AI从入门到放弃：BP神经网络算法推导及代码实现笔记

Author：拉轰的二哈 Date：2018.06.08

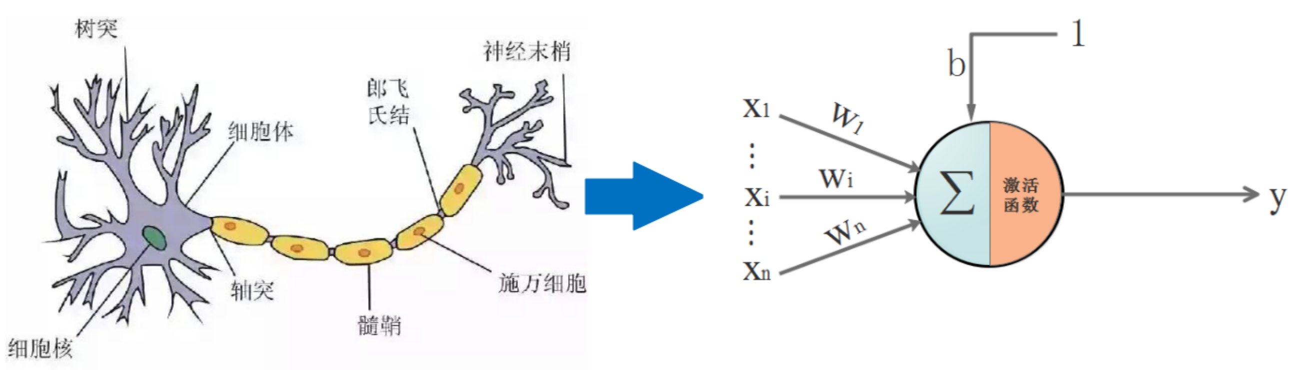
一. 前言：

- 作为AI入门小白，参考了一些文章，想记点笔记加深印象，发出来是给有需求的童鞋学习共勉，大神轻拍！
- 【毒鸡汤】：算法这东西，读完之后的状态多半是 --> **“我是谁，我在哪？”** 没事的，吭哧吭哧学总能学会，毕竟还有千千万万个算法等着你。

- 本文货很干，堪比沙哈拉大沙漠，自己挑的文章，含着泪也要读完！

二. 科普：

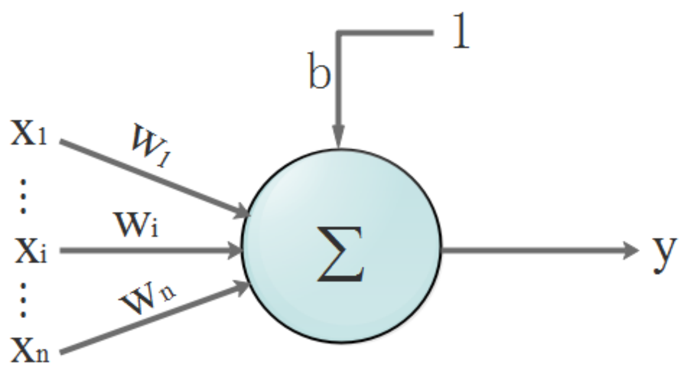
- 生物上的神经元就是接收四面八方的刺激（输入），然后做出反应（输出），给它一点☀️就灿烂。
- 仿生嘛，于是喜欢放飞自我的 [某些人](#) 就提出了人工神经网络。一切的基础-->人工神经单元，看图：



三. 通往沙漠的入口: 神经元是什么，有什么用:

> 开始前，需要搞清楚一个很重要的问题：人工神经网络里的神经元是什么，有什么用。只有弄清楚这个问题，你才知道你在哪里，在做什么，要往哪里去。

首先，回顾一下神经元的结构，看下图, 我们先忽略激活函数不管：



- 输入：

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad (3.1)$$

- 输出：

$$y \qquad (3.2)$$

- 输入和输出的关系（函数）：

$$\begin{aligned} y &= (x_i * w_1 + x_2 * w_2 + \ldots + x_n * w_n) + b \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i * w_i + b \qquad (3.3) \\ &\text{其中，} w_i,\ i = 1,\ n\text{为权重（}weight\text{），待会就知道这货是什么了} \end{aligned}$$

没错，开始晒公式了！我们的数据都是离散的，为了看得更清楚点，所以换个表达方式，把离散的数据写成向量。该不会忘了向量是啥吧？回头致电问候一下当年的体育老师！

- 改写输入：

$$\begin{aligned} x &= [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \qquad (3.4) \\ &\text{加}T\text{转置后，}x\text{相当于一个}n\text{行1列的矩阵} \end{aligned}$$

- 改写权重:

$$w = [w_1, w_2, \ldots, w_n] \qquad (3.5)$$

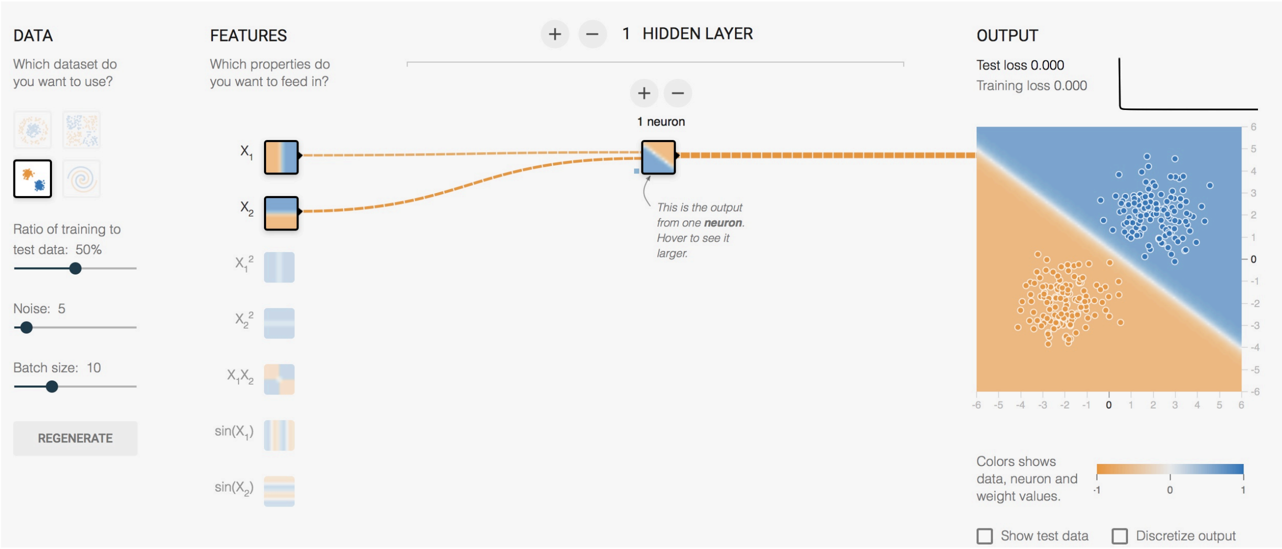
- 那么输出就写成了：

$$\begin{aligned} y &= [w_1, w_2, \ldots, w_n] \bullet [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T + b \\ &= wx + b \\ &\text{这是什么，我们换个字母，把 } w \text{ 换成 } k\text{，可以看到 } w \text{ 就是直线的斜率啊啊啊：} \\ &= kx + b \qquad (3.6) \end{aligned}$$

> 现在回答问题刚才的问题：

- 一个神经元是什么：参照式（1.6），从函数图像角度看，这就是一根直线。
- 一个神经元有什么用：要说明用途就要给出一个应用场景：分类。一个神经元就是一条直线，相当于楚河汉界，可以把红棋绿棋分隔开，此时它就是个分类器。所以，在线性场景下，单个神经元能达到分类的作用，它总能学习到一条合适的直线，将两类元素区分出来。

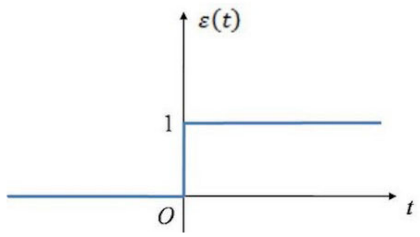
先睹为快，看效果图，自己可以去玩：[传送门]

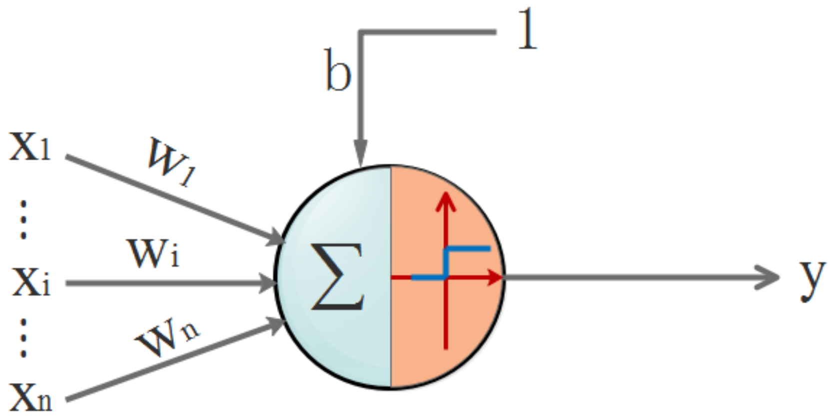


对上面的图简单说明一下：

- (x1,x2) 对于神经元的输入都是 x, 而对我们而言，这数据就是意义上的点的坐标，我们习惯写成 (x,y)。

> 又要划重点了：
>
> 
>
>
> 我们需要对神经元的输出做判定，那么就需要有判定规则，通过判定规则后我们才能拿到我们想要的结果，这个规则就是：
>
> 1. 假设，0代表红点，1代表蓝点（这些数据都是事先标定好的，在监督学习下，神经元会知道点是什么颜色并以这个已知结果作为标杆进行学习）
> 2. 当神经元输出小于等于 0 时，最终结果输出为 0，这是个红点
> 3. 当神经元输出大于 1 时，最终结果输出为 1，这是个蓝点
>
> 上面提到的规则让我闻到了激活函数的味道！（这里只是线性场景，虽然不合适，但是简单起见，使用了单位阶跃函数来描述激活函数的功能）当 x<=0 时，y = 0; 当 x > 0 时，y = 1
>
> 这是阶跃函数的长相：



> 此时神经元的长相:
>
> 
>

四. 茫茫大漠第一步: 激活函数是什么，有什么用

从上面的例子，其实已经说明了激活函数的作用；但是，我们通常面临的问题，不是简单的线性问题，不能用单位阶跃函数作为激活函数，原因是:

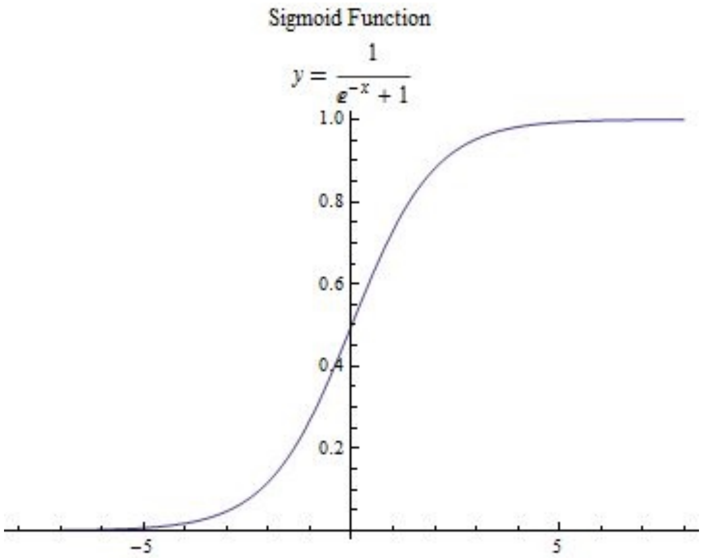
> 阶跃函数在x=0时不连续，即不可导，在非0处导数为0。用人话说就是它具备输出限定在[0-1]，但是它不具备丝滑的特性，这个特性很重要。并且在非0处导数为0，也就是硬饱和，压根儿就没梯度可言，梯度也很重要，梯度意味着在神经元传播间是有反应的，而不是"死"了的。

接下来说明下，激活函数所具备的特性有什么，只挑重要的几点特性讲:

- [x] **非线性:** 即导数不是常数,不然就退化成直线。对于一些画一条直线仍然无法分开的问题，非线性可以把直线掰弯，自从变弯以后，就能包罗万象了。
- [x] **几乎处处可导:** 也就是具备"丝滑的特性"，不要应激过度，要做正常人。数学上，处处可导为后面降到的后向传播算法（BP算法）提供了核心条件
- [x] **输出范围有限:** 一般是限定在[0,1]，有限的输出范围使得神经元对于一些比较大的输入也会比较稳定。
- [x] **非饱和性:** 饱和就是指，当输入比较大的时候，输出几乎没变化了，那么会导致梯度消失！什么是梯度消失：就是你天天给女生送花，一开始妹纸还惊喜，到后来直接麻木没反应了。梯度消失带来的负面影响就是会限制了神经网络表达能力，词穷的感觉你有过么。sigmod，tanh函数都是软饱和的，阶跃函数是硬饱和。软是指输入趋于无穷大的时候输出无限接近上线，硬是指像阶跃函数那样，输入非0输出就已经始终都是上限值。数学表示我就懒得写了，传送门在此,里面有写到。如果激活函数是饱和的，带来的缺陷就是系统迭代更新变慢，系统收敛就慢，当然这是可以有办法弥补的，一种方法是使用交叉熵函数作为损失函数，这里不多说。ReLU是非饱和的，亲测效果挺不错，所以这货最近挺火的。
- [x] **单调性:** 即导数符号不变。导出要么一直大于0，要么一直小于0，不要上蹿下跳。导数符号不变，让神经网络训练容易收敛。

> 这里只说我们用到的激活函数:

$$Sigmoid函数： \quad y = \frac{1}{e^{-x}+1} \qquad (4.1)$$



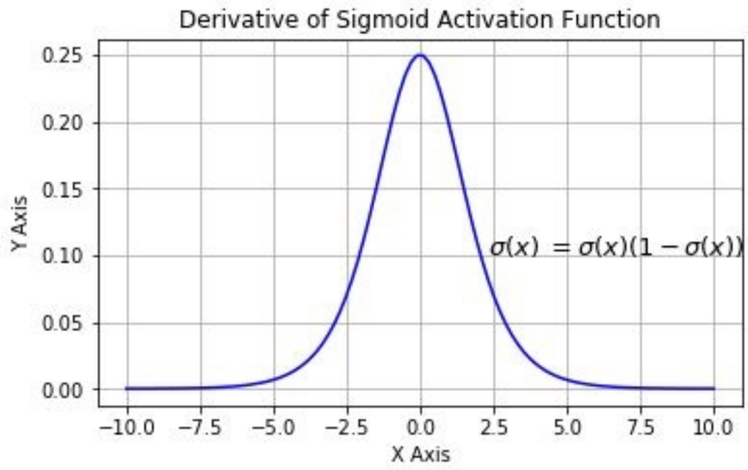
求一下它的导数把，因为后面讲bp算法会直接套用它：
先祭出大杀器，高中数学之复合函数求导法则：

$$法则1： \quad [u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x) \qquad (4.2)$$
$$法则2： \quad [u(x) * v(x)]' = u'(x) * v(x) + u(x) * v'(x) \qquad (4.3)$$
$$法则3： \quad (\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad (4.4)$$

开始算算：

$$\begin{aligned}
y' &= (\frac{1}{e^{-x}+1})' \\
&= (\frac{u}{v})' \qquad (这里定：u = 1, v = e^{-x}+1) \\
&= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
&= \frac{1' * (e^{-x}+1) - 1 * (e^{-x}+1)'}{(e^{-x}+1)^2} \\
& (1是常数，导数是0; 法则1：(e^{-x}+1)' = (e^{-x})' + 1' = (e^{-x})'_{复合函数求导} = -e^{-x}) \\
&= \frac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2} \\
&= \frac{1}{1+e^{-x}} * \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \\
&= \frac{1}{1+e^{-x}} * \frac{1+e^{-x}-1}{1+e^{-x}} \\
&= \frac{1}{1+e^{-x}} * (1 - \frac{1}{1+e^{-x}}), 因为：\quad y = \frac{1}{e^{-x}+1} \ ，所以有： \\
&= y * (1-y) \quad (4.5)
\end{aligned}$$

它的导数图像：



五. 沙漠中心的风暴：BP(Back Propagation)算法

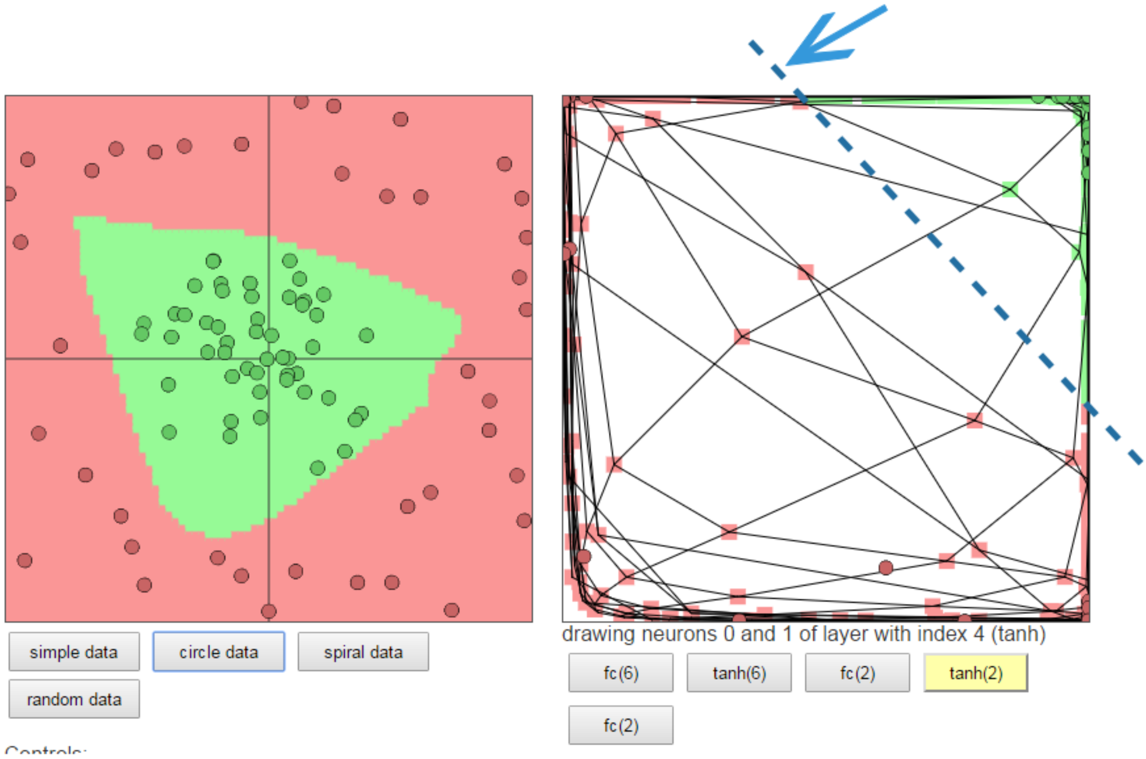
1. 神经网络的结构

经过上面的介绍，单个神经元不足以让人心动，唯有组成网络。神经网络是一种分层结构，一般由输入曾，隐藏层，输出层组成。所以神经网络至少有3层，隐藏层多于1，总层数大于3的就是我们所说的深度学习了。

- 输入层：就是接收原始数据，然后往隐层送
- 输出层：神经网络的决策输出
- 隐藏层：该层可以说是神经网络的关键，相当于对数据做一次特征提取。隐藏层的意义，是把前一层的向量变成新的向量。就是坐标变换，说人话就是把数据做平移，旋转，伸缩，扭曲，让数据变得线性可分。可能这个不那么好理解，举个栗子：
  下面的图左侧是原始数据，中间很多绿点，外围是很多红点，如果你是神经网络，你会怎么做呢？
  一种做法：把左图的平面看成一块布，把它缝合成一个闭合的包包（相当于数据变换到了一个3维坐标空间），然后把有绿色点的部分撸到顶部（伸缩和扭曲），然后外围的红色点自然在另一端了，要是姿势还不够帅，就挪挪位置（平移）。这时候干脆利落的砍一刀，绿点红点就彻底区分开了。

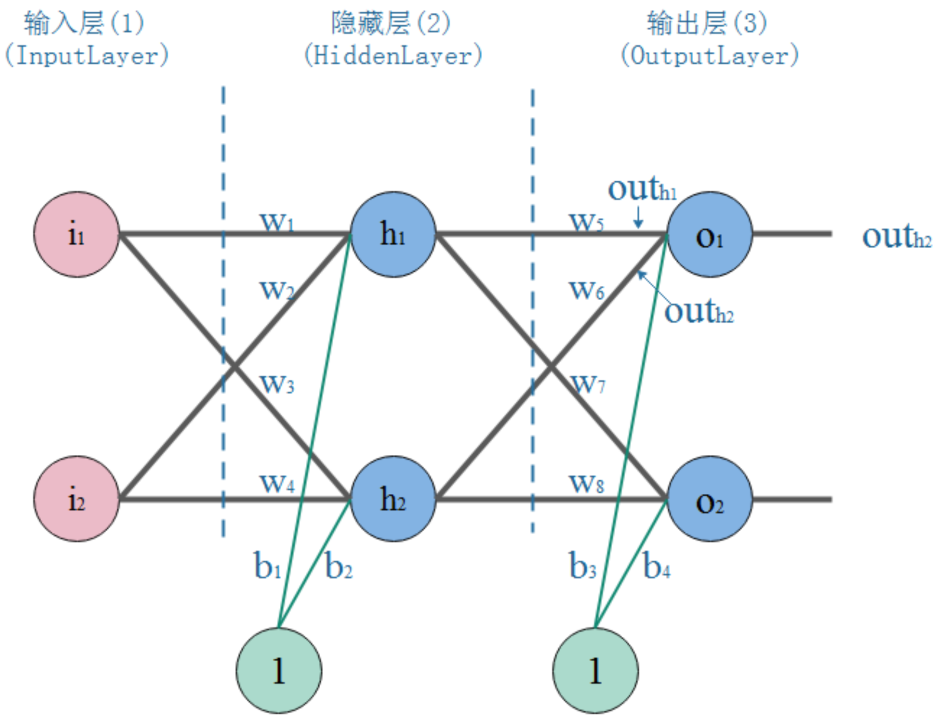
  > **重要的东西再说一遍：神经网络换着坐标空间玩数据，根据需要，可降维，可升维，可大，可小，可圆可扁，就是这么“无敌”**

  这个也可以自己去玩玩，直观的感受一下：传送门



2.正反向传播过程

看图，这是一个典型的三层神经网络结构，第一层是输入层，第二层是隐藏层，第三层是输出层。PS:不同的应用场景，神经网络的结构要有针对性的设计，这里仅仅是为了推导算法和计算方便才采用这个简单的结构



我们以战士打靶，目标是训练战士能命中靶心成为神枪手作为场景：
那么我们手里有这样一些数据：一堆枪摆放的位置(x,y)，以及射击结果，命中靶心和不命中靶心。
我们的目标是：训练出一个神经网络模型，输入一个点的坐标（射击姿势），它就告诉你这个点是什么结果（是否命中）。

我们的方法是：训练一个能根据误差不断自我调整的模型，训练模型的步骤是：

- 正向传播：把点的坐标数据输入神经网络，然后开始一层一层的传播下去，直到输出层输出结果。
- 反向传播(BP)：就好比战士去靶场打靶，枪的摆放位置（输入），和靶心🎯（期望的输出）是已知。战士（神经网络）一开始的时候是这样做的，随便开一枪（w，b参数初始化称随机值），观察结果（这时候相当于进行了一次正向传播）。然后发现，偏离靶心左边，应该往右点儿打。所以战士开始根据偏离靶心的距离（误差，也称损失）调整了射击方向往右一点（这时，完成了一次反向传播）
- 当完成了一次正反向传播，也就完成了一次神经网络的训练迭代，反复调整射击角度（反复迭代），误差越来越小，战士打得越来越准，神枪手模型也就诞生了。

3.BP算法推导和计算

- 参数初始化：

$$\begin{aligned}
&\text{输入：}\quad i_1=0.1,\ i_2=0.2\\
&\text{输出：}\quad O_1=0.01,\ O_2=0.99\text{，相当于标定了}\\
&\text{权重：}\quad w_1=0.1,\ w_2=0.2,\ w_3=0.3,\ w_4=0.4\\
&\qquad\quad\ \ w_5=0.5,\ w_6=0.6,\ w_7=0.7,\ w_8=0.8\\
&\text{偏置：}\quad b_1=0.55,\ b_2=0.56,\ b_3=0.66,\ b_4=0.67
\end{aligned}$$

- 正向传播：

1.输入层-->隐层：

  - 计算隐层神经元 h1 的输入加权和:

$$\begin{aligned}
in_{h_1} &= w_1 * i_1 + w_2 * i_2 + 1 * b_1 \qquad (5.1)\\
&= 0.1 * 0.1 + 0.2 * 0.2 + 1 * 0.55\\
&= 0.6
\end{aligned}$$

  - 计算隐层神经元 h1 的输出,需要通过激活函数Sigmoid，记得吧？：

$$\begin{aligned}
out_{h_1} &= \frac{1}{e^{-in_{h_1}}+1} \qquad (5.2)\\
&= \frac{1}{e^{-0.6}+1}\\
&= 0.6456563062
\end{aligned}$$

  - 同理，可以算出隐层神经元 h2 的输出：

$$out_{h_2} = 0.6592603884$$

2.隐层-->输出层：

  - 计算输出层神经元O1的输入加权和：

$$\begin{aligned}
in_{O_1} &= w_5 * out_{h_1} + w_6 * out_{h_2} + 1 * b_3 \qquad (5.3)\\
&= 0.5 * 0.6456563062 + 0.6 * 0.6592603884 + 1 * 0.66\\
&= 1.3783843861
\end{aligned}$$

  - 计算隐层神经元O1的输出:

$$
\begin{aligned}
out_{O_1} &= \frac{1}{e^{-in_{O_1}}+1} \qquad (5.4)\\
&= \frac{1}{e^{-1.3783843861}+1}\\
&= 0.7987314002
\end{aligned}
$$

- 同理，可以算出隐层神经元O2的输出：

$$out_{O_2} = 0.8374488853$$

正向传播结束，我们看看输出层的输出结果：[0.7987314002, 0.8374488853]，但是我们希望它能输出[0.01, 0.99]，所以明显的差太远了，这个时候我们就需要利用反向传播，更新权值w，然后重新计算输出

- 反向传播：

1.计算输出误差：

$$
\begin{aligned}
E_{total} &= \sum_{i=1}^{2} E_{out_{O_i}} \qquad (5.5)\\
&= E_{out_{O_1}} + E_{out_{O_2}}\\
&= \frac{1}{2}\left(expected_{out_1} - out_{O_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(expected_{out_2} - out_{O_2}\right)^2\\
&= \frac{1}{2}\left(O_1 - out_{O_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(O_2 - out_{O_2}\right)^2\\
&= \frac{1}{2} * \left(0.01 - 0.7987314002\right)^2 + \frac{1}{2} * \left(0.99 - 0.8374488853\right)^2\\
&= 0.0116359213 + 0.3110486109\\
&= 0.3226845322\\
&\text{其中}: E_{out_{O_1}} = 0.0116359213, E_{out_{O_2}} = 0.3110486109
\end{aligned}
$$

> PS: 这里我要说的是，用这个作为误差的计算，因为它简单，实际上用的时候效果不咋滴。【原因上文我提过了】：我在第四章节说激活函数作用时，提到激活函数应具备“非饱和性”。如果激活函数是饱和的，带来的缺陷就是系统迭代更新变慢，系统收敛就慢，当然这是可以有办法弥补的，一种方法是使用交叉熵函数作为损失函数。
>
> 交叉熵做为代价函数能达到上面说的优化系统收敛下欧工，是因为它在计算误差对输入的梯度时，抵消掉了激活函数的导数项，从而避免了因为激活函数的“饱和性”给系统带来的负面影响。如果项了解更详细的证明可以点 --> 传送门
>
> $$E_{total} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(O \cdot log\ out_O + (1-O)\cdot log(1-out_O))$$
>
> 对输出的偏导数：
>
> $$\frac{\partial E_{total}}{\partial out_O} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\frac{O}{out_O} - \frac{1-O}{1-out_O})$$

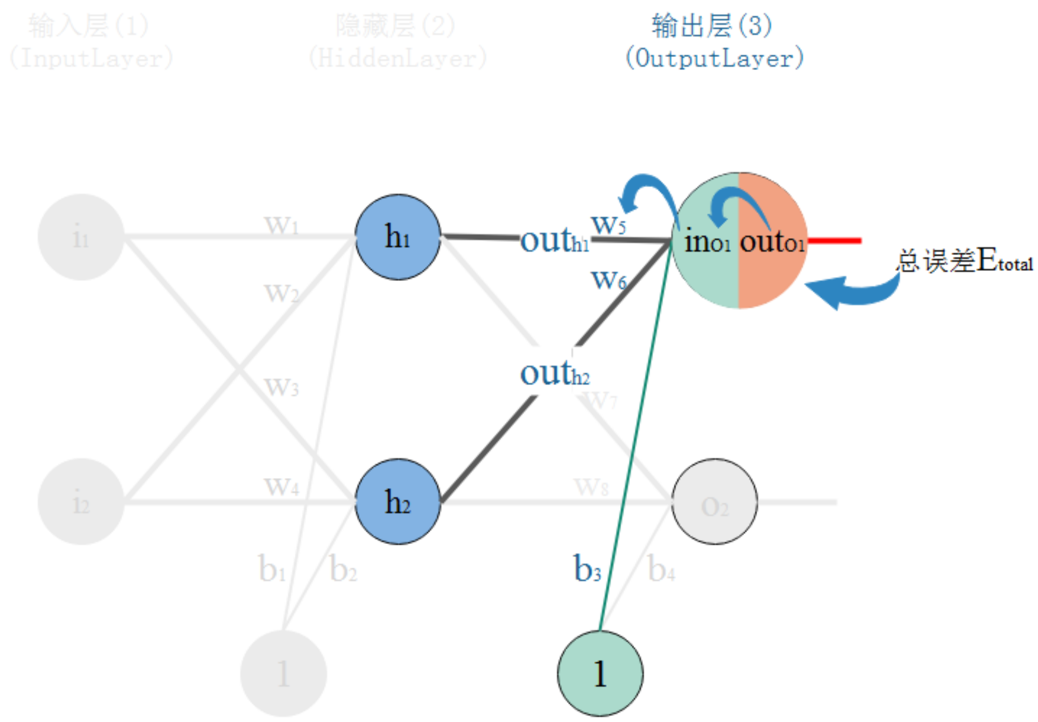
2.隐层-->输出层的权值及偏置**b**的更新：

- 先放出链式求导法则：

$$
\begin{aligned}
&\text{假设}y\text{是}u\text{的函数，而}u\text{是}x\text{的函数：}\ y=f(u),\ u=g(x)\\
&\text{那么对应的复合函数就是：}y=f(g(x))\\
&\text{那么}y\text{对}x\text{的导数则有：}\ \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}
\end{aligned}
$$

- 以更新**w5**举例：
  我们知道，权重w的大小能直接影响输出，w不合适那么会使得输出误差。要想直到某一个w值对误差影响的程度，可以用误差对该w的变化率来表达。如果w的一点点变动，就会导致误差增大很多，说明这个w对误差影响的程度就更大，也就是说，误差对该w的变化率越高。而误差对w的变化率就是误差对w的偏导。

  所以，看下图，总误差的大小首先受输出层神经元O1的输出影响，继续反推，O1的输出受它自己的输入的影响，而它自己的输入会受到w5的影响。这就是连锁反应，从结果找根因。



那么，根据链式法则则有：

$$
\frac{\partial E_{total}}{\partial w_5}=\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{O_1}}\cdot\frac{\partial out_{O_1}}{\partial in_{O_1}}\cdot\frac{\partial in_{O_1}}{\partial w_5} \qquad (5.6)
$$

现在挨个计算：

> $$
> \begin{aligned}
> &\text{因为：}E_{total}=\frac{1}{2}\left(O_1-out_{O_1}\right)^2+\frac{1}{2}\left(O_2-out_{O_2}\right)^2\\
> &\text{则有：}\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{O_1}}=\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(O_1-out_{O_1}\right)^2+\frac{1}{2}\left(O_2-out_{O_2}\right)^2\right)}{\partial out_{O_1}} \qquad (5.7)\\
> &=2*\frac{1}{2}\left(O_1-out_{O_1}\right)^{2-1}*(0-1)+0\\
> &=-\left(O_1-out_{O_1}\right) \qquad (5.8)\\
> &=-(0.01-0.7987314002)\\
> &=0.7887314002
> \end{aligned}
> $$

激活函数的导数看公式（4.5）：

$$out_{O_1} = \frac{1}{e^{-in_{O_1}} + 1} \qquad (5.8)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial out_{O_1}}{\partial in_{O_1}} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{e^{-in_{O_1}}+1}\right)}{\partial in_{O_1}} \\ &= out_{O_1}\left(1 - out_{O_1}\right) \qquad (5.9) \\ &= 0.7987314002 * \left(1 - 0.7987314002\right) \\ &= 0.1607595505\end{aligned}$$

$$in_{O_1} = w_5 * out_{h_1} + w_6 * out_{h_2} + 1 * b_3 \qquad (5.10)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial in_{O_1}}{\partial w_5} &= \frac{\partial\left(w_5 * out_{h_1} + w_6 * out_{h_2} + 1 * b_3\right)}{\partial w_5} \qquad (5.11) \\ &= 1 * w_5^{(1-1)} * out_{h_1} + 0 + 0 \\ &= out_{h_1} \\ &= 0.6456563062\end{aligned}$$

所以：

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{total}}{\partial w_5} &= \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{O_1}} \cdot \frac{\partial out_{O_1}}{\partial in_{O_1}} \cdot \frac{\partial in_{O_1}}{\partial w_5} \qquad (5.12) \\ &= 0.7887314002 * 0.1607595505 * 0.6456563062 \\ &= 0.0818667051\end{aligned}$$

我们归纳一下式子：

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{total}}{\partial w_5} &= \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{O_1}} \cdot \frac{\partial out_{O_1}}{\partial in_{O_1}} \cdot \frac{\partial in_{O_1}}{\partial w_5} \\ &= -(O_1 - out_{O_1}) \cdot out_{O_1} \cdot (1 - out_{O_1}) \cdot out_{h_1} \qquad (5.13) \\ &= \sigma_{O_1} \cdot out_{h_1} \\ &\text{其中，} \sigma_{O_1} = -(O_1 - out_{O_1}) \cdot out_{O_1} \cdot (1 - out_{O_1})\end{aligned}$$

同理，更新输出层偏置b如下：

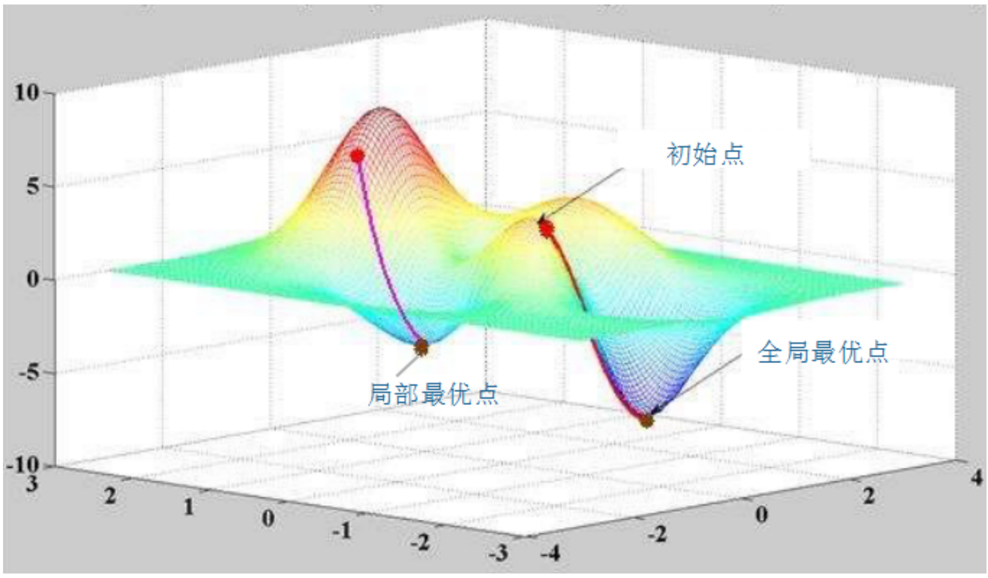
$$in_{O_1} = w_5 * out_{h_1} + w_6 * out_{h_2} + 1 * b_3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial in_{O_1}}{\partial b_3} &= \frac{\partial\left(w_5 * out_{h_1} + w_6 * out_{h_2} + 1 * b_3\right)}{\partial b_3} \qquad (5.14) \\ &= 0 + 0 + b_3^{(1-1)} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{total}}{\partial b_3} &= \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{O_1}} \cdot \frac{\partial out_{O_1}}{\partial in_{O_1}} \cdot \frac{\partial in_{O_1}}{\partial b_3} \\ &= -(O_1 - out_{O_1}) \cdot out_{O_1} \cdot (1 - out_{O_1}) \cdot 1 \qquad (5.15) \\ &= \sigma_{O_1} \\ &\text{其中，} \sigma_{O_1} = -(O_1 - out_{O_1}) \cdot out_{O_1} \cdot (1 - out_{O_1})\end{aligned}$$

有个学习率的东西，学习率取个0.5。关于学习率，不能过高也不能过低。因为训练神经网络系统的过程，就是通过不断的迭代，找到让系统输出误差最小的参数的过程。每一次迭代都经过反向传播进行梯度下降，然而误差空间不是一个滑梯，一降到底，常规情况下就像坑洼的山地。学习率太小，那就很容易陷入局部最优，就是你认为的最低点并不是整个空间的最低点。如果学习率太高，那系统可能难以收敛，会在一个地方上串下跳，无法对准目标（目标是指误差空间的最低点），可以看图：

xy轴是权值w平面，z轴是输出总误差。整个误差曲面可以看到两个明显的低点，显然右边最低，属于全局最优。而左边的是次低，从局部范围看，属于局部最优。而图中，在给定初始点的情况下，标出的两条抵达低点的路线，已经是很理想情况的梯度下降路径。



现在可以更新w5的值了,就设定学习率为0.5吧：

$$
\begin{aligned}
w_5^+ &= w_5 - \alpha \cdot \frac{\partial E_{total}}{\partial w_5} \qquad (5.16) \\
&= 0.5 - 0.5 * 0.0818667051 \\
&= 0.45906664745
\end{aligned}
$$

归纳一下输出层w更新的公式：

$$
\begin{aligned}
w_O^+ &= w_O - \alpha \cdot (-out_O \cdot (1 - out_O) \cdot (O - out_O) \cdot out_h) \\
&= w_O + \alpha \cdot (O - out_O) \cdot out_O \cdot (1 - out_O) \cdot out_h \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

同理可以计算出w6，w7，w8的更新值，懒癌晚期，懒得算了...

$$
\begin{aligned}
w_6^+ &= \ldots \\
w_7^+ &= \ldots \\
w_8^+ &= \ldots
\end{aligned}
$$

同理更新偏置b：

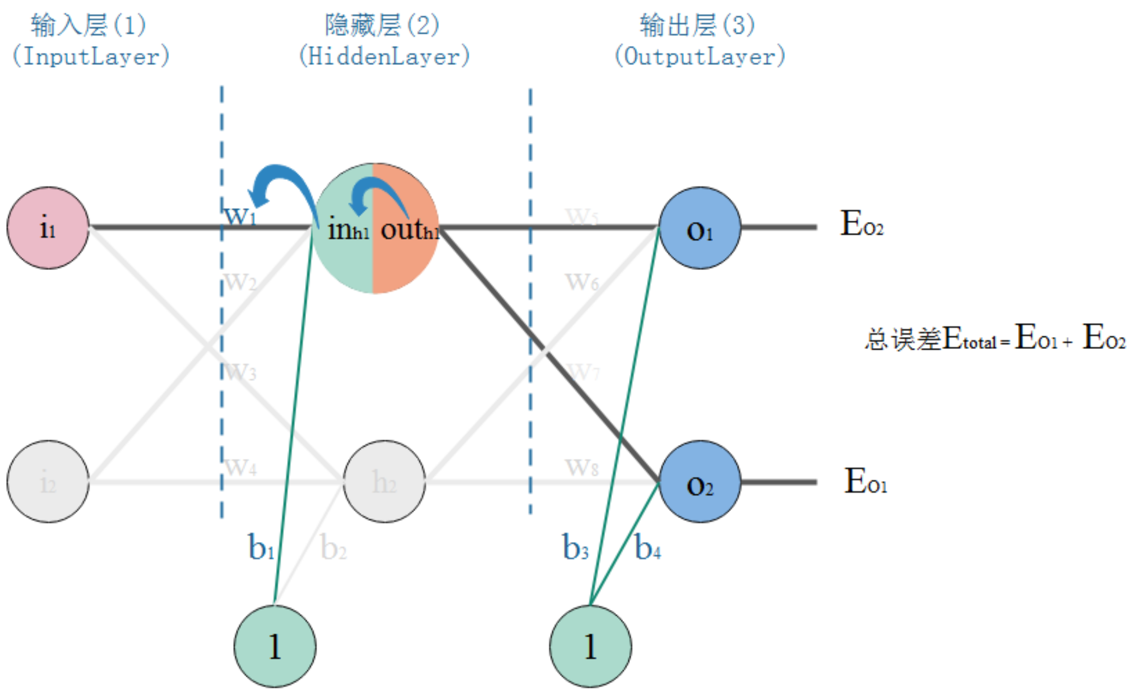
$$
b^+ = b_O - \alpha \cdot \frac{\partial E_{total}}{\partial b_O} \qquad (5.18)
$$

归纳一下输出层w更新的公式：

$$\begin{aligned} b_O^+ &= b_O - \alpha \cdot (-out_O \cdot (1 - out_O) \cdot (O - out_O)) \\ &= b_O + \alpha \cdot (O - out_O) \cdot out_O \cdot (1 - out_O) \qquad (5.19) \end{aligned}$$

3.输入层-->隐层的权值及偏置b更新：

- **以更新w1为例：**
  仔细观察，我们在求w5的更新，误差反向传递路径输出层-->隐层，即out(O1)-->in(O1)-->w5，总误差只有一根线能传回来。但是求w1时，误差反向传递路径是隐藏层-->输入层，但是隐藏层的神经元是有2根线的，所以总误差沿着2个路径回来，也就是说，计算偏导时，要分开来算。看图：



那么，现在开始算总误差对w1的偏导：

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial w_1} = \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h_1}} \cdot \frac{\partial out_{h_1}}{\partial in_{h_1}} \cdot \frac{\partial in_{h_1}}{\partial w_1} \qquad (5.20)$$

$$= \left(\frac{\partial E_{O_1}}{\partial out_{h_1}} + \frac{\partial E_{O_2}}{\partial out_{h_1}}\right) \cdot \frac{\partial out_{h_1}}{\partial in_{h_1}} \cdot \frac{\partial in_{h_1}}{\partial w_1} \qquad (5.21)$$

> **3.1现在先算：**
>
> $$\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h_1}}$$
>
> ---
>
> > 也就是：
> >
> > $$\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h_1}} = \frac{\partial E_{O_1}}{\partial out_{h_1}} + \frac{\partial E_{O_2}}{\partial out_{h_1}} \qquad (5.22)$$
>
> > 挨个算：
> >
> > ---
> >
> > > $$\frac{\partial E_{O_1}}{\partial out_{h_1}} = \frac{\partial E_{O_1}}{\partial in_{O_1}} \cdot \frac{\partial in_{O_1}}{\partial out_{h_1}} \qquad (5.23)$$
> >
> > ---

- 计算左边部分，参考式子(5.7), (5.8), (5.9)：

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{O_1}}{\partial in_{O_1}} &= \frac{\partial E_{O_1}}{\partial out_{O_1}} \cdot \frac{\partial out_{O_1}}{\partial in_{O_1}} \qquad (5.24)\\ &= \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\left(O_1 - out_{O_1}\right)^2\right)}{\partial out_{O_1}} \cdot \frac{\partial out_{O_1}}{\partial in_{O_1}}\\ &= -\left(O_1 - out_{O_1}\right) \cdot \frac{\partial out_{O_1}}{\partial in_{O_1}}\\ &= 0.7987314002 * 0.1607595505\\ &= 0.1284037009\end{aligned}$$

- 计算右边部分：

$$in_{O_1} = w_5 * out_{h_1} + w_6 * out_{h_2} + 1 * b_3$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial in_{O_1}}{\partial out_{h_1}} &= \frac{\partial(w_5 * out_{h_1} + w_6 * out_{h_2} + 1 * b_3)}{\partial out_{h_1}}\\ &= w_5 * out_{h_1}^{(1-1)} + 0 + 0\\ &= w_5 \qquad (5.25)\\ &= 0.5\end{aligned}$$

所以：

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{O_1}}{\partial out_{h_1}} &= \frac{\partial E_{O_1}}{\partial in_{O_1}} \cdot \frac{\partial in_{O_1}}{\partial out_{h_1}} \qquad (5.26)\\ &= 0.1284037009 * 0.5\\ &= 0.06420185045\end{aligned}$$

同理~同理~：

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{O_2}}{\partial out_{h_1}} &= \frac{\partial E_{O_2}}{\partial in_{O_2}} \cdot \frac{\partial in_{O_2}}{\partial out_{h_1}}\\ &= -\left(O_2 - out_{O_2}\right) \cdot \frac{\partial out_{O_2}}{\partial in_{O_2}} \cdot \frac{\partial in_{O_2}}{\partial out_{h_1}}\\ &= -\left(O_2 - out_{O_2}\right) \cdot out_{O_2}\left(1 - out_{O_2}\right) \cdot w_7 \qquad (5.27)\\ &= -(0.99 - 0.8374488853) * 0.8374488853 * (1 - 0.8374488853) * 0.7\\ &= -0.0145365614\end{aligned}$$

所以(3.19)的值为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h_1}} &= \frac{\partial E_{O_1}}{\partial out_{h_1}} + \frac{\partial E_{O_2}}{\partial out_{h_1}}\\ &= 0.06420185045 + (-0.0145365614)\\ &= 0.04966528905\end{aligned}$$

3.2 然后算：

$$\frac{\partial out_{h_1}}{\partial in_{h_1}}$$

$$\because \quad out_{h_1} = \frac{1}{e^{-in_{h_1}} + 1}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial out_{h_1}}{\partial in_{h_1}} = \frac{\partial \left(\frac{1}{e^{-in_{h_1}}+1} \right)}{\partial in_{h_1}}$$

$$= out_{h_1} \left(1 - out_{h_1} \right)$$

$$= 0.6456563062 * \left(1 - 0.6456563062 \right)$$

$$= 0.2287842405$$

3.3 最后算:

$$\frac{\partial in_{h_1}}{\partial w_1} = \frac{\partial(w_1 * i_1 + w_2 * i_2 + 1 * b)}{\partial w_1}$$

$$= w_1^{(1-1)} * i_1 + 0 + 0 = i_1 = 0.1$$

最后，将**3**者相乘，就算出:

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial w_1} = \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h_1}} \cdot \frac{\partial out_{h_1}}{\partial in_{h_1}} \cdot \frac{\partial in_{h_1}}{\partial w_1}$$

$$= 0.04966528905 * 0.2287842405 * 0.1$$

$$= 0.0011362635$$

我们归纳一下式子:

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial w_1} = \frac{\partial E_{total}}{\partial out_{h_1}} \cdot \frac{\partial out_{h_1}}{\partial in_{h_1}} \cdot \frac{\partial in_{h_1}}{\partial w_1}$$

$$= \left(\frac{\partial E_{O_1}}{\partial out_{h_1}} + \frac{\partial E_{O_2}}{\partial out_{h_1}}\right) \cdot \frac{\partial out_{h_1}}{\partial in_{h_1}} \cdot \frac{\partial in_{h_1}}{\partial w_1}$$

$$= \left(\sum_O \frac{\partial E_O}{\partial out_O} \cdot \frac{\partial out_O}{\partial in_O} \cdot \frac{\partial in_O}{\partial out_h}\right) \cdot \frac{\partial out_{h_1}}{\partial in_{h_1}} \cdot \frac{\partial in_{h_1}}{\partial w_1}$$

$$= \left(\sum_O \sigma_O w_O\right) \cdot out_{h_1}(1 - out_{h_1}) \cdot i_1 \qquad (5.28)$$

$$= \sigma_{h_1} \cdot i_1$$

其中，$\sigma_{h_1} = \left(\sum_O \sigma_O w_O\right) \cdot out_{h_1}(1 - out_{h_1})$

σ_O 看作输出层的误差量，然后该误差量和w相乘，相当于通过w以传播了过来；

如果是深层网络，隐藏层数量 > 1, 那么公式中的 σ_O 写成 σ_h ，w_O 写成 w_h

现在，可以更新**w1**的值了:

$$w_1^{+} = w_1 - \alpha \cdot \frac{\partial E_{total}}{\partial w_1} \qquad (5.29)$$

$$= 0.1 - 0.1 * 0.0011362635$$

$$= 0.0998863737$$

归纳一下，隐藏层w更新的公式:

$$w_h^+ = w_h - \alpha \cdot \frac{\partial E_{total}}{\partial w}$$
$$= w_h + \alpha \cdot (-\sum_O \sigma_O w_O) \cdot out_h(1 - out_h) \cdot i \qquad (5.30)$$

如果隐藏层数量 > 1:

$$w_h^+ = w_h - \alpha \cdot \frac{\partial E_{total}}{\partial w_h}$$
$$= w_h + \alpha \cdot (-\sum_{hh} \sigma_{hh} w_{hh}) \cdot out_h(1 - out_h) \cdot in_h \qquad (5.31)$$

hh代表当前隐藏层的下一个隐藏层，有点拗口；深层网络，计算的式子就是递归计算的了。

同理可以计算出w2，w3，w4的更新值，懒...

$$w_2^+ = \ldots$$
$$w_3^+ = \ldots$$
$$w_4^+ = \ldots$$

同理，隐藏层偏置b的更新:

$$\frac{\partial E_{total}}{\partial b_h} = (\sum_h \sigma_h w_h) \cdot out_h(1 - out_h) \qquad (5.32)$$

$$b_h^+ = b_h - \alpha \cdot \frac{\partial E_{total}}{\partial b_h}$$
$$= w_h + \alpha \cdot (-\sum_h \sigma_h w_h) \cdot out_h(1 - out_h) \qquad (5.33)$$

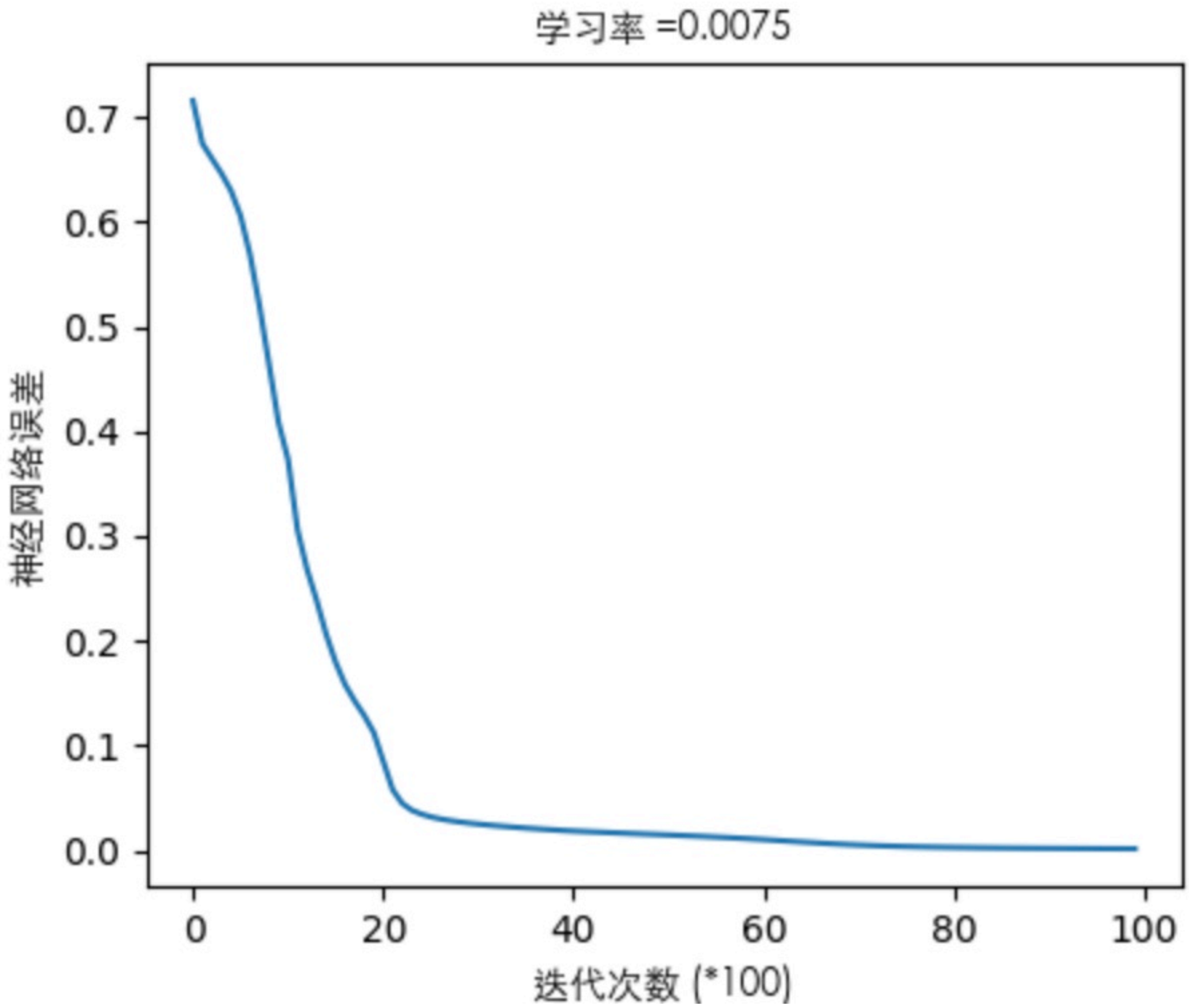
如果隐藏层数量 > 1:

$$b_h^+ = b_h - \alpha \cdot \frac{\partial E_{total}}{\partial b_h}$$
$$= b_h + \alpha \cdot (-\sum_{hh} \sigma_{hh} w_{hh}) \cdot out_h(1 - out_h) \qquad (5.34)$$

同上 hh 代表当前隐藏层的下一个隐藏层。

4.结论:

我们通过亲力亲为的计算，走过了正向传播，也体会了反向传播，完成了一次训练(迭代)。随着迭代加深，输出层的误差会越来越小，专业点说就是系统趋于收敛。来一张系统误差随迭代次数变化的图来表明我刚才说描述:



六. 沙漠的绿洲：代码实现

1. 代码代码!

> 其实已经有很多机器学习的框架可以很简单的实现神经网络。但是我们的目标是：在看懂算法之后，我们是否能照着算法的整个过程，去实现一遍，可以加深对算法原理的理解，以及对算法实现思路的的理解。顺便说打个call，numpy这个库，你值得拥有！

- 代码实现如下。代码里已经做了尽量啰嗦的注释，关键实现的地方对标了公式的编号，如果看的不明白的地方多回来啃一下算法推导。对应代码也传到了github上。
- 代码能自己定义神经网络的结构，支持深度网络。代码实现了对红蓝颜色的点做分类的模型训练，通过3层网络结构，改变隐藏层的神经元个数，通过图形显示隐藏层神经元数量对问题的解释能力。
- 代码中还实现了不同激活函数。隐藏层可以根据需要换着激活函数玩，输出层一般就用sigmoid，当然想换也随你喜欢~

```
#coding:utf-8
import h5py
import sklearn.datasets
import sklearn.linear_model
import matplotlib
import matplotlib.font_manager as fm
```

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

np.random.seed(1)

font = fm.FontProperties(fname='/System/Library/Fonts/STHeiti Light.ttc')
matplotlib.rcParams['figure.figsize'] = (10.0, 8.0)

def sigmoid(input_sum):
    """
    函数:
        激活函数Sigmoid
    输入:
        input_sum: 输入，即神经元的加权和
    返回:
        output: 激活后的输出
        input_sum: 把输入缓存起来返回
    """
    output = 1.0/(1+np.exp(-input_sum))
    return output, input_sum


def sigmoid_back_propagation(derror_wrt_output, input_sum):
    """
    函数:
        误差关于神经元输入的偏导: dE / dIn = dE/dOut * dOut/dIn  参照式（5.6)
        其中:  dOut/dIn 就是激活函数的导数 dy=y(1 - y)，见式（5.9)
               dE/dOut 误差对神经元输出的偏导，见式（5.8)
    输入:
        derror_wrt_output：误差关于神经元输出的偏导: dE/dy_j = 1/2(d(expect_to_output - output)**2/doutput) = -(expect_to_output - output)
        input_sum: 输入加权和
    返回:
        derror_wrt_dinputs: 误差关于输入的偏导，见式（5.13)
    """
    output = 1.0/(1 + np.exp(- input_sum))
    doutput_wrt_dinput = output * (1 - output)
    derror_wrt_dinput =  derror_wrt_output * doutput_wrt_dinput

    return derror_wrt_dinput


def relu(input_sum):
    """
        函数:
            激活函数ReLU
        输入:
            input_sum: 输入，即神经元的加权和
        返回:
            outputs: 激活后的输出
            input_sum: 把输入缓存起来返回
    """
    output = np.maximum(0, input_sum)
    return output, input_sum
```

```python
def relu_back_propagation(derror_wrt_output, input_sum):
    """
        函数:
            误差关于神经元输入的偏导: dE / dIn = dE/dOut * dOut/dIn
            其中:  dOut/dIn 就是激活函数的导数
                   dE/dOut 误差对神经元输出的偏导
        输入:
            derror_wrt_output: 误差关于神经元输出的偏导
            input_sum: 输入加权和
        返回:
            derror_wrt_dinputs: 误差关于输入的偏导
    """
    derror_wrt_dinputs = np.array(derror_wrt_output, copy=True)
    derror_wrt_dinputs[input_sum <= 0] = 0

    return derror_wrt_dinputs


def tanh(input_sum):
    """
    函数:
        激活函数 tanh
    输入:
        input_sum: 输入, 即神经元的加权和
    返回:
        output: 激活后的输出
        input_sum: 把输入缓存起来返回
    """
    output = np.tanh(input_sum)
    return output, input_sum


def tanh_back_propagation(derror_wrt_output, input_sum):
    """
    函数:
        误差关于神经元输入的偏导: dE / dIn = dE/dOut * dOut/dIn
        其中:  dOut/dIn 就是激活函数的导数 tanh'(x) = 1 - x²
               dE/dOut 误差对神经元输出的偏导
    输入:
        derror_wrt_output: 误差关于神经元输出的偏导: dE/dyⱼ = 1/2(d(expect_to_output - output)**2/doutput) = -(expect_to_output - output)
        input_sum: 输入加权和
    返回:
        derror_wrt_dinputs: 误差关于输入的偏导
    """
    output = np.tanh(input_sum)
    doutput_wrt_dinput = 1 - np.power(output, 2)
    derror_wrt_dinput =  derror_wrt_output * doutput_wrt_dinput

    return derror_wrt_dinput


def activated(activation_choose, input):
    """把正向激活包装一下"""
    if activation_choose == "sigmoid":
        return sigmoid(input)
```

```python
    elif activation_choose == "relu":
        return relu(input)
    elif activation_choose == "tanh":
        return tanh(input)

    return sigmoid(input)

def activated_back_propagation(activation_choose, derror_wrt_output, output):
    """包装反向激活传播"""
    if activation_choose == "sigmoid":
        return sigmoid_back_propagation(derror_wrt_output, output)
    elif activation_choose == "relu":
        return relu_back_propagation(derror_wrt_output, output)
    elif activation_choose == "tanh":
        return tanh_back_propagation(derror_wrt_output, output)

    return sigmoid_back_propagation(derror_wrt_output, output)

class NeuralNetwork:
    def __init__(self, layers_strcuture, print_cost = False):
        self.layers_strcuture = layers_strcuture
        self.layers_num = len(layers_strcuture)

        # 除掉输入层的网络层数，因为其他层才是真正的神经元层
        self.param_layers_num = self.layers_num - 1

        self.learning_rate = 0.0618
        self.num_iterations = 2000
        self.x = None
        self.y = None
        self.w = dict()
        self.b = dict()
        self.costs = []
        self.print_cost = print_cost

        self.init_w_and_b()

    def set_learning_rate(self, learning_rate):
        """设置学习率"""
        self.learning_rate = learning_rate

    def set_num_iterations(self, num_iterations):
        """设置迭代次数"""
        self.num_iterations = num_iterations

    def set_xy(self, input, expected_output):
        """设置神经网络的输入和期望的输出"""
        self.x = input
        self.y = expected_output

    def init_w_and_b(self):
        """
        函数:
            初始化神经网络所有参数
        输入:
            layers_strcuture: 神经网络的结构，例如[2,4,3,1]，4层结构:
```

```python
                第0层输入层接收2个数据，第1层隐藏层4个神经元，第2层隐藏层3个神经元，第3层输出层1个神经元
        返回: 神经网络各层参数的索引表，用来定位权值 wᵢ  和偏置 bᵢ，i为网络层编号
        """
        np.random.seed(3)

        # 当前神经元层的权值为 n_i x n_(i-1)的矩阵，i为网络层编号，n为下标i代表的网络层的节点个数
        # 例如[2,4,3,1]，4层结构：第0层输入层为2，那么第1层隐藏层神经元个数为4
        # 那么第1层的权值w是一个 4x2 的矩阵，如：
        #    w1 = array([ [-0.96927756, -0.59273074],
        #                 [ 0.58227367,  0.45993021],
        #                 [-0.02270222,  0.13577601],
        #                 [-0.07912066, -1.49802751] ])
        # 当前层的偏置一般给0就行，偏置是个1xnᵢ的矩阵，nᵢ为第i层的节点个数，例如第1层为4个节点，那么：
        #    b1 = array([ 0.,  0.,  0.,  0.])

        for l in range(1, self.layers_num):
            self.w["w" + str(l)] = np.random.randn(self.layers_strcuture[l], self.layers_strcuture[l-1])/np.sqrt(self.layers_strcuture[l-1])
            self.b["b" + str(l)] = np.zeros((self.layers_strcuture[l], 1))

        return self.w, self.b

    def layer_activation_forward(self, x, w, b, activation_choose):
        """
        函数：
            网络层的正向传播
        输入：
            x: 当前网络层输入（即上一层的输出），一般是所有训练数据，即输入矩阵
            w: 当前网络层的权值矩阵
            b: 当前网络层的偏置矩阵
            activation_choose: 选择激活函数 "sigmoid", "relu", "tanh"
        返回:
            output: 网络层的激活输出
            cache: 缓存该网络层的信息，供后续使用： (x, w, b, input_sum) -> cache
        """

        # 对输入求加权和，见式（5.1）
        input_sum = np.dot(w, x) + b

        # 对输入加权和进行激活输出
        output, _ = activated(activation_choose, input_sum)

        return output, (x, w, b, input_sum)

    def forward_propagation(self, x):
        """
        函数：
            神经网络的正向传播
        输入：

        返回:
            output: 正向传播完成后的输出层的输出
            caches: 正向传播过程中缓存每一个网络层的信息： (x, w, b, input_sum),... -> caches
        """
        caches = []

```

```python
        #作为输入层，输出 = 输入
        output_prev = x

        #第0层为输入层，只负责观察到输入的数据，并不需要处理，正向传播从第1层开始，一直到输出层输出为止
        # range(1, n) => [1, 2, ..., n-1]
        L = self.param_layers_num
        for l in range(1, L):
            # 当前网络层的输入来自前一层的输出
            input_cur = output_prev
            output_prev, cache = self.layer_activation_forward(input_cur, self.w["w"+str(l)], self.b["b" + str(l)], "tanh")
            caches.append(cache)

        output, cache = self.layer_activation_forward(output_prev, self.w["w" + str(L)], self.b["b" + str(L)], "sigmoid")
        caches.append(cache)

        return output, caches

    def show_caches(self, caches):
        """显示网络层的缓存参数信息"""
        i = 1
        for cache in caches:
            print("%dtd Layer" % i)
            print(" input: %s" % cache[0])
            print(" w: %s" % cache[1])
            print(" b: %s" % cache[2])
            print(" input_sum: %s" % cache[3])
            print("----------")
            i += 1

    def compute_error(self, output):
        """
        函数:
            计算档次迭代的输出总误差
        输入:

        返回:

        """

        m = self.y.shape[1]

        # 计算误差，见式(5.5): E = Σ1/2(期望输出-实际输出)²
        #error = np.sum(0.5 * (self.y - output) ** 2) / m

        # 交叉熵作为误差函数
        error =  -np.sum(np.multiply(np.log(output),self.y) + np.multiply(np.log(1 - output), 1 - self.y)) / m
        error = np.squeeze(error)

        return error

    def layer_activation_backward(self, derror_wrt_output, cache, activation_choose):
        """
            函数:
```

```
                网络层的反向传播
            输入:
                derror_wrt_output: 误差关于输出的偏导
                cache: 网络层的缓存信息 (x, w, b, input_sum)
                activation_choose: 选择激活函数 "sigmoid", "relu", "tanh"
            返回: 梯度信息, 即
                derror_wrt_output_prev: 反向传播到上一层的误差关于输出的梯度
                derror_wrt_dw: 误差关于权值的梯度
                derror_wrt_db: 误差关于偏置的梯度
        """
        input, w, b, input_sum = cache
        output_prev = input     # 上一层的输出 = 当前层的输入; 注意是'输入'不是输入的加权和 (input_sum)
        m = output_prev.shape[1]      # m是输入的样本数量, 我们要取均值, 所以下面的求值要除以m

        # 实现式 (5.13) -> 误差关于权值w的偏导数
        derror_wrt_dinput = activated_back_propagation(activation_choose, derror_wrt_output, input_sum)
        derror_wrt_dw = np.dot(derror_wrt_dinput, output_prev.T) / m

        # 实现式  (5.32) -> 误差关于偏置b的偏导数
        derror_wrt_db = np.sum(derror_wrt_dinput, axis=1, keepdims=True)/m

        # 为反向传播到上一层提供误差传递, 见式 (5.28) 的  (Σδ·w)  部分
        derror_wrt_output_prev = np.dot(w.T, derror_wrt_dinput)

        return derror_wrt_output_prev, derror_wrt_dw, derror_wrt_db

    def back_propagation(self, output, caches):
        """
        函数:
            神经网络的反向传播
        输入:
            output: 神经网络输
            caches: 所有网络层 (输入层不算) 的缓存参数信息  [(x, w, b, input_sum), ...]
        返回:
            grads: 返回当前迭代的梯度信息
        """
        grads = {}
        L = self.param_layers_num #
        output = output.reshape(output.shape)  # 把输出层输出输出重构成和期望输出一样的结构

        expected_output = self.y

        # 见式(5.8)
        #derror_wrt_output = -(expected_output - output)

        # 交叉熵作为误差函数
        derror_wrt_output = - (np.divide(expected_output, output) - np.divide(1 - expected_output, 1 - output))

        # 反向传播: 输出层 -> 隐藏层, 得到梯度: 见式(5.8), (5.13), (5.15)
        current_cache = caches[L - 1] # 取最后一层,即输出层的参数信息
        grads["derror_wrt_output" + str(L)], grads["derror_wrt_dw" + str(L)], grads["derror_wrt_db" + str(L)] = \
            self.layer_activation_backward(derror_wrt_output, current_cache, "sigmoid")
```

```python

        # 反向传播：隐藏层 -> 隐藏层，得到梯度：见式 (5.28)的(Σδ·w)，(5.28)，(5.32)
        for l in reversed(range(L - 1)):
            current_cache = caches[l]
            derror_wrt_output_prev_temp, derror_wrt_dw_temp, derror_wrt_db_temp = \
                self.layer_activation_backward(grads["derror_wrt_output" + str(l + 2)], current_cache, "tanh")

            grads["derror_wrt_output" + str(l + 1)] = derror_wrt_output_prev_temp
            grads["derror_wrt_dw" + str(l + 1)] = derror_wrt_dw_temp
            grads["derror_wrt_db" + str(l + 1)] = derror_wrt_db_temp

        return grads

    def update_w_and_b(self, grads):
        """
        函数:
            根据梯度信息更新w，b
        输入:
            grads：当前迭代的梯度信息
        返回:

        """
        # 权值w和偏置b的更新，见式：(5.16),(5.18)
        for l in range(self.param_layers_num):
            self.w["w" + str(l + 1)] = self.w["w" + str(l + 1)] - self.learning_rate * grads["derror_wrt_dw" + str(l + 1)]
            self.b["b" + str(l + 1)] = self.b["b" + str(l + 1)] - self.learning_rate * grads["derror_wrt_db" + str(l + 1)]

    def training_modle(self):
        """训练神经网络模型"""

        np.random.seed(5)
        for i in range(0, self.num_iterations):
            # 正向传播，得到网络输出，以及每一层的参数信息
            output, caches = self.forward_propagation(self.x)

            # 计算网络输出误差
            cost = self.compute_error(output)

            # 反向传播，得到梯度信息
            grads = self.back_propagation(output, caches)

            # 根据梯度信息，更新权值w和偏置b
            self.update_w_and_b(grads)

            # 当次迭代结束，打印误差信息
            if self.print_cost and i % 1000 == 0:
                print ("Cost after iteration %i: %f" % (i, cost))
            if self.print_cost and i % 1000 == 0:
                self.costs.append(cost)

        # 模型训练完后显示误差曲线
        if False:
            plt.plot(np.squeeze(self.costs))
```

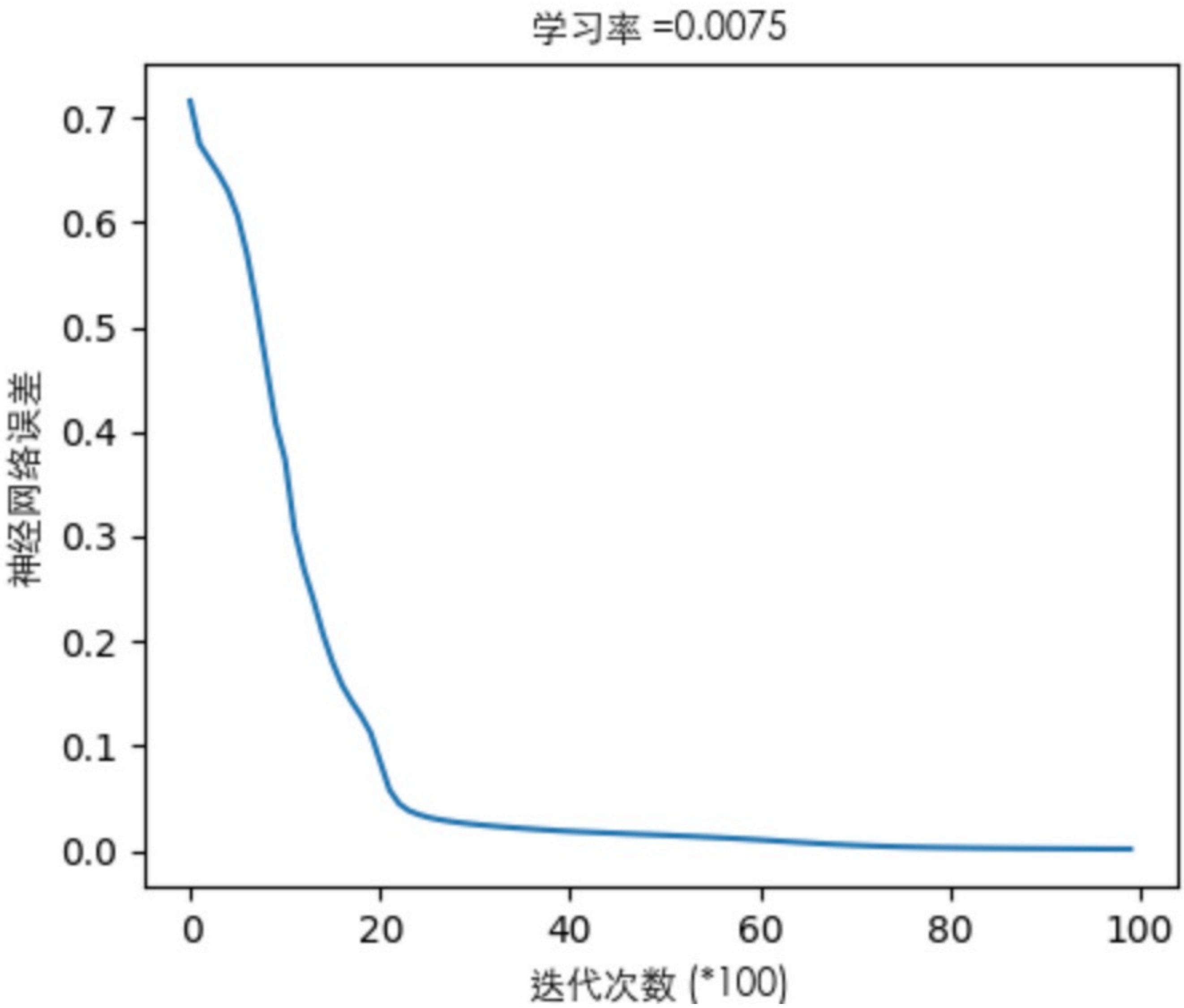
```
            plt.ylabel(u'神经网络误差', fontproperties = font)
            plt.xlabel(u'迭代次数 (*100)', fontproperties = font)
            plt.title(u"学习率 =" + str(self.learning_rate), fontproperties = font)
            plt.show()

        return self.w, self.b

    def predict_by_modle(self, x):
        """使用训练好的模型（即最后求得w, b参数）来决策输入的样本的结果"""
        output, _ = self.forward_propagation(x.T)
        output = output.T
        result = output / np.sum(output, axis=1, keepdims=True)
        return np.argmax(result, axis=1)

def plot_decision_boundary(xy, colors, pred_func):
    # xy是坐标点的集合，把集合的范围算出来
    # 加减0.5相当于扩大画布的范围，不然画出来的图坐标点会落在图的边缘，逼死强迫症患者
    x_min, x_max = xy[:, 0].min() - 0.5, xy[:, 0].max() + 0.5
    y_min, y_max = xy[:, 1].min() - 0.5, xy[:, 1].max() + 0.5

    # 以h为分辨率，生成采样点的网格，就像一张网覆盖所有颜色点
    h = .01
    xx, yy = np.meshgrid(np.arange(x_min, x_max, h), np.arange(y_min, y_max, h))

    # 把网格点集合作为输入到模型，也就是预测这个采样点是什么颜色的点，从而得到一个决策面
    Z = pred_func(np.c_[xx.ravel(), yy.ravel()])
    Z = Z.reshape(xx.shape)

    # 利用等高线，把预测的结果画出来，效果上就是画出红蓝点的分界线
    plt.contourf(xx, yy, Z, cmap=plt.cm.Spectral)

    # 训练用的红蓝点点也画出来
    plt.scatter(xy[:, 0], xy[:, 1], c=colors, marker='o', cmap=plt.cm.Spectral,
edgecolors='black')


if __name__ == "__main__":
    plt.figure(figsize=(16, 32))

    # 用sklearn的数据样本集，产生2种颜色的坐标点，noise是噪声系数，噪声越大，2种颜色的点分布越凌乱
    xy, colors = sklearn.datasets.make_moons(60, noise=1.0)

    # 因为点的颜色是1bit，我们设计一个神经网络，输出层有2个神经元。
    # 标定输出[1,0]为红色点，输出[0,1]为蓝色点
    expect_output = []
    for c in colors:
        if c == 1:
            expect_output.append([0,1])
        else:
            expect_output.append([1,0])

    expect_output = np.array(expect_output).T

    # 设计3层网络，改变隐藏层神经元的个数，观察神经网络分类红蓝点的效果
    hidden_layer_neuron_num_list = [1,2,4,10,20,50]
    for i, hidden_layer_neuron_num in enumerate(hidden_layer_neuron_num_list):
```

```
        plt.subplot(5, 2, i + 1)
        plt.title(u'隐藏层神经元数量: %d' % hidden_layer_neuron_num, fontproperties = font)

        nn = NeuralNetwork([2, hidden_layer_neuron_num, 2], True)

        # 输出和输入层都是2个节点，所以输入和输出的数据集合都要是 nx2的矩阵
        nn.set_xy(xy.T, expect_output)
        nn.set_num_iterations(30000)
        nn.set_learning_rate(0.1)
        w, b = nn.training_modle()
        plot_decision_boundary(xy, colors, nn.predict_by_modle)

    plt.show()

```

2. 晒图晒图！

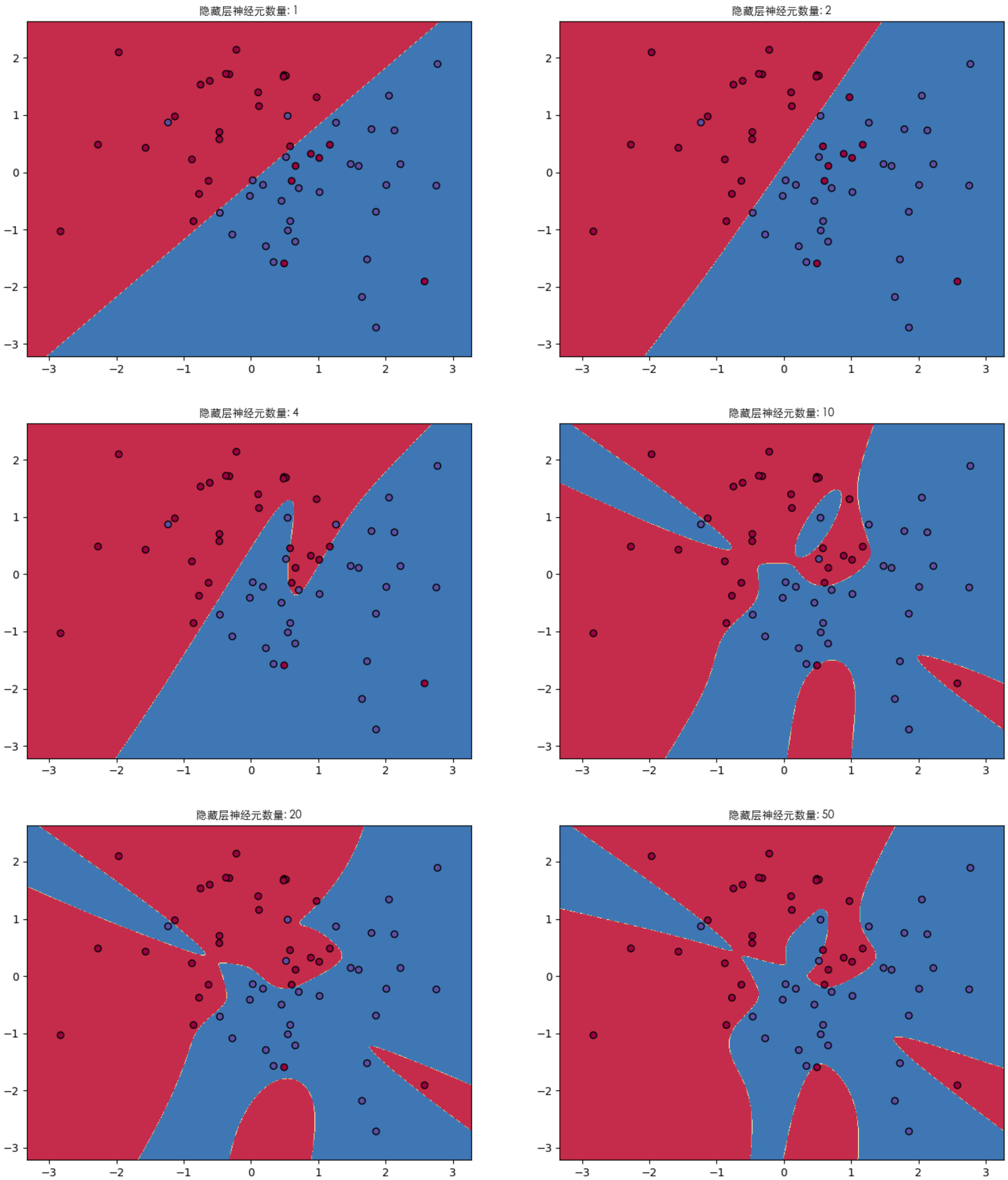
关于误差曲线(这里只举其中一个栗子)：

- 通过看误差曲线，可以从一定程度上判定网络的效果，模型训练是否能收敛，收敛程度如何，都可以从误差曲线对梯度下降的过程能见一二。



3层网络的结构下，隐藏层只有一层，看图说明一下隐藏层神经元个数变化对神经网络表达能力的影响：

- 当隐藏层只有1个神经元：就像文章刚开始说的，一个神经元，就是个线性分类器，表达能力就一条直线而已，见式（3.6）
- 2个神经元：线开始有点弯曲了，但是这次结果一点都不明显，尴尬。但从原理上神经网络开始具备了非线性表达能力
- 随着隐藏层神经元个数不断增加，神经网络表达能力越来越强，分类的效果越来越好。当然也不是神经元越多越好，可以开始考虑深度网络是不是效果更好一些。



7. 没有结局

记住一点，bp神经网络是其他各种神经网络中最简单的一种。只有学会了它，才能以此为基础展开对其他更复杂

的神经网络的学习。
虽然推导了并实现了算法，但是仍然是有很多疑问，这里就作为抛砖引玉吧：

- 神经网络的结构，即几层网络，输入输出怎么设计才最有效？
- 数学理论证明，三层的神经网络就能够以任意精度逼近任何非线性连续函数。那么为什么还需要有深度网络？
- 在不同应用场合下，激活函数怎么选择？
- 学习率怎么怎么选择？
- 训练次数设定多少训练出的模型效果更好？

AI，从入门到放弃，首篇结束。