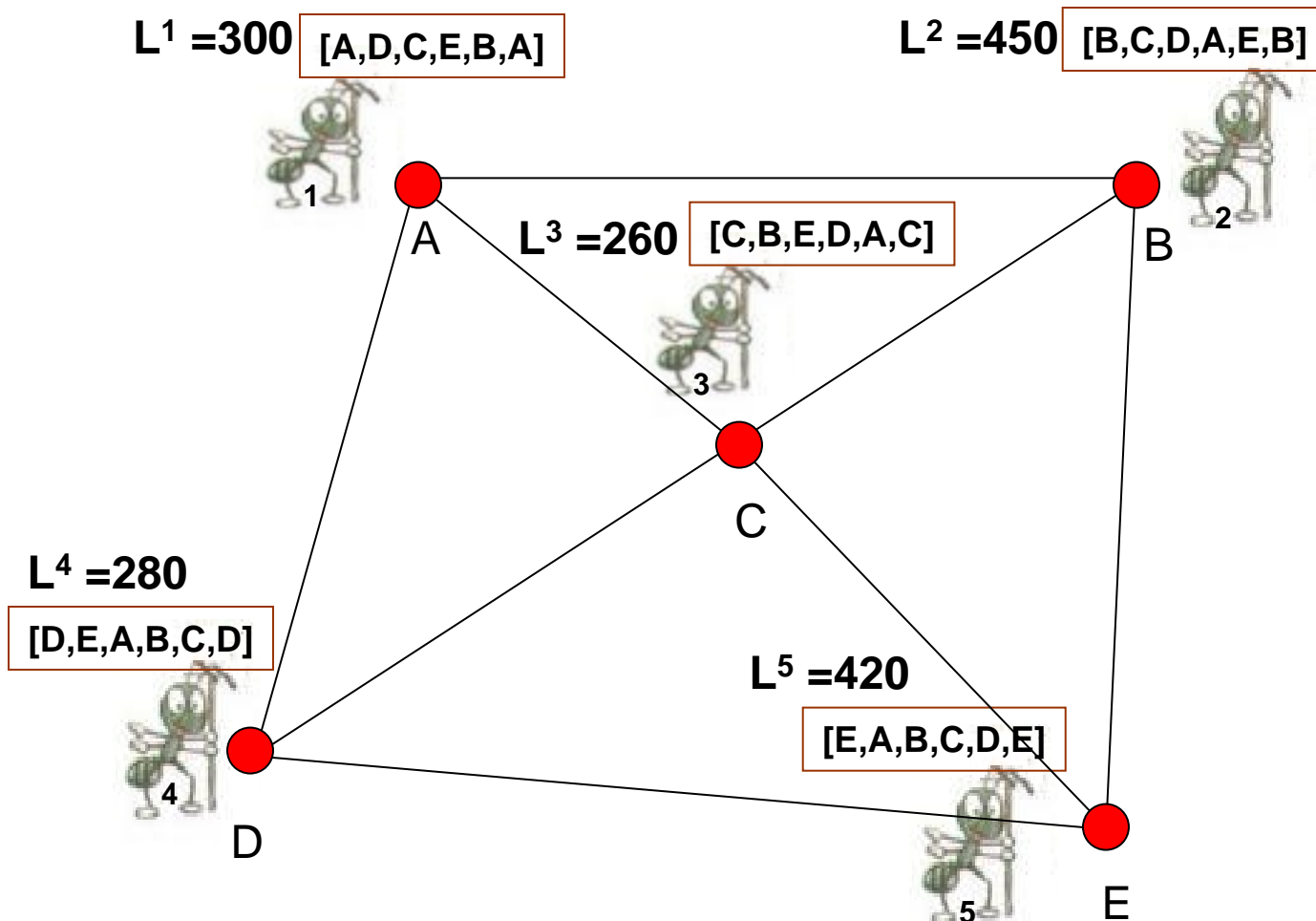












3. 更新費洛蒙濃度

- 線段 ij 上殘留費洛蒙量之計算如下

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \sum_{s=1 \sim n} \Delta\tau_{ij}^s$$

$$\Delta\tau_{ij}^s = \begin{cases} \frac{Q}{L^s} & \text{if 線段 } (i, j) \in L^s \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 其中：

- $\Delta\tau_{ij}^s$ 為在時間 $t \rightarrow t+1$ 時，第 s 隻螞蟻在線段 ij 留下費洛蒙的量
- L^s 為螞蟻 s 所建構之路徑總長度
- $\sum_{s=1 \sim n} \Delta\tau_{ij}^s$ 為在時間 $t \rightarrow t+1$ 時，所有螞蟻在線段 ij 留下費洛蒙的量。若以本範例中的線段(A, B)為例，則：

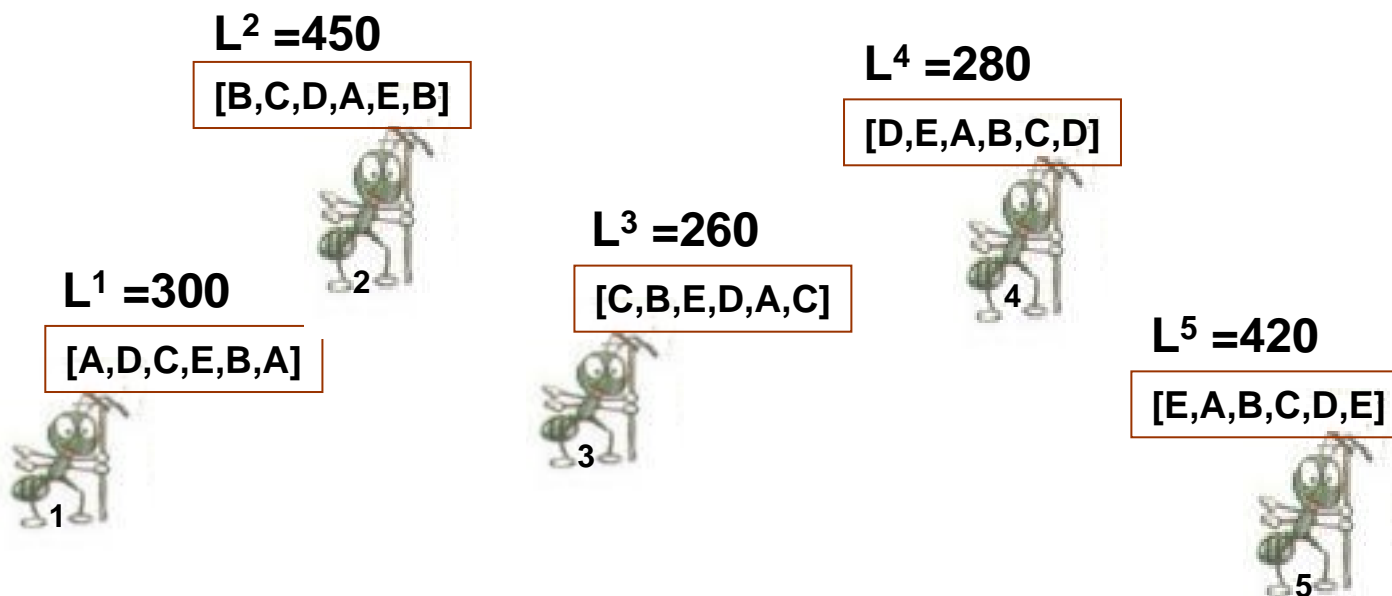
$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^5 \Delta\tau_{A,B}^s &= \Delta\tau_{A,B}^1 + \Delta\tau_{A,B}^2 + \Delta\tau_{A,B}^3 + \Delta\tau_{A,B}^4 + \Delta\tau_{A,B}^5 \\ &= \Delta\tau_{A,B}^1 + 0 + 0 + \Delta\tau_{A,B}^4 + \Delta\tau_{A,B}^5 \end{aligned}$$



4. 更新最佳路徑

- 所有螞蟻找出的路徑中，挑出總長度最小者 $\min\{L^s\}$
- 若 $\min\{L^s\} < L^+$ ，則令 $L^+ = L^s$, $T^+ = T_s$
- 更新時間: $t = t + 1$

5. 測試停止條件



End of First Run

Save Best Tour (Sequence and length)

All ants die

New ants are born



■ 實際範例

● 網路距離矩陣

節點	1	2	3	4	5	6	7
1	0	19	92	29	49	78	6
2	19	0	21	85	45	16	26
3	92	21	0	24	26	87	47
4	29	85	24	0	76	17	8
5	49	45	26	76	0	90	27
6	78	16	87	17	90	0	55
7	6	26	47	8	27	55	0



Step 1: 起始狀態及參數設定

設定螞蟻隻數 $S = 3$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $t_{max} = 100$, $Q = 100$, $\rho = 0.9$, 費洛蒙起始值 $\tau_{ij} = \tau_0 = (NL_{nn})^{-1} = 0.000167$

Step 2 : 建構TSP路徑

將3隻螞蟻隨機放置在節點上。假設第1隻螞蟻先置於第4節點，則其餘各點均可能為該螞蟻的下一節點，對此螞蟻而言，各節點選擇機率如下表所示



節點	$[\tau_{iu}(t)]^\alpha [\eta_{iu}]^\beta$	P_{ij}^s	ΣP_{ij}^s
1	1.98573E-05	0.053269	0.05
2	2.31142E-06	0.006201	0.06
3	2.89931E-05	0.077776	0.14
4	0	0	---
5	2.89127E-06	0.007756	0.15
6	5.77855E-05	0.155014	0.30
7	0.000260938	0.699985	1.00

產生一隨機亂數值，假設為0.22，表示將選擇節點6；下一節點的選擇機率如下表所示



節點	$[\tau_{iu}(t)]^\alpha [\eta_{iu}]^\beta$	P_{ij}^s	ΣP_{ij}^s
1	2.74490E-06	0.035296	0.04
2	6.52344E-05	0.838833	0.87
3	2.20637E-06	0.028371	0.90
4	0	0	---
5	2.06173E-06	0.026511	0.93
6	0	0	---
7	5.52066E-06	0.070989	1.00

產生一隨機亂數值，假設為0.78，表示將選擇**節點2**；下一節點的選擇機率如下表所示



節點	$[\tau_{iu}(t)]^\alpha [\eta_{iu}]^\beta$	P_{ij}^s	ΣP_{ij}^s
1	4.62604E-05	0.395118	0.40
2	0	0	---
3	3.78685E-05	0.323441	0.72
4	0	0	---
5	8.24691E-06	0.070438	0.79
6	0	0	---
7	2.47041E-05	0.211002	1.00

產生一隨機亂數值，假設為0.46，表示將選擇節點3；下一節點的選擇機率如下表所示



節點	$[\tau_{iu}(t)]^\alpha [\eta_{iu}]^\beta$	P_{ij}^s	ΣP_{ij}^s
1	1.97306E-06	0.057629	0.06
2	0	0	-
3	0	0	-
4	0	0	-
5	2.47041E-05	0.721559	0.78
6	0	0	-
7	7.55998E-06	0.220812	1.00

產生一隨機亂數值，假設為0.35，表示將選擇節點5；下一節點的選擇機率如下表所示



節點	$[\tau_{iu}(t)]^\alpha [\eta_{iu}]^\beta$	P_{ij}^s	ΣP_{ij}^s
1	6.95544E-06	0.232907	0.23
2	0	0	---
3	0	0	---
4	0	0	---
5	0	0	---
6	0	0	---
7	2.29081E-06	0.767093	1.00

產生一隨機亂數值，假設為0.59，表示將選擇節點7



經過上述程序，第1隻螞蟻已完成路徑，即**4** \Rightarrow **6** \Rightarrow **2** \Rightarrow **3** \Rightarrow **5** \Rightarrow **7** \Rightarrow **1**
 \Rightarrow **4** (總長度**142**)；假設另兩隻螞蟻也依序完成路徑，分別為**5 1 6 4 7 2**
3 5 (總長度**225**)及**5 1 3 4 6 2 7 5** (總長度**251**)

Step 3 更新費洛蒙濃度

針對此三隻螞蟻所找到的路徑，分別進行各線段的費洛蒙濃度更新。

例如：

- 路段**12**未有任何一隻螞蟻通過，故其費洛蒙值更新為

$$\tau_{12}(1) = (1 - 0.9) \tau_{12}(0) = 0.000017$$

- 路段**13**有第**3**隻螞蟻通過，故其費洛蒙值更新為

$$\tau_{13}(1) = (1 - 0.9) \tau_{13}(0) + \tau_{13}^3 = 0.000017 + 0.3984 = 0.398417$$



- 路段**23**有第**1**隻及第**2**隻螞蟻通過，其費洛蒙值更新為

$$\tau_{23}(1) = (1 - 0.9)\tau_{23}(0) + (\tau_{23}^1 + \tau_{23}^2) = 0.000017 + 1.033803 = 1.033820$$

- 各路段費洛蒙更新結果，如下表所示 (若考慮方向性，則為不對稱矩陣)

節點	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0.000017	0.000017	0.000017	0.758583	0.000017	0.633820
2	0.000017	0	0.000017	0.000017	0.000017	0.992386	0.400017
3	0.398417	1.033820	0	0.000017	0.000017	0.000017	0.000017
4	0.633820	0.000017	0.358587	0	0.000017	0.400017	0.000017
5	0.000017	0.000017	1.033820	0.000017	0	0.000017	0.358587
6	0.400017	0.000017	0.000017	0.992386	0.000017	0	0.000017
7	0.000017	0.358587	0.000017	0.400017	0.633820	0.000017	0



Step 4 更新最佳路徑

令 $L^+ = L_1 = 142$, $T^+ = T_1 = 4\ 6\ 2\ 3\ 5\ 7\ 14$; 更新時間 $t = 2$

Step 5 測試停止條件

由於 $2 < 100$, 尚無須停止, 回到step 2

- 重複step 2 到step 5, 直到停止條件成立為止



■ AS 應用限制

- 原則上，**AS**僅適用於**組合最佳化問題**，較不適合用於求解其它數學規劃問題。
- **Dorigo(1997)**針對**AS**做了三處改良，包括
 - ❑ 加入轉換規則 (**transition rule**)
 - ❑ 改變費洛蒙路徑更新方法：只允許表現最佳的螞蟻留下費洛蒙
 - ❑ 增加局部更新法 (**local updating**)

發展出**螞蟻族群系統** (**ant colony system, ACS**)

- **Stutzle(1997)**針對**AS**做了四處改良，包括
 - ❑ 只允許表現最佳的螞蟻留下費洛蒙
 - ❑ 增加路段費洛蒙濃度之上、下限限制
 - ❑ 所有路段之起始費洛蒙濃度均設在上限值
 - 加入路段費洛蒙濃度平滑機制

發展出**小中取大螞蟻系統**(**max-min AS, MMAS**)

- 所有的方法皆可統稱**Ant Colony Optimization, ACO**





■ 螞蟻族群系統(ACS)

- **Dorigo等(1997)以AS為基礎，提出螞蟻族群系統(Ant Colony System, ACS)，其與AS之主要差異為**

- 加入轉換規則
- 變更「整體更新法」
- 加入「局部更新法」



加入轉換規則

- **ACS**利用轉換規則，取代**AS**中的轉換機率。

$$J = \begin{cases} \arg \max_{u \in J_s(i)} \left\{ [\tau_{iu}(t)]^\alpha \times [\eta_{iu}]^\beta \right\} & \text{if } q \leq q_0 \\ J & \text{otherwise} \end{cases}$$

■ 其中， q 為 $0,1$ 間呈均勻分配之隨機亂數

q_0 為一設定參數， $0 \leq q_0 \leq 1$

J 為計算機率後再隨機選取，即**AS**的轉換機率

$\arg \max_x f(x)$ 係指使 $f(x)$ 最大之 x 值

- 若 $q > q_0$ ，則**ACS**之轉換規則與**AS**轉換機率完全相同
- 若 $q \leq q_0$ ，則直接選取有最大吸引力之節點(即：路段費洛蒙濃度高、距離長度短)



- 因此，ACS螞蟻的選擇行為可分為「追隨」與「探索」兩種：
 - 當 $q > q_0$ 時，雖然費洛蒙濃度高及距離長度短的節點被選擇的機率較高，但因螞蟻仍係以隨機方式選擇節點，因此機率最高的節點未必會被選到，亦即螞蟻仍有選擇其他節點之可能，因此其行為較偏向**探索**
 - 當 $q \leq q_0$ 時，螞蟻被設定必須選擇洛蒙濃度高及距離長度短的節點，故其行為較偏向**追隨**
- q_0 是主觀設定值，調整它可決定探索或追隨的**偏向程度**。但是，在ACS執行時， q_0 值會維持不變。



變更「整體更新法」

- **AS**在進行費洛蒙更新時，係以每隻螞蟻的表現進行更新，如slide 19所示。費洛蒙濃度更新計算式中，考量了所有螞蟻於完成路徑找尋後，在某線段(i, j)遺留費洛蒙量的加總值。
- **ACS**則只有表現最好的那一隻螞蟻才有遺留費洛蒙的權力。經實驗證明，只在最好的解上增加費洛蒙的設計，確實有助於螞蟻盡快搜尋到最佳解
- **ACS**的更新方式為

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}$$

■ 其中：若線段 $(i, j) \in$ 最佳路徑 T^+ ，則 $\Delta\tau_{ij} = Q/L^+$ ；否則 $\Delta\tau_{ij} = 0$



加入「局部更新法」

- **ACS**在當每一隻螞蟻選擇完下一節點時，即對先前拜訪過的所有路徑片段作一次費洛蒙更新，以使各路徑費洛蒙值不致過高，導致收斂在局部解。其更新方式如下

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho)\tau_{ij}(t) + \tau_0$$

- τ_0 為起始費洛蒙濃度，通常設為 $\tau_0 = (NL_{nn})^{-1}$ ， N 為線段總數， L_{nn} 為貪心解法所求得總距離
- 此時，當螞蟻選擇完下一節點後， t 就加1，與整體更新法中的 t 意義不同!!

- 區域更新法使拜訪過之路段的費洛蒙減少，因此拜訪過的路徑對螞蟻的吸引力愈來愈小，故可誘導螞蟻偏向開發新路徑，而可避免螞蟻侷限在定義狹小範圍之內



1. 起始狀態及參數設定

- 含轉換規則參數(q_0)、費洛蒙起始值(τ^0)、費洛蒙衰退參數(ρ)、螞蟻隻數(S)、 α & β 值、及執行時間(t_{max})
- 一般而言, q_0 可設**0.9**或**0.8**;可令 $S = A$, α & β 用試誤法決定, 通常 β 值較大, 如設 $\alpha = 1$ 、 $\beta = 2$

2. 建構TSP路徑

- 將**S**隻螞蟻隨機放置在節點上, 每隻螞蟻即自該節點出發, 計算轉換規則, 以便選擇下一個到訪節點、逐步完成一趟完整的里程
- 轉換規則如**slide 44**所示



3. 局部更新費洛蒙濃度

- 每隻螞蟻每次做完選擇後，即對所有路徑作一次局部更新，更新幅度與目前這群螞蟻的表現及選擇結果無關，計算方式如**slide 47**所示

4. 整體更新費洛蒙濃度

- 當所有螞蟻均完成旅程後，便執行「整體更新法」進一步強化目前最佳路徑之費洛蒙濃度，計算方式如**slide 46**所示
- 須強調的是，目前最佳路徑未必是目前這群螞蟻所找到的，可能是先前螞蟻的搜尋成果



5. 更新最佳路徑

- 若 $\min \{L_s\} < L^+$, 則令 $L^+ = L_s$, $T^+ = T_s$; 更新時間: $t = t + 1$, 其中 L^+ 為目前最佳路徑總長, T^+ 為目前最佳路徑

6. 測試停止條件

- **AS** 的停止條件一般設定為時間到達時間上限時(t_{\max})停止, 即 $t \geq t_{\max}$; 此時, T^+ 為找到的最佳路徑, L^+ 為其總長度; 否則, 回到 **Step 2**

