一种解法的证明

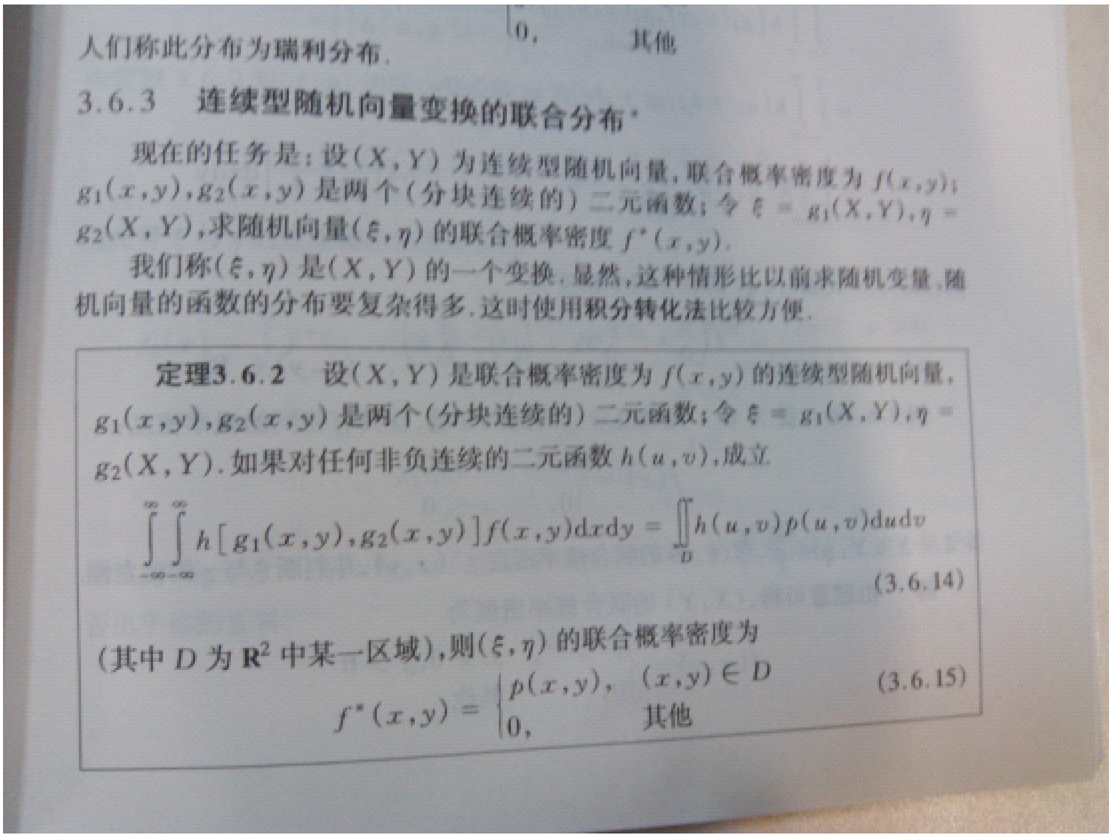
题目和解法在这里 http://ngloom.me/2011/10/17/rand_points_in_circle/
这里证明第四种解法。

证明：令 $R=r^2$，则 R 在[0,1]上是均匀分布；θ 在[0, 360]是均匀分布，且 R 与 θ 相互独立。

$$x=r\bullet\cos\theta=\sqrt{R}\bullet\cos\theta$$
$$y=r\bullet\sin\theta=\sqrt{R}\bullet\sin\theta$$

我们的目标是证明（x, y）是均匀分布。由对称性，只需证明（x, y）在 x>0,y>0 时（即单位圆的第一象限）为均匀分布即可。也即需要证明（x, y)的联合概率密度 $f(x,y)=\dfrac{1}{S}=\dfrac{1}{PI/4}$，(其中 S 是单位圆在第一象限的面积)。

现在，我们将问题限定在第一象限 x>0,y>0 时，也即 R 在（0,1），θ 在（0，PI/2）上的情况。
先引入一个公式。（概率论与数理统计 齐民友 高等教育出版社 第 103 页 定理 3.6.2）



人们称此分布为瑞利分布.

3.6.3 连续型随机向量变换的联合分布*

现在的任务是：设 (X,Y) 为连续型随机向量，联合概率密度为 $f(x,y)$；$g_1(x,y), g_2(x,y)$ 是两个（分块连续的）二元函数；令 $\xi=g_1(X,Y), \eta=g_2(X,Y)$，求随机向量 (ξ,η) 的联合概率密度 $f^*(x,y)$.

我们称 (ξ,η) 是 (X,Y) 的一个变换. 显然，这种情形比以前求随机变量、随机向量的函数的分布要复杂得多. 这时使用积分转化法比较方便.

定理3.6.2 设 (X,Y) 是联合概率密度为 $f(x,y)$ 的连续型随机向量，$g_1(x,y), g_2(x,y)$ 是两个（分块连续的）二元函数；令 $\xi=g_1(X,Y), \eta=g_2(X,Y)$. 如果对任何非负连续的二元函数 $h(u,v)$，成立

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h[g_1(x,y),g_2(x,y)]f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D h(u,v)p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad (3.6.14)$$

（其中 D 为 $\mathbf{R}^2$ 中某一区域），则 (ξ,η) 的联合概率密度为

$$f^*(x,y)=\begin{cases}p(x,y), & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \quad (3.6.15)$$

现在我们使用定理 3.6.2 进行证明。设 $g(R,\theta)$ 为 R 与 θ 的联合概率密度。

$$\iint h[\sqrt{R}\bullet\cos\theta,\sqrt{R}\bullet\sin\theta]\bullet g(R,\theta)\,dRd\theta$$
$$=\iint h[r\bullet\cos\theta,r\bullet\sin\theta]\bullet g(r^2,\theta)d(r^2)d\theta$$
$$=\iint h[r\bullet\cos\theta,r\bullet\sin\theta]\bullet g(r^2,\theta)\bullet 2rdrd\theta$$
$$=2\iint h[r\bullet\cos\theta,r\bullet\sin\theta]\bullet g(r^2,\theta)\bullet rdrd\theta$$
$$=\iint h[x,y]\bullet 2g(x^2+y^2,\arctan\frac{y}{x})\bullet dxdy(\because dxdy=rdrd\theta)$$

由定理 3.6.2 知

（x, y）的联合概率密度 $f(x,y)=2g(x^2+y^2,\arctan\frac{y}{x})$

因为 $g(R,\theta)$ 为 R 与 θ 的联合概率密度，且 R 与 θ 相互独立，所以

$g(R,\theta)=g_R(R)\bullet g_\theta(\theta)$，其中 $g_R(R)$ 和 $g_\theta(\theta)$ 分别为 R 和 θ 的概率密度函数。

由 R 在（0,1），θ 在（0，PI/2）上是均匀分布可知：

$$g_R(R)=1$$
$$g_\theta(\theta)=\frac{1}{PI/2}$$

所以，$g(R,\theta)=g_R(R)\bullet g_\theta(\theta)=\dfrac{1}{PI/2}$

所以，$f(x,y)=2g(x^2+y^2,\arctan\dfrac{y}{x})=2\times\dfrac{1}{PI/2}=\dfrac{1}{PI/4}$

因此，（x,y）在单位圆第一象限内是均匀分布。

由对称性知，（x,y）在单位圆上是均匀分布。