

# 基于灰色生灭过程的可修部件备件需求预测模型

陈 顶<sup>1,2</sup>, 方志耕<sup>1</sup>, 刘思峰<sup>1</sup>

(1. 南京航空航天大学经济与管理学院, 江苏 南京 211106;

2. 滑铁卢大学工程学院, 加拿大 滑铁卢 N2J 2Z2)

**摘 要:**可修部件的失效率和修复率在服役周期内呈现不确定性,基于确定型失效率和修复率建模的生灭过程,在解决可修部件备件预测问题存在一定局限。以区间灰数表征可修部件的失效率与修复率,构建灰色状态转移矩阵,建立基于灰色生灭过程可修部件备件需求预测模型,研究了基于灰色生灭过程的无记忆性和预测模型稳态解的存在条件,一定程度上揭示了失效率和修复率不确定背景下的可修系统备件需求规律。实际案例研究验证了模型的有效性和实用性。

**关键词:**灰数理论;生灭过程;可修部件;备件需求;蒙特卡罗仿真

**中图分类号:** N 941.5

**文献标志码:** A

**DOI:**10.3969/j.issn.1001-506X.2017.12.12

## Spare parts demand forecasting model of repairable components based on gray birth and death process

CHEN Ding<sup>1,2</sup>, FANG Zhigeng<sup>1</sup>, LIU Sifeng<sup>1</sup>

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics,

Nanjing 211106, China; 2. Management Department, University of Waterloo, Waterloo N2J 2Z2, Canada)

**Abstract:** During the life cycle, the failure rate and repairable rate of repairable parts show uncertain characteristics. The birth and death process based on the determined failure rate and repair rate may not meet the demand forecasting of spare parts. By using interval gray numbers to represent the failure rate and repair rate of repairable parts, the gray state transition matrix is constructed. The spare parts demand forecasting model of repairable components based on gray birth and death process is built. The memoryless and existence conditions of steady solution of the process based on the gray birth and death process are studied. To some extent, the spare parts demand law with the uncertain information of the failure rate and the repair rate is revealed. The practical case study verifies the validity and practicability of the model.

**Keywords:** gray number theory; birth and death process; repairable components; spare parts demand; Monte Carlo simulation

## 0 引 言

可修部件备件需求,预测是设备保障中的重要问题,与一般损耗件不同,可修部件往往是价值较高、维护成本较大的一类部件,合理预测可修部件的备件需求对提高装备可用度、调度维修资源、控制运营成本具有重要意义<sup>[1-2]</sup>。

当前关于可修部件需求量的研究大多针对马尔可夫(Markov process, MAP)系统(即部件的失效与维修都服从指数分布),利用有限状态的生灭过程理论进行系统可用度求解,进而预测备件需求量。文献[3]基于生灭过程研究了

威布尔型可修备件需求量的解析算法,解决了一类服从威布尔分布的可修部件备件预测问题;文献[4]考虑了备件约束的可用度问题,基于生灭过程对多部件串联系统的备件需求进行了研究;文献[5]以定时维修和失效更换相结合的维修策略下的单台航空发动机备件需求为研究对象,基于 MAP 过程拟合了单台发动机的需求过程,根据 MAP 性质确定了多台发动机系统的备件需求规律;文献[6-7]基于 MAP 过程研究了非稳态需求下的备件库存动态变化特性,建立了备件消耗量分布函数的马尔可夫状态转移方程,研究了备件消耗规律;文献[8]基于 MAP 过程研究了考虑备

收稿日期:2017-01-11;修回日期:2017-04-19;网络优先出版日期:2017-10-23。

网络优先出版地址: <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.2422.TN.20171023.0921.014.html>

基金项目:玛丽居里欧盟第 7 框架人才引进计划(FP7-PIIF-GA-2013-629051);国家社科基金重点研究项目(12AZD102);国家自然科学基金(91324003);江苏省自然科学基金(14GLC008);江苏省普通高校研究生科研创新计划项目(KYZZ16\_0144)资助课题

件冗余对系统可用度影响的联合优化问题;文献[9]基于 MAP 过程建立备件配置动态规划模型,以系统的使用可用度为约束条件,以总费用为优化目标,从而确定最佳备件配置数量。以上的研究都较好地解决了不同实际工程背景下的设备保障中的备件需求预测问题。

随着人们对可修复系统认知程度的加深,在研究具有不确定性、复杂性特征的随机过程系统时,以固定失效率 and 修复率为基础构建转移概率矩阵的生灭过程,在处理一类受不确定环境因素(如运行环境、部件损耗、维修工水平等)干扰较大、时间维度上波动特性较为显著的排队系统存在一定的局限性,难以把握实际系统的规律,以此为依据作出的保障决策也很容易出现偏差<sup>[10]</sup>。以民用飞机为例,机队每架飞机的服役环境不同、维修策略不同等实际因素使得其周转件的失效率和修复率难以精确估计,这给周转件的备件需求预测带来较大不确定性,为了满足飞行保障率,航空公司往往按照最悲观的估计进行备件储备,这使得周转件的采购成本和维护成本居高不下<sup>[11]</sup>。以确定型失效率和修复率进行 MAP 建模已经难以描述不确定信息背景下的可修复系统备件需求问题,但目前鲜有以不确定 MAP 过程进行可修系统备件需求预测的研究。关于不确定性 MAP 过程的研究已经屡见不鲜,关于不确定转移概率矩阵的研究最早可以追溯到 1973 年,文献[12]最早进行了转移概率不确定的马尔可夫决策问题研究,结合隐枚举法和贝叶斯准则求解不确定转移概率边界,进而转化为确定型马尔可夫过程进行研究。关于不确定 MAP 过程的研究主要聚焦于不确定性概率转移矩阵的性质研究<sup>[13-17]</sup>,不确定转移矩阵的运算和性质得到拓展,其中文献[16]基于模拟仿真技术对不确定型 MAP 过程进行了研究,这给很多难以解析的 MAP 问题提供了合适的研究思路。文献[18]采用不确定转移矩阵对一类跳变系统进行了研究,研究了其稳态性质。模糊数学和区间数被很多学者用于处理不确定信息背景下的概率转移矩阵研究。文献[19]以模糊数学方法进行了随机模糊 MAP 过程建模,研究了一类存在损耗不确定的生产系统。文献[20]引入傅里叶级数和模糊马尔可夫链方法结合灰色 GM(1,1)模型对小样本时间序列数据进行动态建模。文献[21]采用区间数表征概率转移矩阵,以区间数表征的马尔可夫过程描述网络状态转移过程,研究了计算机网络对抗行动鲁棒性。

失效率和修复率的不确定呈现表征方式有很多,灰数是描述不确定性信息的一种方法,该方法既考虑了区间数的变动范围又考虑了可能性分布不同对区间内各取值的影响,综合了区间数与模糊数的优势,能够更贴切地描述实际问题<sup>[22]</sup>,近年来灰数在不确定信息背景下的预测、决策中得到了广泛的应用<sup>[23-24]</sup>。本文以服从一般分布的区间灰数表征可修复系统的失效率和修复率,构造了灰色概率转移矩阵,构建了基于灰色生灭过程的可修系统备件预测模型,讨论了灰色生灭过程的无记忆性保持和稳态解的存在条件,揭示了部分不确定性信息背景下的可修系统备件需求

规律,为不确定 MAP 条件下的可修部件备件需求预测问题提供了一种新方法。

## 1 灰数及马氏生灭过程基本概念

**定义 1**<sup>[22]</sup> 将只知道取值范围而不知其确切值的数称为灰数,其中既有下界  $\underline{a}$ ,又有上界  $\bar{a}$  的灰数称为服从一般分布的区间灰数,记为  $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$ ,  $\underline{a} < \bar{a}$ 。

**定义 2** 设有随机过程  $I = \{i\}$ ,在任何时刻状态的转移只能从一个状态向其临近状态转移,即状态处于  $n(n \geq 1)$ ,则可以转移到状态  $n+1$  或状态  $n-1$ ;如果处于 0 状态,则只能转移到 1 状态。在  $t$  时刻处于  $n$  状态,在  $(t, t+\Delta t)$  时间间隔内,由状态  $n$  转移到状态  $n+1$  的概率为  $\lambda_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$ ,由状态  $n$  转移到状态  $n-1$  的概率为  $\mu_i(t)\Delta t + o(\Delta t)$ ;在  $(t, t+\Delta t)$  时间间隔内,由状态  $n$  转移到其他状态的概率为  $o(\Delta t)$ ,如图 1 所示。

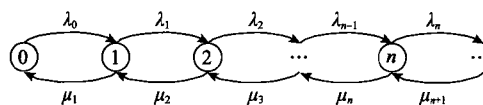


图 1 典型生灭过程

Fig. 1 Classic birth to death process

## 2 基于灰色生灭过程的可修系统备件需求模型构建

### 2.1 模型假设

本文基于灰色马尔可夫生灭过程的可修系统备件需求预测模型建立在以下假设前提:

- (1) 备件在储备过程中性能不劣化;
- (2) 可修系统采用拆换维修策略,且不考虑更换时间;
- (3) 当生产设备出现备件故障立刻停机,不考虑同台设备多个相同部件同时发生故障情况;
- (4) 在服役周期内,故障的可修系统都能经过维修恢复功能;
- (5) 可修系统的保障率仅限于该可修系统的影响,与其他因素无关;
- (6) 维修基站维修能力设定为无限,对任意多个故障的可修系统都能进行同时修复。

本模型参数如下: $\mu_{\otimes}$  为修复率(修复率为服从一般分布的区间灰数); $\lambda_{\otimes}$  为失效率(修复率为服从一般分布的区间灰数); $n$  为生产设备数量; $m$  为单台生产设备装有型号为  $R$  的可修部件数量; $k$  为库存总备件数; $\eta$  为系统保障率; $p_i$  为可修系统处于状态  $i$  的概率。

### 2.2 模型构建

假设某一生产单位有  $n$  台可修生产设备,一台生产设备装有型号为  $R$  的可修部件  $m$  个,当整个机队正常运行时就有  $m \times n$  个可修部件  $R$  同时运行。假设备料中心有该型号备件  $k$  个,单个部件失效率为服从一般分布的区间灰数  $\lambda_{\otimes}$ ,如果可修备件发生故障,若库存中有备件,那么便可以立即更换。本文不考虑更换的时间,故障的可修部件采用

拆换维修, 单个部件修复率表征为服从一般分布的区间灰数  $\mu_{\otimes}$ , 维修后再返回库存继续作为备用件使用。

本文假设可修部件  $R$  发生故障的数量  $i$  表示该随机部件的状态。那么该随机部件一共有  $n+k+1$  个状态, 即  $0, 1, \dots, n+k$ 。部件任意时刻情况由可修部件  $R$  的运行数和库存数所决定。当  $i < k$  时, 库存中有备件可用, 当  $i = k$  时, 库存中的备件则处于消耗完毕状态, 若再有可修件发生故障, 缺件事件发生, 生产设备就会因为缺少备件而停机。该随机部件的状态转移如图2所示。

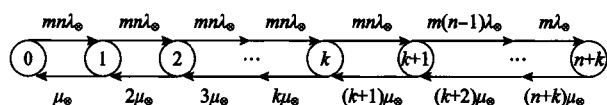


图2 灰色生灭过程

Fig. 2 Gray birth to death process

上述过程可以采用生灭过程进行建模, 对于  $i \in [0, k]$  状态而言, 在单位时间内, 机队失效率为  $mn\lambda_{\otimes}$ ; 对于  $i \in [k+1, n+k]$  状态而言, 机队失效率为  $m(n+k-i)\lambda_{\otimes}$ ; 对于任意状态  $i$  而言, 系统修复率总为  $i\mu_{\otimes}$ 。当整个系统达到稳态时, 有稳态方程

$$p_i = \begin{cases} \frac{(mn)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i p_0, & 0 \leq i \leq k \\ \frac{(mn)^k m^{(i-k)} n!}{i! (n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i p_0, & k+1 \leq i \leq n+k \end{cases} \quad (1)$$

根据全概率公式有

$$\sum_{i=0}^{n+k} p_i = 1 = \left[ \sum_{i=0}^k \frac{(mn)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i + \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(mn)^k m^{(i-k)} n!}{i! (n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \right] p_0 \quad (2)$$

即

$$p_0 = \left[ \sum_{i=0}^k \frac{(mn)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i + \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(mn)^k m^{(i-k)} n!}{i! (n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \right]^{-1} \quad (3)$$

备件数量为  $k$  条件下的系统总体可用度可表示为

$$\sum_{i=0}^k p_i = \sum_{i=0}^k \frac{(mn)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \cdot \left[ \sum_{i=0}^k \frac{(mn)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i + \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(mn)^k m^{(i-k)} n!}{i! (n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \right]^{-1} \quad (4)$$

由此可以求出, 在给定保障率水平  $\eta$  条件下, 可修系统所需要的最少的备件数, 也可以求出给定备件数的保障率, 即

$$k = \min \left\{ \sum_{i=0}^k \frac{(mn)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \left[ \sum_{i=0}^k \frac{(mn)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i + \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(mn)^k m^{(i-k)} n!}{i! (n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \right]^{-1} \geq \eta \right\} \quad (5)$$

失效率与修复率之比是一个不确定的区间范围, 难以获得精确地解析解, 由式(5)计算的保障率也是以一定概率保障的, 观察总体可用度式(5)可以发现, 失效率与修复率之比  $\lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$  成为重要的决策变量。文献[25-27]指出, 许多随机性方法体现了灰思想和灰观念, 而灰色问题在一定条件下也可以从随机性角度去认识、研究和处理。该参量为典型的服从一般分布的区间灰数运算处理, 在此给出一种该参量的处理方式。

令  $\lambda_{\otimes} \in [\underline{a}, \bar{a}]$ ,  $\lambda_{\otimes}$  在区间  $[\underline{a}, \bar{a}]$  上服从于概率密度函数为  $f_{\lambda}(\lambda)$  的任意分布,  $\mu_{\otimes} \in [\underline{b}, \bar{b}]$  在区间  $[\underline{b}, \bar{b}]$  上服从于概率密度函数为  $f_{\mu}(\mu)$  的任意分布, 构造统计量  $Z = \lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$ , 根据联合概率密度相关知识, 可以给出  $\lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$  的累积概率函数为

$$F_z(z) = P\left(\frac{\lambda}{\mu} \leq z\right) = P(\lambda \leq z\mu) = \int_{\underline{b}}^{\bar{b}} \int_{\underline{a}}^{\bar{a}} f_{\lambda}(\lambda) \cdot f_{\mu}(\mu) d\lambda d\mu \quad (6)$$

$$f_z(z) = \frac{\partial F_z(z)}{\partial z} \quad (7)$$

关于  $\lambda_{\otimes}$ 、 $\mu_{\otimes}$  服从常见分布的  $Z = \lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$  处理已经较为常见, 这里给出  $\lambda_{\otimes}$ 、 $\mu_{\otimes}$  服从均匀分布的一个推导过程。令  $\lambda_{\otimes} \sim U[\underline{a}, \bar{a}]$ ,  $\mu_{\otimes} \sim U[\underline{b}, \bar{b}]$ ,  $Z = \lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$ ,

$$F_z(z) = P\left(\frac{\lambda}{\mu} \leq z\right) = P(\lambda \leq z\mu) =$$

$$\int_{\underline{a}}^{\bar{a}} \int_{\underline{b}}^{\bar{b}} \frac{1}{\bar{a}-\underline{a}} \cdot \frac{1}{\bar{b}-\underline{b}} d\lambda d\mu = \left(\frac{1}{\bar{a}-\underline{a}} \cdot \frac{1}{\bar{b}-\underline{b}}\right) \left[ \left(\frac{z}{2} \cdot \bar{b}^2 - \underline{a}\bar{b}\right) - \left(\frac{z}{2} \cdot \underline{b}^2 - \underline{a}\underline{b}\right) \right] = \frac{\bar{b}+\underline{b}}{2(\bar{a}-\underline{a})} \cdot z - \frac{\underline{a}}{\bar{a}-\underline{a}} \quad (8)$$

其概率密度函数为

$$f_z(z) = \frac{\partial F_z(z)}{\partial z} = \frac{\bar{b}+\underline{b}}{2(\bar{a}-\underline{a})} \quad (9)$$

对于部分难以计算的联合分布, 可以采用蒙特卡罗技术进行随机数模拟, 进而实现相关信息的表征和处理。本文主要采用马尔可夫链蒙特卡罗方法, 以 Metropolis 算法进行联合分布的模拟。该算法核心步骤如下:

**步骤1** 设定目标概率密度函数  $f_z(z)$ , 建议概率密度函数  $g$  和接受准则(概率函数)  $h(x, y)$ ;

**步骤2** 按照均匀分布生成随机数  $r$ , 如  $r < h(x, y)$  则接受该随机数, 否则放弃。

### 2.3 模型性质讨论

生灭过程稳态解的存在需要满足一定要求, 寻找稳态解存在条件是灰色生灭过程建模的重要问题, 本部分给出了灰色生灭过程仍然满足无记忆性和生灭过程成立条件的两个定理及证明。

**定理1** 无记忆性定理。根据灰数运算规则与指数分布特性, 参数为灰数的指数分布  $E(\lambda_{\otimes})$  仍然具有无记忆性。

证明 令  $T \sim E(\lambda_{\otimes})$ , 对  $\forall s, t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} P(T > s+t | T > t) &= \\ P(T > s+t, T > t) / P(T > t) &= \\ P(T > s+t) / P(T > t) &= \\ [1 - P(T \leq s+t)] / [1 - P(T \leq t)] &= \\ [1 - F(s+t)] / [1 - F(t)] &= \\ e^{\lambda_{\otimes}(s+t)} / e^{\lambda_{\otimes}t} &= e^{\lambda_{\otimes}s} \end{aligned} \quad (10)$$

而  $P(T > s) = 1 - P(T \leq s) = 1 - F(s) = e^{-\lambda_{\otimes}s}$ , 故  $P(T > s+t | T > t) = P(T > s)$ , 参数为灰数的指数分布仍然满足无记忆性。证毕

**定理 2** 稳态解存在定理。对于失效率为  $\lambda_{\otimes}$ , 修复率为  $\mu_{\otimes}$  (修复能力无限), 生产设备数量为  $n$ , 单台装机量为  $m$  个的可修复生产系统, 灰色生灭过程稳态解的存在条件为  $\lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes} < 1/me$ 。

证明 一般生灭过程稳态解需满足

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} &< \infty \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} &= \\ \sum_{i=0}^k \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i + \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{i!(n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i &< \\ \sum_{i=0}^{n+k} \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \end{aligned} \quad (11)$$

采用斯特林公式对  $\sum_{i=0}^{n+k} \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i$  进行展开有

$$\sum_{i=0}^{n+k} \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i = \sum_{i=0}^{n+k} \frac{(nm)^i}{\sqrt{2\pi i} \left(\frac{n}{e}\right)^i} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \quad (12)$$

确保该式收敛, 则  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{i-1}{i}} me \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right) < 1$ , 即  $\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}} < \frac{1}{me}$ 。

证毕

需要说明, 采用放缩法得出的判据是一个严格判据, 可基于灰数运算规则, 采用灰核进行直接运算, 便于快速判定、建模, 同样可以根据计算机仿真进行级比检验, 获得更为精确的建模边界。

本文还研究了备件数量一定情况下,  $\lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$  变动对保障率水平单调性影响, 给出了相关证明。

**定理 3** 备件数量不变, 保障率水平是  $\lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$  上的单调减函数, 即失效修复率之比越高, 相同备件数量水平下保障率越低。

证明 根据式(5)有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)} &= \frac{\sum_{i=0}^{k-1} \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \cdot \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{i!(n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i}{\left[ \sum_{i=0}^k \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i + \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{i!(n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \right]^2} - \\ &\quad \frac{\sum_{i=0}^k \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \cdot \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{(i-1)!(n+k-i-1)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^{i-1}}{\left[ \sum_{i=0}^k \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i + \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{i!(n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \right]^2} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\sum_{i=0}^k \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i + \frac{(nm)^k}{k!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^k \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{(i-1)!(n+k-i-1)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^{i-1} &= \\ \frac{\mu_{\otimes}}{\lambda_{\otimes}} \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{(i-1)!(n+k-i-1)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i & \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{(i-1)!(n+k-i-1)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i > \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{i!(n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \quad (16)$$

根据定理 2 有  $\frac{\mu_{\otimes}}{\lambda_{\otimes}} > 1$ , 故

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{\otimes}}{\lambda_{\otimes}} \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{(i-1)!(n+k-i-1)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i &> \\ \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{i!(n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i & \end{aligned}$$

比较式(14)右部分子, 易知

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \cdot \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{i!(n+k-i)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i - \\ \sum_{i=0}^k \frac{(nm)^i}{i!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^i \cdot \sum_{i=k+1}^{n+k} \frac{(nm)^k m^{(i-k)} n!}{(i-1)!(n+k-i-1)!} \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)^{i-1} < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

故

$$\frac{\partial \eta}{\partial \left(\frac{\lambda_{\otimes}}{\mu_{\otimes}}\right)} < 0$$

证毕

## 2.4 模型建模步骤

基于灰色生灭过程的可修系统备件需求预测模型建模步骤如下:

**步骤 1** 基于系统参数(失效率  $\lambda_{\otimes}$ 、修复率  $\mu_{\otimes}$  等), 进行失效修复比率检验, 验证是否满足灰色生灭过程建模条件;

**步骤 2** 基于失效率和修复率分布信息构造统计量  $Z = \lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$ , 计算决策变量分布函数;

**步骤 3** 基于实际可修系统设置模型参数, 构建基于灰色生灭过程的预测模型;

**步骤 4** 基于蒙特卡罗仿真生成成分布函数的大样本随机数, 进行数值模拟;

**步骤 5** 对仿真结果进行分类统计, 获得不同保障率水平下的备件期望数量, 以及相应备件数量下的保障概率。

## 3 案例分析

本文对某航空公司机队的 A319 飞机的前主动轮运行保障数据进行研究, 具体参数如表 1 所示。

表 1 某 A319 机队前主动轮保障数据  
Table 1 Main wheel maintenance data of A 319 fleet

变量	数值
失效率/h <sup>-1</sup>	[0.000 25, 0.001]
修复率/h <sup>-1</sup>	[0.004, 0.015]
机队规模/架	26
装机数量	1
基准保障率/%	95

(1) 首先进行灰色生灭过程稳态解是否存在检验,  $\lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes} < 1/e$ , 符合建模条件。

(2) 按照均匀分布构造统计量  $Z = \lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$ , 计算分布。采用蒙特卡罗方法对  $\lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$  进行随机数生成模拟(模拟次数 1 000 次), 模拟结果如图 3 所示。

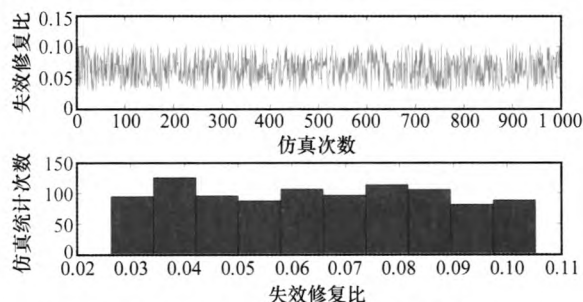


图 3 基于蒙特卡罗仿真的  $\lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$  随机数模拟(1 000 次)

Fig. 3 Random number simulation based on Monte Carlo simulation (1 000 times)

(3) 将参数代入式(3)~式(5)进行仿真计算, 依次计算不同备件水平下的稳态概率, 迭代计算不同保障率水平下的备件数量, 采用箱型图进行备件数量统计, 如图 4 所示。

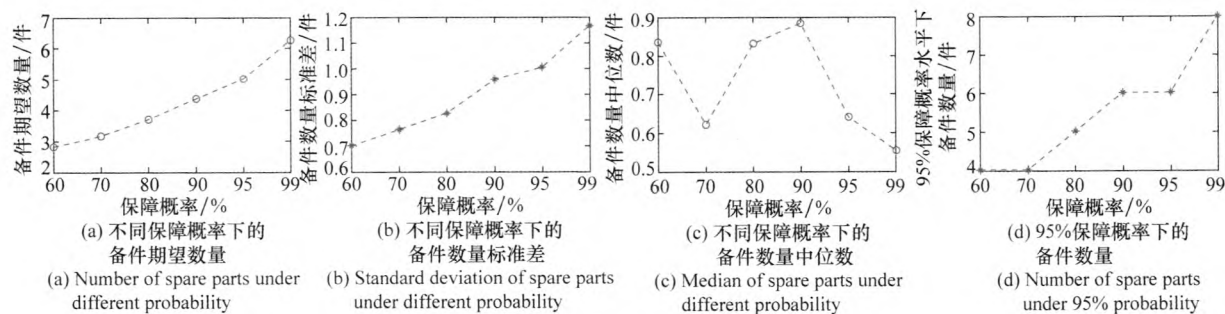


图 5 备件保障分析

Fig. 5 Analysis of spare parts maintenance

备件期望数量显示, 随着保障度要求提高, 备件期望数量增加; 备件数量标准差分析显示, 随着保障度要求提高, 备件数量标准差呈现递增趋势, 这表明在较高保障度要求下, 失效/修复率的不确定对保障度的干扰增强, 备件数量的决策不确定性增加; 中位数保障概率分析显示, 中位数水平下的保障概率波动较大, 按照这一概率进行保障难以满足实际需求; 以 95% 概率保障备件以 95% 的保障水平时, 系统的备件数量为 6。

为了进一步比较失效修复比大小对备件数量和保障率的影响, 将 1 000 次随机仿真按照升序排列, 每 200 次仿真取均值生成保障率曲线进行敏感性分析, 如图 6 所示。备件数量和保障水平曲线显示, 相同备件保障数量, 备件保障水平越高是  $\lambda_{\otimes}/\mu_{\otimes}$  上的单调递减函数, 这一点与定理 3 吻合。初始阶段备件数量变动对总体保障率水平改善效果越明显, 这表明对于失效率越高、修复率越低的部件, 增加备件的改善效果越显著。随着备件数量的增加, 备件对保障水平的改善存在边际效应递减现象, 这表明无限制提高备

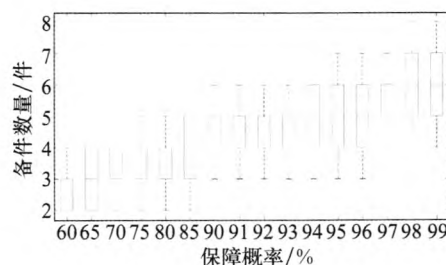


图 4 不同保障率水平下的备件数量箱型图

Fig. 4 Number of spare parts under different service levels

如图 4 所示, 随着保障率要求提高, 总体备件量也在提高, 这说明提高备件数量有助于提高生产单元综合保障率。其中在保障率水平为 95% 时, 5 个部件可以较大程度满足需求。根据箱型图备件数量分布, 随着保障率水平提升, 上下边缘区间长度呈现变长趋势, 备件数量分布越分散, 说明保障率水平要求越高, 备件决策数量受失效率和修复率的不确定性干扰越大。为了进一步比较这一现象, 进行“60%”“70%”“80%”“90%”“95%”“99%”共 6 个保障水平下的备件期望数量分析、备件数量标准差分析、中位数保障概率分析、95% 概率保障备件数量分析, 结果如图 5 所示。

件水平对改善保障度意义不大, 合理决策备件数量才能实现最佳性本比。

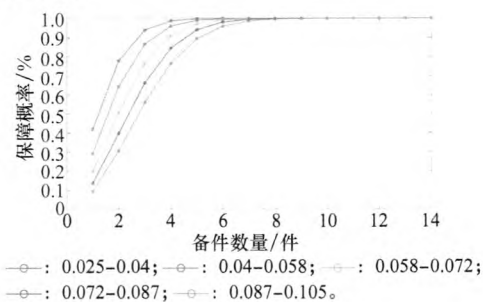


图 6 保障率水平敏感性分析

Fig. 6 Sensitive analysis of service level

## 4 结 论

本文将灰数应用于生灭过程的转移概率矩阵建模, 研究了失效率与修复率不确定背景下的灰色生灭过程, 以该

过程为基础构建了可修系统备件需求预测模型,给出了一类服从一般分布的失效率和修复率的数理构造方法,基于可用度构建了基于灰色生灭过程的可修部件备件需求预测模型,以蒙特卡罗仿真技术设计了求解框架。在模型性质讨论部分,主要验证了灰色生灭过程的无记忆性,讨论了灰色生灭过程稳态解的存在条件,并给出了一个快速判据,研究其失效修复比对保障率的单调性影响。通过实例分析,分析了保障率水平和失效修复比的关系,研究发现:保障率水平要求越高,备件决策数量受失效率和修复率的不确定性干扰越大;随着备件数量的增加,备件对保障水平的改善存在边际效应递减现象。

### 参考文献:

- [1] WANG W. A stochastic model for joint spare parts inventory and planned maintenance optimization[J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 216(1): 127-139.
- [2] 王乃超, 康锐. 备件需求产生、传播及解析算法研究[J]. *航空学报*, 2008, 29(5): 1163-1167.  
WANG N C, KANG R. Research on spare demand generation transfer and analytical algorithm[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2008, 29(5): 1163-1167.
- [3] 刘天华, 张志华, 梁胜杰, 等. 威布尔型可修备件需求量的解析算法研究[J]. *系统工程与电子技术*, 2012, 34(5): 966-972.  
LIU T H, ZHANG Z H, LIANG S J, et al. Analytical algorithm of spare demand for Weibull-type repairable system[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2012, 34(5): 966-972.
- [4] 王蕴, 王乃超, 马麟, 等. 考虑备件约束的多部件串联系统使用可用度计算方法[J]. *航空学报*, 2015, 36(4): 1195-1201.  
WANG Y, WANG N C, MA L, et al. Operational availability calculation methods of various series systems under the constraint of spare parts[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2015, 36(4): 1195-1201.
- [5] 郭波, 陈童, 黄卓, 等. 航空发动机组合维修策略的备件需求规律[J]. *系统工程理论与实践*, 2010, 30(5): 769-777.  
GUO B, CHEN T, HUANG Z, et al. Spare parts demand law of aviation engine with combination maintenance policy[J]. *System Engineering-Theory & Practice*, 2010, 30(5): 769-777.
- [6] LI L, LIU M, SHEN W, et al. An improved stochastic programming model for supply chain planning of MRO spare parts[J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2017, 47: 189-207.
- [7] BEHFARD S, VAN DER HEIJDEN M C, AL HANBALI A, et al. Last time buy and repair decisions for spare parts[J]. *European Journal of Operational Research*, 2015, 244(2): 498-510.
- [8] SLEPTCHENKO A, VAN DER HEIJDEN M. Joint optimization of redundancy level and spare part inventories[J]. *Reliability Engineering & System Safety*, 2016, 153: 64-74.
- [9] 刘基良, 赵丹. 基于可用度的装备售后保障系统控制策略研究[J]. *数学的实践与认识*, 2016, 46(3): 214-220.  
LIU J L, ZHAO D. Control policies on after-sale equipment support system based on availability[J]. *Mathematics in Practice and Theory*, 2016, 46(3): 214-220.
- [10] 袁泉, 何志庆. 一类区间矩阵特征值界的性质[J]. *华东理工大学报(自然科学版)*, 2008, 34(6): 917-936.  
YUAN Q, HE Z Q. Property of the eigenvalue bounds of a class of interval matrices[J]. *Journal of East China University of Science and Technology (Natural Science Edition)*, 2008, 34(6): 917-936.
- [11] 孙蕾. 民用飞机多级库存配置方法与管理研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2013.  
SUN L. Research on multi-echelon inventory allocation method and management for civil aircraft[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2013.
- [12] SATIA J K, JR R E L. Markovian decision processes with uncertain transition probabilities[J]. *Operation Research*, 1973, 21(3): 728-740.
- [13] NILIM A, GHAOU L E. Robust control of Markov decision processes with uncertain transition matrices[J]. *Operations Research*, 2012, 53(5): 780-798.
- [14] KAO Y G, XIE J, WANG C H. Stabilization of singular Markovian jump systems with generally uncertain transition rates[J]. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 2014, 59(9): 2604-2610.
- [15] LI X, LAM J, GAO H, et al.  $H_\infty$  and  $H_2$  filtering for linear systems with uncertain Markov transitions[J]. *Automatica*, 2016, 67(C): 252-266.
- [16] BORTOLUSSI L, MILIOS D, SANGUINETTI G. Smoothed model checking for uncertain continuous-time Markov chains[J]. *Information and Computation*, 2016, 247: 235-253.
- [17] LI S, XIANG Z, LIN H, et al. State estimation on positive Markovian jump systems with time-varying delay and uncertain transition probabilities[J]. *Information Sciences*, 2016, 369(C): 251-266.
- [18] WAN X, XU L, FANG H, et al. Robust non-fragile  $H_\infty$  state estimation for discrete-time genetic regulatory networks with Markov jump delays and uncertain transition probabilities[J]. *Neurocomputing*, 2015, 154(C): 162-173.
- [19] 张超. 随机模糊过程及其在损耗生产系统中的应用[D]. 天津: 天津大学, 2006.  
ZHANG C. Random fuzzy processes and the application to deteriorating production system[D]. Tianjin: Tianjin University, 2006.
- [20] 曾书宇, 林名驰, 谢力. 基于傅里叶级数和模糊马尔可夫链的小样本时间序列建模方法[J]. *统计与决策*, 2015, 31(6): 24-27.  
ZI S Y, LIN M C, XIE L. Small sample time series modeling method based on Fourier series and fuzzy Markov chain[J]. *Statistics and Decision*, 2015, 31(6): 24-27.
- [21] 王长春, 汤锦辉, 朱永文, 等. 不完全信息条件下计算机网络对抗行动鲁棒博弈模型[J]. *系统工程理论与实践*, 2015, 35(2): 481-492.  
WANG C C, TANG J H, CHENG X H. Robust game model of computer network operation with incomplete information[J]. *System Engineering-Theory & Practice*, 2015, 35(2): 481-492.
- [22] 刘思峰, 方志耕, 谢乃明. 基于核和灰度的服从一般分布的区间灰数运算法则[J]. *系统工程与电子技术*, 2010, 32(2): 313-316.  
LIU S F, FANG Z G, XIE N M. Algorithm rules of interval grey numbers based on the "Kernel" and the degree of greyness of grey numbers[J]. *Systems Engineering and Electronics*,

- 2010, 32(2): 313 - 316.
- [23] 郭晓君, 刘思峰, 方志耕. 基于合成灰数灰度的区间灰数自忆性预测模型[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(6): 1124 - 1129.  
GUO X J, LIU S F, FANG Z G. Self-memory prediction mode of interval grey number based on grey degree of compound grey number[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(6): 1124 - 1129.
- [24] 杨锦伟, 肖新平, 郭金海. 正态分布服从一般分布的区间灰数灰色预测模型[J]. 控制与决策, 2015, 30(9): 1711 - 1716.  
YANG J W, XIAO X P, GUO J H. Gray prediction model of normal distribution interval number[J]. Control and Decision, 2015, 30(9): 1711 - 1716.
- [25] 韩盛, 李书杰, 陈宗海. 不确定性知识表达的新方法——灰概率测度集[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(5): 1018 - 1022.  
HAN S, LI S J, CHEN Z H. New representation method for uncertain knowledge-grey probability measure set[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(5): 1018 - 1022.
- [26] 寇进忠. 随机性方法与灰色性方法的互补问题[J]. 系统科学学报, 1998, 6(2): 81 - 82.
- KOU J Z. Complementarity problem of random method and gray method[J]. Journal of System Dialectics, 1998, 6(2): 81 - 83.
- [27] 肖柳青, 周世鹏. 随机模拟方法与应用[M]. 北京: 北京大学出版社, 2014: 117 - 124.  
XIAO L Q, ZHOU S P. Stochastic simulation methods and its applications[M]. Beijing: Beijing University Press, 2014: 117 - 124.

## 作者简介:

陈 顶(1990 -), 男, 博士研究生, 主要研究方向为复杂装备研制管理、随机过程。

E-mail: 15151875620@163.com

方志耕(1962 -), 男, 教授, 博士研究生导师, 博士, 主要研究方向为灰色系统理论、复杂装备研制管理。

E-mail: zhigengfang@163.com

刘思峰(1955 -), 男, 教授, 博士研究生导师, 博士, 主要研究方向为灰色系统理论、系统分析方法与模型。

E-mail: sfliu@nuaa.edu.cn